

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ İRİSLİ PARALEL LEVHALI DALGA  
KILAVUZUNUN SONLU ELEMANLAR  
METODU KULLANILARAK İNCELENMESİ

EMRAH UĞURLU  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE

2007

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ İRİSLİ PARALEL LEVHALI DALGA  
KILAVUZUNUN SONLU ELEMANLAR  
METODU KULLANILARAK İNCELENMESİ

EMRAH UĞURLU  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE

2007

TEZ DANIŞMANI  
DOÇ.DR. A. ARİF ERGİN



**GEBZE YÜKSEK  
TEKNOLOJİ  
ENSTİTÜSÜ**

## YÜKSEK LİSANS/DOKTORA JÜRİ ONAY FORMU

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri/Sosyal Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ...../..... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından ...../...../..... tarihinde tez savunma sınavı yapılan Emrah UĞURLU'nun tez çalışması ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

### JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) :

ÜYE :

ÜYE :

ÜYE :

ÜYE :

### ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri/Sosyal Bilimler Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

## ÖZET

**TEZ BAŞLIĞI: İki İrisli Paralel Levhalı Dalga Kılavuzunun**

**Sonlu Elemanlar Metodu Kullanılarak İncelenmesi**

**YAZAR ADI : Emrah UĞURLU**

Bu çalışmada iki irisli paralel levhalı dalga kılavuzunun farklı frekanslardaki iletim ve yansımaya katsayıları incelenmiştir. İlk aşamada Sonlu Elemanlar Metodu'nun (Finite Element Method) işlem basamakları anlatılmış ve bir örnek problem üzerinde çözüm aşamaları açıklanmış ve yazılan MATLAB kodlarıyla problemin çözümü gerçekleştirilmiştir. Örnek problem olarak paralel levhalı dalga kılavuzundaki bir dielektrik çubuğun yüksekliğine ve frekansa bağlı yansımaya katsayısı ve iletim katsayısı elde edilmiş ve dalgaboyu cinsinden yüksekliğine göre değişimi grafiksel olarak gösterilmiştir. Daha sonra, anlatılan basamaklar, iki irisli paralel levhalı dalga kılavuzu probleminin çözümünde adım adım uygulanmış ve yazılan MATLAB kodlarıyla yansımaya ve iletim katsayılarının, dalga kılavuzu parametrelerine bağlı değişimleri elde edilmiş ve sonuçlar grafiksel olarak gösterilerek değerlendirilmiştir.

## **SUMMARY**

**TITLE OF THE THESIS: The Analysis Of Parallel Plate Waveguide With Two  
Iris In The Middle Using Finite Element Method.**

**AUTHOR : Emrah UĞURLU**

In this thesis, the reflection and transmission coefficients are obtained in a parallel plate waveguide problem with two irises in the middle. Firstly, the steps of the Finite Element Method are explained and applied on a sample problem and results are obtained using MATLAB codes written for this purpose. The sample problem is obtaining the reflection and transmission coefficients in case of a dielectric slab in a parallel plate waveguide. The results depending on the height of the slab and frequency are shown graphically. Then, the FEM solution is performed step by step in the case of a parallel plate waveguide with two irises in the middle. Using the MATLAB codes developed, the reflection and transmission coefficients are obtained, and the results are analyzed and shown graphically.

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmamdaki katkılarından dolayı, bu konuda çalışma olanağı veren ve desteğini hep hissettiğim, değerli zamanını benden esirgemeyen tez danışmanım sayın Doç. Dr. A.Arif ERGİN'e (GYTE M.F.), maddi manevi katkılarıyla bu tezin yazılabilmesini sağlayan kardeşim Emre UĞURLU'ya ve tabii ki tüm tez çalışmam sırasında sabır gösteren ve fedakarlıkta bulunan eşim Kevser Ayça UĞURLU'ya ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<b><u>Sayfa</u></b>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1.GİRİŞ	1
2.SONLU ELEMANLAR METODU	6
2.1. Sonlu Elemanlar Metoduna Giriş	6
2.1.1.Sınır Değer Problemler	6
2.1.2.Galerkin Yaklaşımı	7
2.1.3.Ritz Yaklaşımı	9
2.2.Sonlu Elemanlar Metodunun Basamakları	13
2.2.1.Çözüm Uzayının Ayrıklaştırılması Elementlerin Oluşturulması	14
2.2.2.Baz Fonksiyonlarının Seçilmesi	15
2.2.3.Denklem Sisteminin Oluşturulması	16
2.2.4. .Denklem Sisteminin Çözülmesi	18

2.3.İki Boyutlu Sınır Değer Problemlerde Sonlu Elemanlar Metodu	18
2.3.1.Çözüm Uzayının Ayrıklaştırılması	20
2.3.2.Baz Fonksiyonlarının Yazılması	22
2.3.3.Galerkin Metoduyla Formülasyon	24
2.3.4. .Denkleminin Çözülmesi	28
3. SONLU ELEMANLAR METODUNUN 2B UYGULAMALARI	29
3.1.Paralel Levhalı Dalga Kılavuzunun Mod Analizi	29
3.2.Paralel Levhalı Dalga Kılavuzundaki Süreksizlik Problemi	36
4. İKİ İRİSLİ PARALEL LEVHALI DALGA KILAVUZU PROBLEMİ	42
4.1.Problemin Tanımı	42
4.2.Çözüm Uzayının Oluşturulması ve Ayrıklaştırılması	43
4.2.1. Çözüm Uzayının Oluşturulması	43
4.2.2.Düğüm Noktalarının Oluşturulması	44
4.2.3.Üçgensel Elemanların Oluşturulması	45
4.3.Parametre Değişimlerine Göre Frekans Bağımlılığı	46
4.3.1. "w" Değişimi	46
4.3.2. "h" Değişimi	48
4.3.2.1."h <sub>1</sub> " Değişimi	51
4.3.2.2."h <sub>2</sub> " Değişimi	52
4.3.3."ε <sub>r</sub> " Değişimi	53
4.3.4."d" Değişimi	55



	ix
5. SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	59

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

FEM	Finite Element Method
TE	Transverse Electric
TM	Transverse Magnetic
TEM	Transverse Electromagnetic
DE	Differential Equations
IE	Integral Equations
TDDE	Time Domain Differential Equations
TDIE	Time Domain Integral Equations
FDDE	Frequency Domain Differential Equations
FDIE	Frequency Domain Integral Equations
PDE	Partial Differential Equations
2B	İki Boyutlu
3B	Üç Boyutlu

$\mu$	Manyetik Geçirgenlik Sabiti
$\epsilon$	Elektriksel Geçirgenlik Sabiti
$\epsilon_r$	Bağıl Elektriksel Geçirgenlik Sabiti
$\lambda$	Dalgaboyu
$\omega$	Açısal Hız
$\sigma$	İletkenlik

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b><u>Şekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
2.1. 2B için sınır değer problemin geometrisi	19
2.2. Üçgensel elemanlarda yerel numaralandırma	22
2.3. Üçgen için baz fonksiyonları	24
2.4. Sınırdaki elemanlar ve düğüm noktaları	27
3.1. Paralel levhalı dalga kılavuzu	29
3.2. Paralel levhalı dalga kılavuzu içindeki bir süreksizlik	36
3.3. Paralel levhalı dalga kılavuzu içindeki bir dielektrik çubuk	39
3.4. Yansıma katsayısının değişimi	40
3.5. İletim katsayısının değişimi	40
4.1. Ortasında iki iris bulunan dalga kılavuzunun parametreleri	41
4.2. Çözüm uzayı	42
4.3. Detaylı iris görünümü	43
4.4. Düğüm noktaları	43
4.5. Üçgensel elemanlar	44
4.6. Farklı $w$ değerleri için $ R $ değişimi	46
4.7. Farklı $w$ değerleri için $ T $ değişimi	47
4.8. Farklı $h$ değerleri için $ R $ değişimi	49

4.9. Farklı $h$ değerleri için $ T $ değişimi	50
4.10. İletimin olduğu $h$ değerleri için $ T $ değişimi	50
4.11. Farklı $h_1$ değerleri için $ R $ değişimi	52
4.12. Farklı $h_2$ değerleri için $ R $ değişimi	53
4.13. Farklı $\epsilon_r$ değerleri için $ R $ değişimi	54
4.14. Farklı $\epsilon_r$ değerleri için $ T $ değişimi	54
4.15. Farklı $d$ değerleri için $ R $ değişimi	56
4.16. Farklı $d$ değerleri için $ T $ değişimi	56

# 1. GİRİŞ

Sayısal Elektromanyetik konusunda geçtiğimiz yıllarda büyük ilerleme kaydedilmiştir. Bu alandaki yöntemler genelde matematiksel formülasyona bağlı olarak iki ana başlık altında incelenebilir: a) Diferansiyel denklem (DE) temelli yöntemler b) İntegral denklem (IE) temelli yöntemler. Bu sınıflandırma dört seçenek oluşturmuştur. Bunlar, Zaman Uzayında Diferansiyel Denklem (TDDE) temelli çözümler, Zaman Uzayında İntegral Denklem (TDIE) temelli çözümler, Frekans Uzayında İntegral Denklem (FDIE) temelli çözümler, Frekans Uzayında Diferansiyel Denklem (FDDE) temelli çözümlerdir.

Maxwell'in rotasyonel denklemleri ilk olarak zaman uzayında ortaya çıkmış olsa da, son yıllara kadar Elektromanyetik araştırmalar, zamanda harmonik durum kabul edilerek frekans uzayında gerçekleşmiştir. Bunun başlıca nedenleri, mevcut olan deneysel donanımın frekans uzayı düşünülerek üretilmiş olması ve çözüm uzayından zaman parametresinin çıkarılmasıyla çözümlerin daha kolay elde edilebilir olmasıdır. 1960'larda ilk olarak ortaya çıktığından bu yana, Sayısal Elektromanyetik ve zaman ile frekans uzayında sayısal temelli çözümler giderek büyük önem kazanmaktadır.

Bazı problemlerde, Kısmi Diferansiyel Denklemlerin (Partial Differential Equations, PDE) analitik çözümlerini elde etmek mümkün olabilir. Fakat bu, basit denklemler ve basit geometriler için geçerlidir. Pratikte karşılaşılan problemlerde ise sayısal çözümlere başvurmak gerekmektedir. Örnek olarak, iki irisli paralel levhalı dalga kılavuzu, genellikle susturucu, sönümleyici ve uyumlaştırıcı amaçlarıyla kullanılabilen önemli bir yapıdır. Bu yapıyla belirli frekansların sönümlenmeden geçmesi, bu frekansların haricindeki frekansların ise sönümlenmesi sağlanır. İrisler arası mesafe, iris genişlikleri, dalga kılavuzunun yüksekliği ve irisler arası ortamın dielektrik sabiti değiştirilerek, rezonans frekansı, rezonans derinliği ve rezonans genişliği ayarlanabilir. Dalga

kılavuzunun istenen özellikleri sağlayabilecek şekilde tasarlanması açısından parametrik incelemesi önem taşımaktadır. Bununla beraber çözümün analitik olarak yapılması zordur. Bu nedenle alan değerlerinin sayısal yöntemlerle bulunması gerekmektedir. Çözüm için geliştirilmiş birkaç metot vardır. Genel olarak Diferansiyel denklem temelli çözümler ve İntegral denklem temelli çözümler olmak üzere iki gruba ayrılırlar. Hangi metot ve çözüm tekniği kullanılacağını belirleyen pek çok kriter vardır. En temel kriterler, problemin karmaşıklığı ve depolamak için gerekli hafıza miktarıdır.

Diferansiyel denklem temelli çözümlerde oluşan katsayılar matrisi büyük ve seyrek yapıdadır. İntegral denklem temelli çözümlerde ise küçük ve yoğun matrisle karşılaşılmaktadır. Diferansiyel denklem temelli çözümler homojen, homojen olmayan ve anisotropik durumlarda basitçe uygulanabilmekteyken, integral denklem temelli yöntemler daha karmaşık yapı kazanmaktadır. Diferansiyel denklem için kod üretimi kolayca yapılmaktadır. Diferansiyel denklem temelli çözümler, bölgesel modelleme imkanı nedeniyle ani ve keskin değişimlerde kullanılabilen, İntegral Denklem temelli çözümler global modellemesi nedeniyle sadece düz geometrilerde iyi sonuçlar vermektedir.

Elektromanyetik için sayısal yöntemler konusunun önemi bugün iyice anlaşılmıştır. Gelecekte güçlü bilgisayarların üretilmesiyle daha hızlı ve daha yüksek hassasiyete sahip çözümler elde edilebilecektir.

Diferansiyel denklem temelli çözümlerden en popüler olanlarından biri Sonlu Elemanlar Metodudur (FEM). FEM, kenarlarda yüksek mertebeli elemanlar kullanarak hassasiyeti sağlayıp, içerilerde düşük mertebeli elemanlar kullanarak matrisin seyrekliğini de bir arada sağlamasıyla oldukça esnek yapıdadır.

FEM ilk olarak 1942'de Courant tarafından ortaya konmuştur [1].

Üçgenlerden oluşan bir kümede doğrusal yaklaşıklıkla iki boyutlu örnekler sunmuş, FEM'in temellerini atmıştır. Elektronik mühendisliğinde uygulamaya konması ise 1969'da olmuştur. Bir İtalyan bilimsel dergisinde Alta Frequenza tarafından, klasik dalga kılavuzu mod probleminde FEM çözümünün [2] yayınlanmasının ardından, pek çok makale yayınlanmıştır. Bugün FEM, 3 MHz-300 GHz arasındaki mikrodalga uygulamalarında kullanılmaktadır.

Courant tarafından ilk bulunduğu ve klasik dalga kılavuzlu iletim problemine uygulandığı günden bu yana FEM'in hassasiyeti ve verimliliği açısından önemli ilerlemeler kaydedilmiştir. Bu ilerlemelerden biri de yüksek dereceli düğüm elemanlarının iki boyutlu (2B) ve üç boyutlu (3B) uygulamalarda kullanılmasıdır. Sadeliği yitirmeden geometrik modelleme kabiliyeti artırılmıştır. Daha sonra da farklı bir eleman türü olan kenar elemanlar ya da başka bir deyişle vektörel elemanlar geliştirilmiştir [3].

FEM'in hassasiyeti, tekil özellik gösteren kenar, köşe gibi noktalarda, özel şekil fonksiyonları kullanarak artırılabilir. Elektromanyetik problemlerdeki FEM'in başarısı, esnekliği ve kullanım kolaylığına bağlanabilir. Bütün bu çekici özelliklerinin yanında katsayılar matrisinin seyrek yapıda olmasıyla da oldukça işlem kolaylığı sağlamaktadır.

Dikdörtgensel yayılma problemlerinde FEM uygulamaları, ilk olarak kapalı, kompleks, metalik dalga kılavuzlarında mod yapısının bulunması şeklinde ortaya çıkmışlardır. Bununla beraber FEM, radyal yayılma problemlerinde de uygulanabilecek özelliktedir. Dalga, radyal yönde yayılım yaptıkça, dalga cepheleri, şiddeti ve enerji yoğunluğu değişir. Ve uzayın değişik noktalarındaki dalga vektörleri paralellliğini yitirir. Bu tür bir radyal yayılma, bir antenden yayılma veya bir engelden saçılma durumunda ortaya çıkar. FEM'i pratikteki radyal yayılma problemlerine uygularken karşılaşılan en büyük zorluk, radyasyon koşuluna maruz sınırlandırılmamış bir bölgede çalışmaktır. Bununla başa



çıkılmak için genelde çözüm uzayı, kurgusal bir sınırla sonlandırılır.

Daha sonraları çok daha pratik bir yöntem ortaya atılmıştır. Yutucu sınır koşulu tekniği olarak bilinen bu yöntem, bulunduğu günden bu yana çok rağbet görmüştür. Yüzeydeki herhangi bir nokta, sadece o noktadaki elektromanyetik alan ve komşu noktalar cinsinden ifade edilebilmektedir. Uzakta bulunan noktaların katkısı olmamaktadır. Yutucu sınır koşullarının bu yerel olma özelliği, seyrek katsayılar matrisinin oluşmasına yol açmıştır. Bu da sayısal işlem miktarını oldukça düşürmektedir. Bunun yanında bu tür koşullar ışıma veya saçılma yapan cisimden belirli bir uzaklığa konulmalıdır.

FEM'in pratik radyal ışıma problemlerinde kullanılma miktarı, henüz dikdörtgen yayılma alanında olduğu kadar çok değildir. Bugün, FEM ile pratikteki elektromanyetik problemlerin etkin bir şekilde çözümü, hala bazı zorlukların üstesinden gelinmesini gerektirmektedir. Bu alandaki çözülmesi gereken problemlerden birisi, boyutları dalga boyuna göre büyük olan cisimlerden elektromanyetik saçılmadır. FEM çözüm uzayını sonlandırmak için kullanılan yöntemler veya yutucu sınır koşulları hala yeterince tatmin edici seviyelere ulaşmamıştır. Bulunması gereken bilinmeyen sayısı oldukça fazla olmaktadır. Bu konuda gelinen son nokta, bilinmeyen sayısını azaltmak için, alanın faz değişimlerini modellemek yerine alanın zarfını modelleme şeklinde FEM çözümü sağlamaktır. [4]

Frekans uzayından zaman uzayına geçmek, programcılık açısından bakıldığında zor değildir. Bundan dolayı, düğüm veya kenar elementler ile zaman uzayında FEM uygulamaları da mümkündür. FEM, esnek ve işlemsel olarak etkin bir zaman uzayı simülatörü oluşturmak için oldukça elverişlidir.

Sonuç olarak, FEM'in kendi içinde de, özellikle vektör değerli elemanların kullanılması alanında, sistematik olarak alınacak çok mesafe bulunmaktadır.

Elektromanyetik problemlere FEM ile elde edilen çözümlerin yer aldığı bu tezin ikinci bölümünde önce Ritz ve Galerkin yaklaşımları ele alınmış, daha sonra Sonlu Elemanlar Metodu'nun işlem basamakları üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde 2B için bir örnek problem üzerinde çözüm aşamaları açıklanmış ve yazılan MATLAB kodlarıyla problemin çözümü gerçekleştirilmiştir. Seçilen örnek problem çözümü olarak, paralel levhalı dalga kılavuzunun iletim ve yansıma katsayıları elde edilmiştir. Bu amaçla, zamanda harmonik durum kabul edilmiş ve önce çözümü yapılacak paralel levhalı dalga kılavuzunun boş durumdaki alan dağılımları, kesim frekansı, ilerleyen ve sönen modlar için ifadeler çıkartılmış, ardından bir dielektrik çubuk olduğu durumda, dielektrik çubuk yüksekliğine bağlı yansıma katsayısı ve iletim katsayısı elde edilmiş ve dalgaboyu cinsinden yüksekliğine göre değişimler grafiksel olarak gösterilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde paralel levhalı dalga kılavuzu içine birbirinden belirli bir uzaklıkta iki iris yerleştirilmiş, yansıma ve iletim katsayılarının frekans ve geometrik boyutlara bağımlılıkları elde edilmiş ve grafiksel olarak çizdirilmiştir.

Tezin beşinci ve son bölümünde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş, parametrelerin değişimine göre yansıma ve iletim katsayılarının değişimi yorumlanmış, gelecekte yapılabilecek çalışmalar konusunda görüşler oluşturulmuştur.

## 2.SONLU ELEMANLAR METODU

### 2.1.Sonlu Elemanlar Metoduna Giriş

Sonlu elemanlar metodu, sınır değerli problemlere sayısal çözümler elde etmek için kullanılır. 40 yıldan daha uzun bir arka plana sahiptir. Sonlu elemanlar metodundan önce sınır değerli problemleri çözmek için iki yöntem kullanılmaktaydı. Bunlardan birincisi, Ritz varyasyonel metodu diğeri de Galerkin metodu olarak adlandırılmıştır. Bu iki yöntem FEM'in temelini oluştururlar. Kabaca ifade edilecek olursa, bilgisayar teknolojisinin yeterince gelişmediği zamanlarda, FEM'in kağıt kalem kullanılarak basitçe uygulanmış halleriydiler. Bununla beraber işin felsefesi bu güne kadar değişmemiştir. FEM'in anlaşılması için önce bu iki yöntem anlatılacaktır.

#### 2.1.1.Sınır Değer Problemler

Sınır değer problemlerin en temel gösterimi, bir  $\Omega$  bölgesi için

$$L\Phi = f \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada bölgeyi çevreleyen sınır olan  $\Gamma$  üzerinde geçerli olan sınır koşulları da beraber verilmelidir. (2.1)'de  $L$  ile gösterilen operatör, bir diferansiyel işleç olarak tanımlanmıştır.  $f$  ile uyarıcı fonksiyon gösterilmiştir. Burada bilinmeyen büyüklük,  $\Phi$  ile gösterilmiştir.  $\Gamma$  üzerinde tanımlanmış sınır koşulları, Dirichlet veya Neumann tipi gibi basit koşullar olabilecekleri gibi, empedans veya radyasyon koşulları gibi yüksek mertebeden koşullar olabilirler.

### 2.1.2.Galerkin Yaklaşımı

Galerkin metodu, Tartılmış Kalanlar(Weighted Residuals) olarak adlandırılmış yöntemlerden biridir. Adından da anlaşılacağı gibi bu yöntemlerde amaç, diferansiyel denklemin kalanını tartarak çözümü aramaktır. Burada kalan ile ifade edilen büyüklük, gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki farklılıktan kaynaklanmaktadır.

$$r = L\Phi - f \neq 0 \quad (2.2)$$

$\Phi$  için en iyi yaklaşık çözüm,  $\Omega$  bölgesinin her noktası için kalan  $r$ 'yi sıfıra götüren çözüm olacaktır. Bundan dolayı tartılmış kalan metodu, aşağıdaki koşulu sağlamalıdır:

$$R_i = \int_{\Omega_i} w_i r d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

$w_i$  ile tartma fonksiyonu,  $R_i$  ile de tartılmış kalan integrali gösterilmektedir. Galerkin'de bu tartma fonksiyonu, yaklaşık çözümü ifade etmede kullanılan baz fonksiyonlarıyla aynı seçilmektedir. Bu seçim en doğru sonuca götürmekte olup, bu özelliğiyle de Galerkin yaklaşımı, sonlu elemanlar metodunda kullanılan en popüler yaklaşım olmuştur.

Bilinmeyen büyüklük  $\Phi$  için yaklaşık çözüm,  $\bar{\Phi}$ , baz fonksiyonları cinsinden ifade edilecek olursa

$$\sum_{i=1}^N v_i \Phi_i = \bar{\Phi} \approx \Phi \quad (2.4)$$

şeklindedir. Baz fonksiyonları  $v_i$  ile gösterilmiştir. Burada  $\bar{\Phi}$ ,  $N$  tane baz fonksiyonun birleşiminden oluşmaktadır. Çözümün hassasiyetini belirleyen faktör,  $N$  sayısı, yani kaç tane baz fonksiyonuyla yaklaşıklık sağlandığıdır. Ne kadar çok baz fonksiyonu kullanılırsa çözüme o kadar yakınlık sağlanır. Bunun yanında kullanılan baz fonksiyonu sayısı arttıkça, yapılması gereken işlem miktarı da artacaktır.  $\Phi_i$  ile baz fonksiyonlarının belirli ölçme noktalarındaki değerleri gösterilmektedir. Ölçme fonksiyonları, Galerkin yaklaşımındaki baz fonksiyonlarıyla aynı seçilebildiği gibi farklı da olabilir. Bu durumda tartılmış kalan integrali  $R_i$ , farklı şekilde hesaplanacaktır. Aşağıda değişik durumlar gösterilmiştir:

Noktada sağlama veya nokta eşleşme durumunda, test fonksiyonu olarak Dirac delta fonksiyonu seçilir. Bunun fiziksel yorumu, sadece ölçme yapılan her bir noktada, yaklaşık çözümün gerçek çözümle aynı olması demektir.

$$R_i = \int_{\Omega_i} w_i r d\Omega = w_i r \Big|_{i.nci \text{ noktada}} = 0 \quad (2.5)$$

Alt bölgede sağlama durumunda, test fonksiyonu olarak darbe fonksiyonu seçilir. Yani belirli bir bölgede 1, bunun dışında ise 0 dır. Bu durumda, yaklaşık çözümün her bir alt bölgede gerçek çözümle aynı olması gerekir. Aslında noktada sağlama durumunun biraz daha genişletilerek, bir alt bölgede sağlama haline getirilmesidir. Yani  $i.nci$  alt bölgede kalan sıfır olmalıdır.

$$R_i = \int_{\Omega_i} w_i r d\Omega = 0 \quad (2.6)$$

Galerkin'de ise her bir baz fonksiyonu üzerinde yaklaşık çözümün gerçek çözümle aynı olması gerekir.  $R_i$ 'yi Galerkin için yazarsak aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$R_i = \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_{\Omega_i} (v_i L v_j - v_i f) d\Omega = 0 \quad (2.7)$$

Sonuçta ortaya bir denklem sistemi çıkacaktır. Her ölçme için sıfır kalan veren yaklaşık çözüm, aranan fonksiyondur. Yani  $N$  ölçme için  $N$  tane koşulu birden sağlayan,  $\Phi_i$ 'ler kümesi bulunacaktır. Daha sonra yaklaşık çözüm, bu değerler ve baz fonksiyonları cinsinden  $\bar{\Phi}$  ifade edilecektir.

### 2.1.3.Ritz Yaklaşımı

Aynı zamanda Rayleigh-Ritz metodu olarak da bilinen Ritz yaklaşımı, bir varyasyonel metottur. Bu metotta sınır değerli problem, bir varyasyonel ifade cinsinden yazılır. Bu varyasyonel ifadeye fonksiyonel denmektedir. Verilen sınır koşulları altında bu fonksiyonelin minimumu, üzerinde çalışılan diferansiyel denkleme karşılık gelmektedir. Bu durumda işlem, fonksiyonelin en küçük değerini almasını sağlayan, fonksiyonel parametrelerini bulmaktan ibarettir. Fonksiyonelin değeri, uygulandığı fonksiyona göre değişir. Fonksiyon olarak bilinmeyen büyüklük alınır. Bu büyüklük, Galerkin yaklaşımında olduğu gibi, baz fonksiyonları cinsinden ifade edilir. Bilinmeyen büyüklük, baz fonksiyonları ve bunların katkısını belirleyen katsayılar ile yakınsanır. Yani fonksiyonelin değeri, bu baz fonksiyonlarının katsayılarına göre değişir. Problem, baz fonksiyonları ve onların katsayılarıyla yakınsanan fonksiyonun yer aldığı fonksiyonelin, verilen sınır koşulları altında en küçük değerini almasını sağlayan, baz fonksiyon katsayılarının bulunmasıdır. (2.1) için, en küçük değeri bulunacak fonksiyonel aşağıda görülmektedir[3]:

$$F(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \langle L\bar{\Phi}, \bar{\Phi} \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{\Phi}, f \rangle - \frac{1}{2} \langle f, \bar{\Phi} \rangle \quad (2.8)$$

$\bar{\Phi}$  yaklaşık çözümü göstermektedir. Yaklaşık çözüm için (2.4) kullanılır. Bu

durumda bulunacak parametreler kümesi, yine  $\Phi_i$ 'ler kümesidir. Burada iç çarpım kullanılmaktadır.

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{\Omega_i} \Phi \Psi^* d\Omega \quad (2.9)$$

(2.9)'da iç çarpım tanımlanmıştır. ' \* ' ile gösterim, kompleks eşlenik anlamına gelmektedir. Eğer operatör  $L$ , kendisine komşu ve pozitif tanımlı ise (2.8) elde edilebilir. Aşağıda bu koşulların sağlanma durumları anlatılmıştır.

Kendisine komşu olması için  $L$  operatörü aşağıdaki koşulu sağlamalıdır:

$$\langle L\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, L\Psi \rangle \quad (2.10)$$

Pozitif tanımlılık için  $L$  operatörü aşağıdaki koşulu sağlamalıdır:

$$\langle L\Phi, \Phi \rangle \begin{cases} >0 & \Phi \neq 0 \\ =0 & \Phi = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Problem kompleks değerli bir problem olabilir. Bununla beraber anlatım kolaylığı açısından reel durum düşünülürse (2.8) aşağıdaki hale gelecektir:

$$F(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \langle L\bar{\Phi}, \bar{\Phi} \rangle - \langle \bar{\Phi}, f \rangle \quad (2.12)$$

İç çarpım ifadesi yerine konursa

$$F(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} L\bar{\Phi} \bar{\Phi} d\Omega - \int_{\Omega_i} \bar{\Phi} f d\Omega \quad (2.13)$$

(2.4) kullanılarak fonksiyonel yeniden ifade edilirse sırasıyla (2.14) ve (2.15) elde edilir.

$$F(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} L \left( \sum_{i=1}^N \Phi_i v_i \right) \left( \sum_{j=1}^N \Phi_j v_j \right) d\Omega - \int_{\Omega_i} \left( \sum_{i=1}^N \Phi_i v_i \right) f d\Omega \quad (2.14)$$

$$F(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} \left( \sum_{i=1}^N \Phi_i L v_i \right) \left( \sum_{j=1}^N \Phi_j v_j \right) d\Omega - \sum_{i=1}^N \Phi_i \int_{\Omega_i} v_i f d\Omega \quad (2.15)$$

Fonksiyonelin minimumunu bulmak için, her bir katsayıya göre fonksiyonelin türevi alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial F(\bar{\Phi})}{\partial \Phi_i} = 0 \quad (2.16)$$

Bu durumda her bir  $\Phi_i$  için (2.17) elde edilir

$$\frac{\partial F(\bar{\Phi})}{\partial \Phi_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_{\Omega_i} (v_j L v_i + v_i L v_j) d\Omega - \int_{\Omega_i} v_i f d\Omega = 0 \quad (2.17)$$

$L$  operatörü kendisine komşu olduğundan aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\frac{\partial F(\bar{\Phi})}{\partial \Phi_i} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_{\Omega_i} (v_i L v_j) d\Omega - \int_{\Omega_i} v_i f d\Omega = 0 \quad (2.18)$$

Bunların sonucunda bir denklem sistemi ortaya çıkacaktır. Bilinmeyen sayısınınca denklem olacaktır. Oluşan sistem matris ile gösterilecek olursa (2.19) ve (2.20) dönüşümleriyle



$$S_{ij} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \int_{\Omega_i} (v_i L v_j) d\Omega \quad (2.19)$$

$$b_i = \int_{\Omega_i} v_i f d\Omega \quad (2.20)$$

(2.21) elde edilir.

$$[S]\{\Phi_i\} = \{b_i\} \quad (2.21)$$

Bu denklem sisteminin çözümüyle yaklaşık çözüm bulunmuş olur. Görüldüğü üzere Ritz ile Galerkin yaklaşımı aynı sonucu vermektedir. Burada önemli nokta, yukarıda anlatılmış olan klasik Galerkin ve Ritz metotlarında, baz fonksiyonlarının her biri, tüm çözüm uzayında tanımlıdır. İşte sonlu elemanlar metodu, burada farklılık gösterir.

Sonlu elemanlar metodunda baz fonksiyonları belirli bir element üzerinde tanımlıdır. Yani her bir element için baz fonksiyonlarıyla ayrı bir yakınsama yapılır. Burada gereken şart, bir elementten diğerine geçerken, yaklaşık çözümün süreklilik göstermesidir. Bu da komşu elementlerin ortak sınırlarında çözümün aynı olmasını gerektirmektedir.

Sonlu elemanlar metodu klasik Galerkin ve Ritz metotlarına göre çok daha kullanışlıdır. Bunun başlıca nedeni, elementlerin tüm çözüm uzayına göre çok küçük olmalarından dolayı, tek bir element için hem az sayıda baz fonksiyonunun yeterli olması, hem de baz fonksiyonlarıyla oldukça iyi bir yakınsama sağlanabilmesidir.

Sonlu elemanlar metodunun temel felsefesi klasik Galerkin ve Ritz metotlarının aynısıdır. Bundan dolayı, Ritz yaklaşımını esas alan sonlu elemanlar metoduna, Ritz Sonlu Elemanlar Metodu ya da daha çok bilinen diğer

adiyla Varyasyonel Sonlu Elemanlar Metodu; Galerkin yaklaşımlarını esas alan sonlu elemanlar metoduna, Galerkin Sonlu Elemanlar Metodu denmektedir.

Yukarıda anlatılanlara ek olarak Sonlu elemanlar metodu, klasik Galerkin ve Ritz metotlarının yapmakta çok zorlandıkları çözümleri de kolaylıkla yapabilmektedir. 2B ve 3B problemlerde, tüm çözüm uzayında tanımlı baz fonksiyonlarıyla yeterli yakınsama sağlayabilmek için, gereken baz fonksiyon sayısı oldukça fazla olabilmektedir. Bazı durumlarda da tam olarak yakınsama mümkün olamamaktadır. Problemin geometrisi karmaşık hale geldikçe durum daha da zorlaşmaktadır. Sonlu elemanlar metodunda, ani değişim gösteren noktalar civarında elementleri daha küçük seçerek, kolaylıkla problem çözülebilmektedir. Sonlu elemanlar metodu kullanılarak, herhangi bir geometride tanımlı, herhangi bir problemi çözebilen genel amaçlı bir program yazmak mümkündür. Böylece, sayısal Elektromanyetik alanında büyük gelişme sağlanabilmektedir.

## **2.2.Sonlu Elemanlar Metodunun Basamakları**

Sonlu elemanlar metodunun 4 ana basamağı vardır. Bunlar aşağıda gösterilmiştir:

- 1.Çözüm uzayının ayrıklaştırılması ve elementlerin oluşturulması.
2. Baz fonksiyonlarının seçilmesi.
3. Denklem sisteminin oluşturulması.
4. Denklem sisteminin çözülmesi.

Aşağıda bu basamaklar tek tek ele alınacaktır.

### 2.2.1. Çözüm Uzayının Ayırıklaştırılması ve Elementlerin Oluşturulması

Bu basamak ilk ve en önemli basamaktır. Bunun nedeni çözüm uzayının nasıl ayırıklaştırıldığıının, gerekli bellek miktarını, gerekli işlem süresini ve yaklaşık çözümün hassasiyetini etkilemesidir.

Bu basamakta tüm çözüm uzayı  $\Omega$ ,  $\Omega_e$  ile gösterilen daha küçük bölgelere ayrılır ( $e=1,2\dots M$ ). Bu bölgelere eleman denmektedir.  $M$  sayısı, toplam eleman sayısını göstermektedir. 1B çözüm uzayı için bu elemanlar, birbirlerine eklenerek orijinal doğruyu oluşturan kısa doğru parçaları şeklindedirler. 2B için bu elemanlar üçgen veya dörtgenlerden oluşan küçük düzlem parçalarıdır. 3B için ise dörtyüzlü, üçgen prizma veya dörtgen prizma şeklinde küçük hacimlerden oluşmaktadırlar. Bu bahsedilenler en basit modelleme türleridir. Bu lineer modelleme türlerinden başka daha yüksek mertebeli elementler oluşturmak mümkündür. Yani doğrusal değişim gösteren fonksiyonları yerini eğrisel değişim gösteren fonksiyonlar alırlar.

Sonlu elemanlar metoduyla yapılan çoğu çözümde, bilinmeyen fonksiyonu  $\Phi$ , elementlerin düğüm noktaları cinsinden tanımlıdır. Elementlerin düğüm noktaları, lineer doğru parçaları için, doğru parçasının iki ucu; lineer düzlem parçaları için üçgen veya dörtgenlerin köşeleridir. Bundan dolayı, elementlerin tanımlanabilmeleri için düğüm noktalarına gerek vardır.

Düğüm noktalarının tanımlanması, her birinin koordinatlarının, yerel numaralarının ve genel numaralarının tanımlanması demektir. Yerel numara, her bir element içindeki konumunu belirtmeye yarar. Genel numara ise, tüm sistemdeki konumunu belirtir. Sonlu elemanlar metoduyla çözüm sonucunda, bant şeklinde bir yapıya sahip katsayılar matrisi elde edilir. Genel görünümü, asal köşegenden boyunca sıfırdan farklı katsayılarla sahip, belirli bir bant

genişliği olan yapıdadır. İşte bu bant genişliği, eleman üzerinde iki düğüm noktasının genel numaralarının arasındaki farkın, tüm elemanlarda aldığı değerlerden en büyüğüdür. Yani düğüm noktalarının nasıl numaralandırıldığı, katsayılar matrisinin yapısını etkileyecektir. Bu da çözümün zorluk derecesini doğrudan etkileyecektir. Uygun bir numaralandırmayla bant genişliği düşürülerek, gerekli bellek miktarı ve işlemsel maliyet azaltılabilir. Bununla beraber, bant matrisleri çözen bir denklem sistemi çözücü kullanılmayacaksa, numaralandırma rasgele olabilir.

### 2.2.2. Baz Fonksiyonlarının Seçilmesi

Sonlu elemanlar metodunun ikinci basamağı, bilinmeyen fonksiyonuna bir eleman üzerinde yaklaşık çözüm elde etmede kullanılacak, baz fonksiyonlarının seçilmesidir. Baz fonksiyonları genellikle birinci dereceden bir polinom, yani lineer fonksiyonlardan oluşurlar. Bundan başka ikinci veya daha yüksek dereceden polinomlar da kullanılır. Yüksek dereceli polinomlardan oluşan baz fonksiyonları daha hassas çözüm vermekle beraber, daha karmaşık formülasyona neden olurlar. Günümüzde kullanımı basit temel lineer fonksiyonlar, yaygın bir şekilde kullanılmaktadırlar. Her bir eleman üzerinde baz fonksiyonlarıyla yaklaşık çözüm aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\overline{\Phi}^e = \sum_{j=1}^n N_j^e \Phi_j^e \quad (2.22)$$

Burada  $n$  sayısı bir eleman üzerindeki düğüm sayısını göstermektedir.  $\Phi_j^e$  ile  $\Phi$  nin  $j$ .nci düğüm üzerinde aldığı değer gösterilmektedir.  $N_j^e$  baz fonksiyonlarını göstermektedir.  $N_j^e$  nin en yüksek derecesi, elemanın derecesini de göstermektedir. Yani  $N_j^e$  bir lineer fonksiyon ise, eleman  $e$  bir lineer

elemandır. Bu  $N_j^e$  lerin en belirgin özelliği ise,  $e.nci$  eleman üzerinde sıfırdan farklı, bu elemanın dışarısında ve köşelerinde ise sıfır değer almalarıdır.

### 2.2.3. Denklem Sisteminin Oluşturulması

Sonlu elemanlar metodunun en önemli basamağı olan üçüncü basamak, denklem sisteminin formülize edilmesidir. Bu aşamada hem Ritz, hem de Galerkin yaklaşımı kullanılabilir. Galerkin metoduyla (2.1) için,  $e.nci$  elemandaki tartılmış kalan ifadesi yazılırsa

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e (L \overline{\Phi^e} - f) d\Omega \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.22) yi, (2.23) de yerine koyarsak

$$R_i^e = \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Omega^e} N_i^e L N_j^e d\Omega \right) \Phi_j^e - \int_{\Omega^e} N_i^e f d\Omega \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu ifadeyi matris formunda yazarsak

$$\{R^e\} = [K^e] \{\Phi^e\} - \{b^e\} \quad (2.25)$$

elde edilir. Burada  $K^e$  ve  $b^e$  ifadelerinin karşılıkları aşağıda gösterilmektedir

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e L N_j^e d\Omega \quad (2.26)$$

$$b_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e f d\Omega \quad (2.27)$$

Bir düğüm noktasıyla ilgili olan tüm baz fonksiyonlarının etkisi, o düğüm noktasına doğrudan bağlı olan elemanların katkılarının toplamı şeklindedir. Bu özellik kullanılarak, yerel-genel numaralandırma dönüşümüyle, tek bir eleman

üzerindeki tartılmış kalanlardan tüm çözüm bölgesindeki tartılmış kalanlara geçilebilir. Bu işleme genişletme(augmentation) denmektedir. Tüm elemanlardan gelen katkı sonucu, her bir eleman için bulunan  $R_i^e$  ler toplanarak,  $\{R^e\}$  elde edilir.

$$\{R\} = \sum_{e=1}^M \overline{R^e} = \sum_{e=1}^M \left( \left[ \overline{K^e} \right] \left\{ \overline{\Phi^e} \right\} - \left\{ \overline{b^e} \right\} \right) \quad (2.28)$$

Görülen üst çizgiler, matris genişletmesini göstermektedir. Bunun sonucunda bir denklem sistemi ortaya çıkacaktır. Yani

$$\sum_{e=1}^M \left( \left[ \overline{K^e} \right] \left\{ \overline{\Phi^e} \right\} - \left\{ \overline{b^e} \right\} \right) = \{0\} \quad (2.29)$$

Başka bir ifadeyle

$$[K]\{\Phi\} = \{b\} \quad (2.30)$$

denklem sistemi elde edilir. (2.30) in çözülmesinden önce, verilen sınır koşullarının dahil edilmesi gereklidir. En çok karşılaşılan sınır koşulu tipleri, Drichlet sınır koşulu ve homojen Neumann sınır koşuludur. Drichlet sınır koşulu, zorunlu sınır koşuludur. Böyle bir koşul verildiğinde, geçerli olduğu noktalarda aldığı değer yerine konmalıdır. Homojen Neumann sınır koşulu ise doğal sınır koşuludur. Çözüm işlemleri sırasında kendiliğinden sağlanır. Bunun anlamı, homojen olduğundan dolayı, katsayılar matrisi oluşturulurken etkisi, ilgili olduğu noktalara karşılık gelen katsayılarla sıfır eklemek şeklinde olacaktır.

Görüldüğü üzere, denklem sisteminin oluşturulması basamağı, aslında üç

alt basamaktan oluşmaktadır. Önce Ritz veya Galerkin yaklaşımıyla eleman denklemleri (2.26) ve (2.27) şeklinde oluşturulmakta; daha sonra eleman denklemleri tüm elemanlar üzerinden toplanarak denklem sistemi (2.28) ve (2.29) şeklinde oluşturulmakta; en son olarak sınır koşulları bu sisteme dahil edilmektedir. Böylece denklem sistemi (2.30), çözülmeye hazır hale gelmektedir.

#### 2.2.4. Denklem Sisteminin Çözülmesi

Sonlu elemanlar metodunun son basamağı, elde edilen denklem sisteminin çözülmesidir. (2.30) çözüldükten sonra bilinmeyen fonksiyonu, elde edilen  $\{\Phi\}$  değerleri cinsinden gösterilir. Bu aşamada fonksiyon, grafikte veya renklendirilmiş resimlerle, yorumlamaya kolaylık sağlayacak şekilde gösterilir.

### 2.3.İki Boyutlu Sınır Değerli Problemlerde Sonlu Elemanlar Metodu

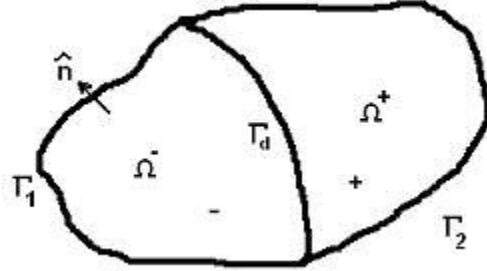
Bu problemlerin çözümünde sonlu elemanlar metodunun basamakları anlatılmadan önce, 2B için sınır değerli problem ortaya konacak, daha sonra 2B için sonlu elemanlar metodu genel olarak formülize edilecektir.

2B için sınır değerli problem, aşağıdaki ikinci derece diferansiyel denklem ile tanımlanmıştır:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \beta \Phi = f \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.31)$$

burada  $\Phi$  ile bilinmeyen fonksiyon tanımlanmıştır.  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\beta$  çözüm uzayının

fiziksel özellikleriyle ilgili bilinen parametrelerdir.  $f$  ise, kaynak ya da uyarıcı fonksiyondur. 2B için Laplace, Poisson ve Helmholtz denklemleri, (2.1) in özel türleridirler. Problemin geometrisi Şekil 2.1 de görülmektedir.



Şekil 2.1. 2B için sınır değerli problemin geometrisi.

Bu problem ile ilgili sınır koşulları da

$$\Phi = p \quad , \Gamma_1 \text{ üzerinde} \quad (2.32)$$

ve

$$\left( \alpha_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cdot \hat{n} + \gamma \Phi = q \quad , \Gamma_2 \text{ üzerinde} \quad (2.33)$$

olarak verilir. Burada  $\Gamma (= \Gamma_1 + \Gamma_2)$ ,  $\Omega$  alanını çevreleyen sınırdır.  $\hat{n}$  ise dışa doğru olan normal birim vektördür.  $p, \gamma$  ve  $q$  sınırın fiziksel özellikleriyle ilgili, bilinen parametrelerdir. Açıkta ki,  $\gamma$  sıfır olduğu durumda (2.3), Neumann sınır koşuluna dönüşmektedir.

Bunlardan başka  $\alpha_x$  ve  $\alpha_y$  ile karakterize edilen ortamda süreksizlikler ve ani değişim gösteren bölgeler varsa ve süreksizliğin olduğu ara yüzde yüzeysel bir kaynak yoksa  $\Phi$ , aşağıdaki süreklilik koşullarını da sağlamalıdır:

$$\Phi^+ = \Phi^- \quad , \Gamma_d \text{ üzerinde} \quad (2.34)$$

ve



$$\left( \alpha_x^+ \frac{\partial \Phi^+}{\partial x} + \alpha_y^+ \frac{\partial \Phi^+}{\partial y} \right) \cdot \hat{n} = \left( \alpha_x^- \frac{\partial \Phi^-}{\partial x} + \alpha_y^- \frac{\partial \Phi^-}{\partial y} \right) \cdot \hat{n} \quad , \Gamma_d \text{ üzerinde} \quad (2.35)$$

Burada  $\Gamma_d$ , süreksizliğin olduğu ara yüzü göstermektedir. “-” ve “+” ile gösterim, ilgili büyüklüğün ara yüzün sağında veya solunda kaldığını göstermektedir.

2B için sonlu elemanlar metodu, genel olarak anlatılan sonlu elemanlar metoduyla aynı basamaklara sahiptir. Herhangi bir boyut için farklı olan, farklı baz fonksiyonlarının seçilmesidir. Basit olması açısından lineer üçgensel elemanlar kullanılacaktır.

### 2.3.1. Çözüm Uzayının Ayırıklaştırılması

2B için elemanlar, üçgensel düzlemler olarak seçilmiştir. Sağlanması gerekli olan en temel şart, hiç boşluk kalmayacak şekilde üçgenlemenin yapılması ve üçgenlerin birbirinin üzerine çıkmamasıdır. Bundan başka, üçgenlerin birbirlerine köşelerinden bağlı olmaları gerekir. Yani bir üçgenin köşesi, diğerinin kenarında olmamalıdır. Bu temel koşullara ek olarak, iyi bir sonuç elde etmek için gereken şartlar vardır. En iyi sonuç için üçgenler, eşkenara yakın olmalıdırlar. Bunun nedeni, iç açısı çok küçük elemanlar kullanılırsa, hatanın artmasıdır. Bir iç açığı küçültmek yerine daha küçük üçgenler kullanmak, tek bir üçgen yerine birkaç üçgen kullanmak daha doğru sonuçlar sağlayacaktır. Bilindiği üzere, elemanlar küçüldükçe doğruluk artmakla beraber işlemsel maliyet de artmaktadır. Yapılacak en iyi şey, ani değişim gösteren bölgelerde üçgenleri küçük tutmak, bu bölgelerin dışında da üçgenleri büyük seçmek olacaktır.

Her bir üçgeni tanımlayabilmek için, köşeleri kullanılır. Bunlar düğüm noktalarıdır. Üçgen bilgileri oluşturulurken, bu düğüm noktaları üçerli gruplar

halinde gruplanırlar. Bundan dolayı öncelikle bu düğüm noktalarının koordinatları listelenir. Her bir noktaya genel numara verilirken benzersiz tek bir numara karşılık gelir.

Üçgen bilgisi belirli bir dönüş yönüne göre sıralanmış 3 genel numara, elemanın numarası ve element üzerinde geçerli problem parametrelerinden oluşmaktadır. Bu 3 noktanın hangi sırayla listelendiği büyük önem taşımaktadır. Üçgenlerin köşeleri yazılırken takip edilen sıra hep aynı dönüş yönünde olmalıdır. Ya tüm elementler için saat yönünde veya tüm elementler için saat yönünün tersi yönde olmalıdır. Bir üçgen yazılırken sıralama üç türlü olabilir. Önemli olan nokta, önce hangi köşeden başlanırsa başlansın, tüm üçgenler için kabul edilen dönüş yönündeki sırayla diğer ikisinin yazılmasıdır.

Dönüş yönü kuralı, sınır koşulları sınırdaki noktalar cinsinden yazılırken de gözetilmelidir. Yani sınır koşulları tanımlanırken kullanılan noktalar ikiye ikiye gruplanarak listelenirken, dönüş yönüne göre önce gelen nokta önce yazılır. İşte üçgenler listelenirken, düğümlerin hangi sırayla listeye ekleneceğini gösteren tabloya bağlantı matrisi denmektedir. Bağlantı matrisi, bir üçgenin köşelerindeki düğüm noktalarının, yerel numaralandırmasıyla genel numaralandırmasını birbirine bağlar. Mesela  $e.nci$  üçgenin birinci noktasının genel numarası  $n(1,e)$  bağlantısıyla bulunur. Üçgen sayısı  $M$  ise, bağlantı matrisi  $3 \times M$  boyutunda bir matristir.

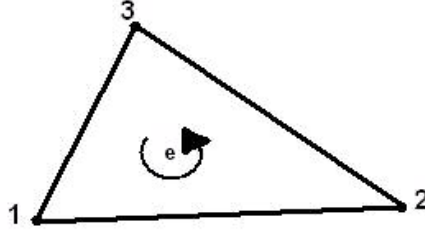
Sonuç olarak, çözüm uzayının ayrıklaştırılması ile dört liste oluşturulur. Bunlardan birincisi, düğüm noktalarının *genel numarası*,  $x$  *koordinatı*,  $y$  *koordinatından oluşan noktalar*; ikincisi üçgenlerin köşelerinin *genel değerleri*,  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\beta$ ,  $f$  *değerlerinden oluşan elementler*; üçüncüsü ise, 3. tip sınır koşullarının geçerli olduğu doğru parçalarını gösteren *noktaların birincisi ve ikincisi*,  $\gamma$  ve  $q$  değerleri; dördüncüsü Dirichlet tipi sınır koşullarının geçerli olduğu *noktalar* ve onların aldıkları  $p$  değerlerinden oluşan listedir.

### 2.3.2. Baz Fonksiyonlarının Yazılması

Çözüm uzayı ayrıklaştırıldıktan sonra, bilinmeyen fonksiyonu üçgenler üzerinde yaklaşık olarak ifade edilir. Bilinmeyen fonksiyonu  $\Phi^e$ , x ve y nin bir fonksiyonudur.

$$\Phi^e(x, y) = c^e + m^e x + n^e y \quad (2.36)$$

burada e sayısı üçgenin numarasını,  $c^e$ ,  $m^e$  ve  $n^e$  belirlenmesi gereken sabit sayılardır. Bu sayılar köşe noktalarının koordinatları cinsinden bulunurlar.



Şekil 2.2. Üçgensel elemanlarda yerel numaralandırma.

Köşelerin numaralandırılması Şekil 2.2 'de görüldüğü gibi saat yönünün tersi yönde alınırsa, düğüm noktaları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \Phi_1^e &= c^e + m^e x_1^e + n^e y_1^e \\ \Phi_2^e &= c^e + m^e x_2^e + n^e y_2^e \\ \Phi_3^e &= c^e + m^e x_3^e + n^e y_3^e \end{aligned} \quad (2.37)$$

$c^e$ ,  $m^e$  ve  $n^e$  için (2.37) çözümlü  $\Phi_j^e$  cinsinden ifade edildikten sonra yerine konursa

$$\Phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 \Phi_j^e N_j^e(x, y) \quad (2.38)$$

elde edilir. Burada  $N_j^e(x, y)$  baz fonksiyonları olup aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$N_j^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (c_j^e + m_j^e x + n_j^e y) \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.39)$$

Burada  $c_j^e, m_j^e, n_j^e$  ler aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\begin{aligned} c_1^e &= x_2^e y_3^e - y_2^e x_3^e & m_1^e &= y_2^e - y_3^e & n_1^e &= x_3^e - x_2^e \\ c_2^e &= x_3^e y_1^e - y_3^e x_1^e & m_2^e &= y_3^e - y_1^e & n_2^e &= x_1^e - x_3^e \\ c_3^e &= x_1^e y_2^e - y_1^e x_2^e & m_3^e &= y_1^e - y_2^e & n_3^e &= x_2^e - x_1^e \end{aligned} \quad (2.40)$$

ve

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (m_1^e n_2^e - m_2^e n_1^e) = \mathbf{e.nci\ elemanın\ alanı} \quad (2.41)$$

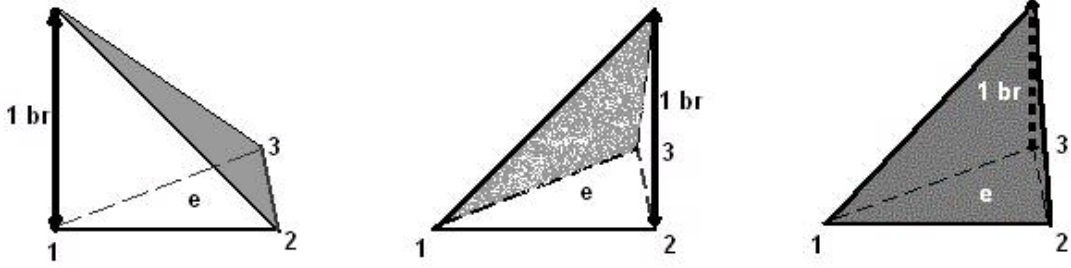
$x_j^e$  ve  $y_j^e$  ( $j=1,2,3$ ) ile  $e.nci$  elemanın  $j.nci$  düğüm noktasının koordinat değerlerini göstermektedir. Baz fonksiyonlarının aşağıdaki özelliğe sahip oldukları görülür:

$$N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.42)$$

bunun sonucunda  $i.nci$  düğümde (2.38)'deki  $\Phi^e$ , düğüm değeri olan  $\Phi_i^e$  haline gelir.

$N_j^e(x, y)$ 'nin diğer bir önemli özelliği de,  $j.nci$  düğümün karşı tarafındaki kenar boyunca değerinin sıfır olmasıdır. Böylece bir elemanın üzerindeki  $\Phi^e$  değeri, diğer bir elemandaki değeri etkilemez. Bu da bir elemandan diğerine

geçerken sağlanması gerekli olan sürekliliği sağlar. Şekil 2.3'te üçgenel elemanlar için baz fonksiyonları görülmektedir.



Şekil 2.3. Üçgen için baz fonksiyonları.

### 2.3.3. Galerkin Metoduyla Formülasyon

(2.31) için kalan ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$r = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \beta \Phi - f \quad (2.43)$$

bir eleman için tartılmış kalan ifadesi ise

$$R_i^e = \iint_{\Omega^e} N_i^e r \, dx \, dy \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.44)$$

şeklindedir. (2.41)'ü (2.42)'te yerine koyarsak

$$R_i^e = \iint_{\Omega^e} N_i^e \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \beta \Phi - f \right] dx \, dy \quad (2.45)$$

elde edilir. Divergence teoremiyle bu ifade

$$R_i^e = \iint_{\Omega^e} \left( \alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \beta N_i^e \Phi \right) dx dy \quad (2.46)$$

$$- \iint_{\Omega^e} N_i^e f dx dy - \oint_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{n}^e d\Gamma$$

haline dönüşür. Burada  $\Gamma^e$  ile  $\Omega^e$  bölgesini çevreleyen sınır gösterilmiştir.  $\hat{n}^e$  ise dışa doğru olan  $\Gamma^e$ 'ye normal birim vektördür.  $\mathbf{D}$ 'nin açık ifadesi ise aşağıda görülmektedir:

$$\mathbf{D} = \left( \alpha_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \alpha_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} \right) \quad (2.47)$$

(2.38)'i (2.46)'da yerine koyarsak eleman denklemini elde edilir.

$$R_i^e = \sum_{j=1}^3 \iint_{\Omega^e} \left( \alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right) \Phi_j^e dx dy \quad (2.48)$$

$$- \iint_{\Omega^e} N_i^e f dx dy - \oint_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{n}^e d\Gamma$$

ve bu da matris ifadesi şeklinde yazılırsa

$$\{R^e\} = [K^e] \{\Phi^e\} - \{b^e\} - \{g^e\} \quad (2.49)$$

elde edilir.  $K_{ij}^e$ ,  $b_i^e$  ve  $g_i^e$  için karşılıklar aşağıda verilmiştir:

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega^e} \left( \alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta N_i^e N_j^e \right) dx dy \quad (2.50)$$

$$b_i^e = \iint_{\Omega^e} N_i^e f dx dy \quad (2.51)$$

$$g_i^e = \oint_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{n}^e d\Gamma \quad (2.52)$$

her bir eleman üzerinde  $\alpha_x, \alpha_y$  ve  $\beta$  katsayılarının ve  $f$  kaynağının sabit kaldığı

varsayılırsa, ve  $\alpha_x^e, \alpha_y^e, \beta^e$  ve  $f^e$  ile gösterilirse, (2.50), (2.51) ve (2.52)'deki ifadeler analitik olarak hesaplanabilir. Bunun için kullanılan basit bir formül aşağıdaki gibidir[3]:

$$\iint_{\Omega^e} (N_1^e)^l (N_2^e)^m (N_3^e)^n dx dy = \frac{l! m! n!}{(l + m + n + 2)!} 2\Delta^e \quad (2.53)$$

Bu durumda  $K_{ij}^e$  ve  $b_i^e$  aşağıdaki gibidir

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta^e} (\alpha_x^e m_i^e m_j^e + \alpha_y^e n_i^e n_j^e) + \frac{\Delta^e}{12} \beta^e (1 + \delta_{ij}) \quad (2.54)$$

$$b_{ij}^e = \frac{\Delta^e}{3} f^e \quad (2.55)$$

(2.49)'u tüm elemanlar üzerinden toplayarak aşağıdaki gibi denklem sistemi elde edilir:

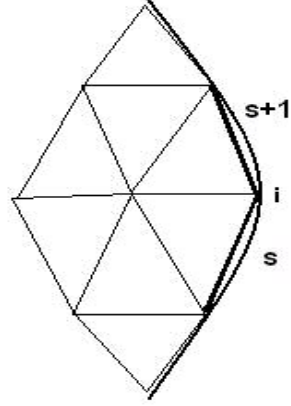
$$\{R\} = \sum_{e=1}^M \{R^e\} = \sum_{e=1}^M \left( [K^e] \{\Phi^e\} - \{b^e\} - \{g^e\} \right) = \{0\} \quad (2.56)$$

bir başka ifadeyle

$$[K] \{\Phi\} = \{b\} + \{g\} \quad (2.57)$$

$\oint_{\Gamma^e} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{n}^e d\Gamma$  ifadesi üçgenlerin çevresi  $\Gamma^e$  üzerinden bir kapalı integral olup, iç bölgelerdeki sınırlarda, komşu elementlerden gelen katkılar birbirini götürür. Bu durumda sadece çözüm uzayı kenarlarındaki entegraller sıfırdan farklı olacaktır. Yani bir düğüm noktası için  $g_i$ , eğer nokta iç bölgedeyse sıfır, kenarda ise sıfırdan farklı olacaktır. Sıfırdan farklı bir  $g_i$  için karşılık gelen ifade

$$g_i = \oint_{\Gamma^s} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{n}^e d\Gamma + \oint_{\Gamma^{s+1}} N_i^e \mathbf{D} \cdot \hat{n}^e d\Gamma \quad (2.58)$$



Şekil 2.4. Sınırdaki elemanlar ve düğüm noktaları.

ile gösterilir. Burada  $\Gamma^s$  noktanın sağında kalan doğru parçasını,  $\Gamma^{s+1}$  ise noktanın solunda kalan parçasını göstermektedir (Şekil 2.4).  $e$  ve  $j$  ise  $i$  ye,  $i=n(j,e)$  şeklinde bağlıdırlar. Bu  $g_i$  ifadesi sınır koşullarıyla doğrudan ilgilidir. Eğer düğüm noktası, Dirichlet sınır koşulunun tanımlandığı sınırdaysa bu  $g_i$  terimi dışarıda bırakılır ve o noktayı değeri bilindiği için denklem yazılmaz. Eğer nokta homojen Neumann sınır koşulu üzerindeyse,  $\mathbf{D} \cdot \hat{n}$  sifıra eşit olacağından  $g_i$  terimi sifır olur. Eğer nokta, üçüncü tüp sınır koşulu tanımlı olan bir sınırdaysa  $g_i$  için ifade aşağıda tanımlanmıştır:

$$g_i = \oint_{\Gamma^s} N_i^S (q - \gamma\Phi) d\Gamma + \oint_{\Gamma^{s+1}} N_i^S (q - \gamma\Phi) d\Gamma \quad (2.59)$$

$N_i^e$ ,  $i$ nci düğüm noktasındaki değeri olan 1'den diğer noktalardaki değeri 0'a doğrusal olarak azaldığından, (2.58) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_i = \int_0^1 \xi (q - \gamma\Phi^s) \ell^s d\Gamma + \int_0^1 (1 - \xi) (q - \gamma\Phi^{s+1}) \ell^{s+1} d\Gamma \quad (2.60)$$

burada  $\ell^s$ , doğru parçası  $\Gamma^s$  nin uzunluğunu,  $\ell^{s+1}$  ise  $\Gamma^{s+1}$  nin uzunluğunu göstermektedir. Her bir doğru parçası üzerindeki bilinmeyen fonksiyonu

$$N_1^s = (1 - \xi), \quad N_2^s = \xi \quad (2.61)$$

dönüşümleriyle



$$\Phi^s = \sum_{j=1}^2 N_j^s \Phi_j^s \quad (2.62)$$

olarak yazılırsa (2.58) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_i = \int_0^1 N_2^s \left( q - \gamma \sum_{j=1}^2 N_j^s \Phi_j^s \right) \ell^s d\Gamma + \int_0^1 N_1^s \left( q - \gamma \sum_{j=1}^2 N_j^{s+1} \Phi_j^{s+1} \right) \ell^{s+1} d\Gamma \quad (2.63)$$

bir başka ifadeyle

$$g_i = b_2^s - \sum_{j=1}^2 K_{2j}^s \Phi_j^s + b_1^{s+1} - \sum_{j=1}^2 K_{1j}^{s+1} \Phi_j^{s+1} \quad (2.64)$$

$K_{ij}^s$  ve  $b_i^s$  için karşılıklar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} K_{ij}^s &= \int_0^1 \gamma N_i^s N_j^s \ell^s d\xi \quad i, j = 1, 2. \\ b_i^s &= \int_0^1 q N_i^s \ell^s d\xi \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

$g_i$  ifadesi,  $[K]$  ve  $\{b\}$  içine kaydırılabilir. Bunun için  $b_2^s$  ve  $b_1^{s+1}$ ,  $b_i$ 'ye;  $K_{2j}^s$ ,  $K_{i,ns(j,s)}$ 'e;  $K_{1j}^{s+1}$  ise  $K_{i,ns(j,s+1)}$ 'e eklenir. Sonuçta denklem sistemi elde edilmiş olunur.

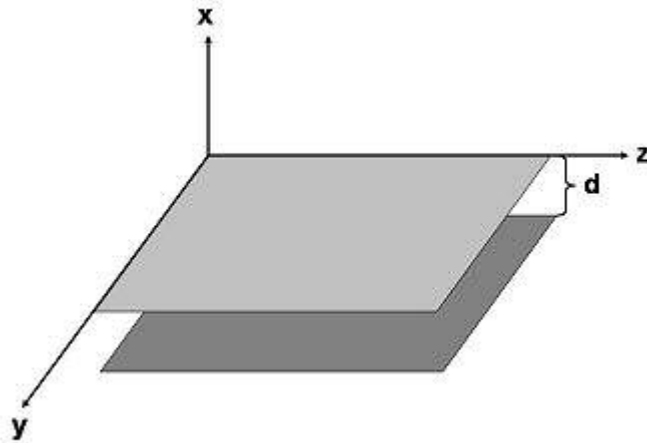
### 2.3.4. Denklem Sisteminin Çözülmesi

Formülasyon sonucunda elde edilen sistem, Doğrudan yöntemlerle veya iteratif yöntemlerle çözülür. Bilinmeyen sayısı 10.000'i aşarsa iteratif yöntemler tercih edilmelidir.

### 3.Sonlu Elemanlar Metodunun 2B Uygulamaları

Bu kısımda 2B için dalga kılavuzu problemleri ele alınmış, bu kapsamda iki adet 2B uygulamaya yer verilmiştir. Öncelikle, paralel levhalı dalga kılavuzunun boş olduğu durumda, ilerleyen ve sönen modlar, kesim frekansına ait ifadeler elde edilecektir. Birinci problemde paralel levha dalga kılavuzundaki süreksizliğin, yansımaya ve iletim katsayılarına olan etkisi incelenmiştir. Dördüncü bölümde ele alınan ikinci bir özgün problemde ise, bir dalga kılavuzunun içinde bulunan ve aralarında belli bir mesafe bulunan iki irisün bazı parametrelerinin, yansımaya ve iletim katsayılarıyla, rezonans frekansı ve band genişliğine etkileri incelenecektir. Bu amaçla MATLAB kodları yazılmıştır. Önce problemler tanıtılacak, ardından da elde edilen sonuçlar irdelenecektir.

#### 3.1. Paralel Levhalı Dalga Kılavuzunun Mod Analizi



Şekil 3.1. Paralel levhalı dalga kılavuzu.

Herhangi bir kesit alanına sahip iletken çiftlerinden oluşan yapılarda ilerleyen dalgaların  $\vec{E}$  ve  $\vec{H}$  bileşenleri, ilerleme yönüne diktir. Bu özellikte yayılan dalgalara **TEM**( Transverse Electromagnetic) dalgaları denir. Şekil 3.1.

de görülen paralel levhalı dalga kılavuzu, bu özellikteki iletken çiftlerine özel bir örnektir.

Aslında TEM dalgaları, levhalar arasında ilerleyebilen sonsuz sayıda modlardan sadece bir tanesi olup, levhalar boyunca baskın olan moddur. TEM modu, 0 Hz frekansında görülmeye başlar. Frekans arttıkça, belirli bir kesim frekansının üzerine çıktığında **TE** ve **TM** modları ortaya çıkmaya başlar.

Dalga kılavuzu içinde kaynakların olmadığı durumda  $\vec{E}$  ve  $\vec{H}$  homojen dalga denklemlerini sağlar.

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2)$$

zamanda harmonik durum için (3.1) ve (3.2), (3.3) ve (3.4) ye dönüşür,

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{H} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{E} = 0 \quad (3.4)$$

Dalga ilerleme yönünün  $+\vec{z}$  olduğunu varsayalım.

$$k = \alpha + j\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (3.5)$$

olmak üzere dalga  $e^{-kz}$  yapısında ilerleyecek ve zamanda harmonik durum için, çözüm

$$\operatorname{Re}\{e^{-kz} e^{-j\omega t}\} = e^{-kz} \operatorname{Cos}(\omega t) = e^{-\alpha z} \operatorname{Cos}(\omega t - \beta z) \quad (3.6)$$

şeklinde olacaktır.  $k = \alpha$  yani  $k$  nin reel olduğu durumda dalga sönerken,  $k = j\beta$  yani  $k$  nin imajinel olduğu durumda dalga ilerler. (3.3) ve (3.4) kartezyen koordinatlarda açık olarak yeniden yazılırsa (3.7) ve (3.8) elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{H} \quad (3.8)$$

$\vec{y}$  eksenini boyunca alan değerlerinin değişmediği kabul edilir ve  $\vec{z}$  eksenini boyunca  $e^{-kz}$  bağımlılığı göz önünde bulundurularak (3.9) ve (3.10) elde edilir.

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}^0(x) e^{-kz} \quad (3.9)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}^0(x) e^{-kz} \quad (3.10)$$

Bu durumda

$$\frac{\partial^2 \vec{H}^0(x)}{\partial z^2} = k^2 \vec{H}^0(x) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}^0(x)}{\partial z^2} = k^2 \vec{E}^0(x) \quad (3.12)$$

Denklemler (3.8) ve (3.9) yeniden düzenlenirse , (3.13) ve (3.14) elde edilir.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + k^2 \vec{H} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{H} \quad (3.14)$$

$$k^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = h^2 \quad (3.15)$$

(3.15) dönüşümüyle (3.16) ve (3.17) elde edilir,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + h^2 \vec{E} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + h^2 \vec{H} = 0 \quad (3.17)$$

$\vec{E}_z$  ve  $\vec{H}_z$  kullanılarak, Maxwell denklemleri ile  $\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{H}_x, \vec{H}_y$  elde edilebilir. (3.18) ve (3.19), bileşenleri birbirleri cinsinden ifade etmek için, Kartezyen koordinatlarda yazılırsa, y 'ye göre türevler çıkartılırsa ve z 'ye göre türev ifadesi yerine konursa denklemler (3.20)-(3.25) elde edilir:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \varepsilon \vec{H} \quad (3.19)$$

$$kH_y = j\omega \varepsilon E_x \quad (3.20)$$

$$kE_y = -j\omega \mu H_x \quad (3.21)$$

$$-kH_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z = j\omega \varepsilon E_y \quad (3.22)$$

$$-kE_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z = -j\omega \mu H_y \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y = j\omega \varepsilon E_z \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y = -j\omega \mu H_z \quad (3.25)$$

Denklem (3.21) 'den  $E_y$  çekilip, (3.22) 'de; (3.20) 'den  $H_y$  çekilip, (3.23) 'da yerine konursa ve elde edilen  $E_x$  (3.20)'da yerine konursa ve elde edilen  $H_x$  (3.21) ' de yerine konursa denklemler (3.26) - (3.29) elde edilir.

$$H_x = -\frac{k}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} H_z \quad (3.26)$$

$$E_x = -k \frac{\partial}{\partial x} E_z \quad (3.27)$$

$$H_x = -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} E_z \quad (3.28)$$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial}{\partial x} H_z \quad (3.29)$$

Görüldüğü üzere,  $E_x, E_y, H_x$  ve  $H_y$  bileşenleri,  $E_z$  ve  $H_z$  bileşenleri cinsinden ifade edilebilmektedir.

TE dalgaları için  $H_z=0$  olduğundan,  $E_x=0, H_y=0$  olup, sadece  $E_y, H_x, H_z$  bileşenleri mevcuttur. TM dalgaları için  $E_z=0$  olduğundan,  $H_x=0, E_y=0$  olup, sadece  $E_x, E_z, H_y$  bileşenleri mevcuttur. TEM dalga durumunda sadece  $E_x$  ve  $H_y$  mevcuttur.

TE modları bulunurken, denklem (3.16) için (3.10) yerine konursa (3.30) elde edilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} E_y^0(x) = -h^2 E_y^0(x) \quad (3.30)$$

(3.30) 'ya ait çözüm (3.31) deki gibidir:

$$E_y^0(x) = C_1 \sin(hx) + C_2 \cos(hx) \quad (3.31)$$

$C_1$  ve  $C_2$  katsayılarının bulunması için sınır koşulları kullanılır.  $x=a$  ve  $x=d$  değerlerinde yani metal levhalar üzerinde  $E_y^0(x)=0$  olmalıdır. Bu durumda (3.32) ve (3.33) elde edilir.

$$h = \frac{m\pi}{d} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.32)$$

$$E_y(x, z) = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-kz} \quad (3.33)$$

$H_x$  ve  $H_z$  için (3.21) ve (3.25) kullanılarak (3.34) ve (3.35) elde edilir.

$$H_x(x, z) = -\frac{k}{j\omega\mu} C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-kz} \quad (3.34)$$

$$H_z(x, z) = -\frac{m\pi}{j\omega\mu d} C_1 \cos\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-kz} \quad (3.35)$$

TM modları bulunurken, denklem (3.17) için (3.9) yerine konursa (3.36) elde edilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} H_y^0(x) = -h^2 H_y^0(x) \quad (3.36)$$

(3.36) 'ya ait çözüm (3.37) deki gibidir:

$$H_y^0(x) = C_3 \sin(hx) + C_4 \cos(hx) \quad (3.37)$$

$C_3$  ve  $C_4$  katsayılarının bulunması için sınır koşulları kullanılır.  $x=a$  ve  $x=d$  değerlerinde yani metal levhalar üzerinde  $E_z^0(x)=0$  olmalıdır. Bunun için (3.24) kullanılarak (3.38) yazılır.

$$E_z(x, z) = \frac{h}{j\omega\epsilon} (C_3 \cos(hx) - C_4 \sin(hx)) e^{-kz} \quad (3.38)$$

ve sınır koşulları uygulanarak (3.39) ve (3.40) elde edilir.

$$h = \frac{m\pi}{d} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.39)$$

$$H_y(x, z) = C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{d} x\right) e^{-kz} \quad (3.40)$$

$E_x$  ve  $E_z$  için (3.20) ve (3.24) kullanılarak (3.41) ve (3.42) elde edilir.

$$E_x(x, z) = \frac{k}{j\omega\epsilon} C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{d} x\right) e^{-kz} \quad (3.41)$$

$$E_z(x, z) = -\frac{m\pi}{j\omega\epsilon d} C_4 \sin\left(\frac{m\pi}{d} x\right) e^{-kz} \quad (3.42)$$

TEM dalgalarının yayıldığı durumda  $E_z=0$  ve  $H_z=0$  olup, tüm TE modları ve  $m=0$  haricindeki tüm TM modları yok olurlar.  $m=0$  durumunda  $h=0$  olur. Buradan da anlaşılacağı gibi, TEM modu aslında  $TM_0$  modudur.  $m=0$  durumunda (3.40) ve (3.41) denklemleri, (3.42) ve (3.43) halini alırlar:

$$H_y(x, z) = C_4 e^{-kz} \quad (3.42)$$

$$E_x(x, z) = \frac{k}{j\omega\epsilon} C_4 e^{-kz} \quad (3.43)$$

denklem (3.15) den  $k$  çekilirse (3.44) elde edilir.

$$k = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 - \omega^2 \mu\epsilon} \quad (3.44)$$

denklem (3.44) de  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  dönüşümüyle (3.45) elde edilir.



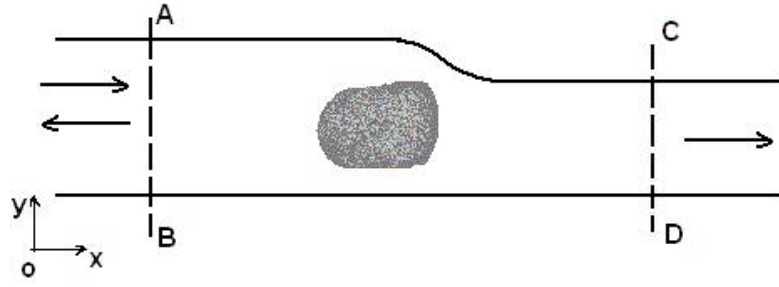
$$k = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} \quad (3.45)$$

$\frac{m\pi}{d} > \frac{2}{\lambda}$  olduğu durumda  $k$  bir reel sayıdır ( $k = \alpha_1$ ). Bu durumda dalga söner, ilerleyemez. Bu modlara sönen modlar (evanescent modes) denir.  $\frac{m\pi}{d} < \frac{2}{\lambda}$  olduğu durumda ise  $k$  bir imajinel sayıdır ( $k = \beta_1$ ). Bu durumda dalga ilerler.  $d > \frac{m\lambda}{2}$  durumunda TEM modundan başka modlar da yayılabilir. Bu durumda sadece TEM modunun yayılabilmesine imkan veren koşul (3.46) ile ifade edilmiştir.

$$d < \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \text{sadece TEM mod u} \quad (3.46)$$

## 3.2. Paralel Levhalı Dalga Kılavuzundaki Süreksizlik Problemi

İncelenecek ilk problem, paralel levha dalga kılavuzundaki bir süreksizliğin etkilerinin incelenmesidir. Geometrik farklılık, materyal farklılığı veya her ikisinden birden kaynaklanan farklılıktan oluşan süreksizlikten dolayı, dalganın bir kısmı iletilmekte ve bir kısmı yansımaktadır. Cihaz tasarımında ve mikrodalga ölçümlerinde, iletilen ve yansıyan güç miktarının hesaplanması önem taşımaktadır. Problemin geometrisi Şekil 3.1.'de görülmektedir. Kılavuzlanmış dalga soldan sağa doğru ilerlemektedir.



Şekil 3.2. Paralel levha dalga kılavuzundaki bir süreksizlik.

Bu problemi incelemek için, dalga kılavuzunun sadece baskın modun sönmeden geçişine olanak sağlayacak frekansta işletildiğini ve yayılma yönünün  $+\vec{x}$  olduğunu varsayalım. Böylece süreksizlikten yeterince uzakta soldaki alanın değerini yazabiliriz.

$$H_z = H_z^{\text{gelen}} + H_z^{\text{yansıyan}} = H_0 e^{-jk_0 x} + RH_0 e^{jk_0 x} \quad (3.47)$$

Yukarıdaki ifadede  $H_0$  sabit bir sayıyı göstermektedir.  $R$  yansıma katsayısı,  $k_0$  ise dalga sayısıdır. Benzer şekilde süreksizlikten yeterince uzakta sağdaki alanın değerini de yazabiliriz.

$$H_z = H_z^{\text{iletilen}} = TH_0 e^{-jk_0 x} \quad (3.48)$$

$T$  iletim katsayısını göstermektedir. Bu durumda problem  $R$  ve  $T$  katsayılarını bulmaktan ibarettir. Süreksizliğin üzerinde ve yakınındaki bölgelerde yüksek modlar da uyarıldıklarından, alan ifadesi bilinen bir şekil almaz. Ancak aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemi çözerek alan değeri bulunabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) + k_0^2 \mu_r H_z = 0 \quad (3.49)$$

Bu kısmi diferansiyel denklemi çözmek için gereken sınır koşulu da, dalga kılavuzunun duvarlarında geçerli olan homojen Neuman sınır koşuludur.

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad (3.50)$$

Ayrıca süreklilik koşulları, elektriksel geçirgenliğin ani değişim gösterdiği yerlerde sağlanmalıdır.

$$H_z^+ = H_z^-, \quad \frac{1}{\epsilon_r^+} \frac{\partial H_z^+}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_r^-} \frac{\partial H_z^-}{\partial n} \quad (3.51)$$

Bu durumda problem, genel olarak anlatılan 2B için sonlu elemanlar metodunki katsayılarla eşleştirilerek, aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir.

$$\Phi = H_z \quad \alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{\epsilon_r} \quad \beta = -k_0^2 \mu_r \quad f = 0 \quad (3.52)$$

Sonlu elemanlar metodunun uygulanabilmesi için, çözüm uzayı sınırlandırılmadır. Bunun için dalga kılavuzunun her iki ucuna da yapay birer sınır konur. Soldaki [AB] doğru parçasıyla, sağdaki de [CD] doğru parçasıyla gösterilmiştir. AB süreksizlikten yeterince uzaktaysa (en az bir dalga boyu) (3.47) kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial x} &\approx -jk_0 H_0 e^{-jk_0 x} + Rjk_0 H_0 e^{jk_0 x} \\ &= jk_0 H_z - 2jk_0 H_0 e^{-jk_0 x} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Bu ifade [AB] sınırında geçerli olan sınır koşulu olacaktır. Aynı şekilde [CD] sınırı için de sınır koşulu elde edilir.

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} \approx -jk_0 H_z \quad (3.54)$$

Problemin tüm verilerini topluca bir kez daha ifade edersek:

$$\begin{aligned} \Phi = H_z \quad \alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{\varepsilon_r} \quad \beta = -k_0^2 \mu_r \quad f = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0, \text{ duvarlarda} \quad \gamma = 0, \quad q = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_r} jk_0 H_z = -\frac{1}{\varepsilon_r} 2jk_0 H_0 e^{-jk_0 x}, \text{ AB üzerinde } \gamma = -\frac{1}{\varepsilon_r} jk_0, \quad q = -\frac{1}{\varepsilon_r} 2jk_0 H_0 \\ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_r} jk_0 H_z = 0, \text{ CD üzerinde} \quad \gamma = -\frac{1}{\varepsilon_r} jk_0, \quad q = 0 \end{aligned}$$

Bu verilerle alanın her noktadaki değeri bulunduktan sonra (3.47) ve (3.48) kullanılarak  $R$  ve  $T$  bulunur.

$$R = \frac{H_z(x_1) - H_0 e^{-jk_0 x_1}}{H_0 e^{-jk_0 x_1}} \quad (3.55)$$

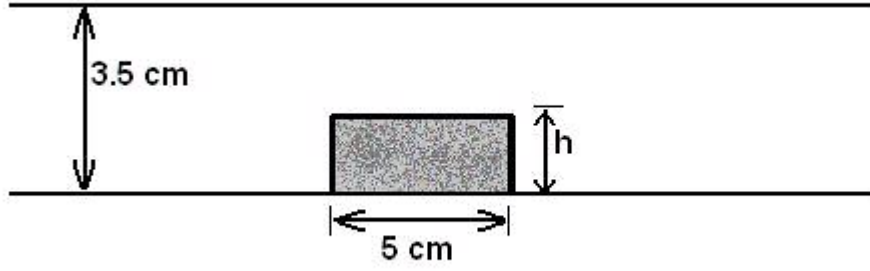
$$T = \frac{H_z(x_2)}{H_0 e^{-jk_0 x_2}} \quad (3.56)$$

$x_1$  ile [AB] sınırının yatay konumu,  $x_2$  ile de [CD] sınırının yatay konumu gösterilmektedir. Ortam kayıpsız ise  $R$  ve  $T$

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (3.57)$$

eşitliğini sağlarlar. Ortam kayıplı ise, gönderilen dalgadan kaybolan miktarın yüzdesi (3.58) ile bulunur.

$$\text{Kayıp Güç Oranı} = 1 - |R|^2 - |T|^2 \quad (3.58)$$



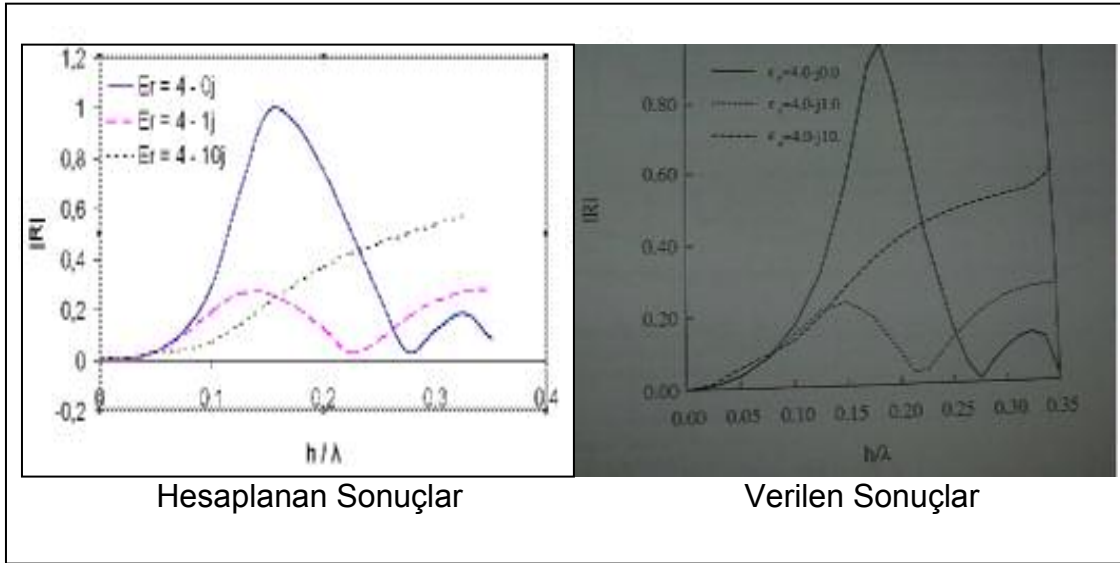
Şekil 3.3. Paralel levha dalga kılavuzundaki bir dielektrik çubuk.

Yukarıda anlatılan problem türü için sayısal bir örneğin geometrik ölçüleri Şekil 3.2.'de görülmektedir. Parametrelerin karşılıkları aşağıda verilmiştir:

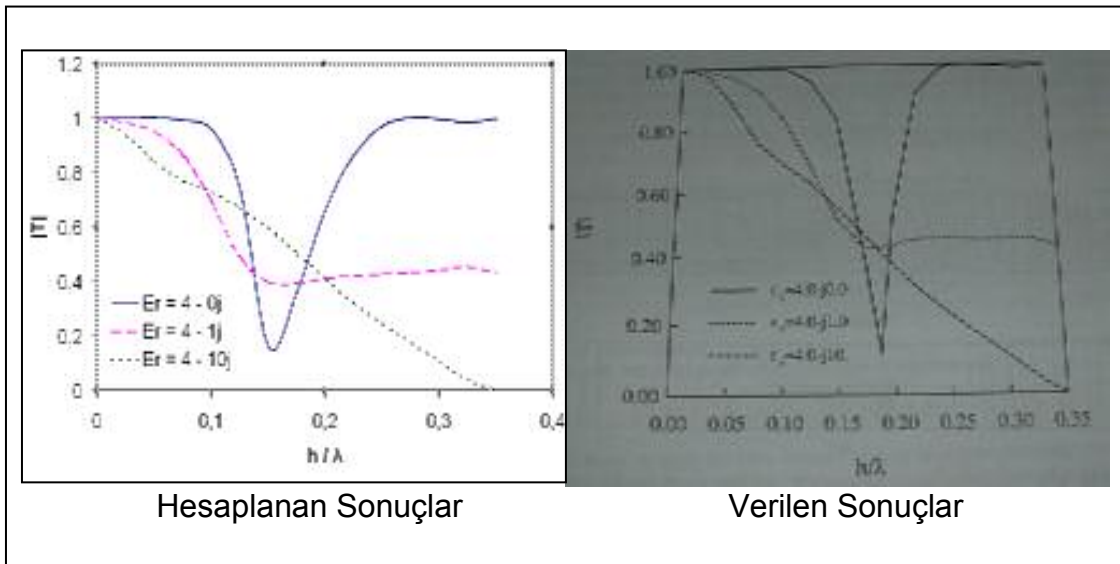
$$\varepsilon_r = \begin{cases} 4 - j0 \\ 4 - j1 \\ 4 - j10 \end{cases} \quad \mu_r = 1 \quad \lambda = 10 \text{ cm} \quad k_0 \cong 62.83 \quad \beta = -k_0^2 \mu_r = -3947,6089$$

Çözümü, [3]'te yer alan bu örnek için verilen sayısal sonuçlar ile yazılan program kullanılarak hesaplanan değerler, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te gösterilmiştir.

Şekilde  $R$  ve  $T$ 'nin dielektrik çubuğun yüksekliğine bağlı olarak değişimi görülmektedir. Bu problemin önemli sonuçlarından biri, kayıpsız ortamda, belli bir yükseklikte tam yansıma görülürken sıfırdan farklı bir başka yükseklikte de tam iletimin görülmesidir.



Şekil 3.4 Yansımaya katsayısının değişimi.

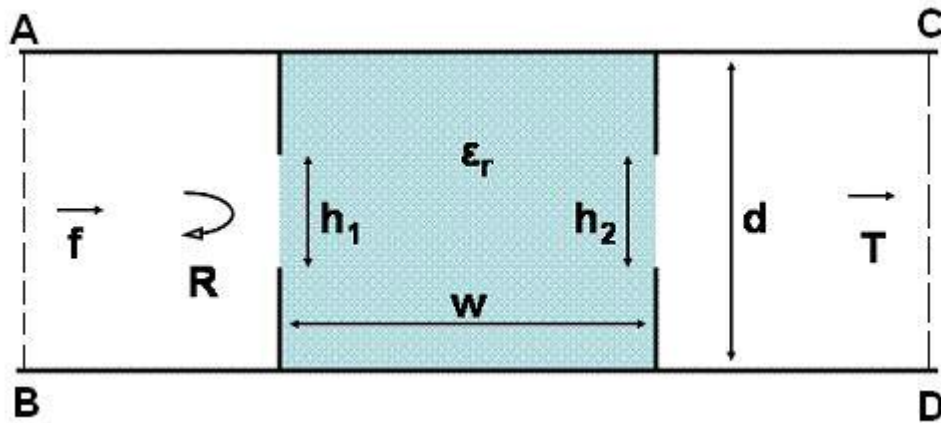


Şekil 3.5. İletim katsayısının değişimi.

## 4. İki İrisli Paralel Levhalı Dalga Kılavuzu Problemi

### 4.1. Problemin Tanımı

2B FEM uygulamalarına ikinci örnek problem ise, paralel levhalar arasında birbirinden belirli bir uzaklıkta iki iris bulunan bir dalga kılavuzunun bağlı permitivitesi ve boyutlarının, rezonans frekansı ve bant genişliğine olan etkilerinin incelenmesidir. Şekil 4.1.'de problemin geometrisi ve ilgili parametreler görülmektedir. Dalga kılavuzunun her iki ucuna da yapay sınırlar konmuş olup, [AB] ve [CD] ile gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Ortasında iki iris bulunan bir dalga kılavuzunun parametreleri.

Dalga kılavuzu, bir ucundan belirli frekanslarda uyarılmakta, elektromanyetik alanın bir kısmı iletilirken, bir kısmı da yansımaktadır. Görülen yapı, bir rezonans devresidir. İrisler arası bölge bağlı permitivitesi  $\epsilon_r$  olan ortam ile dolu olup, iris genişlikleri  $h_1$  ile  $h_2$ , irisler arasındaki mesafe  $w$ , dalga kılavuzunun yüksekliği  $d$  'ye göre, farklı frekanslarda farklı yansıma ve iletim katsayıları elde edilmektedir. Sonuçta,  $R$  ve  $T$  değerleri,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $w$ ,  $d$ ,  $\epsilon_r$  ve *frekansa* bağlı olarak değişim göstermektedir. Bu parametreleri en uygun şekilde seçerek, rezonans frekansını ve bant genişliğini istenen değerlere getirmenin

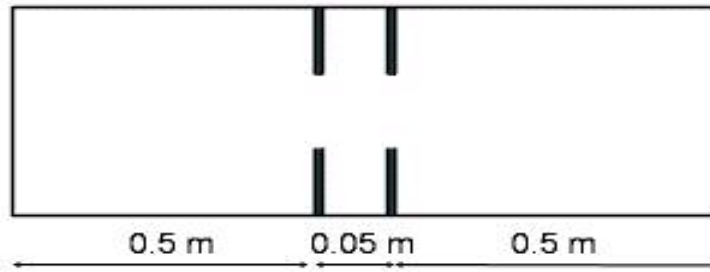
mümkün olup olmadığı incelenecektir.

## 4.2. Çözüm Uzayının Oluşturulması ve Ayrıklaştırılması

### 4.2.1. Çözüm Uzayının Oluşturulması

2B FEM problemini çözebilmek için önce çözüm uzayının oluşturulması gerekir. Bunun için dalga kılavuzu, irislerle belirli bir uzaklıkta iki ucundan sonlandırılmalıdır.

Dalga kılavuzunda sadece TEM modunda bir elektromanyetik dalga irisle yollanmaktadır. Bilindiği üzere, bu modda E ve H'nin hat boyunca bileşeni olmaz. Fakat bu dalga kılavuzunda TE ve TM modlar da oluşabilir. Diğer iki mod TE ve TM, sırasıyla E'nin ve H'nin ilerleme yönünde bileşeni bulunmayan modlardır. İris gibi bir süreksizliğin etrafında ise tüm modlar oluşur; fakat bunlardan TE ve TM olanları eğer frekans yeterince yüksek değilse sönerler (evanescent modes). Genellikle bunlar süreksizlikten 2 dalgaboyu sonra etkilerini tamamen kaybederler. Bu yüzden sonlandırma koşulları en az 2 dalgaboyu uzağa konmalıdır. Çalışılan frekans bölgesi 2-3 GHz arası olduğundan dalga kılavuzunun her iki uca irislerle 0.5 m uzaklıkta sonlandırılması yeterli olmaktadır. Çözüm uzayı, Şekil 4.2.'de görülmektedir.



Şekil 4.2. Çözüm uzayı.



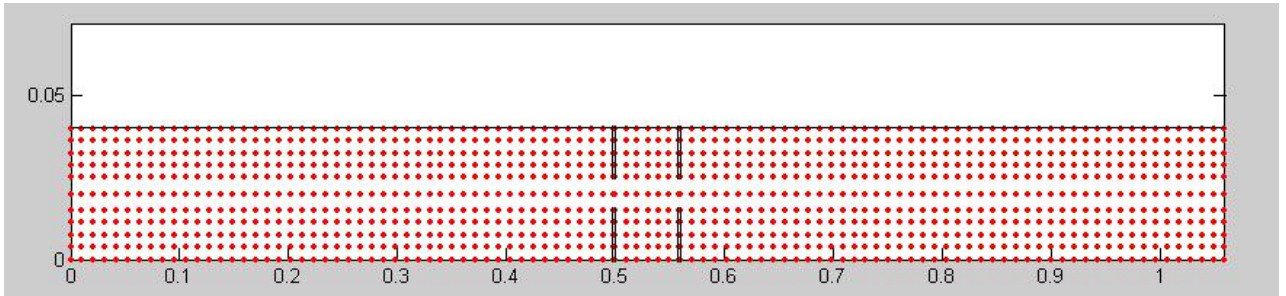
Çözüm uzayı oluşturulurken dikkat edilmesi gereken nokta, irisleri oluşturan duvarların, elektromanyetik alanın geçişine izin vermediğidir. Bu nedenle duvarların her iki tarafında alan değerleri farklı olacaktır. Bunu gerçekleyebilmek için duvarlar belirli bir miktar kalınlaştırılmış ve duvarların her iki yan yüzeylerine bilinmeyen noktalar gelecek şekilde çözüm uzayı oluşturulmuştur. İrisleri oluşturan duvarlara ait detaylı görünüm Şekil 4.3.'te görülmektedir.



Şekil 4.3. Detaylı İris görünümü.

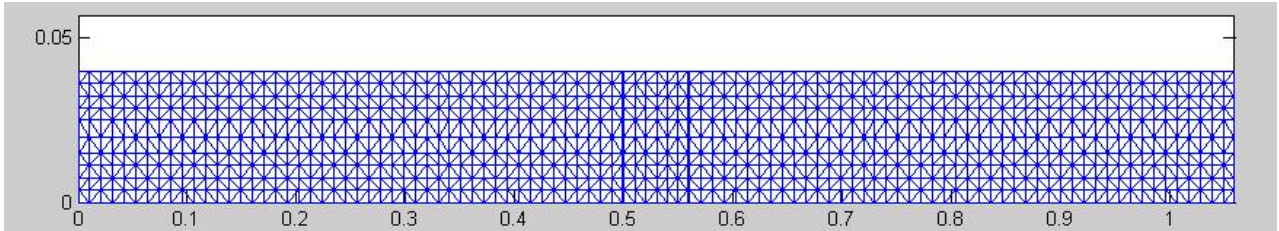
Duvar kalınlığı  $\lambda / 100$  olarak seçilmiştir. 3 GHz için bu değer 1 mm'ye karşılık gelmektedir.

#### 4.2.2. Düğüm Noktalarının Oluşturulması



Şekil 4.4. Düğüm Noktaları.

### 4.2.3. Üçgensel Elemanların Oluşturulması



Şekil 4.5. Üçgensel Elemanlar.

Bu problem için parametreleri yazarsak:

$$\begin{aligned} \Phi = H_z & & \alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{\varepsilon_r} & & \beta = -k_0^2 \mu_r & & f = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0, \text{ duvarlarda} & & \gamma = 0, & & q = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_r} jk_0 H_z = -\frac{1}{\varepsilon_r} 2jk_0 H_0 e^{-jk_0 x}, \text{ AB üzerinde} & & \gamma = -\frac{1}{\varepsilon_r} jk_0, & & q = -\frac{1}{\varepsilon_r} 2jk_0 H_0 \\ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_r} jk_0 H_z = 0, \text{ CD üzerinde} & & \gamma = -\frac{1}{\varepsilon_r} jk_0, & & q = 0 \end{aligned}$$

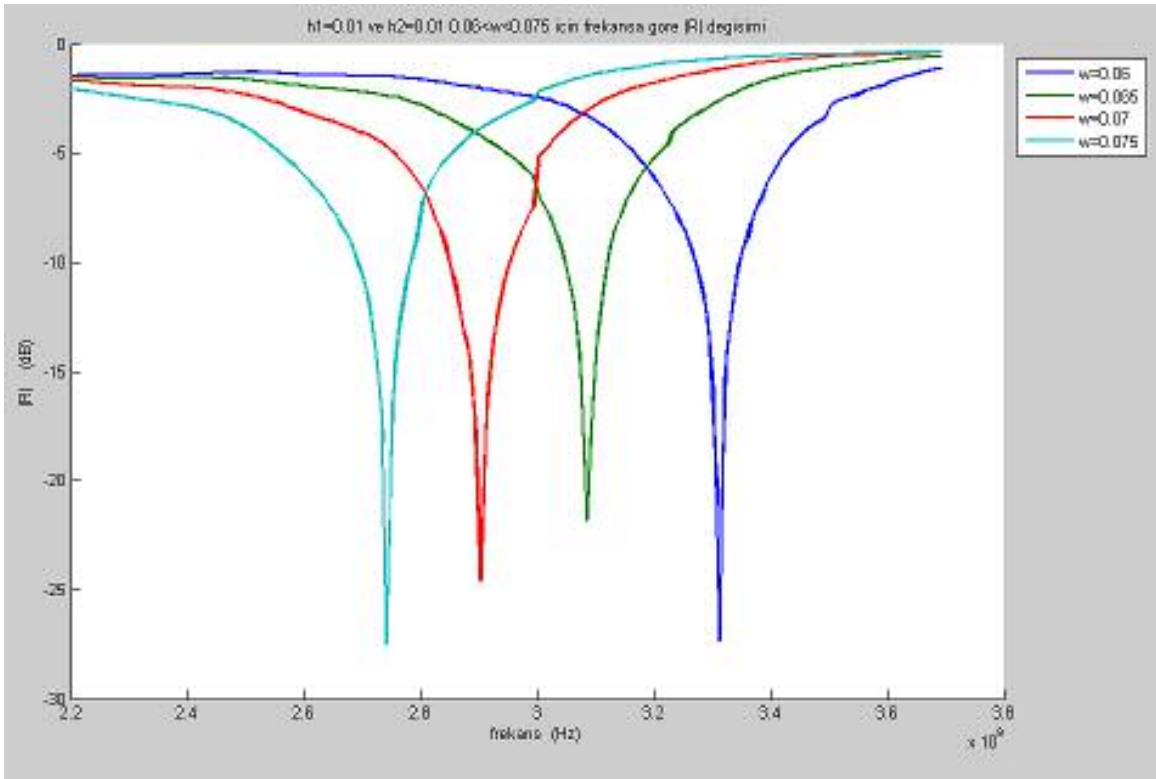
Bu durumda verilen parametrelere karşılık gelen iletim problemi, düğüm noktaları üzerindeki H değerlerinin bulunmasıdır. Daha sonra bu düğüm noktalarından dalga kılavuzunun iki ucunda olanları üzerindeki H değerleri kullanılarak  $R$  ve  $T$  değerleri hesaplanır.

Denklemler (3.55) ve (3.56) kullanılarak ve parametreler yerine konarak,  $R$  ve  $T$  değerleri elde edilirse, rezonans sisteminin hangi parametrelere göre nasıl tepki verdiği incelenebilir. Aşağıda farklı parametrelere göre elde edilen sonuçlara bakılarak, dalga kılavuzunun frekans bağımlılığının nasıl değiştiği incelenecektir.

### 4.3.Parametre Değişimlerine Göre Frekans Bağımlılığı

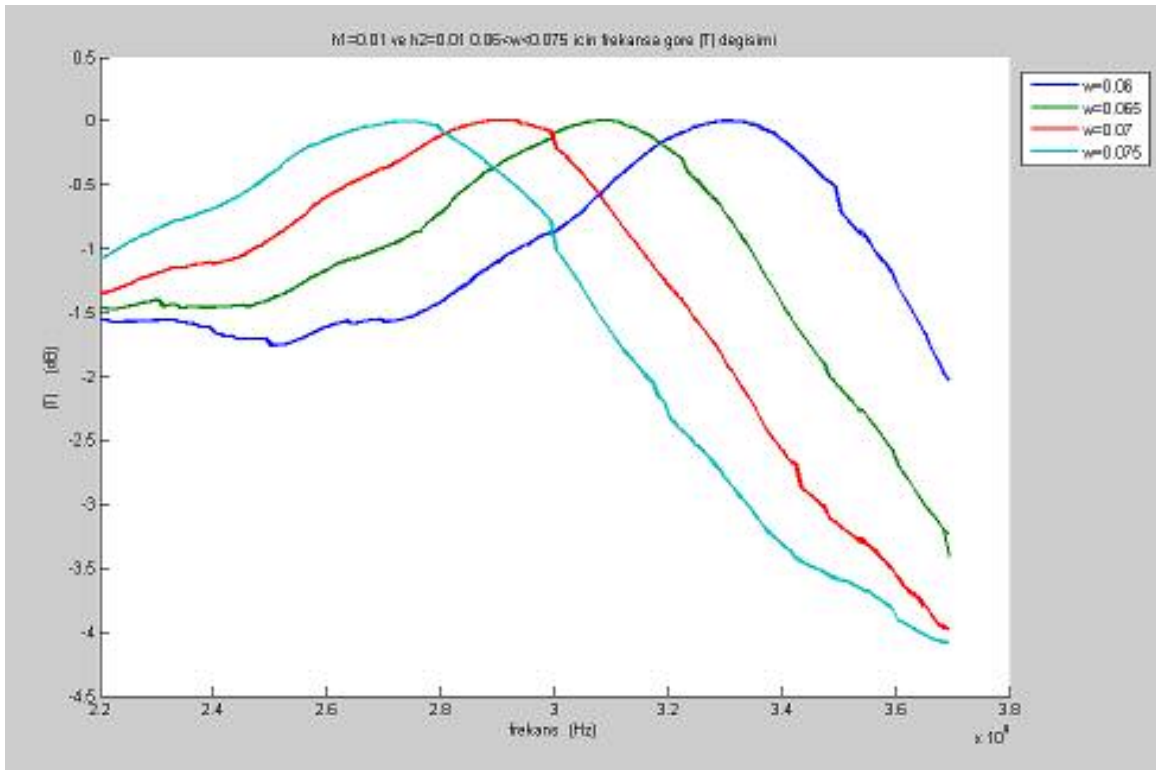
#### 4.3.1. “ $w$ ” Değişimi

İrislerden oluşan sisteminin rezonans frekansının belirlenmesinde en etkili parametre, irisler arası mesafedir. Gelen elektromanyetik enerji irislerden geçebilmekte, fakat büyük bir kısmı ise iris kenarlarındaki duvarlardan yansımaktadır. Bunun sonucunda enerjinin büyük bölümü irisler arasındaki bölgede hapsedilmekte ve dar bir frekans aralığında ise irislerden geçmektedir. Yani bir rezonans sistemi oluşmaktadır. İrisler arası mesafe olan  $w$  parametresine bağlı rezonans frekansı değişimi Şekil.4.6. ve Şekil.4.7.de görülmektedir.



Şekil.4.6.Farklı  $w$  değerleri için  $|R|$  değerleri.

Şekil 4.6. da görüldüğü üzere,  $0.06 < w < 0.075$  aralığında, frekansa göre  $|R|$  değişimi incelenmiştir. Dört farklı  $w$  değeri için çizdirilen grafikler yorumlandığında,  $|R|$  büyüklüğünün keskin düşüş gösterdiği frekanslarda rezonans olduğu anlaşılmaktadır. Bu frekans bölgesinin dışındaki frekanslarda elektromanyetik alanın büyük bölümü geri yansımaktayken, rezonans bölgesinde iletilmektedir. Birinci ve ikinci iris değerleri  $h_1=0.01$   $h_2=0.01$  ve  $w=0.060$  değeri için yaklaşık olarak  $f=3.3$  GHz 'de rezonans oluşmaktadır.  $w$  değeri sırasıyla 0.065, 0.070, 0.075 olarak değiştirildiğinde rezonans frekansının sırasıyla yaklaşık olarak 3.1 GHz, 2.9 GHz, 2.75 GHz değerlerine kaydığı görülmektedir.



Şekil 4.7. de ise, yine  $0.06 < w < 0.075$  aralığında, frekansa göre  $|T|$

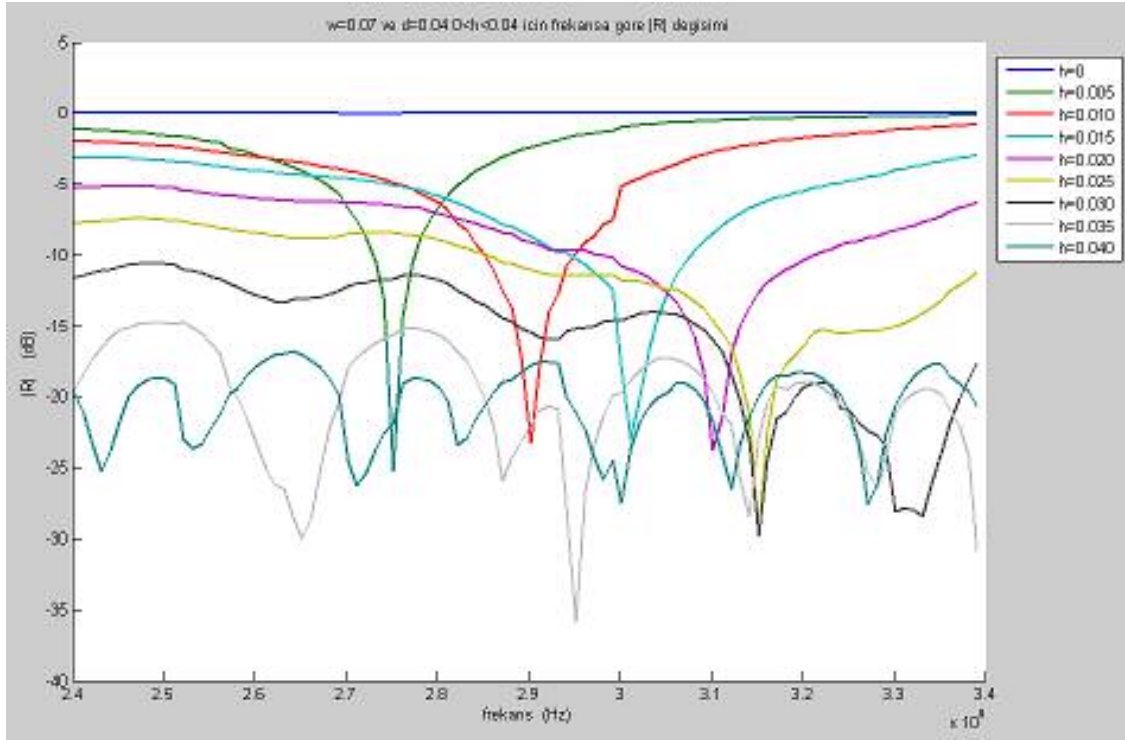
değişimi incelenmiştir. Dört farklı  $w$  değeri için çizdirilen grafikler yorumlandığında,  $|T|$  büyüklüğünün artış gösterdiği frekanslarda rezonans olduğu anlaşılmaktadır. Birinci ve ikinci iris değerleri  $h_1=0.01$   $h_2=0.01$  ve  $w=0.060$  değeri için yaklaşık olarak  $f=3.3$  GHz 'de rezonans oluşmaktadır.  $w$  değeri sırasıyla 0.065, 0.070, 0.075 olarak değiştirildiğinde rezonans frekansının sırasıyla yaklaşık olarak 3.1 GHz, 2.9 GHz, 2.75 GHz değerlerine kaydığı görülmektedir. Şekil 4.7. de görülen rezonans frekanslarının, Şekil 4.6. daki rezonans frekanslarıyla örtüştüğü gözlemlenmektedir.

Sonuç olarak, rezonans frekansının, irisler arası uzaklığa hassasiyetinin olduğu ve irisler arası mesafe arttıkça rezonans frekansının daha düşük frekanslara kaydığı gözlenmektedir. Bu durum, rezonans sistemlerinin genel yapısına uygunluk göstermektedir.

#### 4.3.2. “ $h$ ” Değişimi

İris genişlikleri  $h_1$  ve  $h_2$  değerleri, aktarılan elektromanyetik enerji miktarını belirlemekte ve rezonans frekansı ile bant genişliğini etkilemektedir. İrislerin tamamen kapalı olduğu durumda hiçbir enerjinin aktarılmaması, doğal bir sonuçtur. İrislerin tamamen açık olduğu, yani hiç iris olmadığı durumda ise herhangi bir frekansta rezonans görülmemesi beklenir. İrislerin genişlikleri aynı olacak şekilde  $h_1$  ve  $h_2$  değerleri değiştirilerek frekansa göre değişim sonucu Şekil 4.8., Şekil 4.9. ve Şekil 4.10. da görülmektedir.

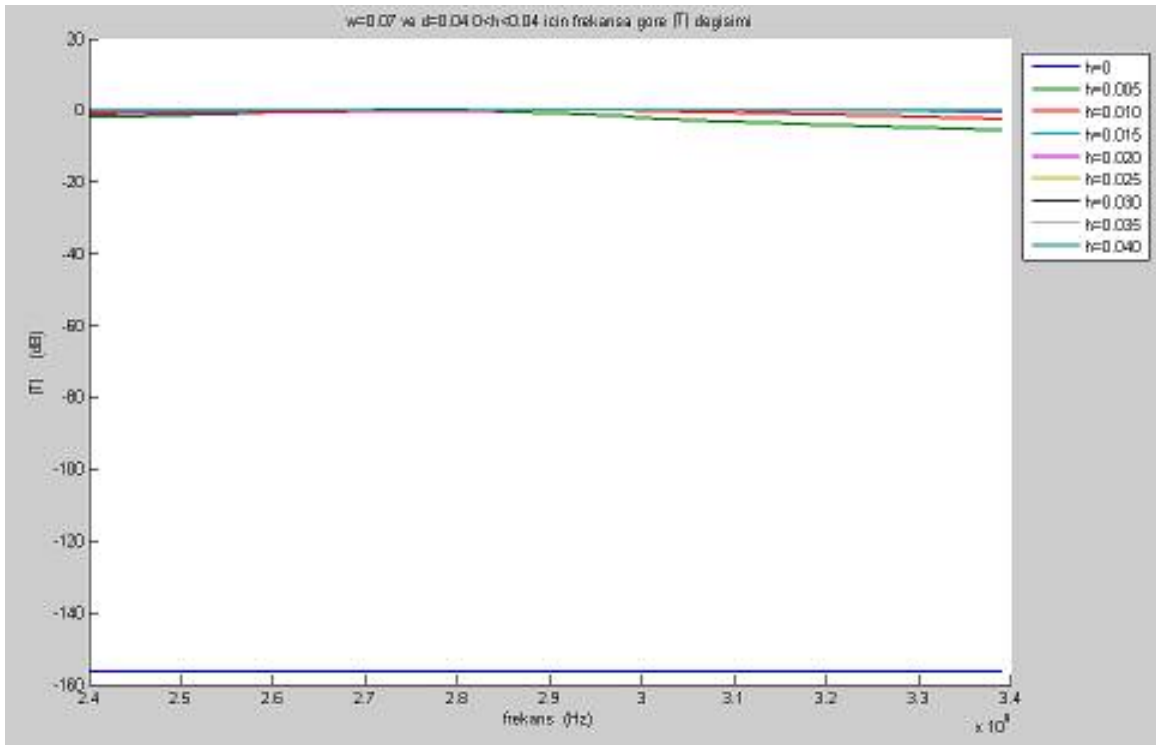
Şekil 4.8. de,  $w=0.07$ ,  $d=0.04$  değerleri için  $0 \leq h \leq 0.04$  aralığında  $|R|$  değişiminin inceleme sonucu görülmektedir.  $h_1 = h_2 = h=0$  değeri, yani irislerin tam kapalı olduğu durum için tüm frekanslarda tam yansıma görülmektedir.



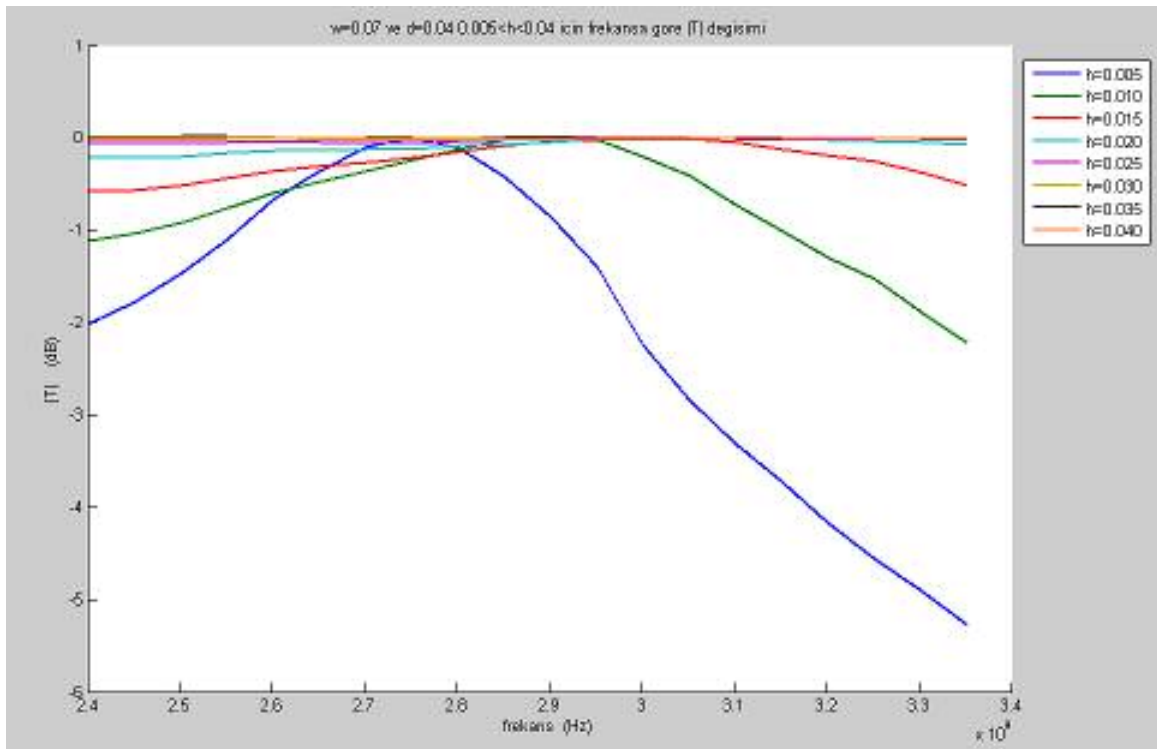
Şekil 4.8. Farklı  $h$  değerleri için  $|R|$  değerleri.

$h=0.005$  değeri için  $f=2.75$  GHz 'de rezonans olduğu görülmüştür.  $h$  değerleri arttıkça rezonans, yüksek frekanslara kaymakta ve yansımaya katsayısının düşme gösterdiği frekans bölgelerinin genişlediği görülmektedir.  $h=0.025$  değeri için  $f=3.15$  GHz 'de rezonans olduğu görülmekte ve bunun üzerindeki  $h$  değerleri için rezonans yapısının kaybolduğu, sistemin frekans seçiciliğinin kalmadığı görülmektedir.

Şekil 4.9. da,  $w=0.07$ ,  $d=0.04$  değerleri için  $0 < h < 0.04$  aralığında  $|T|$  değişiminin inceleme sonucu görülmektedir. Yine  $h=0$  değeri için tüm frekanslarda tam yansımaya görülmektedir. İrislerin biraz açık olduğu  $h=0.005$  değerinden itibaren, iletimin başladığı görülmektedir.



Şekil 4.9. Farklı  $h$  değerleri için  $|T|$  değerleri.



Şekil 4.10. İletimin olduğu farklı  $h$  değerleri için  $|T|$  değerleri.

Şekil 4.9. da iletimin olduğu durumlar üst üste bindiği için, iletimin başladığı  $h=0.005$  değerinden itibaren farklı  $h$  değerlerine göre  $|T|$  değişimi daha detaylı olarak Şekil 4.10. da görülmektedir. Şekil 4.10. incelendiğinde  $f=2.75$  GHz 'de rezonans olduğu görülmekte,  $h$  değerleri arttıkça rezonansın, yüksek frekanslara kaydığı ve iletim olan frekans bölgesinin genişlediği görülmektedir.  $h=0.015$  değeri için yaklaşık  $f=3$  GHz 'de rezonans olduğu görülmekte ve bunun üzerindeki  $h$  değerleri için rezonans yapısının yavaş yavaş kaybolduğu, sistemin frekans seçiciliğinin kalmadığı görülmektedir.

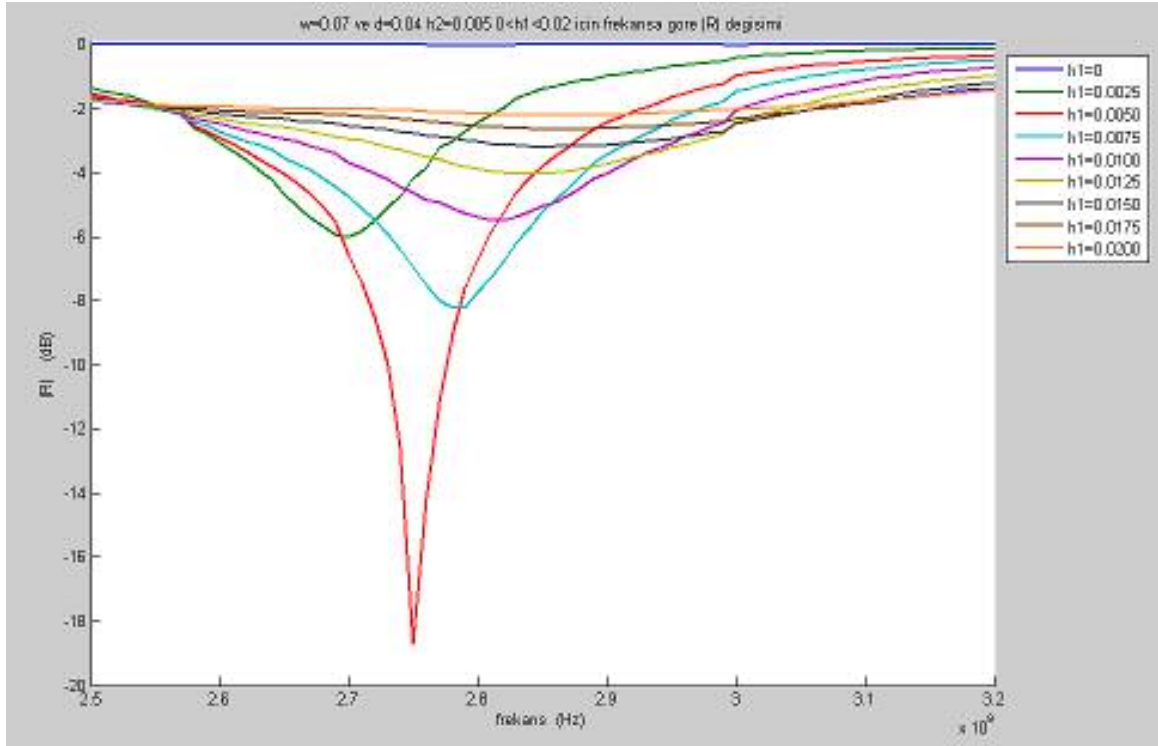
Sonuç olarak, iris genişlikleri dalga kılavuzunun rezonans sistemi haline gelmesini etkilemektedir. İris genişlikleri arttıkça, daha çok frekansta iletim sağlanmakta ve sistemin frekans seçiciliği azalmaktadır. Dolayısıyla, frekans seçiciliğinin fazla olması için, iris genişlikleri mümkün olduğunca küçük seçilmelidir.

Buraya kadar, irislerin genişlikleri değiştirilirken ikisi birden artırılıp, ikisi birden azaltılmıştır. Her bir iris değişiminin rezonans frekansına etkisini görmek için, önce  $h_2$  belirli bir değerde sabit tutulup  $h_1$  parametresi, sonra da  $h_1$  belirli bir değerde sabit tutulup  $h_2$  parametresi değiştirilecektir.

#### 4.3.2.1. “ $h_1$ ” Değişimi

$h_1$  değişiminin rezonans frekansına etkisini görmek için, önce  $h_2=0.005$  değerinde sabit tutulmakta,  $0 \leq h_1 \leq 0.02$  aralığında aldığı bazı değerler için sonuç Şekil 4.11. de görülmektedir.



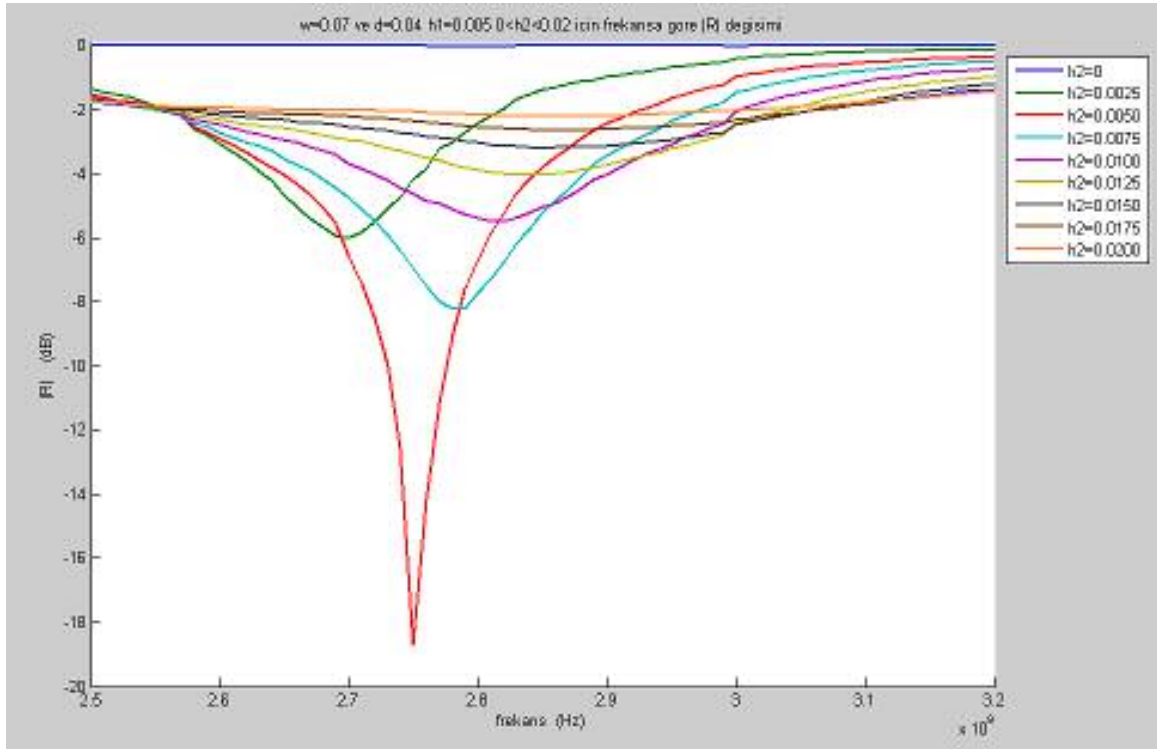


Şekil 4.11. Farklı  $h_1$  değerleri için  $|R|$  değerleri.

Rezonansın en belirgin görüldüğü değer,  $h_1 = 0.005$  değeridir. Bunun dışındaki bazı değerlerde de rezonans olsa da,  $h_1 = h_2 = 0.05$  için  $f = 2.75$  GHz 'de belirgin bir rezonans oluştuğu görülmektedir.

#### 4.3.2.2. “ $h_2$ ” Değişimi

$h_2$  değişiminin rezonans frekansına etkisini görmek için, önce  $h_1 = 0.005$  değerinde sabit tutulmakta,  $0 \leq h_2 \leq 0.02$  aralığında aldığı bazı değerler için sonuç Şekil 4.12. de görülmektedir.

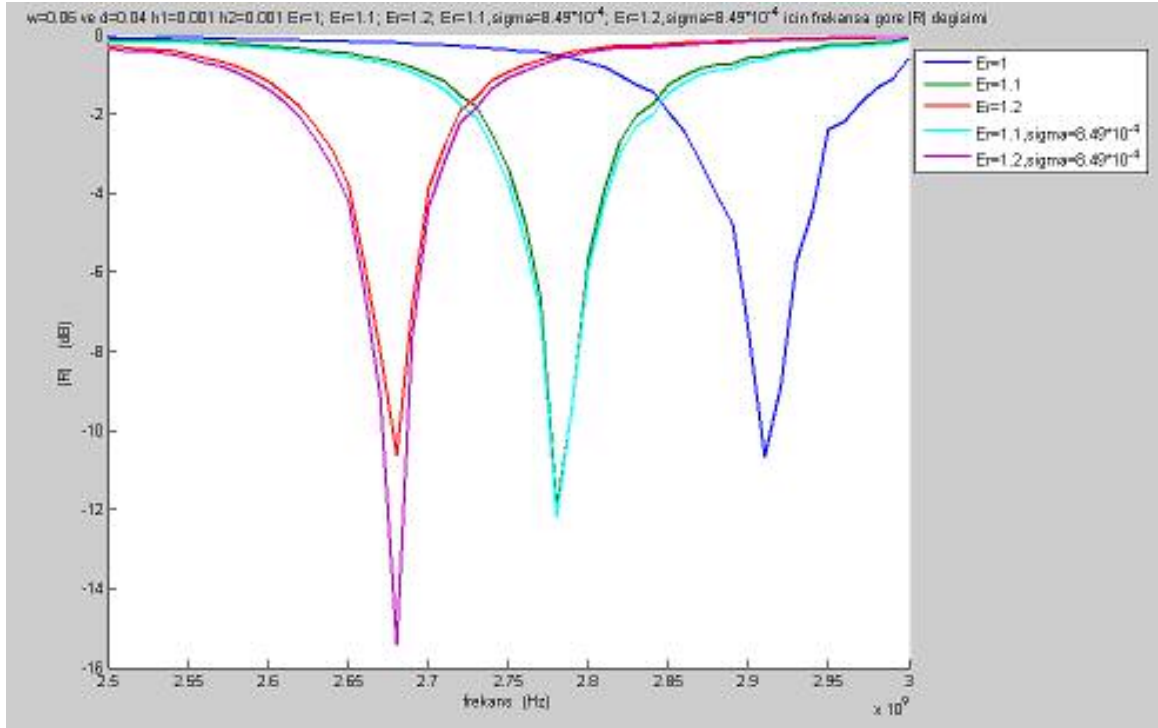


Şekil 4.12. Farklı  $h_2$  değerleri için  $|R|$  değerleri.

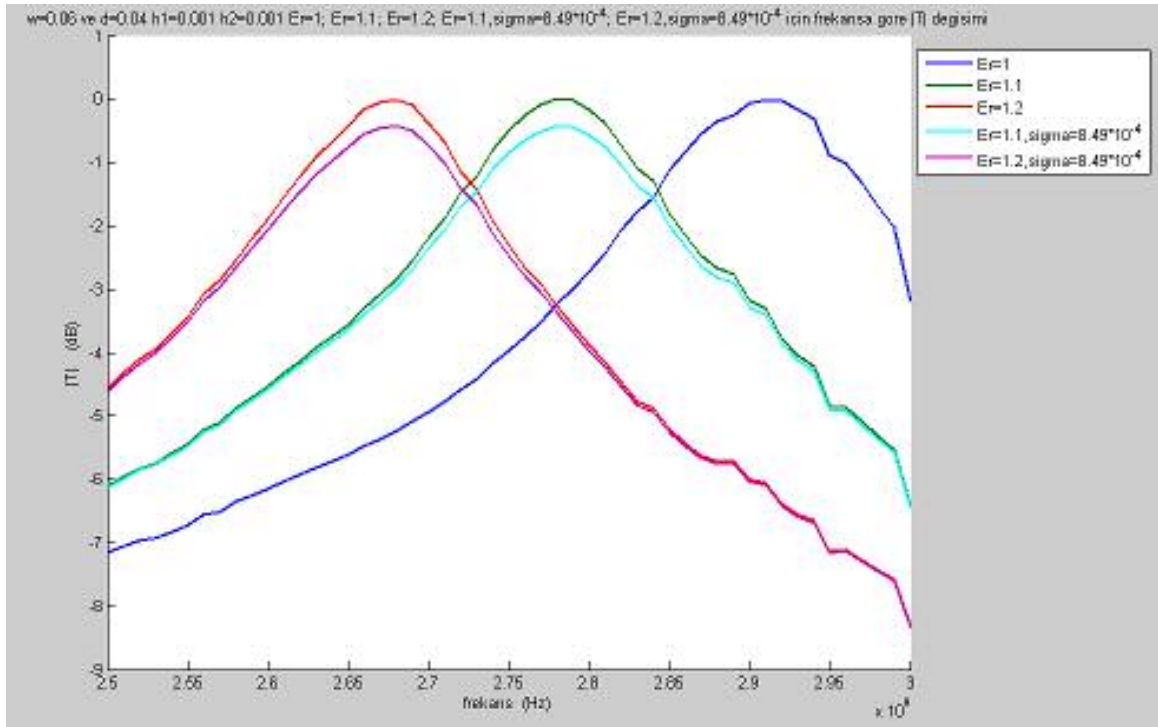
Rezonansın yine  $h_1 = h_2 = 0.05$  için  $f = 2.75$  GHz 'de en belirgin olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, irislerden oluşan bu rezonans sisteminin frekans seçiciliğinin en fazla olması için,  $h_1 = h_2$  eşitliğinin sağlanması gerekir.

### 4.3.3. “ $\epsilon_r$ ” Değişimi

Buraya kadar, dalga kılavuzunun irisler arası bölgesi ve geri kalan bölümünün boş olduğu, yani  $\epsilon_r = 1$  olduğu varsayılarak işlemler gerçekleştirilmiştir. Irisler arası bölgenin bağıl permitivitesi  $\epsilon_r$ 'nin 1 ve 1'den farklı ortamlardan oluştuğu durumlarda, rezonans frekansının değişimi Şekil 4.13. ve Şekil 4.14.te gösterilmiştir.



Şekil 4.13. Farklı  $\epsilon_r$  değerleri için  $|R|$  değişimi.



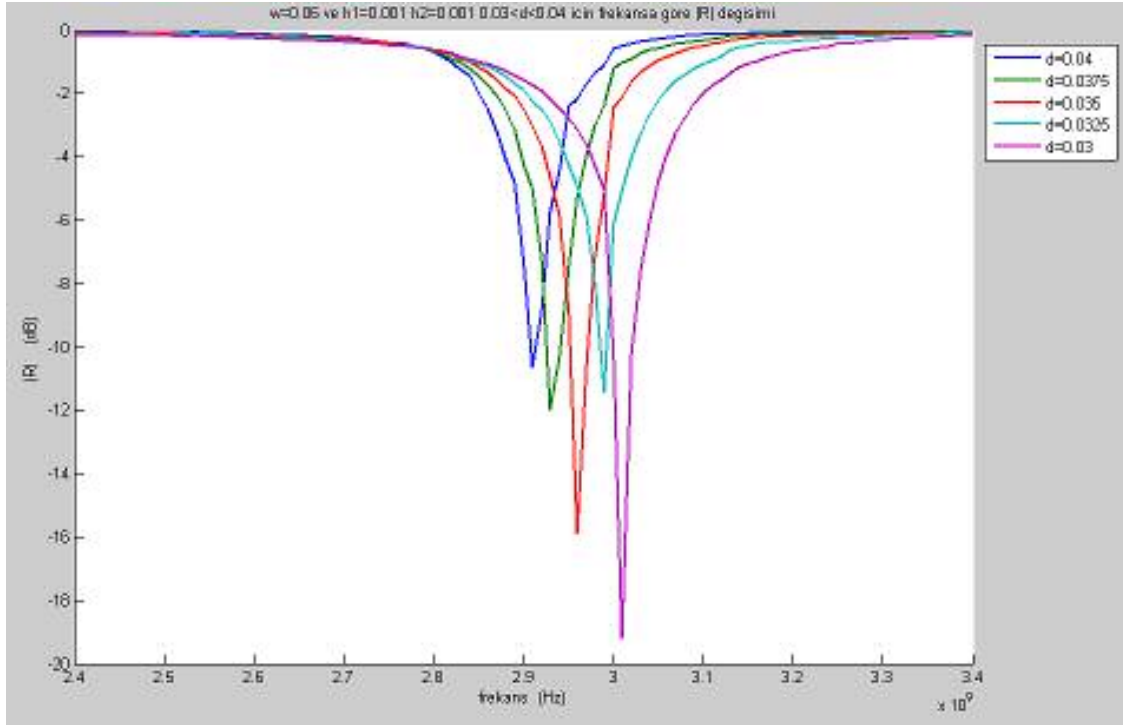
Şekil 4.14. Farklı  $\epsilon_r$  değerleri için  $|T|$  değerleri.

Şekil 4.13. ve Şekil 4.14. te  $\epsilon_r=1$ , 1.1 ve 1.2 reel permitivite değerleri ile,  $\epsilon_r=1.1$  ;  $\sigma=8.49 \times 10^{-4}$  ve  $\epsilon_r=1.2$  ;  $\sigma=8.49 \times 10^{-4}$  kompleks permitivite değerleri için, frekansa göre sırasıyla  $|R|$  ve  $|T|$  değişimleri görülmektedir.  $\epsilon_r$  değerinin artmasıyla rezonans frekansının daha düşük frekanslara kaydığı, iletkenliğin ise bir miktar kayba yol açarak, iletilen elektromanyetik enerjinin azalmasına neden olduğu görülmektedir.

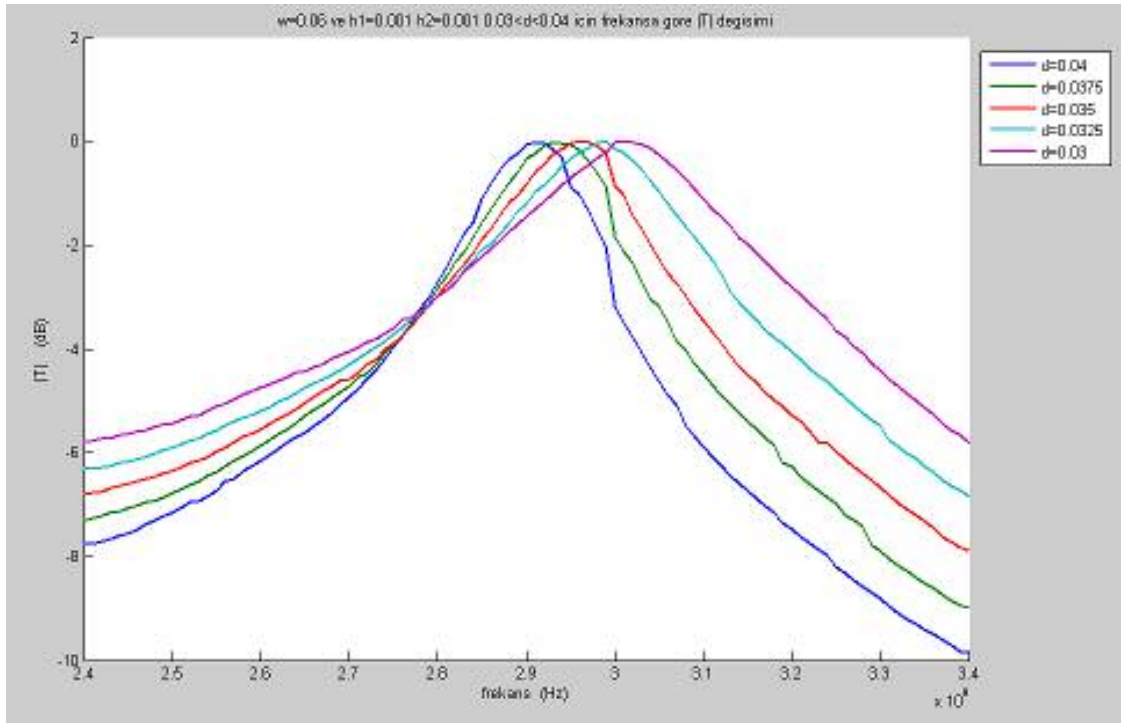
$\epsilon_r$  değerinin artmasıyla, irisler arası bölgede aynı frekanstaki bir dalğanın dalga boyu küçülür. İrisler arası uzaklık, metre cinsinden aynı kalmaktayken, dalga boyu insinden artmaktadır. Bu artış,  $\epsilon_r$  değerinin sabit tutulup,  $w$  değerinin artırılmasına benzer etki oluşturur.

#### 4.3.4. “ $d$ ” Değişimi

Rezonans frekansı etkileyen bir diğer parametre de dalga kılavuzunun yüksekliği,  $d$  dir.  $d$  değeri, belirli bir değer üzerine çıkamaz. Bunun nedeni, dalga kılavuzunun yüksekliği arttıkça, **TEM** haricindeki modların da iletmeye başlanmasıdır. Sınır koşulları temel mod **TEM** için geçerlidir. Diğer modların da devreye girmesiyle, dalga kılavuzunun iki ucunda kabul edilen sınır koşulları geçersiz olur. Sınır koşulları bu yeni duruma uyarlanmalıdır. Bunun sonucunda, parametreler değişeceğinden, öncekinden farklı bir problemin çözülmesi anlamına gelir.  $0.03 \leq d \leq 0.04$  aralığında aldığı bazı değerler için, rezonans frekansının değişimi Şekil 4.15. ve Şekil 4.16.te gösterilmiştir.



Şekil 4.15. Farklı  $d$  değerleri için  $|R|$  değişimi.



Şekil 4.16. Farklı  $d$  değerleri için  $|T|$  değerleri.

## 5. SONUÇLAR

Bu tezde iki irisli bir dalga kılavuzunda yansıma ve iletim durumları sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

Rezonans frekansının, yukarıda belirtilen parametrelere bağlı değişimi incelendiğinde;

(a) irisler arası mesafenin ( $w$ ), bağıl dielektrik sabitinin ( $\epsilon_r$ ) ve dalga kılavuzunun yüksekliğinin ( $d$ ) artırılmasıyla, rezonans frekansının daha düşük frekanslara kaydığı,

(b) iris genişliklerinin birbirine eşit olmasının ( $h_1 = h_2 = h$ ) ve mümkün olduğunca küçük değerler almalarının, dar bir frekans bölgesinde rezonans oluşmasını sağladığı,

(c) iletkenliğin, kompleks permitivite oluşturarak bir miktar kayba yol açtığı ve iletilen elektromanyetik enerjinin azalmasına neden olduğu görülmektedir.

Bu parametreler değiştirilerek, herhangi bir frekansta ve istenen bant genişliğine sahip bir rezonans elde edilebilir. Dar bir frekansta yayın yapmaya ihtiyaç duyan sistemlerde, ilave bir filtreleme devresi olmaksızın kullanılabilir. Bir tür susturucu sistemidir. İzin verilen frekans bölgesi haricindeki tüm frekanslar susturulur.

Bu tür bir sistemin, dar bant iletim teknikleri kullanan, yüksek takatli haberleşme sistemlerinde, filtre kademesi olarak kullanılabileceği değerlendirilmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] H.C.Martin and G.F Carey, *Introduction to Finite Element Analysis:Thory and Application*, New York Mcgraw-Hill,1973.
- [2] D.H.Norrie and G.de Vries, *The Finite Element Method:Fundamentals and Applications*, New York Academic Pres,1973.
- [3] Jianming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics.*, Second Edition, John Wiley & Sons Inc., 1997.
- [4] Yuanxun Wang, Tatsuo Itoh,“ *Envelope-Finite-Element (EVFE) Technique— A More Efficient Time-Domain Scheme*”., IEEE Transections on Microwave Theory and Techniques, Vol.49, No.12, December 2001.
- [5] R.D.Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, New York John Wiley & Sons Inc., 1981.

## ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Konya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Konya'da tamamladı. 1993 yılında girdiği Ankara Fen Lisesi'nden 1996 yılında mezun oldu. 1997 yılında girdiği Yeditepe Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünden 2001 yılında mezun oldu.

2002 yılında Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisansa başladı. 2003 yılında Hava Kuvvetleri Komutanlığı'nda Muhabere Subayı olarak göreve başlaması nedeniyle akademik çalışmalarına bir süre ara verdi. Hava Kuvvetleri Komutanlığında görev yapmaktayken 2006 yılında Yüksek Lisans eğitimine kaldığı yerden devam ederek, tez teslim aşamasına geldi.

Halen Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans yapmaktadır.