T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ İÇİN İKİ ADIMLI FARK ŞEMALARI

Mehmet Emir KÖKSAL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

GEBZE

2009

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ

ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ İÇİN İKİ ADIMLI FARK ŞEMALARI

Mehmet Emir KÖKSAL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANLARI

Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

GEBZE

2009

ÖZET

TEZ KONUSU: **Hiperbolik Diferansiyel Denklemleri İçin İki Adımlı Fark Şemaları**

YAZAR ADI: **Mehmet Emir KÖKSAL**

Bu tezde Hilbert uzayında öz-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü diferansiyel denklemlerinin başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + A(t)u(t) = f(t) \quad (0 \le t \le T), \\ u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \end{cases}$$

ele alınmıştır. Operatör yaklaşımı uygulanarak bu başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamakdan çeşitli fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Bu fark şemalarının çözümleri için elde edilen teorik sonuçların doğruluğu sayısal örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Denklem, Fark Şemaları, Kararlılık

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS: **Two-Step Difference Schemes for Hyperbolic Differential Equations**

AUTHOR: **Mehmet Emir KÖKSAL**

In this thesis the initial value problem

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + A(t)u(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \\ u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \end{cases}$$

for differential equations in a Hilbert space H with the self-adjoint positive definite operators $A(t)$ is considered. Applying the operator approach, various second order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of this initial value problem are presented. The stability estimates for the solution of these difference schemes are established. The theoretical statements for the solution of these difference schemes are supported by the results of numerical experiments.

Keywords: Hyperbolic Equation, Difference Schemes, Stability

TEŞEKKÜR

Akademik hayata atıldığım günden bugüne kadar derin ve değerli bilgilerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, bu sayede karşılaşmış olduğum bir çok problemde aydınlatıcı bilgileriyle yol gösteren ve çalışmış olduğum alanlarda önüme derin ufuklar açan çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e teşekkürü birinci borç bilerek saygılarımı sunarım.

Pek çok konuda karşılaştığım problemleri değerli görüş ve bilgileri ile pratik ve sağlam çözümler üretme konusundaki yardımlarını hiçbirzaman benden esirgemeyen sayın Prof. Dr. Tahir ALIYEV AZEROĞLU'na çok teşekkür ederim.

Çalışma alanındaki bilgilerini benimle paylaşma konusunda samimi, candan ve içten desteğini hiçbirzaman esirgemeyen kıymetli hocam ve danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a teşekkür ederim.

Engin ve derin bilgileriyle, eksiklerimin farkına varmam ve bu konuda kendimi geliştirme ve yenilememde herzaman bana ışık tutan çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Şennur SOMALI' ye teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Öğrenciliğimin en zor anlarında dahi değerli bilgi ve tecrübeleriyle yardımlarını esirgemeyip ayakda durmama destek olan ve karşılaştığım problemlerin çözümünde bana ağabeylik yapan sayın Prof. Dr. Hamit SERBEST' e teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

Son olarak akademik olarak karşılaşmış olduğum her türlü problemde kırk yılı aşan akademik tecrübesiyle yardımlarını benden eksik etmeyen çok değerli babam sayın Prof. Dr. Muhammet KÖKSAL'a çok teşekkür eder her başarımda payı olduğunu belirtmek isterim.

Ayrıca doktora öğrenciliğim boyunca yapmış olduğum araştırmaları gerçekleştirmemiz konusunda gerekli ortamı ve imkanı sunan, karşılaşmış olduğum her türlü problemde engin bilgi ve önerileriyle herzaman çözüm üretme konusunda idari desteğini anlık dahi olsa esirgemeyen, ilime ve bilim adamına verdiği önem ile herzaman çok daha başarılı olmamız konusunda bize inanç, azim ve şevk aşılayan çok değerli sayın rektörüm Prof. Dr. İbrahim Alinur BÜYÜKAKSOY hocama çok teşekkür edip şükranlarımı belitir ve her daim başarılı olmayı kendisine bir borç bilerek saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

1 GİRİŞ

Akışkanlar mekaniğindeki bir çok problemde, ısı akışı, füzyon süreci, matematiksel biyoloji ve diğer pek çok fiziksel alanlarda karşımıza hiperbolik tipteki diferansiyel denklemler çıkmaktadır. Bu tip denklemlerle fiziksel olayların modelleri ifade edilebilir. Bu tipteki denklemler için başlangıç-sınır değer probleminin çözüm metotları üzerine kapsamlı olarak bir çok araştırma yapılmıştır. (bkz. [Sobolevskii, P. E. ve Pogorelenko, V. A., 1967], [Sobolevskii, P. E. ve Chebotaryeva, L. M., 1977], [Ashyralyev, A. ve Muradov, I., 1995], [Mohanty, R. K., Jain, M. K. ve George, K., 1996], [Ashyralyev, A. ve Muradov, I., 1998], [Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2001], [Samarskii, A. A., Gavrilyuk, I. P., ve Makarov, V. L., 2001], [Kiguradze, T. ve Lakshmikantham, V., 2002], [Mohanthy, R. K., 2004], [Ashyralyev, A. ve Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. ve Yursever, A., 2004], [Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2005], [Mohanty, R. K., 2005], [Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., 2005], [Li, W., Sun, Z., ve Zhao, L., 2005], [Ashyralyev, A. ve Ozdemir, Y., 2005]).

Bu tezde, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + A(t)u(t) = f(t) \quad (0 \le t \le T), \\ u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \end{cases} \tag{1.1}$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır. Bilindiği gibi, hiperbolik denklemler için çeşitli başlangıç-sınır değer problemleri (1.1) sınır değer problemine dönüştürülebilir. (bkz. [Krein, S. G., 1966] ve [Fattorini, H. O., 1985]).

Aşağıdaki şartları sağlayan $u(t)$ fonksiyonu (1.1) probleminin çözümüdür:

i. $u(t)$ fonksiyonu, $[0, T]$ aralığında ikinci türevi sürekli olan bir fonksiyondur. Aralığın sınır noktalarındaki türevler, uygun tek taraflı türevler olarak anlaşılır.

ii. $u(t)$ fonksiyonu, $A(t)$ operatörünün tanım kümesinin elemanıdır ve $A(t)u(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığında süreklidir.

iii. $u(t)$ fonksiyonu, (1.1) denklemini ve bu denklemin başlangıç koşullarını sağlar.

Kararlılığın zaman ve konum değişkenlerine göre τ ve h olan grid adımlarının birbirine bağlı olduğu varsayımıyla kurulduğu hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler için fark şemaları üzerine yapılmış pek çok çalışma vardır. (bkz. [Piskarev, S., 1984], [Piskarev, S., 1986], [Piskarev, S., 1989] ve [Ashyralyev, A., 1989]). Özellikle soyut olarak ifade edilirse bunun anlamı $\tau \to 0$ iken $\tau \left\| A_{\tau,h} \right\| \to 0$ koşulu sağlanır.

Önemle ilgilenilen bir husus hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler için yüksek basamaktan doğruluklu mutlak kararlı fark şemalarının incelenmesidir; bu durumda kararlılık τ ve h grid adımları üzerinde hiçbir varsayım yapılmadan kurulmuştur. (1.1) probleminin yaklaşık çözümü için kullanılan birinci basamaktan doğruluklu hassas mutlak kararlı fark şemasının

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + A_k u_{k+1} = f_k, \\ A_k = A(t_k),\ f_k = f(t_k),\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1,\ N\tau = T, \\ \tau^{-1}(u_1 - u_0) + iA_1^{1/2} u_1 = iA_0^{1/2} u_0 + \psi,\ u_0 = \varphi \end{cases} \tag{1.2}$$

çözümü için bu tip kararlılık kestirimleri ilk olarak [Sobolevskii, P. E. ve Chebotaryeva, L. M., 1977] çalışmasında yapılmıştır.

(1.1) probleminin yaklaşık çözümü için yüksek basamaktan doğruluklu hassas mutlak kararlı fark şemaları $A(t) = A$ durumunda [Ashyralyev, A., 1989], [Ashyralyev, A. ve Muradov, I., 1995], [Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2001], [Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2004] ve [Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2005] makalelerinde incelenmiştir.

Örneğin; İkinci basamaktan doğruluklu hassas mutlak kararlı fark şemaları

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_k + \frac{\tau^2}{4} A^2 u_{k+1} = f_k, \\ f_k = f(t_k),\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1,\ N\tau = T, \\ \tau^{-1}(u_1 - u_0) + iA^{1/2}(I + \frac{i\tau}{2} A^{1/2}) u_1 = z_1, \\ z_1 = (I + i\tau A^{1/2})\psi + \frac{\tau}{2} f_0 + (iA^{\frac{1}{2}} - \tau A) u_0,\ f_0 = f(0),\ u_0 = \varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + \frac{1}{4} A(u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1}) = f_k, \\ f_k = f(t_k),\ t_k = k\tau,\ 1 \le k \le N-1,\ N\tau = T, \\ \tau^{-1}(u_1 - u_0) + \frac{i}{2} A^{1/2}(u_1 + u_0) = z_1, \\ z_1 = (I + \frac{i\tau}{2} A^{1/2})\psi + \frac{\tau}{2} f_0 + (iA^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau A}{2}) u_0,\ f_0 = f(0),\ u_0 = \varphi \end{cases}$$

[Ashyralyev, A. ve Muradov, I., 1995] makalesinde sunulmuştur. Bu fark şemalarının çözümü ve birinci ve ikinci basamaktan fark türevleri için kararlılık kestirimleri kurulmuştur. Uygulamalarda, hiperbolik denklemler için başlangıç değer problemlerinin fark şemalarının çözümlerinin kararlılığı gösterilmiştir. Ancak, bu fark denklemlerinin pratikte kullanılması için, ilk önce $A^{1/2}$ operatörünün oluşturulması gerekmektedir. Fakat, bu işlem bilgisayar için oldukca güçtür. Bu yüzden, iyi teorik sonuçlar elde edilmesine rağmen, bu problemin sayısal çözümlerini bulmak zordur ve değeri beklenildiği gibi değildir.

Daha sonraları, [Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2001] makalesinde ise (1.1) başlangıç değer probleminin çözümü için birinci basamaktan doğruluklu hassas mutlak kararlı fark şeması

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})+Au_{k+1}=f_k, \\ f_k=f(t_k),\ t_k=k\tau,\ 1\leq k\leq N-1, N\tau=T, \\ \tau^{-1}(u_1-u_0)=\psi,\ u_0=\varphi, \end{cases}$$

ve ikinci basamaktan doğruluklu hassas mutlak kararlı fark şemaları

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})+Au_k+\frac{\tau^2}{4}A^2u_{k+1}=f_k, \\ f_k=f(t_k),\ t_k=k\tau,\ 1\leq k\leq N-1,\ N\tau=T, \\ (I+\tau^2A)\tau^{-1}(u_1-u_0)=\frac{\tau}{2}(f_0\ -Au_0)+\psi,\ f_0\ =\ f(0),\ u_0\ =\ \varphi, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})+\frac{1}{2}Au_k+\frac{1}{4}A(u_{k+1}+u_{k-1})=f_k, \\ f_k=f(t_k),\ t_k=k\tau, 1\leq k\leq N-1,\ N\tau=T, \\ (I+\tau^2A)\tau^{-1}(u_1-u_0)=\frac{\tau}{2}(f_0\ -Au_0)+\psi,\ f_0\ =\ f(0),\ u_0\ =\ \varphi \end{cases} \tag{1.4}$$

sunulmuştur. Bu fark şemaları A operatörünün tamsayı kuvvetleriyle oluşturulmuştur. Bu fark şemalarının çözünü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. İlgili fark şemalarının doğruluğu [Ashyralyev, A. ve Köksal, M. E., 2008] makalesinde sayısal denemelerle de desteklenmiştir.

[Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2004] ve [Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., 2005] makalelerinde (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümleri için bir tam fark şemasından veya üç noktaya dayalı Taylor ayrıştırmasından türetilmiş yüksek basamaktan doğruluklu hassas mutlak kararlı iki adımlı fark şemaları sunulmuştur. Bu fark şemalarının çözünü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Uygulamalarda hiperbolik denklemler için başlangıç değer problemlerinin yüksek basamaktan doğruluklu fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

[Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., 2005] makalesinde ikinci basamaktan doğruluklu hassas mutlak kararlı fark şeması

$$\begin{cases} \tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+A_{k+1/2}4^{-1}\left(u_{k+1}+u_k\right) \\ +A_{k+1/2}^{1/2}A_{k-1/2}^{1/2}4^{-1}\left(u_k+u_{k-1}\right) \\ +\tau^{-1}\left(A_{k-1/2}^{1/2}-A_{k+1/2}^{1/2}\right)A_{k-1/2}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right) \\ +2^{-1}\tau^{-1}\left(A_{k+1}^{1/2}-A_k^{1/2}\right)A_{k+1/2}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_{k+1}-u_k\right) \\ +A_{k+1/2}^{1/2}A_{k-1/2}^{-1/2}2^{-1}\tau^{-1}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)A_{k-1/2}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right) \\ =2^{-1}\left(f_{k-1/2}+f_{k+1/2}\right)+2^{-1}\left(A_{k+1/2}^{1/2}-A_{k-1/2}^{1/2}\right)A_{k-1/2}^{-1/2}f_{k-1/2}, \\ 1\le k\le N-1,\quad u_0=u(0), \\ \tau^{-1}(u_1-u_0)+\frac{\tau}{2}A_{1/2}2^{-1}(u_1+u_0)+\frac{\tau}{2}\left(A_{1/2}^{1/2}\right)'A_{1/2}^{-1/2}\tau^{-1}(u_1-u_0) \\ =\frac{\tau}{2}f_{1/2}+A_{1/2}^{1/2}A_{1/2}^{-1/2}u_0' \end{cases} \tag{1.5}$$

sunulmuştur. $A(t)A^{-1}(0)$ üzerinde bazı düzgünlük varsayımları yapılarak bu fark şemasının çözümü ve birinci ve ikinci basamaktan fark türevleri için kararlılık kestirimleri üzerine aşağıdaki teoremler vaz edilmiştir.

Teorem 1.1. $u(0)\in D(A^{1/2}(0))$ olsun. (1.5) fark şemasının çözümü için

$$||\{\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\}_1^{N-1}||_{C_\tau}+||u^\tau||_{C_\tau}$$

$$\le C_1\left[||A^{\frac{1}{2}}(0)u_0||_H+||u_0'||_H+\sum_{s=0}^{N-1}||f_{s+1/2}||_H\tau\right]$$

kararlılık kestirimi geçerlidir. Burada, C_1 katsayısı $u_0,u_0',f_{s+1/2}\,(0\le s\le N-1)$ ve τ'ya bağlı değildir.

Teorem 1.2. $u(0)\in D(A(0))$, $u'(0)\in D(A^{1/2}(0))$ olsun. (1.5) fark şemasının çözümü için

$$||\{A^{1/2}(0)\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\}_1^{N-1}||_{C_\tau}+$$

$$||A_{k+1/2}4^{-1}(u_{k+1}+u_k)+A_{k+1/2}^{1/2}A_{k-1/2}^{1/2}4^{-1}(u_k+u_{k-1})$$

$$+\tau^{-1}\left(A_{k-1/2}^{1/2}-A_{k+1/2}^{1/2}\right)A_{k-1/2}^{-1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})$$

$$+2^{-1}\tau^{-1}\left(A_{k+1}^{1/2}-A_k^{1/2}\right)A_{k+1/2}^{-1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)$$

$$+A_{k+1/2}^{1/2}A_{k-1/2}^{-1/2}2^{-1}\tau^{-1}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)A_{k-1/2}^{-1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})||_H,$$

$$+||\{\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)\}_1^{N-1}||_{C_\tau}$$
$$\leq C_2\left[||A(0)u_0||_H+||A^{\frac{1}{2}}(0)u_0'||_H+\max_{0\leq s\leq k}\left\|f_{s+1/2}\right\|_H+\sum_{s=0}^{N-2}||f_{s+1/2}-f_{s-1/2}||_H\right]$$

kararlılık kestirimi geçerlidir. Burada, C_2 katsayısı $u_0, u_0', f_{s+1/2}\,(0\leq s\leq N-1)$ ve τ'ya bağlı değildir.

Bu tezdeki amaç, H Hilbert uzayında öz-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü diferansiyel denklemlerinin (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla, yüksek basamaktan doğruluklu iki adımlı fark şemalarını oluşturmak, bu fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimlerini elde etmek ve bu fark şemalarının kararlılığını sayısal örneklerle desteklemektir.

Tezin çeşitli bölümlerinin içeriklerini kısaca tanıtalım. Tezde beş bölüm vardır.

Birinci bölüm Giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü diferansiyel denklemlerinin (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla, $A^{1/2}(t)$ operatörü tarafından oluşturulan ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması tanıtılmıştır. Bu fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü diferansiyel denklemlerinin (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla, $A(t)$ operatörü tarafından oluşturulan ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması tanıtılmıştır. Bu fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiş ve uygulamaları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü diferansiyel denklemlerinin (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla, $A^2(t)$ operatörü tarafından oluşturulan ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması tanıtılmıştır. Bu fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiş ve uygulamaları verilmiştir.

Beşinci bölüm sayısal sonuçlar kısmıdır. Birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemları Matlab kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar esas alınarak ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının, birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına oranla daha doğru olduğu görülmüştür. Ayrıca bu bölüm, tam ve yaklaşık çözümleri içeren şekiller; ve hata karşılaştırmalarının yapıldığı tabloları içermektedir.

Son olarak tezin altıncı bölümünde genel sonuçlar özetlenmiştir.

Ayrıca tezin sonunda kaynaklar ve ekler kısımları da verilmiştir.

2 $A^{1/2}(t)$ İLE OLUŞTURULAN İKİNCİ BASAMAKDAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

2.1 İkinci Basamakdan Doğruluklu Fark Şemasının Kurulması

[Daletskii, Yu. L., 1958] ve [Sobolevskii, P. E. ve Pogorelenko, V. A., 1967] referanslarından, birinci basamakdan doğrusal diferansiyel denklemler sistemi için aşağıdaki eşdeğer başlangıç değer problemi elde edilir:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = iA^{1/2}(t)v(t), \ 0 < t < T, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0, \\ \frac{dv(t)}{dt} = iA^{1/2}(t)u(t) - A^{-1/2}(t)\left[A^{1/2}(t)\right]' v(t) - iA^{-1/2}(t)f(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

İki adımlı fark şemasının kurulması için önce $[0, T]$ aralığı N eşit parçaya bölünsün;

$$[0, T]_\tau = \{t_k = k\tau, \ 0 \le k \le N, \ N\tau = T\}.$$

(2.1)'deki türev için merkezi fark formulünü kullanarak

$$\begin{cases} \tau^{-1}(u(t_k) - u(t_{k-1})) = iA_k^{1/2}v(t_{k-1/2}) + o(\tau^2), \quad 1 \le k \le N, \\ \tau^{-1}(v(t_k) - v(t_{k-1})) = iA_k^{1/2}u(t_{k-1/2}) - A_k^{-1/2}[A_k^{1/2}]'v(t_{k-1/2}) \\ -iA_k^{-1/2} \ f_k + o(\tau^2), \quad 1 \le k \le N, \quad v_0 = -iA_0^{-1/2}u'_0 \end{cases}$$

yazılabilir; burada

$$A_k^{1/2} = A^{1/2}(t_{k-1/2}), \ [A_k^{1/2}]' = (A')^{1/2}(t_{k-1/2}), f_k = f(t_{k-1/2}),$$

$$t_{k-1/2} = (t_k - \frac{\tau}{2}), \ A_0 = A(0).$$

Taylor açılımını kullanarak

$$\tau^{-1}(u(t_k) - u(t_{k-1})) = u'(t_k) - \frac{\tau}{2}u''(t_k) + o(\tau^2), \ 1 \le k \le N, \tag{2.2}$$

ve

$$w(t_{k-1/2}) = \frac{1}{2}(w(t_k) + w(t_{k-1})) + o(\tau^2), \ w(t_{k-1/2}) = (w(t_k) - \frac{\tau}{2}w'(t_k)) + o(\tau^2) \tag{2.3}$$

denklemleri yazılabilir. (2.2), (2.3) ve

$$u'(t_k) = iA^{1/2}(t_k)v(t_k),\ u''(t_k) = f(t_k) - A(t_k)u(t_k)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{cases} \tau^{-1}(u(t_k) - u(t_{k-1})) = \frac{\tau}{2}A_k u(t_k) + i\left(A_k^{1/2} + \frac{\tau}{2}\left(A_k^{1/2}\right)'\right)v(t_k) - \frac{\tau}{2}f_k + o(\tau^2), \\ 1 \le k \le N, \\ \tau^{-1}(v(t_k) - v(t_{k-1})) = iA_k^{1/2}u(t_k) + \frac{\tau}{2}A_k v(t_k) \\ -2^{-1}A_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'(v(t_k) + v(t_{k-1})) - iA_k^{-1/2}f_k + o(\tau^2), \\ 1 \le k \le N,\ v_0 = -iA_0^{-1/2}u_0', \\ v(t_k) = -iA_{k+1/2}^{-1/2}\left(\tau^{-1}(u(t_k) - u(t_{k-1})) - \frac{\tau}{2}A_k u(t_k) + \frac{\tau}{2}f_k\right) + o(\tau^2), \\ 1 \le k \le N \end{cases}$$

elde edilir.

$o(\tau^2)$ mertebesindeki terimler ihmal edilerek (1.1)'deki başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) = \frac{\tau}{2}A_k u_k + i\left(A_k^{1/2} + \frac{\tau}{2}\left(A_k^{1/2}\right)'\right)v_k - \frac{\tau}{2}f_k, \\ u_0 = u(0), \quad 1 \le k \le N, \\ \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) = iA_k^{1/2}u_k + \frac{\tau}{2}A_k v_k - 2^{-1}A_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'(v_k + v_{k-1}) \\ -iA_k^{-1/2}f_k, \quad 1 \le k \le N, \\ v_k = -iA_{k+1/2}^{-1/2}\left(\tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) - \frac{\tau}{2}A_k u_k + \frac{\tau}{2}f_k\right), 1 \le k \le N, \\ v_0 = -iA_0^{-1/2}u_0' \end{cases} \tag{2.4}$$

fark şeması elde edilir.

(2.4)'de v_k yerine konulur ve terimler yeniden düzenlenirse, (1.1)'deki başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü için aşağıdaki ikinci basamakdan doğruluklu fark şeması elde edilir;

$$\begin{cases} \tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)=\left[A_{k+1}^{1/2}+\frac{\tau}{2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'\right]\left\{-A_{k+1}^{1/2}u_{k+1}\right. \\ +\left[\frac{\tau}{2}A_{k+1}-\frac{1}{2}A_{k+1}^{-1/2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'\right]A_{k+3/2}^{-1/2}\left[\tau^{-1}\left(u_{k+1}-u_k\right)\right. \\ \left.\left.-\frac{\tau}{2}A_{k+1}u_{k+1}+\frac{\tau}{2}f_{k+1}\right]+A_{k+1}^{-1/2}f_{k+1}\right\} \\ -\left\{\left[A_{k+1}^{1/2}+\frac{\tau}{2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'\right]A_{k+1}^{-1/2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2}\right. \\ \left.-\tau^{-1}\left[\left(A_{k+1}^{1/2}-A_k^{1/2}\right)+\frac{\tau}{2}\left(\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'-\left(A_k^{1/2}\right)'\right)\right]\right\}A_{k+1/2}^{-1/2} \\ \times\left[\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-\frac{\tau}{2}A_ku_k+\frac{\tau}{2}f_k\right] \\ +2^{-1}\left(A_{k+1}u_{k+1}-A_ku_k\right)-2^{-1}\left(f_{k+1}-f_k\right), \\ 1\le k\le N-1,\quad u_0=u(0), \\ \tau^{-1}(u_1-u_0)+\frac{\tau}{2}A_{1/2}2^{-1}(u_1+u_0)+\frac{\tau}{2}\left(A_{1/2}^{1/2}\right)'A_{1/2}^{-1/2}\tau^{-1}(u_1-u_0) \\ =\frac{\tau}{2}f_1+A_{1/2}^{1/2}A_{1/2}^{-1/2}u_0'. \end{cases} \tag{2.5}$$

(1.1) probleminin yaklaşık çözümü için bulunan (2.5) fark şemasında $A(t)=A$ olduğunda (1.3) elde edilir.

Şimdi, (2.5)'deki fark şemasının çözümü için bir formül oluşturalım.

(2.4) denkleminde $\eta_k=u_k+v_k$ ve $\mu_k=u_k-v_k$ dönüşümleri yapılarak aşağıdaki fark denklemleri sistemi elde edilir;

$$\begin{cases} \tau^{-1}(\eta_k-\eta_{k-1})=\left(iA_k^{1/2}+\frac{\tau}{2}A_k\right)\eta_k+\varphi_k^{+},\ 2\le k\le N, \\ \eta_1=K\left(B^{+}u_0+C^{+}u_0'+D^{+}f_1\right), \\ \tau^{-1}(\mu_k-\mu_{k-1})=\left(-iA_k^{1/2}+\frac{\tau}{2}A_k\right)\mu_k+\varphi_k^{-},\ 2\le k\le N, \\ \mu_1=K\left(B^{-}u_0+C^{-}u_0'+D^{-}f_1\right), \\ \varphi_k^{\pm}=i\frac{\tau}{2}\left(A_k^{1/2}\right)'v_k-\frac{\tau}{2}f_k\mp A_k^{-1/2}(A_k^{1/2})'2^{-1}\left(v_k+v_{k-1}\right)\mp iA_k^{-1/2}f_k, \\ v_k=-iA_{k+1/2}^{-1/2}\left(\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-\frac{\tau}{2}A_ku_k+\frac{\tau}{2}f_k\right),\ 2\le k\le N. \end{cases}$$

Bu denklemlerde

$$K=\left[1+\frac{\tau^4}{4}A_1^2+\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'+\frac{\tau^3}{2}A_1^{1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'\right]^{-1},$$

$$B^{\pm}=1-\frac{\tau^2}{2}A_1+\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'\pm i\tau A_1^{1/2},$$

$$C^{\pm}=\tau A_1^{1/2}A_0^{-1/2}-\frac{\tau^3}{4}\left(A_1^{1/2}\right)'A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_0^{-1/2}\mp iA_0^{-1/2}\pm i\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_0^{-1/2}$$

$$\pm i\frac{\tau^2}{2}A_1A_0^{-1/2} \mp i\frac{\tau^3}{4}A_1^{1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_0^{-1/2},$$

$$D^{\pm} = \frac{\tau^4}{4}A_1 - \frac{\tau^3}{4}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)' + \frac{3}{2}\tau^2 + \frac{\tau^3}{2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_1^{-1/2} \mp i\tau A_1^{-1/2}.$$

Bu denklem sisteminden

$$\begin{cases} \eta_k = \left(I - \frac{\tau^2}{2}A_k - i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\eta_{k-1} + \left(I - \frac{\tau^2}{2}A_k - i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\varphi_k^{+}, 2 \le k \le N, \\ \mu_k = \left(I - \frac{\tau^2}{2}A_k + i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\mu_{k-1} + \left(I - \frac{\tau^2}{2}A_k + i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\varphi_k^{-}, 2 \le k \le N \end{cases}$$

fark formülleri elde edilir. Böylece

$$\eta_k = P_k^{-}(k)\eta_1 + \sum_{m=2}^{k} R_m^{-}(k)\varphi_m^{+}, \mu_k = P_k^{+}(k)\mu_1 + \sum_{m=2}^{k} R_m^{+}(k)\varphi_m^{-}$$

bulunur; burada

$$P_k^{\pm}(k) = X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_2^{\pm},\ R_m^{\pm}(k) = X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_m^{\pm},$$

$$X_k^{\pm} = \left(I - \frac{\tau^2}{2}A_k \pm i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}.$$

Sonra $u_k = \frac{1}{2}(\eta_k + \mu_k)$ formülü kullanılarak

$$u_k = 2^{-1}\left\{\left[P_k^{+}(k)KB^{-} + P_k^{-}(k)KB^{+}\right]u_0 + [P_k^{+}(k)KC^{-} + P_k^{-}(k)KC^{+}]u_0'\right.$$
$$\left. + [P_k^{+}(k)KD^{-} + P_k^{-}(k)KD^{+}]f_1 + \sum_{m=2}^{k}\left[R_m^{+}(k)\varphi_m^{-} + R_m^{-}(k)\varphi_m^{+}\right]\right\}$$

bulunur. Ayrıca $k - m = s$ dönüşümü yapılarak

$$u_k = 2^{-1}\left\{\left[P_k^{+}(k)KB^{-} + P_k^{-}(k)KB^{+}\right]u_0 + [P_k^{+}(k)KC^{-} + P_k^{-}(k)KC^{+}]u_0'\right.$$

$$\left. + [P_k^{+}(k)KD^{-} + P_k^{-}(k)KD^{+}]f_1 + \sum_{s=0}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\varphi_{k-s}^{-} + E_s^{-}(k)\varphi_{k-s}^{+}\right]\right\} \tag{2.6}$$

elde edilir; burada

$$\varphi_{k-s}^{\pm} = i\left[\pm\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}(A_{k-s}^{1/2})' - i\frac{\tau^2}{2}\left(A_{k-s}^{1/2}\right)'\right]A_{k-s+1/2}^{-1/2}$$

$$\times\left[\tau^{-1}\left(u_{k-s} - u_{k-s-1}\right) - \frac{\tau}{2}A_{k-s}u_{k-s} + \frac{\tau}{2}f_{k-s}\right]$$

$$\pm i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1/2}\left[\tau^{-1}\left(u_{k-s-1} - u_{k-s-2}\right) - \frac{\tau}{2}A_{k-s-1}u_{k-s-1} + \frac{\tau}{2}f_{k-s-1}\right]$$

$$+\left(-\frac{\tau^2}{2}\mp i\tau A_{k-s}^{-1/2}\right)f_{k-s},$$

$$E_s^{\pm}(k)=X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_{k-s}^{\pm},E_0^{\pm}(k)=X_k^{\pm}.$$

Son olarak (2.6) denkleminden

$$A_{k-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}$$

$$\times\left\{\left[\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]KB^{-}+\left[P_k^{-}(k)-P_{k-1}^{-}(k-1)\right]KB^{+}\right]u_0\right.$$

$$+\left[\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]KC^{-}+\left[P_k^{-}(k)-P_{k-1}^{-}(k-1)\right]KC^{+}\right]u_0'$$

$$+\left[\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]KD^{-}+\left[P_k^{-}(k)-P_{k-1}^{-}(k-1)\right]KD^{+}\right]f_1$$

$$+\left[E_0^{+}(k)\varphi_k^{-}+E_0^{-}(k)\varphi_k^{+}\right]$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)-E_{s-1}^{+}(k-1)\right]\varphi_{k-s}^{-}+\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{-}(k)-E_{s-1}^{-}(k-1)\right]\varphi_{k-s}^{+}\right\} \tag{2.7}$$

elde edilir.

Bir sonraki alt bölümde, yukarıdaki elde edilen formüller (2.5) fark şemasının kararlılık kestirimlerini bulmak için kullanılacaktır.

2.2 (2.5) Fark Şemasının Kararlılığı

Önce $A(t)$ operatörü için ileride gerekecek bazı ikinci derecede önemli koşulları verelim. $A(t)$'ler, H Hilbert uzayında t'ye bağımsız bir $D(A(t)):A(t)\geq\delta I>0:$ alanında pozitif tanımlı öz-adjoint operatörler olsun. Bu durumda aşağıdaki kestirimler geçerlidir;

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{\alpha/2}\left(I+\frac{\tau^4}{4}A_k^2\right)^{-1}\right\|\leq 1,\ \ \alpha=0,1,2, \tag{2.8}$$

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{\alpha/2}\left(I+\frac{\tau^4}{4}A_k^2\right)^{-1}\right\|\leq\left(4-\sqrt{2}\right)\alpha+4\left(\sqrt{2}-3\right),\ \ \alpha=3,4, \tag{2.9}$$

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{\alpha/2}\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k\pm i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\right\|\leq\frac{\alpha^2-\alpha}{2}+1,\ \ \alpha=0,1,2. \tag{2.10}$$

$A^{\rho}(t)A^{-\rho}(z), \rho \in [0,2]$ operatör fonksiyonunun

$$\left\| \left[A^{\rho}(t) - A^{\rho}(s)\right] A^{-\rho}(z) \right\| \leq M_{\rho}|t-s| \tag{2.11}$$

ve

$$\left\| \left[(A^{\rho}(t))' - (A^{\rho}(s))'\right] A^{-\rho}(z) \right\| \leq M_{\rho}|t-s| \tag{2.12}$$

koşullarını sağladığı kabul edilsin; burada M_{ρ}'ler, $t, s, z \in [0,T]$ için bu değerlerden bağımsız pozitif sabitlerdir. Bu sonuçtan hareketle $A^{\rho}(t)A^{-\rho}(z)$ operatör fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde sınırlı bir değişime sahiptir; yani öyle bir P_{ρ} sayısı mevcuttur ki

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \left(A^{\rho}(s_k) - A^{\rho}(s_{k-1})\right) A^{-\rho}(z) \right\| \leq P_{\rho}$$

eşitsizliği herhangi bir $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = T$ sıralaması için sağlanır. Burada P_{ρ} $s_0,\ s_1, \cdots, s_N$ ve z'den bağımsız pozitif bir sabittir.

Ayrıca $(A^{\rho}(t))'\, A^{-\rho}(z)$ ve $A^{\rho}(p)\,(A^{r}(t))'\, A^{-\rho-r}(z)$ operatör fonksiyonlarının

$$\left\| (A^{\rho}(t))'\, A^{-\rho}(z) \right\| \leq M_3 \tag{2.13}$$

ve

$$\left\| A^{\rho}(p)\,(A^{r}(t))'\, A^{-\rho-r}(z) \right\| \leq M_4 \tag{2.14}$$

eşitsizliklerini sağladığı kabul edilsin; burada M_3, $t, z \in [0,T]$ için t ve z'den bağımsız, M_4, $t, z, p \in [0,T]$ için t, z ve p'den bağımsız pozitif sabitlerdir.

Son olarak, $P_k^{\pm}(k) = X_k^{\pm} X_{k-1}^{\pm} \cdots X_2^{\pm}$ ve $E_s^{\pm}(k) = X_k^{\pm} X_{k-1}^{\pm} \cdots X_{k-s}^{\pm}$ olsun; burada $X_k^{\pm} = \left(I - \frac{\tau^2}{2} A_k \pm i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}$. Yukarıdaki varsayım ve tanımlardan hareketle aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir:

$$\left\| A_k P_k^{\pm}(k) A_1^{-1} \right\| \leq e^{M_1 \sum\limits_{i=1}^{k} \left\| \left(A_i^1 - A_{i-1}^1\right) A_0^{-1} \right\|}, \tag{2.15}$$

$$\left\| A_k E_s^{\pm}(k) A_{1,k-s}^{\frac{\alpha}{2}-1} \tau^{\alpha} \right\| \leq \left(\frac{\alpha^2 - \alpha}{2} + 1 \right) e^{M_1 \sum\limits_{i=1}^{k} \left\| \left(A_i^1 - A_{i-1}^1\right) A_0^{-1} \right\|}, \quad \alpha = 0, 1, 2, \tag{2.16}$$

$$\left\| A_{k-1/2}^{1/2} (2\tau)^{-1} \left[P_k^{\pm}(k) - P_{k-1}^{\pm}(k-1)\right] A_1^{-\rho} \right\| \leq \frac{3M_{1/2}}{4} e^{M_{\rho} \sum\limits_{i=1}^{k} \left\| \left(A_i^{\rho} - A_{i-1}^{\rho}\right) A_0^{-\rho} \right\|}, \tag{2.17}$$

$$\left\| A_{k-s-1/2}^{1/2} (2\tau)^{-1} \left[E_s^{\pm}(k) - E_{s-1}^{\pm}(k-1) \right] \left(A_{k-s}^{\rho} \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \tau^{\alpha} \right\|$$

$$\leq \frac{3M_{1/2}}{4} e^{M_\rho \sum\limits_{i=1}^{k} \left\| \left(A_i^\rho - A_{i-1}^\rho \right) A_0^{-\rho} \right\|}, \ \alpha = 0,1,2. \tag{2.18}$$

Teorem 2.1. $u(0) \in D(A^{\frac{1}{2}}(0))$ ve $f_1 \in D((A_1^{1/2})')$ olsun. Bu durumda (2.5) fark şemasının çözümü için

$$\max_{1\leq k\leq N} ||A_{k-1/2}^{1/2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau}||_H + \max_{0\leq k\leq N} ||A_k u_k||_H$$

$$\leq M \left[||A(0)u_0||_H + ||A^{1/2}(0)u_0'||_H + \max_{1\leq s\leq N} \|f_k\| + \left\| \tau^2 (A_1^{1/2})' f_1 \right\|_H + \sum_{s=1}^{N} ||f_s - f_{s-1}||_H \right]$$

kararlılık kestirimi geçerlidir; burada M, u_0, u_0', f_s $(1 \leq s \leq N)$ ve τ'dan bağımsızdır.

İspat. İlk olarak $||A_{k-1/2}^{1/2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau}||_H$ için kestirim elde edilecektir. (2.7) formülü kullanılarak

$$A_{k-1/2}^{1/2} \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) = J_{1k} + J_{2k} + J_{3k} + J_{4k} + J_{5k} \tag{2.19}$$

elde edilir; burada

$$J_{1k} = A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left\{ \left[P_k^+(k) - P_{k-1}^+(k-1) \right] KB^- + \left[P_k^-(k) - P_{k-1}^-(k-1) \right] KB^+ \right\} u_0,$$

$$J_{2k} = A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left\{ \left[P_k^+(k) - P_{k-1}^+(k-1) \right] KC^- + \left[P_k^-(k) - P_{k-1}^-(k-1) \right] KC^+ \right\} u_0',$$

$$J_{3k} = A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left\{ \left[P_k^+(k) - P_{k-1}^+(k-1) \right] KD^- + \left[P_k^-(k) - P_{k-1}^-(k-1) \right] KD^+ \right\} f_1,$$

$$J_{4k} = A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left[E_0^+(k)\varphi_k^- + E_0^-(k)\varphi_k^+ \right],$$

$$J_{5k} = A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left\{ \sum_{s=1}^{k-2} \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1) \right] \varphi_{k-s}^- \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{k-2} \left[E_s^-(k) - E_{s-1}^-(k-1) \right] \varphi_{k-s}^+ \right\}.$$

Şimdi, $||J_{mk}||_H$, $m = \overline{1,5}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m = 1$ için, (2.8), (2.9), (2.11), (2.14) ve (2.17) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{1k}||_H \leq 2 \left\| A_{k-1/2}^{1/2} (2\tau)^{-1} \left[P_k^+(k) - P_{k-1}^+(k-1) \right] KB^- u_0 \right\|_H$$

$$\leq 2 \left\| A_{k-1/2}^{1/2} (2\tau)^{-1} [P_k^+(k) - P_{k-1}^+(k-1)] A_1^{-1} \right\| \left\| A_1 KB^- A_1^{-1} \right\| \left\| A_1 A_0^{-1} \right\| \|A_0 u_0\|_H$$

$$\leq 2\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\left(2\tau\right)^{-1}\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]A_1^{-1}\right\|$$

$$\times\left\|A_1\left[1+\frac{\tau^4}{4}A_1^2+\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'+\frac{\tau^3}{2}A_1^{1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'\right]^{-1}\right.$$

$$\left.\times\left[1-\frac{\tau^2}{2}A_1+\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'-i\tau A_1^{1/2}\right]\right\|\left\|A_1A_0^{-1}\right\|\left\|A_0u_0\right\|_H$$

$$\leq\frac{3}{4}\left(M_{1/2}+1\right)M_1\left[\frac{1}{1-\tau M_4}\left(1+\frac{5\tau}{4}M_4\right)+\frac{3}{2}\right]e^{M_1P_1}\left\|A_0u_0\right\|_H=C_1\left\|A_0u_0\right\|_H$$

bulunur.

$m=2$ için, (2.8), (2.9), (2.11), (2.13), (2.14) ve (2.17) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{2k}||_H\leq 2\left\|A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]KC^{-}u_0'\right\|_H$$

$$\leq 2\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\left(2\tau\right)^{-1}\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]A_1^{-1}\right\|\left\|A_1KC^{-}A_0^{-1/2}\right\|\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

$$\leq 2\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\left(2\tau\right)^{-1}\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]A_1^{-1}\right\|$$

$$\times\left\|A_1\left[1+\frac{\tau^4}{4}A_1^2+\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'+\frac{\tau^3}{2}A_1^{1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'\right]^{-1}\right.$$

$$\times\left[\tau A_1^{1/2}A_0^{-1/2}-\frac{\tau^3}{4}\left(A_1^{1/2}\right)'A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_0^{-1/2}-iA_0^{-1/2}+i\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_0^{-1/2}\right.$$

$$\left.\left.+i\frac{\tau^2}{2}A_1A_0^{-1/2}-i\frac{\tau^3}{4}A_1^{1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_0^{-1/2}\right]A_0^{-1/2}\right\|\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

$$\leq\frac{3}{2}M_{1/2}\left[\left(M_1+\frac{M_3}{2}\right)+\frac{\tau}{4}\frac{M_3^2}{\sqrt{\delta}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\tau M_4}\left(\frac{3M_1}{2}+\frac{\tau}{4}M_4\left(1+3M_1\right)+\frac{3\tau^2}{8}M_4\left(\frac{M_3^2}{\sqrt{\delta}}+M_4\right)\right)\right]e^{M_1P_1}\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H$$

$$=C_2\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H$$

elde edilir.

$m=3$ için, (2.8), (2.9), (2.11), (2.13), (2.14) ve (2.17) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{3k}||_H\leq 2\left\|A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]KD^{-}f_1\right\|_H$$

$$\leq 2\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\left(2\tau\right)^{-1}\left[P_k^{+}(k)-P_{k-1}^{+}(k-1)\right]A_1^{-1}\right\|$$

$$\times\left\|A_1\left[1+\frac{\tau^4}{4}A_1^2+\frac{\tau}{2}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'+\frac{\tau^3}{2}A_1^{1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'\right]^{-1}\right.$$

$$\times\left[\frac{\tau^4}{4}A_1-\frac{\tau^3}{4}A_1^{-1/2}\left(A_1^{1/2}\right)'+\frac{3\tau^2}{2}+\frac{\tau^3}{2}\left(A_1^{1/2}\right)'A_1^{-1/2}-i\tau A_1^{-1/2}\right]\Bigg\|\,\|f_1\|_H$$

$$\leq\frac{3}{2}\left(M_{1/2}+1\right)+\left[\frac{5}{2}+\frac{\tau}{2}\left(M_4+M_3\right)+\frac{5\tau}{4}\frac{M_4}{1-\tau M_4}+\frac{3\tau^2}{4}\frac{M_4\left(M_4+M_3\right)}{1-\tau M_4}\right]e^{M_1P_1}$$

$$\times\left(\|f_1\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)'f_1\right\|_H\right)=C_3\left[\|f_1\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)'f_1\right\|_H\right]$$

bulunur.

$m=4$ için,

$$J_{4k}=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_0^+(k)\varphi_k^-+E_0^-(k)\varphi_k^+\right]$$

$$=\left[i\frac{1}{4}A_{k-1/2}^{1/2}\left(X_k^--X_k^+\right)A_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'+\frac{\tau}{4}A_{k-1/2}^{1/2}\left(X_k^-+X_k^+\right)\left(A_k^{1/2}\right)'\right]$$

$$\times A_{k+1/2}^{-1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+i\frac{1}{4}A_{k-1/2}^{1/2}\left(X_k^--X_k^+\right)A_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k-1/2}^{-1/2}\frac{u_{k-1}-u_{k-2}}{\tau}$$

$$+\left[i\frac{\tau}{8}A_{k-1/2}^{1/2}\left(X_k^+-X_k^-\right)A_k^{-1/2}+\frac{\tau^2}{8}A_{k-1/2}^{1/2}\left(X_k^++X_k^-\right)\right]\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2}A_ku_k$$

$$+i\frac{\tau}{8}A_{k-1/2}^{1/2}\left(X_k^+-X_k^-\right)A_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k-1/2}^{-1/2}A_{k-1}u_{k-1}$$

$$+\frac{\tau}{8}A_{k-1/2}^{1/2}\left[X_k^+\left(-iA_k^{-1/2}+\tau\right)+X_k^-\left(iA_k^{-1/2}+\tau\right)\right]\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2}f_k$$

$$+A_{k-1/2}^{1/2}\left(2\tau\right)^{-1}\left[X_k^+\left(-\frac{\tau^2}{2}+i\tau A_k^{-1/2}\right)+X_k^-\left(-\frac{\tau^2}{2}-i\tau A_k^{-1/2}\right)\right]f_k$$

$$+A_{k-1/2}^{1/2}i\frac{\tau}{8}\left(X_k^--X_k^+\right)A_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k-1/2}^{-1/2}f_{k-1}$$

yazılır; sonra (2.10), (2.11), (2.13) ve (2.14) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{4k}||_H\leq\frac{\tau}{2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left(\left\|X_k^-\right\|+1\right)\left\|X_k^+\right\|\left\|A_k^{1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1}\right\|$$

$$\times\left\|A_{k+1/2}^{1/2}A_{k-1/2}^{-1/2}\right\|\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H+\frac{\tau}{2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left\|X_k^-\right\|\left\|X_k^+\right\|$$

$$\times\left\|A_k^{1/2}\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k-1/2}^{-1}\right\|\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_{k-3/2}^{-1/2}\right\|\left\|A_{k-3/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H$$

$$+\frac{\tau}{4}\left(\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left\|X_k^+\right\|+\left\|A_k^{1/2}\tau X_k^+\right\|\right)\left\|\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2}\right\|\|A_ku_k\|_H$$

$$+\frac{\tau}{4}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left\|X_k^+\right\|\left\|\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2}\right\|\|A_{k-1}u_{k-1}\|_H$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left(\left\|X_k^+\right\|+2\left\|A_k^{1/2}\tau X_k^+\right\|\right)\left\|\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2}\right\|\|f_k\|_H$$

$$+\tau\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left(2\left\|X_k^+\right\|+\left\|A_k^{1/2}\tau X_k^+\right\|\right)\|f_k\|_H$$
$$+\frac{\tau^2}{2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left\|X_k^+\right\|\left\|\left(A_k^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2}\right\|\|f_{k-1}\|_H$$
$$\leq\tau C_4\left[\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H+\left\|A_{k-3/2}^{1/2}\frac{u_{k-1}-u_{k-2}}{\tau}\right\|_H\right.$$
$$\left.+\|A_k u_k\|_H+\|A_{k-1}u_{k-1}\|_H+\|f_k\|_H+\|f_{k-1}\|_H+\frac{3}{2}M_{1/2}\|f_k\|_H\right]$$

bulunur; burada

$$C_4=\max\left\{\left(M_{1/2}+1\right)^2M_4,\ \frac{1}{2}\left(M_{1/2}+1\right)M_3\right\}.$$

Son olarak, $m=5$ için

$$J_{5k}=S_{1k}+S_{2k}+S_{3k}+S_{4k}+S_{5k}+S_{6k}+S_{7k} \tag{2.20}$$

olup, burada

$$S_{1k}=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left\{\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\left[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)\right]\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right\}\left(A_{k-s}^{1/2}\right)'A_{k-s+1/2}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_{k-s}-u_{k-s-1}\right),$$
$$S_{2k}=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}i\sum_{s=1}^{k-2}\left\{-\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]+\left[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)\right]\right\}$$
$$\times\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_{k-s-1}-u_{k-s-2}\right),$$
$$S_{3k}=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left\{\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\left[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)\right]\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right\}\left(A_{k-s}^{1/2}\right)'A_{k-s+1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}A_{k-s}u_{k-s},$$
$$S_{4k}=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}i\sum_{s=1}^{k-2}\left\{-\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]+\left[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)\right]\right\}$$
$$\times\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}A_{k-s-1}u_{k-s-1},$$
$$S_{5k}=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left\{\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\left[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)\right]\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right\}\left(A_{k-s}^{1/2}\right)'A_{k-s+1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}f_{k-s},$$

$$S_{6k} = A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \sum_{s=1}^{k-2} \left\{ \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1)\right] \left(-\frac{\tau^2}{2} - i\tau A_{k-s}^{-1/2}\right) \right.$$

$$\left. + \left[E_s^-(k) - E_{s-1}^-(k-1)\right] \left(-\frac{\tau^2}{2} + i\tau A_{k-s}^{-1/2}\right) \right\} f_{k-s},$$

$$S_{7k} = A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} i \sum_{s=1}^{k-2} \left\{ - \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1)\right] + \left[E_s^-(k) - E_{s-1}^-(k-1)\right] \right\}$$

$$\times \left(i\frac{\tau}{2} A_{k-s}^{-1/2} (A_{k-s}^{1/2})' \right) A_{k-s-1/2}^{-1/2} \frac{\tau}{2} f_{k-s-1}.$$

Şimdi, $||S_{mk}||_H$, $m = \overline{1,7}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler elde edilecektir. $m = 1$ için, (2.11), (2.14) ve (2.18) kestirimleri kullanılarak

$$\|S_{1k}\|_H \leq 2 \left\| \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1)\right] A_{k-s}^{-1/2} \right.$$

$$\left. \times \left(-i\frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{2} A_{k-s}^{1/2} \right) (A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s+1/2}^{-1/2} \tau^{-1} \left(u_{k-s} - u_{k-s-1}\right) \right\|_H$$

$$\leq 2 \sum_{s=1}^{k-2} \left[\left\| A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1)\right] A_{k-s}^{-1} \right\| \right.$$

$$\left. + \left\| A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1)\right] A_{k-s}^{-1/2} \tau \right\| \right]$$

$$\times \left\| A_{k-s}^{1/2} (A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s+1/2}^{-1} \right\| \left\| A_{k-s+1/2}^{1/2} A_{k-s-1/2}^{-1/2} \right\| \left\| A_{k-s-1/2}^{1/2} \tau^{-1} \left(u_{k-s} - u_{k-s-1}\right) \right\|_H$$

$$\leq \tau C_5 \sum_{s=1}^{k-2} \left\| A_{k-s-1/2}^{1/2} \tau^{-1} \left(u_{k-s} - u_{k-s-1}\right) \right\|_H$$

elde edilir; burada

$$C_5 = \frac{3}{2} \left(M_{1/2} + 1\right)^2 M_4 e^{M_1 P_1}.$$

$m = 2$ için, (2.11), (2.14) ve (2.18) kestirimleri uygulanarak

$$\|S_{2k}\|_H \leq 2 \left\| \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1)\right] \tau A_{k-s}^{-1/2} (A_{k-s}^{1/2})' \right.$$

$$\left. \times A_{k-s-1/2}^{-1/2} \tau^{-1} \left(u_{k-s-1} - u_{k-s-2}\right) \right\|_H$$

$$\leq 2\tau \sum_{s=1}^{k-2} \left\| A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1} \left[E_s^+(k) - E_{s-1}^+(k-1)\right] A_{k-s}^{-1} \right\|$$

$$\times \left\| A_{k-s}^{1/2} (A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s-1/2}^{-1} \right\| \left\| A_{k-s-1/2}^{1/2} A_{k-s-3/2}^{-1/2} \right\| \left\| A_{k-s-3/2}^{1/2} \tau^{-1} \left(u_{k-s-1} - u_{k-s-2}\right) \right\|_H$$

$$\leq \frac{\tau}{2}C_5\sum_{s=1}^{k-2}\left\|A_{k-s-3/2}^{1/2}\tau^{-1}\left(u_{k-s-1}-u_{k-s-2}\right)\right\|_H$$

bulunur.

$m=3$ için, (2.13) ve (2.18) kestirimleri kullanılarak

$$\|S_{3k}\|_H \leq 2\left\|\sum_{s=1}^{k-2}A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]A_{k-s}^{-1/2}\right.$$

$$\left.\times\left[i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}(A_{k-s}^{1/2})'-\frac{\tau^2}{2}\left(A_{k-s}^{1/2}\right)'\right]A_{k-s+1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}A_{k-s}u_{k-s}\right\|_H$$

$$\leq 2\sum_{s=1}^{k-2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]A_{k-s}^{-1/2}\tau\right\|$$

$$\times\left\|(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s+1/2}^{-1}\right\|\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H \leq \tau C_6\sum_{s=1}^{k-2}\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H$$

bulunur; burada

$$C_6=\frac{3}{4}\left(M_{1/2}+1\right)M_4e^{M_1P_1}.$$

$m=4$ için, gene (2.13) ve (2.18) kestirimleri kullanılarak

$$\|S_{4k}\|_H \leq 2\left\|\sum_{s=1}^{k-2}A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]A_{k-s}^{-1/2}\right.$$

$$\left.\times\left[i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}(A_{k-s}^{1/2})'-\frac{\tau^2}{2}\left(A_{k-s}^{1/2}\right)'\right]A_{k-s+1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}A_{k-s}u_{k-s}\right\|_H$$

$$\leq 2\tau\sum_{s=1}^{k-2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]A_{k-s}^{-1/2}\tau\right\|$$

$$\times\left\|(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1}\right\|\|A_{k-s-1}u_{k-s-1}\|_H \leq \frac{\tau}{2}C_6\sum_{s=1}^{k-2}\|A_{k-s-1}u_{k-s-1}\|_H$$

elde edilir.

$m=5$ için, yine (2.13) ve (2.18) kestirimleri kullanılarak

$$\|S_{5k}\|_H \leq \tau\sum_{s=1}^{k-2}\left[\left\|A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]A_{k-s}^{-\frac{1}{2}}\tau\right\|\right.$$

$$\left.+\left\|A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]\tau^2\right\|\right]\left\|(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1}\right\|\|f_{k-s}\|_H$$

$$\leq \tau C_6\sum_{s=1}^{k-2}\|f_{k-s}\|_H$$

bulunur.

$m=6$ için, $-\frac{\tau^2}{2}A_{k-s}+i\tau A_{k-s}^{1/2}=-I+\left(X_{k-s}^{+}\right)^{-1}$ olduğunu göstermek kolaydır; S_6'daki parantez içindeki ilk terim için $s-1=m$ dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned}
A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\Big\{&-\left[E_s^{+}(k)-E_{s-1}^{+}(k-1)\right]A_{k-s}^{-1/2}\\
&+\left[E_s^{+}(k)-E_{s-1}^{+}(k-1)\right]\left(X_{k-s}^{+}\right)^{-1}\Big\}f_{k-s}\\
&=A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_0^{+}(k)-E_{-1}^{+}(k-1)\right]f_{k-1}\\
&+A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_{k-2}^{+}(k)-E_{k-3}^{+}(k-1)\right]f_1\\
&+A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)-E_{s-1}^{+}(k-1)\right](f_{k-s-1}-f_{k-s})
\end{aligned}$$

yazılır. Sonra (2.10) ve (2.11) kestirimleri uygulanarak

$$\begin{aligned}
\|S_{6k}\|_H\leq\ &\frac{1}{2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left(\left\|\tau A_k^{1/2}X_k^{+}\right\|+2\left\|X_k^{+}\right\|\right)\\
&\times\left(\|f_{k-1}\|_H+\left\|X_{k-1}^{+}\right\|\cdots\left\|X_2^{+}\right\|\|f_1\|_H\right)\\
&+\sum_{s=1}^{k-2}\left\|A_{k-1/2}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\left(2^{-1}\left\|\tau A_k^{1/2}X_k^{+}\right\|+\left\|X_k^{+}\right\|\right)\\
&\times\left\|X_{k-1}^{+}\right\|\ldots\left\|X_{k-s}^{+}\right\|\|f_{k-s}-f_{k-s-1}\|_H\\
\leq\ &\frac{3}{4}\left(M_{1/2}+1\right)\left[\|f_{k-1}\|_H+\|f_1\|_H+\sum_{s=1}^{k-2}\|f_{k-s}-f_{k-s-1}\|_H\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$m=7$ için, (2.13) ve (2.18) kestirimleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|S_{7k}\|_H\leq\tau\sum_{s=1}^{k-2}&\left\|A_{k-1/2}^{1/2}(2\tau)^{-1}\left[E_s^{+}(k)-E_{s-1}^{+}(k-1)\right]A_{k-s}^{-\frac{1}{2}}\tau\right\|\\
&\times\left\|(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1}\right\|\|f_{k-s-1}\|_H\leq\frac{\tau}{2}C_6\sum_{s=1}^{k-2}\|f_{k-s}\|_H
\end{aligned}$$

bulunur. (2.20) denklemi, üçgen eşitsizliği ve $||S_{mk}||_H$, $m=\overline{1,7}$ için bulunan kestirimler kullanılarak

$$\|J_{5k}\|_H\leq\tau C_7\sum_{s=2}^{k-1}\left[\left\|A_{s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H+\left\|A_{s-3/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_{s-1}-u_{s-2})\right\|_H\right.$$

$$+\left\|A_s u_s\right\|_H+\left\|A_{s-1} u_{s-1}\right\|_H+\left\|f_s\right\|_H+\left\|f_{s-1}\right\|_H]$$

$$+3\left(M_{1/2}+1\right)\left[\left\|f_{k-1}\right\|_H+\left\|f_1\right\|_H+\sum_{s=2}^{k-1}\left\|f_s-f_{s-1}\right\|_H\right]$$

elde edilir; burada

$$C_7=\max\left\{C_5, \frac{3}{2}C_6\right\}.$$

(2.19) formülü, üçgen eşitsizliği ve $\left\|J_{mk}\right\|_H$, $m=\overline{1,5}$, için bulunan kestirimler kullanılarak

$$\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H \leq C_1\left\|A_0 u_0\right\|_H+C_2\left\|A_0^{1/2} u_0'\right\|_H$$

$$+C_3\left[\left\|f_1\right\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)' f_1\right\|_H\right]$$

$$+\tau C_4\left[\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\right\|_H+\left\|A_k u_k\right\|_H+\left\|A_{k-3/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-1}-u_{k-2})\right\|_H\right.$$

$$\left.+\left\|A_{k-1} u_{k-1}\right\|_H+\left\|f_k\right\|_H+\left\|f_{k-1}\right\|_H\right]+\frac{3}{2}M_{1/2}\left\|f_k\right\|_H$$

$$+\tau C_7\sum_{s=2}^{k-1}\left[\left\|A_{s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H+\left\|A_s u_s\right\|_H+\left\|A_{s-3/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_{s-1}-u_{s-2})\right\|_H\right.$$

$$\left.+\left\|A_{s-1} u_{s-1}\right\|_H+\left\|f_s\right\|_H+\left\|f_{s-1}\right\|_H\right]+3M_{1/2}\left[\left\|f_{k-1}\right\|_H+\left\|f_1\right\|_H+\sum_{s=2}^{k-1}\left\|f_s-f_{s-1}\right\|_H\right]$$

elde edilir. Yukarıdaki sonuçtan

$$\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H \leq C_8\left[\left\|A_0 u_0\right\|_H+\left\|A_0^{1/2} u_0'\right\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)' f_1\right\|_H+\max_{1\leq s\leq k}\left\|f_s\right\|_H\right.$$

$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k}\left(\left\|A_{s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H+\left\|A_s u_s\right\|_H\right)+\sum_{s=2}^{k}\left\|f_s-f_{s-1}\right\|_H\right] \quad (2.21)$$

yazılır; burada

$$C_8=\max\left\{C_1, C_2, C_3+3\left(M_{1/2}+1\right), C_4+C_7\right\}.$$

İkinci olarak $||A_k u_k||_H$ için kestirim elde edilecektir. (2.6) formülü uygulanarak

$$A_k u_k=Y_{1k}+Y_{2k}+Y_{3k}+Y_{4k} \quad (2.22)$$

yazılır. Burada

$$J_{1k}=A_k 2^{-1}\left[P_k^+(k)KB^-+P_k^-(k)KB^+\right]u_0,$$

$$J_{2k} = A_k 2^{-1}\left[P_k^{+}(k)KC^{-} + P_k^{-}(k)KC^{+}\right]u_0',$$

$$J_{3k} = A_k 2^{-1}\left[P_k^{+}(k)KD^{-} + P_k^{-}(k)KD^{+}\right]f_1,$$

$$J_{4k} = A_k 2^{-1}\sum_{s=0}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\varphi_{k-s}^{-} + E_s^{-}(k)\varphi_{k-s}^{+}\right].$$

Şimdi, $||Y_{mk}||_H$, $m=\overline{1,4}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$ için, (2.8), (2.9), (2.11), (2.14) ve (2.15) kestirimleri uygulanarak

$$||Y_{1k}||_H \le \left\|A_{k-1/2}^{1/2}P_k^{+}(k)KB^{-}u_0\right\|_H$$

$$\le \left\|A_k P_k^{+}(k)A_1^{-1}\right\|\left\|A_1 KB^{-}A_1^{-1}\right\|\left\|A_1 A_0^{-1}\right\|\left\|A_0 u_0\right\|_H$$

$$\le M_1\left[\frac{1}{1-\tau M_4}\left(1+\frac{5\tau}{4}M_4\right)+\frac{3}{2}\right]e^{M_1P_1}\left\|A_0u_0\right\|_H = C_9\left\|A_0u_0\right\|_H$$

elde edilir.

$m=2$ için, (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) ve (2.15) kestirimleri uygulanarak

$$||Y_{2k}||_H \le \left\|A_{k-1/2}^{1/2}P_k^{+}(k)KC^{-}u_0'\right\|_H$$

$$\le \left\|A_k P_k^{+}(k)A_1^{-1}\right\|\left\|A_1 KC^{-}u_0'\right\|_H$$

$$\le \left[\frac{5}{4}\left(M_1+\frac{1}{2}M_3\right)+\frac{\tau}{4}\left(\frac{15}{8}M_4+\frac{1}{2}M_3\right)+\frac{3}{4}\tau^2\left(M_4^2+M_4M_3\right)\right]$$

$$\times e^{M_1P_1}\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H = C_{10}\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

bulunur.

$m=3$ için, (2.8), (2.9), (2.11), (2.13), (2.14) ve (2.15) kestirimleri uygulanarak

$$||Y_{3k}||_H \le \left\|A_k P_k^{+}(k)KD^{-}f_1\right\|_H$$

$$\le \left\|A_k P_k^{+}(k)A_1^{-1}\right\|\left\|A_1 KD^{-}\right\|\left\|f_1\right\|_H$$

$$\le \left[\frac{5}{4}+\tau\left(\frac{15}{8}M_4+\frac{1}{2}M_3\right)+\frac{3}{4}\tau^2\left(M_4^2+M_4M_3\right)\right]e^{M_1P_1}$$

$$\times\left(\left\|f_1\right\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)'f_1\right\|_H\right) = C_{11}\left[\left\|f_1\right\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)'f_1\right\|_H\right]$$

bulunur.

$m=4$ için,

$$Y_4 = Q_{1k}+Q_{2k}+Q_{3k}+Q_{4k}+Q_{5k}+Q_{6k}+Q_{7k} \tag{2.23}$$

olup, burada

$$Q_{1k}=A_k2^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.+E_s^{-}(k)\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right](A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s+1/2}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_{k-s}-u_{k-s-1}\right),$$

$$Q_{2k}=A_k2^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}i\left[-E_s^{+}(k)+E_s^{-}(k)\right]\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_{k-s-1}-u_{k-s-2}\right),$$

$$Q_{3k}=-A_k2^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.+E_s^{-}(k)\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right](A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s+1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}A_{k-s}u_{k-s},$$

$$Q_{4k}=-A_k2^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right.$$

$$\left.+E_s^{-}(k)\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right](A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}A_{k-s-1}u_{k-s-1},$$

$$Q_{5k}=A_k2^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)+E_s^{-}(k)\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right](A_{k-s}^{1/2})'\frac{\tau}{2}f_{k-s},$$

$$Q_{6k}=A_k2^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\left(-i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)+E_s^{-}(k)\left(i\frac{\tau}{2}A_{k-s}^{-1/2}+\frac{\tau^2}{2}\right)\right]$$

$$\times(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s-1/2}^{-1/2}\frac{\tau}{2}f_{k-s-1},$$

$$Q_{7k}=A_k2^{-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[E_s^{+}(k)\left(i\tau A_{k-s}^{-1/2}-\frac{\tau^2}{2}\right)+E_s^{-}(k)\left(-i\tau A_{k-s}^{-1/2}-\frac{\tau^2}{2}\right)\right]f_{k-s}.$$

Şimdi, $||Q_{mk}||_H$, $m=\overline{1,7}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$ için, (2.11), (2.14) ve (2.16) kestirimleri uygulanarak

$$\|Q_{1k}\|_H\leq\sum_{s=1}^{k-2}\frac{\tau}{2}\left[\left\|A_kE_s^{+}(k)A_{k-s}^{-1}\right\|+\left\|A_kE_s^{+}(k)A_{k-s}^{-1/2}\tau\right\|\right]$$

$$\times\left\|A_{k-s}^{1/2}(A_{k-s}^{1/2})'A_{k-s+1/2}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s+1/2}^{1/2}A_{k-s-1/2}^{-1/2}\right\|\left\|A_{k-s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}\left(u_{k-s}-u_{k-s-1}\right)\right\|_H$$

$$\leq\frac{2\tau}{3}C_6\sum_{s=1}^{k-2}\left\|A_{k-s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}\left(u_{k-s}-u_{k-s-1}\right)\right\|_H$$

yazılır.

$m=2$ için, (2.11), (2.14) ve (2.16) kestirimleri kullanılarak

$$\|Q_{2k}\|_H \leq \sum_{s=1}^{k-2} \frac{\tau}{2} \left\|A_k E_s^+(k) A_{k-s}^{-1}\right\| \left\|A_{k-s}^{1/2} (A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s+1/2}^{-1}\right\|$$

$$\times \left\|A_{k-s+1/2}^{1/2} A_{k-s-1/2}^{-1/2}\right\| \left\|A_{k-s-1/2}^{1/2} \tau^{-1} \left(u_{k-s} - u_{k-s-1}\right)\right\|_H$$

$$\leq \frac{2\tau}{3} C_6 \sum_{s=1}^{k-2} \left\|A_{k-s-3/2}^{1/2} \tau^{-1} \left(u_{k-s-1} - u_{k-s-2}\right)\right\|_H$$

bulunur.

$m=3$ için, (2.13) ve (2.16) kestirimleri uygulanarak

$$\|Q_{3k}\|_H \leq \sum_{s=1}^{k-2} \frac{\tau}{8} \left[\left\|A_k E_s^+(k) A_{k-s}^{-1/2} \tau\right\| + \left\|A_k E_s^+(k) \tau^2\right\|\right]$$

$$\times \left\|(A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s+1/2}^{-1}\right\| \|A_{k-s} u_{k-s}\|_H \leq \tau C_{12} \sum_{s=1}^{k-2} \|A_{k-s} u_{k-s}\|$$

elde edilir; burada

$$C_{12} = \frac{3}{2} M_3 e^{M_1 P_1}.$$

$m=4$ için, (2.13) ve (2.16) kestirimleri uygulanarak

$$\|Q_{4k}\|_H \leq \sum_{s=1}^{k-2} \frac{\tau}{4} \left\|A_k E_s^+(k) A_{k-s}^{-1/2} \tau\right\| \left\|(A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s-1/2}^{-1}\right\| \|A_{k-s-1} u_{k-s-1}\|_H$$

$$\leq \frac{\tau}{3} C_{12} \sum_{s=1}^{k-2} \|A_{k-s-1} u_{k-s-1}\|_H$$

yazılır.

$m=5$ için, gene (2.13) ve (2.16) kestirimleri kullanılarak

$$\|Q_{5k}\|_H \leq \sum_{s=1}^{k-2} \frac{\tau}{8} \left[\left\|A_k E_s^+(k) A_{k-s}^{-1/2} \tau\right\| + \left\|A_k E_s^+(k) \tau^2\right\|\right] \left\|(A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s+1/2}^{-1}\right\| \|f_{k-s}\|_H$$

$$\leq \tau C_{12} \sum_{s=1}^{k-2} \|f_{k-s}\|_H$$

elde edilir.

$m=6$ için, yine (2.13) ve (2.16) kestirimleri kullanılarak

$$\|Q_{6k}\|_H \leq \sum_{s=1}^{k-2} \frac{\tau}{4} \left\|A_k E_s^+(k) A_{k-s}^{-1/2} \tau\right\| \left\|(A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s-1/2}^{-1/2}\right\| \|f_{k-s-1}\|_H$$

$$\leq \frac{\tau}{3} C_{12} \sum_{s=1}^{k-2} \|f_{k-s-1}\|_H$$

bulunur.

$m = 7$ için,

$$Q_{7k} = A_k 2^{-1} \sum_{s=1}^{k-2} \left[E_s^+(k) \left(-\frac{\tau^2}{2} + i\tau A_{k-s}^{-1/2} \right) + E_s^-(k) \left(-\frac{\tau^2}{2} - i\tau A_{k-s}^{-1/2} \right) \right] f_{k-s}$$

olup, Q_{6k}'dakine benzer olarak

$$\|Q_{7k}\|_H \leq \sum_{s=1}^{k-2} \frac{\tau}{4} \left\| A_k E_s^+(k) A_{k-s}^{-1/2} \tau \right\| \left\| (A_{k-s}^{1/2})' A_{k-s-1/2}^{-1/2} \right\| \|f_{k-s-1}\|_H$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\|f_k\|_H + e^{M_1 P_1} \|f_1\|_H + e^{M_1 P_1} \sum_{s=2}^{k} \|f_s - f_{s-1}\|_H \right]$$

elde edilir. (2.23) formülü, üçgen eşitsizliği ve bulunan son yedi kestirim kullanılarak

$$\|Y_{4k}\|_H \leq \tau \sum_{s=2}^{k-1} \left[\frac{2}{3} C_6 \left(\left\| A_{s-1/2}^{1/2} \tau^{-1} (u_s - u_{s-1}) \right\|_H + \left\| A_{s-3/2}^{1/2} \tau^{-1} (u_{s-1} - u_{s-2}) \right\|_H \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} C_{12} \left(3 \|A_s u_s\|_H + \|A_{s-1} u_{s-1}\|_H + 3 \|f_s\|_H + \|f_{s-1}\|_H \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\|f_k\|_H + e^{M_1 P_1} \|f_1\|_H + e^{M_1 P_1} \sum_{s=2}^{k} \|f_s - f_{s-1}\|_H \right]$$

yazılır. (2.22), üçgen eşitsizliği ve $\|Y_{mk}\|_H$, $m = \overline{1,4}$ kestirimleri kullanılarak

$$||A_k u_k||_H \leq C_9 \|A_0 u_0\|_H + C_{10} \left\| A_0^{1/2} u_0' \right\|_H + C_{11} \left[\|f_1\|_H + \left\| \tau^2 \left(A_1^{1/2} \right)' f_1 \right\|_H \right]$$

$$+ \tau \sum_{s=2}^{k-1} \left[\frac{2}{3} C_6 \left(\left\| A_{s-1/2}^{1/2} \tau^{-1} (u_s - u_{s-1}) \right\|_H + \left\| A_{s-3/2}^{1/2} \tau^{-1} (u_{s-1} - u_{s-2}) \right\|_H \right) \right.$$

$$\left. + C_{12} \left(\|A_s u_s\|_H + \frac{1}{3} \|A_{s-1} u_{s-1}\|_H + \|f_s\|_H + \frac{2}{3} \|f_{s-1}\|_H \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\|f_k\|_H + e^{M_1 P_1} \|f_1\|_H + e^{M_1 P_1} \sum_{s=2}^{k} \|f_s - f_{s-1}\|_H \right]$$

yazılır. Yukarıdaki sonuçtan

$$||A_k u_k||_H \leq C_{13} \left[\|A_0 u_0\|_H + \left\| A_0^{1/2} u_0' \right\|_H + \left\| \tau^2 \left(A_1^{1/2} \right)' f_1 \right\|_H + \max_{1 \leq s \leq k} \|f_s\|_H \right.$$

$$+\tau\sum_{s=1}^{k}\left(\left\|A_{s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H+\|A_su_s\|_H\right)+\sum_{s=2}^{k}\|f_s-f_{s-1}\|_H\Bigg] \tag{2.24}$$

elde edilir; burada

$$C_{13}=\max\left\{C_9,C_{10},C_{11}+e^{M_1P_1},\frac{4}{3}C_6,2C_{12}\right\}.$$

(2.21) ve (2.24)'deki kestirimler birleştirilerek herhangi bir $k, 1\le k\le N$ için

$$\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H+||A_ku_k||_H\le C_{14}\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)'f_1\right\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{1\le s\le k}\|f_s\|_H+\sum_{s=1}^{k}\left(\left\|A_{s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H+\|A_su_s\|_H\right)+\sum_{s=2}^{k}\|f_s-f_{s-1}\|_H\right]$$

bulunur; burada

$$C_{14}=\frac{1}{1-\tau\left(C_{13}+C_8\right)}.$$

Entegral eşitsizliğinin fark benzetimi uygulanarak

$$\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H+||A_ku_k||_H\le C_{15}\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H\right.$$

$$\left.+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)'f_1\right\|_H+\max_{1\le s\le N}\|f_s\|_H+\sum_{s=1}^{N}\|f_s-f_{s-1}\|_H\right] \tag{2.25}$$

sonucuna varılır, burada

$$C_{15}=C_{14}e^{k\tau C_{14}}.$$

Bu sonuç Teorem 2.1'in ispatını tamamlar.

Teorem 2.2. *$u(0)\in D(A(0))$, $u'(0)\in D(A^{1/2}(0))$ ve $f_{k+1}\in D$* olsun. Bu durumda (2.5) fark şemasının çözümü için

$$\max_{1\le k\le N-1}||\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)||_H$$

$$\le M\left[||A(0)u_0||_H+||A^{\frac{1}{2}}(0)u_0'||_H+\max_{1\le k\le N}\|f_k\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{1\le k\le N}\left\|\tau^2A_{k+1}f_{k+1}\right\|_H+\sum_{s=1}^{N}\|f_s-f_{s-1}\|_H\right]$$

kararlılık kestirimi geçerlidir; burada M, u_0, u_0', f_s $(1\le s\le N)$ ve τ'dan bağımsızdır.

İspat. (2.5)' i kullanarak her $k, 1 \leq k \leq N$ için

$$\left\| \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} \right\|_H \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{\tau}{8} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \right] \left\| A_{k+1}^{3/2} A_{k+3/2}^{-3/2} \right\|$$

$$\times \left\| A_{k+3/2} A_{k+1}^{-1} \right\| \left\| \tau^2 A_{k+1}^2 u_{k+1} \right\|_H + \left[\frac{1}{2} + \frac{\tau}{4} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+3/2}^{-1/2} \right\| + \frac{\tau}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{\tau^2}{8} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+3/2}^{-1/2} \right\| \right] \left\| A_{k+1} u_{k+1} \right\|_H$$

$$+ \left[\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+3/2}^{-1/2} \right\| + \frac{\tau^2}{4} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} - A_k^{1/2} \right) A_{k+1}^{-1/2} \right\| + \frac{\tau}{2} \left\| \left[\left(A_{k+1}^{1/2} \right)' - \left(A_k^{1/2} \right)' \right] A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \right] \left\| A_k u_k \right\|_H$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \left\| A_{k+1}^{3/2} A_{k+3/2}^{-3/2} \right\| \left\| A_{k+3/2} A_{k+1}^{-1} \right\| + \frac{\tau}{4} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \right.$$

$$\left. \times \left\| A_{k+1}^{3/2} A_{k+3/2}^{-3/2} \right\| \left\| A_{k+3/2} A_{k+1}^{-1} \right\| \right] \left\| \tau A_{k+1} \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\|_H + \left[\frac{1}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+3/2}^{-1/2} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{\tau}{4} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+3/2}^{-1/2} \right\| \right] \left\| A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \left\| A_{k+1/2}^{1/2} \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\|_H$$

$$+ \left[\left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| + \frac{\tau}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\tau} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} - A_k^{1/2} \right) A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \frac{1}{2} \left\| \left[\left(A_{k+1}^{1/2} \right)' - \left(A_k^{1/2} \right)' \right] A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \right]$$

$$\times \left\| A_{k-1/2}^{-1/2} \right\| \left\| A_{k-1/2}^{1/2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \left[\frac{1}{4} \left\| A_{k+1}^{3/2} A_{k+3/2}^{-3/2} \right\| \left\| A_{k+3/2} A_{k+1}^{-1} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{\tau}{8} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \left\| A_{k+1}^{3/2} A_{k+3/2}^{-3/2} \right\| \left\| A_{k+3/2} A_{k+1}^{-1} \right\| \right] \left\| \tau^2 A_{k+1} f_{k+1} \right\|_H$$

$$+ \left[1 + \frac{\tau}{4} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+3/2}^{-1/2} \right\| + \frac{\tau^2}{4} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+3/2}^{-1/2} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{\tau}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \right] \left\| f_{k+1} \right\|_H$$

$$+ \left[\frac{\tau}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| + \frac{\tau^2}{4} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1}^{-1/2} \right\| \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} \right)' A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left\| \left(A_{k+1}^{1/2} - A_k^{1/2} \right) A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| + \frac{\tau}{4} \left\| \left[\left(A_{k+1}^{1/2} \right)' - \left(A_k^{1/2} \right)' \right] A_{k+1/2}^{-1/2} \right\| \right] \left\| f_k \right\|_H \tag{2.26}$$

yazılabilir. (2.21) ve (2.24) kestirimlerinin ispatlarında olduğu gibi sırasıyla

$$\left\| \tau A_{k+1} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq 2C_8 \left[\left\| A_0 u_0 \right\|_H + \left\| A_0^{1/2} u_0' \right\|_H + \left\| \tau^2 \left(A_1^{1/2} \right)' f_1 \right\|_H \right.$$

$$+\max_{1\le s\le k}\|f_s\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k}\left(\left\|A_{s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H+\|A_su_s\|_H\right)+\sum_{s=2}^{k}\|f_s-f_{s-1}\|_H\right],$$

$$||\tau^2A_{k+1}^2u_k||_H\le 2C_{13}\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\left\|\tau^2\left(A_1^{1/2}\right)'f_1\right\|_H+\max_{1\le s\le k}\|f_s\|_H\right.$$

$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k}\left(\left\|A_{s-1/2}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H+\|A_su_s\|_H\right)+\sum_{s=2}^{k}\|f_s-f_{s-1}\|_H\right]$$

yazılabilir. Bunlar (2.26)'da yerine konularak ve (2.11), (2.12) ve (2.13) kestirimleri uygulanarak

$$\left\|\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}\right\|_H\le C_{16}\left[\left\|\tau^2A_{k+1}^2u_{k+1}\right\|_H+\left\|\tau A_{k+1}\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_H\right.$$

$$+\|A_{k+1}u_{k+1}\|_H+\left\|A_{k+1/2}^{1/2}\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_H+\|A_ku_k\|_H+\left\|A_{k-1/2}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H$$

$$\left.+\left\|\tau^2A_{k+1}f_{k+1}\right\|_H+\|f_{k+1}\|_H+\|f_k\|_H\right]$$

elde edilir; burada

$$C_{16}=\max\left\{\frac{1}{4}+\frac{\tau}{2}M_3,\frac{1}{2}+\frac{3\tau}{4}M_3+\frac{\tau^2}{8}M_3^2,\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}M_3+\frac{\tau^2}{4}M_3^2+\tau M_{1/2},\right.$$

$$\frac{1}{2}\left(M_{3/2}+1\right)M_1+\frac{\tau}{4}M_3\left(M_{3/2}+1\right)M_1,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(M_3+\frac{\tau}{2}M_3^2+\frac{3}{2}\left(M_{1/2}+1\right)\right),$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{1}{2}M_3+\frac{\tau}{4}M_3^2\right),1+\frac{3\tau}{4}M_3+\frac{\tau^2}{4}M_3^2,\frac{\tau}{2}(M_3+M_{1/2})+\frac{\tau^2}{4}(M_3^2+M_{1/2})\right\}.$$

(2.25) kestirimi kullanılarak

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}\right\|_H\le C_{17}\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{1\le k\le N}\left\|\tau^2A_{k+1}f_{k+1}\right\|_H+\max_{1\le s\le N}\|f_s\|_H+\sum_{s=1}^{N}\|f_s-f_{s-1}\|_H\right]$$

bulunur; burada

$$C_{17}=5C_{15}C_{16}.$$

Böylece Teorem 2.2 ispatlanmış olur.

3 $A(t)$ İLE OLUŞTURULAN İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

3.1 İkinci Basamakdan Doğruluklu Fark Şemasının Kurulması

Taylor açılımını kullanarak

$$\frac{u\left(t_{k+1}\right)-2u\left(t_{k}\right)+u\left(t_{k-1}\right)}{\tau^{2}}-u''\left(t_{k}\right)=o(\tau^{2}), \tag{3.1}$$

$$u\left(t_{k}\right)-\frac{u\left(t_{k+1}\right)+2u\left(t_{k}\right)+u\left(t_{k-1}\right)}{4}=o(\tau^{2}) \tag{3.2}$$

denklemleri yazılabilir. (3.1), (3.2) ve

$$u''\left(t_{k}\right)=-A\left(t_{k}\right)u\left(t_{k}\right)+f\left(t_{k}\right)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{u\left(t_{k+1}\right)-2u\left(t_{k}\right)+u\left(t_{k-1}\right)}{\tau^{2}}+\frac{1}{4}A\left(t_{k}\right)\left(u\left(t_{k+1}\right)+2u\left(t_{k}\right)+u\left(t_{k-1}\right)\right)$$
$$=f\left(t_{k}\right)+o(\tau^{2})$$

elde edilir. Ayrıca,

$$(I+\tau^{2}A\left(0\right))\frac{u\left(\tau\right)-u\left(0\right)}{\tau}=\frac{\tau}{2}(-A\left(0\right)u\left(0\right)+f\left(0\right))+\psi+o(\tau^{2}).$$

$o(\tau^{2})$ mertebesindeki terimler ihmal edilerek (1.1)'deki başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}-2u_{k}+u_{k-1}}{\tau^{2}}+\frac{1}{2}A_{k}u_{k}+\frac{1}{4}A_{k}\left(u_{k+1}+u_{k-1}\right)=f_{k}, \\ A_{k}=A\left(t_{k}\right), f_{k}=f(t_{k}), t_{k}=k\tau, 1\leq k\leq N-1,\ N\tau=T, \\ (I+\tau^{2}A_{0})\tau^{-1}(u_{1}-u_{0})=\frac{\tau}{2}(f_{0}\ -A_{0}u_{0})+\psi, f_{0}\ =\ f(0),\ u_{0}\ =\ \varphi \end{cases} \tag{3.3}$$

fark şeması elde edilir. Denklem (3.3)'den

$$\begin{cases} \tau^{-1}(u_{k+1}-u_{k})=iA_{k}^{1/2}2^{-1}\left(v_{k+1}+v_{k}\right), \\ u_{1}=\left(I+\tau^{2}A_{0}\right)^{-1}\left[\left(I-\frac{\tau^{2}}{2}A_{0}\right)u_{0}+\tau u_{0}'+\frac{\tau^{2}}{2}f_{0}\right],\ 1\leq k\leq N-1, \\ \tau^{-1}(v_{k+1}-v_{k})=iA_{k}^{1/2}2^{-1}(u_{k+1}+u_{k})+\psi_{k}, \\ v_{1}=-2iA_{0}^{-1/2}\left(I+\tau^{2}A_{0}\right)^{-1}\left[-\frac{\tau}{2}A_{0}u_{0}+u_{0}'+\frac{\tau}{2}f_{0}\right]+iA_{0}^{-1/2}u_{0}', \\ 1\leq k\leq N-1 \end{cases} \tag{3.4}$$

yazılabilir. Burada ψ_k bilinmeyen bir grid fonksiyondur ve ilerleyen bölümde tanımlanacaktır.

(3.4) kullanılarak ve terimler düzenlenerek (1.1)'deki başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü için aşağıdaki iki adımlı fark şeması elde edilir;

$$\begin{cases} \tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+A_k 4^{-1}\left(u_{k+1}+u_k\right)+A_k 4^{-1}\left(u_k+u_{k-1}\right) \\ =\tau^{-1}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)A_{k-1}^{-1/2}\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right) \\ +4^{-1}A_k^{1/2}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)\left(u_k+u_{k-1}\right)+i2^{-1}\tau^{-1}A_k^{1/2}\left(\psi_k+\psi_{k-1}\right) \\ 1\leq k\leq N-1, \quad u_0=u(0), \\ (I+\tau^2A_0)\tau^{-1}(u_1-u_0)=\frac{\tau}{2}(f_0\ -A_0u_0)+\psi, \end{cases}$$

öyleki

$$\psi_k+\psi_{k-1}=-2iA_k^{-1/2}f_k$$

$$+2i\left(A_{k-1}^{-1/2}-A_k^{-1/2}\right)\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau^2}+2^{-1}i\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)\left(u_k+u_{k-1}\right).$$

Burada

$$\psi_p=-iA_k^{-1/2}f_k-2iA_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}-A_p^{1/2}\right)A_p^{-1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau^2}$$

$$+i\left(A_k^{1/2}-A_p^{1/2}\right)\frac{u_k+u_{k-1}}{2}, \text{ için } p=k-1,k. \tag{3.5}$$

ψ_k ve ψ_{k-1} için farklı formüller olmasına rağmen bunların normları için aynı kestirim geçerlidir. Gerçekten,

$$\left\|A_k^{1/2}\psi_k\right\|_H\leq M_{1/2}\left\|f_k\right\|_H$$

$$\leq M_{1/2}\left\|f_k\right\|_H+2M_{1/2}^2\left\|\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H+M_{1/2}\left\|\tau A_{k-1}\frac{u_k+u_{k-1}}{2}\right\|_H, \tag{3.6}$$

$$\left\|A_k^{1/2}\psi_{k-1}\right\|_H\leq M_{1/2}\left\|f_k\right\|_H+2M_{1/2}^2\left\|\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H+M_{1/2}\left\|\tau A_{k-1}\frac{u_k+u_{k-1}}{2}\right\|_H. \tag{3.7}$$

Şimdi, (3.3)'deki fark şemasının çözümü için bir formül oluşturalım.

(3.4) denkleminde $\eta_k = u_k + v_k$ ve $\mu_k = u_k - v_k$ dönüşümleri yapılarak aşağıdaki fark denklemleri sistemi elde edilir;

$$\begin{cases} \tau^{-1}(\eta_{k+1} - \eta_k) = iA_k^{1/2} 2^{-1}(\eta_{k+1} + \eta_k) + \psi_k, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ \eta_1 = B^- u_0 + C^- u_0' + D^- f_0, \\ \tau^{-1}(\mu_{k+1} - \mu_k) = -iA_k^{1/2} 2^{-1}\left(\mu_{k+1} + \mu_k\right) - \psi_k, \\ 1 \leq k \leq N-1, \quad \mu_1 = B^+ u_0 + C^+ u_0' + D^+ f_0. \end{cases}$$

Burada

$$B^{\pm} = \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \left(I - \frac{\tau^2}{2} A_0 \pm i\tau A_0^{1/2}\right),$$

$$C^{\pm} = \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \left(\tau \mp iA_0^{-1/2}\right),$$

$$D^{\pm} = \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \left(\frac{\tau^2}{2} \mp i\tau A_0^{-1/2}\right).$$

Yukarıdaki denklem sisteminden

$$\begin{cases} \eta_{k+1} = \left(I - \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right)^{-1} \left(I + \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right) \eta_k + \tau \left(I - \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right)^{-1} \psi_k, \\ \mu_{k+1} = \left(I + \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right)^{-1} \left(I - \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right) \mu_k - \tau \left(I + \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right)^{-1} \psi_k \end{cases}$$

fark formülleri elde edilir. Böylece

$$\eta_{k+1} = P_k^+(k)(B^+ u_0 + C^+ u_0' + D^+ f_0) + \sum_{m=1}^{k} R_m^+(k)\tau \left(I - \frac{i\tau}{2} A_m^{1/2}\right)^{-1} \psi_k,$$

$$\mu_{k+1} = P_k^-(k)(B^- u_0 + C^- u_0' + D^- f_0) - \sum_{m=1}^{k} R_m^-(k)\tau \left(I + \frac{i\tau}{2} A_m^{1/2}\right)^{-1} \psi_k$$

bulunur; burada

$$P_k^{\pm}(k) = X_k^{\pm} X_{k-1}^{\pm} \cdots X_0^{\pm}, \; R_m^{\pm}(k) = X_k^{\pm} X_{k-1}^{\pm} \cdots X_{m+1}^{\pm},$$

$$X_{k+1}^{\pm} = \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right)^{-1} \left(I \pm \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right).$$

Sonra $u_k = \frac{1}{2}(\eta_k + \mu_k)$ formulü kullanılarak

$$u_{k+1} = 4^{-1} \left\{ [P_k^+(k)B^+ + P_k^-(k)B^-]u_0 + [P_k^+(k)C^+ + P_k^-(k)C^-]u_0' \right.$$

$$+ [P_k^+(k)D^+ + P_k^-(k)D^-]f_0$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \left[R_m^+(k)\tau \left(I - \frac{i\tau}{2} A_m^{1/2}\right)^{-1} - R_m^-(k)\tau \left(I + \frac{i\tau}{2} A_m^{1/2}\right)^{-1} \right] \psi_m$$

bulunur. Ayrıca $k-m=s$ dönüşümü yapılarak

$$u_{k+1} = 4^{-1}\left\{[P_k^+(k)B^+ + P_k^-(k)B^-]u_0 + [P_k^+(k)C^+ + P_k^-(k)C^-]u_0' \right.$$

$$+[P_k^+(k)D^+ + P_k^-(k)D^-]f_0$$

$$\left. +\sum_{s=0}^{k-1}\left[B_s^+(k)\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} - B_s^-(k)\tau\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_{k-s}\right\} \tag{3.8}$$

elde edilir; burada

$$B_s^{\pm}(k) = X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_{k-s+1}^{\pm},\, B_0^{\pm}(k) = I.$$

Son olarak (3.8) denkleminden

$$\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)$$

$$= i4^{-1}\left\{\left[iA_k^{1/2}\left[P_k^+(k)+P_{k-1}^+(k-1)\right]B^+ - A_k^{1/2}\left[P_k^-(k)+P_{k-1}^-(k-1)\right]B^-\right]u_0\right.$$

$$+\left[A_k^{1/2}\left[P_k^+(k)+P_{k-1}^+(k-1)\right]C^+ - A_k^{1/2}\left[P_k^-(k)+P_{k-1}^-(k-1)\right]C^-\right]u_0'$$

$$+\left[A_k^{1/2}\left[P_k^+(k)+P_{k-1}^+(k-1)\right]D^+ - A_k^{1/2}\left[P_k^-(k)+P_{k-1}^-(k-1)\right]D^-\right]f_0$$

$$+A_k^{1/2}\left[B_0^+(k)\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1} + B_0^-(k)\tau\left(I+\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_k$$

$$+\sum_{s=1}^{k-1}A_k^{1/2}\left[[B_s^+(k)+B_{s-1}^+(k-1)]\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\left. +[B_s^-(k)+B_{s-1}^-(k-1)]\tau\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_{k-s}\right\} \tag{3.9}$$

ve

$$A_k^{1/2}2^{-1}(u_{k+1}+u_k)$$

$$= 4^{-1}\left\{\left[A_k^{1/2}\left[P_k^+(k)+P_{k-1}^+(k-1)\right]B^+ + A_k^{1/2}\left[P_k^-(k)+P_{k-1}^-(k-1)\right]B^-\right]u_0\right.$$

$$+\left[A_k^{1/2}\left[P_k^+(k)+P_{k-1}^+(k-1)\right]C^+ + A_k^{1/2}\left[P_k^-(k)+P_{k-1}^-(k-1)\right]C^-\right]u_0'$$

$$+\left[A_k^{1/2}\left[P_k^+(k)+P_{k-1}^+(k-1)\right]D^+ + A_k^{1/2}\left[P_k^-(k)+P_{k-1}^-(k-1)\right]D^-\right]f_0$$

$$+A_k^{1/2}\left[B_0^+(k)\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1} - B_0^-(k)\tau\left(I+\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_k$$

$$+\sum_{s=1}^{k-1} A_k^{1/2}\left[[B_s^+(k)+B_{s-1}^+(k-1)]\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\left.-[B_s^-(k)+B_{s-1}^-(k-1)]\tau\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_{k-s}\right\} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Bir sonraki alt bölümde yukarıdaki elde edilen formüller (3.3) fark şemasının kararlılık kestirimlerini bulmak için kullanılacaktır.

3.2 (3.3) Fark Şemasının Kararlılığı

Önce $A(t)$ operatörü için ileride gerekecek bazı ikinci derecede önemli koşulları verelim. $A(t)$'ler, H içinde t'ye bağımsız bir $D(A(t)) : A(t) \geq \delta I > 0 :$ alanında pozitif tanımlı öz-adjoint operatörler olsun. Bu durumda aşağıdaki kestirimler geçerlidir;

$$\left\|\tau^{\alpha} A_k^{\alpha/2}\left(I+\tau^2 A_k\right)^{-1}\right\| \leq 1,\ \alpha=0,2, \tag{3.11}$$

$$\left\|\tau A_k^{1/2}\left(I+\tau^2 A_k\right)^{-1}\right\| \leq 1/2, \tag{3.12}$$

$$\left\|\left(I\mp i\tau A_s^{1/2}\right)^{-1}\right\| \leq 1, \tag{3.13}$$

$$\left\|\left(I\mp\frac{i\tau}{2}A_s^{1/2}\right)^{-1}\left(I\pm\frac{i\tau}{2}A_s^{1/2}\right)\right\| \leq 1, \tag{3.14}$$

$$\left\|\tau A_s^{1/2}\left(I\pm\frac{i\tau}{2}A_s^{1/2}\right)^{-1}\right\| \leq 2. \tag{3.15}$$

$A^{\rho}(t)A^{-\rho}(z), \rho \in [0,1]$ operatör fonksiyonunun

$$\left\|\left[A^{\rho}(t)-A^{\rho}(s)\right]A^{-\rho}(z)\right\| \leq M_{\rho}|t-s| \tag{3.16}$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin; burada M_{ρ}'ler, $t, s, z \in [0, T]$ için bu değerlerden bağımsız pozitif sabitlerdir. Bu sonuçtan hareketle $A^{\rho}(t)A^{-\rho}(z)$ operatör fonksiyonu

$[0,T]$ üzerinde sınırlı bir değişime sahiptir; yani öyle bir P_ρ sayısı mevcuttur ki

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \left(A^\rho(s_k) - A^\rho(s_{k-1})\right) A^{-\rho}(z) \right\| \leq P_\rho$$

eşitsizliği herhangi bir $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = T$ sıralaması için sağlanır. Burada P_ρ $s_0,\ s_1, \cdots, s_N$ ve z'den bağımsız pozitif bir sabittir.

Ayrıca $A^{1/2}(p)A^{1/2}(t)A^{-1}(z)$ operatör fonksiyonunun

$$\left\| A^{1/2}(p) \left[A^{1/2}(t) - A^{1/2}(s)\right] A^{-1}(z) \right\| \leq M_{1/2}|t-s| \tag{3.17}$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin; burada $M_{1/2},\ t,s,z,p \in [0,T]$ için t,s,z ve p'den bağımsız pozitif sabittir. Bu sonuçtan hareketle $A^{1/2}(p)A^{1/2}(t)A^{-1/2}(s)$ operatör fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde sınırlı bir değişime sahiptir; yani öyle bir $P_{1/2}$ sayısı mevcuttur ki

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| A^{1/2}(p) \left[A^{1/2}(s_k) - A^{1/2}(s_{k-1})\right] A^{-1}(z) \right\| \leq P_{1/2}$$

eşitsizliği herhangi bir $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = T$ sıralaması için sağlanır. Burada $P_{1/2}$ $s_0,\ s_1, \cdots, s_N,\ p$ ve z'den bağımsız pozitif bir sabittir.

Eğer

$$\left\| A^\rho(t)A^{-\rho}(s) \right\| \leq M_\rho \tag{3.18}$$

ise, bu eşitsizlikten her $t_k \in [0,T]_\tau$ için

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left\| A^{1/2}_{k+1/2} \left(A^{1/2}_{k+1} - A^{1/2}_{k}\right) A^{-1}_{k+1/2} \right\| \leq \left(M_{1/2}+1\right) M_1 P_1$$

yazılabilir.

Son olarak, $B^{\pm}_s(k) = X^{\pm}_k X^{\pm}_{k-1} \cdots X^{\pm}_{k-s+1}$ olsun; burada

$$X^{\pm}_k = \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A^{1/2}_k\right)^{-1} \left(I \pm \frac{i\tau}{2} A^{1/2}_k\right).$$

Yukarıdaki varsayım ve tanımlardan hareketle aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir:

$$\left\| A^\rho_k 2^{-1}[P^{\pm}_k(k) + P^{\pm}_{k-1}(k-1)]A^{-\rho}_0 \right\| \leq e^{M_\rho \sum\limits_{i=1}^{k} \left\| \left(A^\rho_i - A^\rho_{i-1}\right) A^{-\rho}_0 \right\|}, \tag{3.19}$$

$$\left\| \tau A^{2\rho}_k 2^{-1}[P^{\pm}_k(k) + P^{\pm}_{k-1}(k-1)]A^{-\rho}_0 \right\| \leq 2e^{M_\rho \sum\limits_{i=1}^{k} \left\| \left(A^\rho_i - A^\rho_{i-1}\right) A^{-\rho}_0 \right\|}, \tag{3.20}$$

$$\left\|A_k^{\rho}2^{-1}\left[B_s^{\pm}(k)+B_{s-1}^{\pm}(k-1)\right]A_{k-s}^{-\rho}\right\| \leq e^{M_\rho \sum\limits_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{\rho}-A_{i-1}^{\rho}\right)A_0^{-\rho}\right\|}, \tag{3.21}$$

$$\left\|\tau A_k^{2\rho}2^{-1}\left[B_s^{\pm}(k)+B_{s-1}^{\pm}(k-1)\right]A_{k-s}^{-\rho}\right\| \leq 2e^{M_\rho \sum\limits_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{\rho}-A_{i-1}^{\rho}\right)A_0^{-\rho}\right\|}. \tag{3.22}$$

Teorem 3.1. $u(0) \in D(A^{\frac{1}{2}}(0))$ olsun. Bu durumda (3.3) fark şemasının çözümü için

$$\max_{0\leq k\leq N-1}\left\|\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_H + \max_{0\leq k\leq N-1}\left\|\tau A_k\frac{u_{k+1}+u_k}{2}\right\|_H + \max_{0\leq k\leq N}\|u_k\|_H$$

$$\leq M\left[||A^{\frac{1}{2}}(0)u_0||_H + ||u_0'||_H + \sum_{s=0}^{N-1}||f_s||_H\tau\right] \tag{3.23}$$

kararlılık kestirimi geçerlidir; burada M, u_0, u_0', f_s $(0 \leq s \leq N-1)$ ve τ'dan bağımsızdır.

İspat. İspat için önce $\|\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\|_H + \|\tau A_k 2^{-1}(u_{k+1}+u_k)\|_H$ kestirimi bulunacaktır. (3.9) ve (3.10) formülleri kullanılarak

$$\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k) + \tau A_k 2^{-1}(u_{k+1}+u_k)$$

$$= J_{1k} + J_{2k} + J_{3k} + J_{4k} + J_{5k} + J_{6k} + J_{7k} + J_{8k} + J_{9k} + J_{10k} \tag{3.24}$$

yazılabilir; burada

$$J_{1k} = i4^{-1}A_k^{1/2}\left\{\left[P_k^{+}(k)+P_{k-1}^{+}(k-1)\right]B^{+} - \left[P_k^{-}(k)+P_{k-1}^{-}(k-1)\right]B^{-}\right\}u_0,$$

$$J_{2k} = 4^{-1}\tau A_k\left\{\left[P_k^{+}(k)+P_{k-1}^{+}(k-1)\right]B^{+} + \left[P_k^{-}(k)+P_{k-1}^{-}(k-1)\right]B^{-}\right\}u_0,$$

$$J_{3k} = i4^{-1}A_k^{1/2}\left\{\left[P_k^{+}(k)+P_{k-1}^{+}(k-1)\right]C^{+} - \left[P_k^{-}(k)+P_{k-1}^{-}(k-1)\right]C^{-}\right\}u_0',$$

$$J_{4k} = 4^{-1}\tau A_k\left\{\left[P_k^{+}(k)+P_{k-1}^{+}(k-1)\right]C^{+} + \left[P_k^{-}(k)+P_{k-1}^{-}(k-1)\right]C^{-}\right\}u_0',$$

$$J_{5k} = i4^{-1}A_k^{1/2}\left\{\left[P_k^{+}(k)+P_{k-1}^{+}(k-1)\right]D^{+} - \left[P_k^{-}(k)+P_{k-1}^{-}(k-1)\right]D^{-}\right\}f_0,$$

$$J_{6k} = 4^{-1}\tau A_k\left\{\left[P_k^{+}(k)+P_{k-1}^{+}(k-1)\right]D^{+} + \left[P_k^{-}(k)+P_{k-1}^{-}(k-1)\right]D^{-}\right\}f_0,$$

$$J_{7k} = i4^{-1}\tau A_k^{1/2}\left[B_0^{+}(k)\left(I-\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1} + B_0^{-}(k)\left(I+\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_k,$$

$$J_{8k} = 4^{-1}\tau^2 A_k\left[B_0^{+}(k)\left(I-\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1} - B_0^{-}(k)\left(I+\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_k,$$

$$J_{9k} = i4^{-1}\tau \sum_{s=1}^{k-1} A_k^{1/2} \left[[B_s^{+}(k) + B_{s-1}^{+}(k-1)] \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \right.$$

$$\left. + [B_s^{-}(k) + B_{s-1}^{-}(k-1)] \left(I + \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \right] \psi_{k-s},$$

$$J_{10k} = 4^{-1}\tau^2 \sum_{s=1}^{k-1} A_k \left[[B_s^{+}(k) + B_{s-1}^{+}(k-1)] \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \right.$$

$$\left. - [B_s^{-}(k) + B_{s-1}^{-}(k-1)] \left(I + \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \right] \psi_{k-s}.$$

Şimdi, $||J_{mk}||_H$, $m = \overline{1,10}$ terimlerini için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m = 1$ için, (3.11), (3.12) ve (3.19) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{1k}||_H \le \left\| A_k^{1/2} 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] B^{\pm} u_0 \right\|_H$$

$$\le \left\| A_k^{1/2} 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] A_0^{-1/2} \right\|$$

$$\times \left[\left\| \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| + \left\| \tau A_0^{1/2} \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| + 2^{-1} \left\| \tau^2 A_0 \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| \right] \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H$$

$$\le 2 e^{M_{1/2} P_{1/2}} \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H = C_1 \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H$$

bulunur.

$m = 2$ için, (3.11), (3.12) ve (3.20) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{2k}||_H \le \left\| \tau A_k 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] B^{\pm} u_0 \right\|_H$$

$$\le \left\| \tau A_k 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] A_0^{-1/2} \right\|$$

$$\times \left[\left\| \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| + \left\| \tau A_0^{1/2} \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| + 2^{-1} \left\| \tau^2 A_0 \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| \right] \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H$$

$$\le 4 e^{M_{1/2} P_{1/2}} \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H = 2C_1 \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H$$

elde edilir.

$m = 3$ için, (3.11), (3.12) ve (3.19) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{3k}||_H \le \left\| A_k^{1/2} 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] C^{\pm} u_0' \right\|_H$$

$$\le \left\| A_k^{1/2} 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] A_0^{-1/2} \right\|$$

$$\times \left[\left\| \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| + \left\| \tau A_0^{1/2} \left(I + \tau^2 A_0 \right)^{-1} \right\| \right] \|u_0'\|_H$$

$$\leq \frac{3}{2} e^{M_{1/2} P_{1/2}} \left\| u_0' \right\|_H = \frac{3}{4} C_1 \left\| u_0' \right\|_H$$

elde edilir.

$m = 4$ için, (3.11), (3.12) ve (3.20) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{4k}||_H \leq \left\| \tau A_k 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] C^{\pm} u_0' \right\|_H$$

$$\leq \left\| \tau A_k 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] A_0^{-1/2} \right\|$$

$$\times \left[\left\| \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| + \left\| \tau A_0^{1/2} \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| \right] \left\| u_0' \right\|_H$$

$$\leq 3 e^{M_{1/2} P_{1/2}} \left\| u_0' \right\|_H = \frac{3}{2} C_1 \left\| u_0' \right\|_H$$

elde edilir.

$m = 5$ için, (3.11), (3.12) ve (3.19) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{5k}||_H \leq \left\| A_k^{1/2} 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] D^{\pm} f_0 \right\|_H$$

$$\leq \left\| A_k^{1/2} 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] A_0^{-1/2} \right\|$$

$$\times \left[\left\| \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| + 2^{-1} \left\| \tau A_0^{1/2} \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| \right] \left\| f_0 \right\|_H \tau$$

$$\leq \frac{5}{4} e^{M_{1/2} P_{1/2}} \left\| f_0 \right\|_H \tau = \frac{5}{8} C_1 \left\| f_0 \right\|_H \tau$$

elde edilir.

$m = 6$ için, (3.11), (3.12) ve (3.20) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{6k}||_H \leq \left\| \tau A_k 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] D^{\pm} f_0 \right\|_H$$

$$\leq \left\| \tau A_k 2^{-1} [P_k^{\pm}(k) + P_{k-1}^{\pm}(k-1)] A_0^{-1/2} \right\|$$

$$\times \left[\left\| \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| + 2^{-1} \left\| \tau A_0^{1/2} \left(I + \tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| \right] \left\| f_0 \right\|_H \tau$$

$$\leq \frac{5}{2} e^{M_{1/2} P_{1/2}} \left\| f_0 \right\|_H \tau = \frac{5}{4} C_1 \left\| f_0 \right\|_H \tau$$

elde edilir.

$m = 7$ için, (3.7) kestirimi kullanılarak ve (3.13) kestirimi uygulanarak

$$||J_{7k}||_H \leq \left\| 2^{-1} \tau A_k^{1/2} B_0^{\pm}(k) \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2} \right)^{-1} \psi_k \right\|_H$$

$$\leq \tau \left\| \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2} \right)^{-1} \right\| \left\| A_k^{1/2} \psi_k \right\|_H$$

$$\leq \tau M_{1/2} \left(\|f_{k+1}\|_H + 2M_{1/2} \left\| \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\|_H + \left\| \tau A_k \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \right\|_H \right)$$

elde edilir.

$m = 8$ için, (3.7) kestirimi kullanılarak ve (3.15) kestirimi uygulanarak

$$||J_{8k}||_H \leq \left\| 2^{-1} \tau^2 A_k B_0^{\pm}(k) \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2} \right)^{-1} \psi_k \right\|$$

$$\leq \tau \left\| \tau A_k \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2} \right)^{-1} \right\| \left\| A_k^{1/2} \psi_k \right\|_H$$

$$\leq 2\tau M_{1/2} \left(\|f_{k+1}\|_H + 2M_{1/2} \left\| \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\| + \left\| \tau A_k \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \right\| \right)$$

elde edilir.

$m = 9$ için, (3.7) kestirimi kullanılarak ve (3.13), (3.15), (3.17) ve (3.21) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{9k}||_H \leq \left\| \sum_{s=1}^{k-1} A_k^{1/2} 2^{-1} \left[B_s^{\pm}(k) + B_{s-1}^{\pm}(k-1) \right] \tau \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \psi_{k-s} \right\|_H$$

$$\leq \tau \sum_{s=1}^{k-1} \left\| A_k^{1/2} 2^{-1} \left[B_s^{\pm}(k) + B_{s-1}^{\pm}(k-1) \right] A_{k-s}^{-1/2} \right\| \left\| \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \right\| \left\| A_{k-s}^{1/2} \psi_{k-s} \right\|_H$$

$$\leq \tau M_{1/2} e^{M_{1/2} P_{1/2}}$$

$$\times \sum_{s=1}^{k-1} \left(\|f_{k-s+1}\|_H + 2M_{1/2} \left\| \frac{u_{k-s+1} - u_{k-s}}{\tau} \right\|_H + \left\| \tau A_{k-s} \frac{u_{k-s+1} + u_{k-s}}{2} \right\|_H \right)$$

$$\leq \tau M_{1/2} e^{M_{1/2} P_{1/2}} \sum_{s=1}^{k-1} \left(\|f_{s+1}\|_H + 2M_{1/2} \left\| \frac{u_{s+1} - u_s}{\tau} \right\|_H + \left\| \tau A_s \frac{u_{s+1} + u_s}{2} \right\|_H \right)$$

elde edilir.

$m = 10$ için, (3.7) kestirimi kullanılarak ve (3.13), (3.15), (3.17) ve (3.22) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{8k}||_H \leq \left\| \sum_{s=1}^{k-1} \tau A_k 2^{-1} \left[B_s^{\pm}(k) + B_{s-1}^{\pm}(k-1) \right] \tau \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \psi_{k-s} \right\|_H$$

$$\leq \tau \sum_{s=1}^{k-1} \left\| \tau A_k 2^{-1} \left[B_s^{\pm}(k) + B_{s-1}^{\pm}(k-1) \right] A_{k-s}^{-1/2} \right\| \left\| \left(I \mp \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \right\| \left\| A_{k-s}^{1/2} \psi_{k-s} \right\|_H$$

$$\leq 2\tau M_{1/2}e^{M_{1/2}P_{1/2}}$$
$$\times\sum_{s=1}^{k-1}\left(\|f_{k-s+1}\|_H+2M_{1/2}\left\|\frac{u_{k-s+1}-u_{k-s}}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_{k-s}\frac{u_{k-s+1}+u_{k-s}}{2}\right\|_H\right)$$
$$\leq 2\tau M_{1/2}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\sum_{s=1}^{k-1}\left(\|f_{s+1}\|_H+2M_{1/2}\left\|\frac{u_{s+1}-u_s}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_s\frac{u_{s+1}+u_s}{2}\right\|_H\right)$$

elde edilir. (3.15) denklemi, üçgen eşitsizliği ve $||J_{mk}||_H$, $m=\overline{1,10}$ için bulunan kestirimler kullanılarak

$$\left\|\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H+\left\|\tau A_k 2^{-1}(u_{k+1}+u_k)\right\|_H$$
$$\leq C_1\left(3\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+\frac{9}{4}\|u_0'\|_H+\frac{15}{8}\|f_0\|_H\,\tau\right)$$
$$+3\tau M_{1/2}\left(\|f_{k+1}\|_H+2M_{1/2}\left\|\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_k\frac{u_{k+1}+u_k}{2}\right\|_H\right)$$
$$+3\tau M_{1/2}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\sum_{s=1}^{k-1}\left(\|f_{s+1}\|_H+2M_{1/2}\left\|\frac{u_{s+1}-u_s}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_s\frac{u_{s+1}+u_s}{2}\right\|_H\right)$$
$$\leq C_1\left(3\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+\frac{9}{4}\|u_0'\|_H\right)+C_2\tau\sum_{s=0}^{k+1}\|f_s\|_H$$
$$+C_3\tau\left(\left\|\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_k\frac{u_{k+1}+u_k}{2}\right\|_H\right)$$
$$+C_4\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left(\left\|\frac{u_{s+1}-u_s}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_s\frac{u_{s+1}+u_s}{2}\right\|_H\right)$$

bulunur; burada

$$C_2=\max\left\{3M_{1/2}e^{M_{1/2}P_{1/2}},3M_{1/2},\frac{15}{8}C_1\right\},C_3=\max\left\{6M_{1/2}^2,3M_{1/2}\right\},$$
$$C_4=\max\left\{6M_{1/2}^2e^{M_{1/2}P_{1/2}},3M_{1/2}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\right\}.$$

Yukarıdaki sonuçtan

$$\left\|\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H+\left\|\tau A_k 2^{-1}(u_{k+1}+u_k)\right\|_H\leq C_5\left[\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+\|u_0'\|_H\right.$$
$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k+1}\|f_s\|_H+\tau\sum_{s=0}^{k-1}\left(\left\|\frac{u_{s+1}-u_s}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_s\frac{u_{s+1}+u_s}{2}\right\|_H\right)\right]$$

yazılır; burada

$$C_5=\max\left\{(1-C_3\tau)^{-1}3C_1,(1-C_3\tau)^{-1}C_2,(1-C_3\tau)^{-1}C_4\right\}.$$

Entegral eşitsizliğinin fark benzetimi uygulanarak

$$\left\|\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_H+\left\|\tau A_k\frac{u_{k+1}+u_k}{2}\right\|_H$$

$$\leq C_6\left[\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+\|u_0'\|_H+\sum_{s=0}^{k+1}\|f_s\|_H\,\tau\right] \tag{3.25}$$

elde edilir; burada

$$C_6=C_5e^{C_5\tau k}.$$

Şimdi, $||u_k||_H$, $k=1,2,\cdots,N$ için kestirim elde edileccektir. $u_k=u_0+\sum\limits_{s=1}^{k}\tau^{-1}\left(u_s-u_{s-1}\right)\tau$ olduğunu göstermek kolaydır. (3.25) kararlılık kestirimi üçgen eşitsizliği ile birlikte bu denklemde kullanılarak herhangi bir $k, 1\leq 1\leq N$, için

$$\|u_k\|_H\leq\|u_0\|_H+\sum_{s=0}^{k-1}\left\|\tau^{-1}(u_{s+1}-u_s)\right\|_H\tau$$

$$\leq\left\|A_0^{-1/2}\right\|\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+C_6\left(k-1\right)\tau\left[\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+\|u_0'\|_H+\sum_{s=0}^{k+1}\|f_s\|_H\,\tau\right]$$

bulunur. $\left\|A_s^{-1/2}\right\|\leq\sqrt{\delta}^{-1}$ olduğundan dolayı

$$\|u_k\|_H\leq C_7\left[\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+\|u_0'\|_H+\sum_{s=0}^{k+1}\|f_s\|_H\,\tau\right],$$

yazılabilir; burada

$$C_7=\left[\sqrt{\delta}^{-1}+\left(T-\tau\right)C_6\right].$$

Bu sonuç Teorem 3.1'in ispatını tamamlar.

Teorem 3.2. $u(0)\in D(A(0))$ ve $u'(0)\in D(A^{1/2}(0))$ olsun. Bu durumda (3.3) fark şemasının çözümü için

$$\max_{1\leq k\leq N-1}||\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)||_H+\max_{1\leq k\leq N-1}||4^{-1}A_k\left(u_{k+1}+2u_k+u_{k-1}\right)||_H$$

$$\leq M\left[||A(0)u_0||_H+||A^{\frac{1}{2}}(0)u_0'||_H+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H+\sum_{s=0}^{N}||f_{s+1}-f_s||_H\right] \tag{3.26}$$

kararlılık kestirimi geçerlidir; burada M, $u_0, u_0', f_s\ (0\leq s\leq N-1)$ ve τ'dan bağımsızdır.

İspat. İlk olarak $\left\|A_{k-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\right\|_H+\|A_{k-1}2^{-1}(u_k+u_{k-1})\|_H$ için kestirim elde edilecektir. (3.9) ve (3.10) formülleri kullanılarak

$$A_{k-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})+A_{k-1}2^{-1}(u_k+u_{k-1})=J_{1k}+J_{2k}+J_{3k}+J_{4k}$$

$$+J_{5k}+J_{6k}+J_{7k}+J_{8k}+J_{9k}+J_{10k} \tag{3.27}$$

elde edilir; burada

$$J_{1k}=i4^{-1}A_{k-1}$$

$$\times\left\{[P_{k-1}^{+}(k-1)+P_{k-2}^{+}(k-2)]B^{+}-[P_{k-1}^{-}(k-1)+P_{k-2}^{-}(k-2)]B^{-}\right\}u_0,$$

$$J_{2k}=4^{-1}A_{k-1}$$

$$\times\left\{[P_{k-1}^{+}(k-1)+P_{k-2}^{+}(k-2)]B^{+}+[P_{k-1}^{-}(k-1)+P_{k-2}^{-}(k-2)]B^{-}\right\}u_0,$$

$$J_{3k}=i4^{-1}A_{k-1}$$

$$\times\left\{[P_{k-1}^{+}(k-1)+P_{k-2}^{+}(k-2)]C^{+}-[P_{k-1}^{-}(k-1)+P_{k-2}^{-}(k-2)]C^{-}\right\}u_0',$$

$$J_{4k}=4^{-1}A_{k-1}$$

$$\times\left\{[P_{k-1}^{+}(k-1)+P_{k-2}^{+}(k-2)]C^{+}+[P_{k-1}^{-}(k-1)+P_{k-2}^{-}(k-2)]C^{-}\right\}u_0',$$

$$J_{5k}=i4^{-1}A_{k-1}$$

$$\times\left\{[P_{k-1}^{+}(k-1)+P_{k-2}^{+}(k-2)]D^{+}-[P_{k-1}^{-}(k-1)+P_{k-2}^{-}(k-2)]D^{-}\right\}f_0,$$

$$J_{6k}=4^{-1}A_{k-1}$$

$$\times\left\{[P_{k-1}^{+}(k-1)+P_{k-2}^{+}(k-2)]D^{+}+[P_{k-1}^{-}(k-1)+P_{k-2}^{-}(k-2)]D^{-}\right\}f_0,$$

$$J_{7k}=i4^{-1}\tau A_{k-1}\left[B_0^{+}(k-1)\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-1}^{1/2}\right)^{-1}+B_0^{-}(k)\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-1}^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_{k-1},$$

$$J_{8k}=4^{-1}\tau A_{k-1}\left[B_0^{+}(k-1)\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-1}^{1/2}\right)^{-1}-B_0^{-}(k)\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-1}^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_{k-1},$$

$$J_{9k}=i4^{-1}\tau A_{k-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[[B_s^{+}(k-1)+B_{s-1}^{+}(k-2)]\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right.$$

$$\left.+[B_s^{-}(k-1)+B_{s-1}^{-}(k-2)]\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_{k-s-1},$$

$$J_{10k} = 4^{-1}\tau A_{k-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[[B_s^{+}(k-1)+B_{s-1}^{+}(k-2)]\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right.$$

$$\left.-[B_s^{-}(k-1)+B_{s-1}^{-}(k-2)]\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right]\psi_{k-s-1}.$$

Açıkca görülmektedir ki her çift numaralı J_{mk}'lar için kestirim bir önceki tek numaralı J_{mk}'nin kestirimine eşittir. Onun için aşağıda sadece tek numaralı J_{mk}'ların kestirimi ele alınacaktır.

Şimdi, $||J_{mk}||_H$, $m=\overline{1,10}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$ için, (3.11), (3.12) ve (3.19) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{1k}||_H \leq \left\|A_{k-1}2^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)+P_{k-2}^{\pm}(k-2)]B^{\pm}u_0\right\|_H$$

$$\leq \left\|A_{k-1}2^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)+P_{k-2}^{\pm}(k-2)]A_0^{-1}\right\|$$

$$\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]\|A_0u_0\|_H$$

$$\leq 2e^{M_1P_1}\|A_0u_0\|_H = C_8\|A_0u_0\|_H$$

elde edilir.

$m=3$ için, yine (3.11), (3.12) ve (3.19) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{3k}||_H \leq \left\|A_{k-1}2^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)+P_{k-2}^{\pm}(k-2)]C^{\pm}u_0'\right\|_H$$

$$\leq \left\|A_{k-1}2^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)+P_{k-2}^{\pm}(k-2)]A_0^{-1}\right\|$$

$$\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

$$\leq \frac{3}{2}e^{M_1P_1}\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H = \frac{3}{4}C_8\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

bulunur.

$m=5$ için, gene (3.11), (3.12) ve (3.19) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{3k}||_H \leq \left\|A_{k-1}2^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)+P_{k-2}^{\pm}(k-2)]D^{\pm}f_0\right\|_H$$

$$\leq \left\|A_{k-1}2^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)+P_{k-2}^{\pm}(k-2)]A_0^{-1}\right\|$$

$$\times\left[\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]\|f_0\|_H$$

$$\leq e^{M_1P_1}\|f_0\|_H = \frac{1}{2}C_8\|f_0\|_H$$

elde edilir.

$m=7$ için, (3.7) kestirimi kullanılarak ve (3.13), (3.15), (3.17) ve (3.18) kestirimleri uygulanarak

$$\begin{aligned}
||J_{7k}||_H &\leq \left\| 2^{-1}\tau A_{k-1}B_0^{\pm}(k-1)\left(I \mp \frac{i\tau}{2}A_{k-1}^{1/2}\right)^{-1}\psi_{k-1}\right\|_H \\
&\leq 2^{-1}\left\| \left(I \mp \frac{i\tau}{2}A_{k-1}^{1/2}\right)^{-1}\tau A_{k-1}\psi_{k-1}\right\|_H \\
&\leq 2M_{1/2}\left\|f_k\right\|_H + \tau M_1 M_{1/2}\left\|A_{k-1}^{1/2}\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right\|_H + \tau M_{1/2}\left\|A_{k-1}\frac{u_k+u_{k-1}}{2}\right\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

$m=9$ için, J_{9k}'nın formülünden

$$J_{9k}=S_{1k}+S_{2k} \tag{3.28}$$

yazılabilir; burada

$$\begin{aligned}
S_{1k} &= i4^{-1}\tau A_{k-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[[B_s^+(k-1)+B_{s-1}^+(k-2)]\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right. \\
&\quad \left. +[B_s^-(k-1)+B_{s-1}^-(k-2)]\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right] \\
&\times\left[2iA_{k-s}^{-1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1/2}\frac{u_{k-s}-u_{k-s-1}}{\tau^2}+i\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)\frac{u_{k-s}+u_{k-s-1}}{2}\right], \\
S_{2k} &= -4^{-1}\tau A_{k-1}\sum_{s=1}^{k-2}\left[[B_s^+(k-1)+B_{s-1}^+(k-2)]\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right. \\
&\quad \left. +[B_s^-(k-1)+B_{s-1}^-(k-2)]\left(I+\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right] iA_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}.
\end{aligned}$$

Şimdi, $||S_{mk}||_H$, $m=\overline{1,2}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$ için, (3.13), (3.15), (3.17), (3.18) ve (3.21) kestirimleri uygulanarak ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|S_{1k}\|_H &\leq 2\left\|\sum_{s=1}^{k-2}A_{k-1}2^{-1}[B_s^{\pm}(k-1)+B_{s-1}^{\pm}(k-2)]\tau\left(I\mp\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right. \\
&\quad \left.\times A_{k-s}^{-1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1/2}\frac{u_{k-s}-u_{k-s-1}}{\tau^2}\right\|_H
\end{aligned}$$

$$+\left\|\sum_{s=1}^{k-2}A_{k-1}2^{-1}[B_s^{\pm}(k-1)+B_{s-1}^{\pm}(k-2)]\right.$$

$$\left.\times\,\tau\left(I\mp\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)\frac{u_{k-s}+u_{k-s-1}}{2}\right\|_H$$

$$\leq 2\sum_{s=1}^{k-2}\left\|A_{k-1}2^{-1}[B_s^{\pm}(k-1)+B_{s-1}^{\pm}(k-2)]A_{k-s-1}^{-1}\right\|\left\|\left(I\mp\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right\|$$

$$\times\left\|A_{k-s-1}A_{k-s}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s}^{1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\frac{u_{k-s}-u_{k-s-1}}{\tau}\right\|_H$$

$$+2\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_{k-1}2^{-1}[B_s^{\pm}(k-1)+B_{s-1}^{\pm}(k-2)]A_{k-s-1}^{-1}\right\|\left\|\tau A_{k-s-1}^{1/2}\left(I\mp\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}\right\|$$

$$\times\left\|A_{k-s-1}^{1/2}A_{k-s}^{-1/2}\right\|\left\|A_{k-s}^{1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s-1}\frac{u_{k-s}+u_{k-s-1}}{2}\right\|_H$$

$$\leq 2\tau M_{1/2}e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-2}\left(M_1\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\frac{u_{k-s}-u_{k-s-1}}{\tau}\right\|_H+2M_{1/2}\left\|A_{k-s-1}\frac{u_{k-s}+u_{k-s-1}}{2}\right\|_H\right)$$

$$\leq \tau C_9\sum_{s=2}^{k-1}\left(\left\|A_{s-1}^{1/2}\frac{u_s-u_{s-1}}{\tau}\right\|_H+\left\|A_{s-1}\frac{u_s+u_{s-1}}{2}\right\|_H\right)$$

elde edilir; burada

$$C_9=\max\left\{2M_{1/2}e^{M_1P_1}\left(M_1,M_{1/2}\right)\right\}.$$

$m=2$ için, S_{2k} ifadesi önden toplam işaretinin önündeki terimle, sondan ise son büyük parantezden sonraki terimle çarpılırsa, toplam altındaki iki terim aynı norma sahip olur. Böylece $\|S_{2k}\|_H$'yi bulmak için sadece birinci terimler ele alınacak ve sonuç 2 ile çarpılacaktır. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|S_{2k}\|_H\leq\left\|-\sum_{s=1}^{k-2}A_{k-1}2^{-1}[B_s^{+}(k-1)+B_{s-1}^{+}(k-2)]i\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}A_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}\right\|_H$$

yazılabilir. $\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2-1}\right)\left(-i\tau A_{k-s-1}^{1/2}\right)=I-X_{k-s-1}^{+}$ olduğundan, bu eşitlik yukarıdaki eşitsizlikteki normun içinde kullanılarak

$$-\sum_{s=1}^{k-2}A_{k-1}2^{-1}[B_s^{+}(k-1)+B_{s-1}^{+}(k-2)]i\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}A_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}$$

$$=-\sum_{s=1}^{k-2}A_{k-1}2^{-1}[B_s^{+}(k-1)+B_{s-1}^{+}(k-2)]A_{k-s-1}^{1/2}i\tau\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s-1}^{1/2}\right)^{-1}A_{k-s-1}^{-1/2}A_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}$$

$$= \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] \left(I - X_{k-s-1}^+\right) A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}$$

$$= \sum_{s=1}^{k-2} \Big\{ A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}$$

$$- A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] X_{k-s-1}^+ A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s} \Big\}$$

$$= \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}$$

$$- \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] X_{k-s-1}^+ A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}$$

elde edilir. İkinci toplamın içindeki ifadede $s+1=m$ dönüşümü kullanarak, terimler düzenlenerek ve Abel formülü kullanarak

$$\sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}$$

$$- \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] X_{k-s-1}^+ A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}$$

$$= A_{k-1}^{1/2} A_k^{-1/2} f_k - A_{k-1} 2^{-1} [B_{k-1}^+(k-1) + B_{k-2}^+(k-2)] A_0^{-1/2} A_1^{-1/2} f_1$$

$$+ \sum_{s=1}^{k-1} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] \left(A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s} - A_{k-s}^{-1/2} A_{k-s+1}^{-1/2} f_{k-s+1} \right)$$

bulunur.

Diğer taraftan aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıkca görülmektedir;

$$A_{k-s-1}^{-1/2} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s} - A_{k-s}^{-1/2} A_{k-s+1}^{-1/2} f_{k-s+1} = -A_{k-s}^{-1} \left(f_{k-s+1} - f_{k-s} \right)$$

$$+ A_{k-s}^{-1} \left(A_{k-s+1}^{1/2} - A_{k-s}^{1/2} \right) A_{k-s+1}^{-1/2} f_{k-s+1} + A_{k-s-1}^{-1/2} \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) A_{k-s}^{-1} f_{k-s}.$$

Bu sonuçtan

$$- \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)] i\tau \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s-1}^{1/2} \right)^{-1} A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}$$

$$= A_{k-1}^{1/2} A_k^{-1/2} f_k - A_{k-1} 2^{-1} [B_{k-1}^+(k-1) + B_{k-2}^+(k-2)] A_0^{-1/2} A_1^{-1/2} f_1$$

$$+ \sum_{s=1}^{k-2} A_{k-1} 2^{-1} [B_s^+(k-1) + B_{s-1}^+(k-2)]$$

$$\times\left[-A_{k-s}^{-1}\left(f_{k-s+1}-f_{k-s}\right)+A_{k-s}^{-1}\left(A_{k-s+1}^{1/2}-A_{k-s}^{1/2}\right)A_{k-s+1}^{-1/2}f_{k-s+1}\right.$$
$$\left.+A_{k-s-1}^{-1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s}^{-1}f_{k-s}\right]$$

yazılabilir. Sonra, (3.13), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.21) kestirimleri uygulanarak ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|S_{2k}\|_H \le \left\|A_{k-1}^{1/2}A_k^{-1/2}\right\|\|f_k\|_H$$
$$+\left\|A_{k-1}2^{-1}[B_{k-1}^{+}(k-1)+B_{k-2}^{+}(k-2)]A_1^{-1}\right\|\left\|A_1A_0^{-1}\right\|\left\|A_0^{1/2}A_1^{-1/2}\right\|\|f_1\|_H$$
$$+\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_{k-1}2^{-1}[B_s^{+}(k-1)+B_{s-1}^{+}(k-2)]A_{k-s}^{-1}\right\|$$
$$\times\left[\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\|_H+\left\|\left(A_{k-s+1}^{1/2}-A_{k-s}^{1/2}\right)A_{k-s+1}^{-1/2}\right\|\|f_{k-s+1}\|_H\right.$$
$$\left.+\left\|A_{k-s}A_{k-s-1}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s}^{-1}\right\|\|f_{k-s}\|_H\right]$$
$$\le M_{1/2}\|f_k\|_H+M_1M_{1/2}e^{M_1P_1}\|f_1\|_H+e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\|_H$$
$$+\tau M_{1/2}e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}\|_H+\tau M_{1/2}M_1e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s}\|_H$$
$$\le C_{10}\left[\|f_k\|_H+\|f_1\|_H+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H+2\tau\sum_{s=1}^{k}\|f_s\|_H\right]$$

elde edilir; burada

$$C_{10}=\max\left\{M_{1/2},M_{1/2}e^{M_1P_1},e^{M_1P_1},M_{1/2}M_1e^{M_1P_1}\right\}.$$

(3.28) denklemi, üçgen eşitsizliği ve $\|S_{mk}\|$, $m=\overline{1,2}$ için bulunan kestirimler kullanılarak

$$\|J_{9k}\|\le\tau C_9\sum_{s=2}^{k-1}\left(\left\|A_{s-1}^{1/2}\frac{u_s-u_{s-1}}{\tau}\right\|_H+\left\|A_{s-1}\frac{u_s+u_{s-1}}{2}\right\|_H\right)$$
$$+C_{10}\left[\|f_k\|_H+\|f_2\|_H+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H+2\tau\sum_{s=1}^{k}\|f_s\|_H\right]$$

elde edilir. Şimdi (3.27) denklemi, üçgen eşitsizliği ve $\|J_{mk}\|$, $m=\overline{1,10}$, için bulunan kestirimler kullanılarak

$$\left\|A_{k-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\right\|_H+\left\|A_{k-1}2^{-1}(u_k+u_{k-1})\right\|_H$$

$$\leq C_8 \left(2 \left\| A_0 u_0 \right\|_H + \frac{3}{2} \left\| A_0^{1/2} u_0' \right\|_H + \left\| f_0 \right\|_H \right)$$

$$+4M_{1/2} \left\| f_k \right\|_H + 2\tau M_1 M_{1/2} \left\| A_{k-1}^{1/2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2\tau M_{1/2} \left\| A_{k-1} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H$$

$$+\tau 2C_9 \sum_{s=2}^{k-1} \left(\left\| A_{s-1}^{1/2} \frac{u_s - u_{s-1}}{\tau} \right\|_H + \left\| A_{s-1} \frac{u_s + u_{s-1}}{2} \right\|_H \right)$$

$$+2C_{10} \left[\left\| f_k \right\|_H + \left\| f_1 \right\|_H + \sum_{s=1}^{k-1} \left\| f_{s+1} - f_s \right\|_H + 2\tau \sum_{s=1}^{k} \left\| f_s \right\|_H \right]$$

$$\leq C_{11} \left[\left\| A_0 u_0 \right\|_H + \left\| A_0^{1/2} u_0' \right\|_H + \sum_{s=2}^{k-1} \left\| f_{s+1} - f_s \right\|_H + \max_{0 \leq s \leq k} \left\| f_s \right\|_H \right.$$

$$\left. + \tau \sum_{s=2}^{k-1} \left(\left\| A_{s-1}^{1/2} \frac{u_s - u_{s-1}}{\tau} \right\|_H + \left\| A_{s-1} \frac{u_s + u_{s-1}}{2} \right\|_H \right) \right]$$

elde edilir; burada

$$C_{11} = \max \left\{ \left(I - 2\tau \max \left\{ M_1 M_{1/2}, M_{1/2} \right\} \right)^{-1} \left(4C_{10}, 2C_8, 2C_9, 4M_{1/2} \right) \right\}.$$

Entegral eşitsizliğinin fark benzetimi uygulanarak

$$\left\| A_{k-1}^{1/2} \tau^{-1} (u_k - u_{k-1}) \right\|_H + \left\| A_{k-1} 2^{-1} (u_k + u_{k-1}) \right\|_H$$

$$\leq C_{12} \left(\left\| A_0 u_0 \right\|_H + \left\| A_0^{1/2} u_0' \right\|_H + \sum_{s=1}^{k} \left\| f_s - f_{s-1} \right\|_H + \max_{0 \leq s \leq k} \left\| f_s \right\|_H \right)$$

elde edilir; burada

$$C_{12} = C_{11} e^{\tau C_{11} k}.$$

(3.20) kestirimi uygulanarak ve üçgen eşitsizliği kullanılarak yukarıdaki sonuçtan

$$||4^{-1} A_k \left(u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1} \right) ||_H$$

$$\leq C_{13} \left(\left\| A_0 u_0 \right\|_H + \left\| A_0^{1/2} u_0' \right\|_H + \sum_{s=1}^{k} \left\| f_s - f_{s-1} \right\|_H + \max_{0 \leq s \leq k} \left\| f_s \right\|_H \right) \tag{3.29}$$

yazılır; burada

$$C_{13} = M_1 C_{12}.$$

Şimdi, $\|\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\|_H$ için kestirim elde edilecektir. (3.3) kullanılarak her $k, 1 \leq k \leq N-1$ için

$$\left\|\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\right\|_H + ||4^{-1}A_k(u_{k+1}+2u_k+u_{k-1})||_H \leq \|f_k\|_H$$

yazılabilir. (3.29) kararlılık kestirimi ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|\tau^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})\right\|_H$$

$$\leq C_{14}\left(\|A_0u_0\|_H + \left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H + \sum_{s=1}^{k}\|f_s-f_{s-1}\|_H + \max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H\right)$$

elde edilir; burada

$$C_{14} = C_{13}\max\{M_1, 1\}.$$

Bu sonuç Teorem 3.2'in ispatını tamamlar.

3.3 Uygulamalar

İlk olarak, bir boyutlu hiperbolik denklem için

$$\begin{cases} u_{tt} - (a(t,x)u_x)_x + \delta u = f(t,x), & 0 < t < T, \quad 0 \leq x \leq L, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ u'(0,x) = \psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(t,0) = u(t,L), \ u_x(t,0) = u_x(t,L), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{3.30}$$

başlangıç-değer problemi ele alınacaktır. Eğer $a(t,x) \geq a > 0$ $(t \in [0,T], x \in [0,L])$, $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ $(x \in [0,L])$, $f(t,x)$ $(t \in [0,T],\ x \in [0,L])$ fonksiyonları tanım kümelerinde yeterince pürüzsüz ve $\delta > 0$ ise, bu durumda (3.30) probleminin çözümü vardır ve tektir. Bunun için, (3.30) problemi, $H = L_2[0,1]$ Hilbert uzayında öz-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü, (1.1) başlangıç değer problemine dönüştürülebilir.

Burada (3.30) probleminin ayrıklaştırılması iki adımda incelenir. Birinci adımda önce,

$$[0,L]_h = \{x : x_r = rh, 0 \leq r \leq M, Mh = L\}$$

ağ uzayı tanımlanır. Sonra $[0,L]_h$ aralığında tanımlanan $\varphi^h(x)=\{\varphi^n\}_1^{M-1}$ ağ fonksiyonları, $L_{2h}=L_2\left([0,L]_h\right)$ Hilbert uzayı olarak tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\| \varphi^h \|_{L_{2h}}=\left(\sum_{n=1}^{M-1}|\varphi^n|^2\,h\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile ifade edilir. Daha sonra da, (3.30) problemi tarafından oluşturulan $A(t)$ diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x(t)\varphi^h(t,x)=\left\{-\left(a\,(t,x)\,u_{\bar{x}}\right)_{x,n}+\delta u_n\right\}_1^{M-1} \tag{3.31}$$

formülüyle tanımlanan $A_h^x(t)$ fark operatörü alınır. Burada, $A_h^x(t)$ fark operatörü $\varphi^0(t)=\varphi^M(t)$, $\varphi^1(t)-\varphi^0(t)=\varphi^M(t)-\varphi^{M-1}(t)$ koşullarını sağlayan $\varphi^h(t,x)=\{\varphi^r(t)\}_0^M$ ağ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. $A_h^x(t)$ fark operatörünün yardımıyla (3.30) başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2}+A_h^x(t)u^h(t,x)=f^h(t,x),\ 0\le t\le T,\ x\in[0,L]_h\,, \\ u^h(0,x)=\varphi^h(x),\ x\in[0,L]_h\,, \\ \frac{du^h(0,x)}{dt}=\psi^h(x),\ x\in[0,L]_h \end{cases} \tag{3.32}$$

adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda ise, (3.32) problemi için (3.3) fark şeması kullanılarak,

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^2}\left(u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)\right)+\frac{1}{2}A_h^x(t_k)u_k^h+\frac{1}{4}A_h^x(t_k)u_{k+1}^h \\ +\frac{1}{4}A_h^x(t_k)u_{k-1}^h=f_k^h(x)\,, \\ f_k^h(x)=f^h(t_k,x),\ t_k=k\tau,\ 1\le k\le N-1,\ N\tau=T,\ x\in[0,L]_h\,, \\ \frac{1}{\tau}(u_1^h(x)-u_0^h(x))+\tau A_h^x(0)(u_1^h(x)-u_0^h(x)) \\ =\frac{\tau}{2}(f_0^h(x)-A_h^x(0)u_0^h(x))+\psi^h(x)\,,x\in[0,L]_h \\ u_0^h=\varphi^h(x),\ x\in[0,L]_h \end{cases} \tag{3.33}$$

fark şeması elde edilir.

Teorem 3.3. τ ve h yeterince küçük sayılar olsun. Bu durumda (3.33) fark şemasının çözümü için

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-1}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}\le M\left[\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi_x^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}}\right],$$

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}$$
$$\le M\left[\left\|\psi_{\bar{x}}^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left(\varphi_{\bar{x}}^h\right)_x\right\|_{L_{2h}}+\left\|f_0^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-1}\left(f_k^h-f_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}\right]$$

kararlılık kestirimleri geçerlidir; burada M katsayısı, τ, h, f_k^h $(0\le k\le N-1)$, ψ^h ve φ^h'den bağımsızdır.

Teorem 3.3'ün ispatı, soyut Teorem 3.1 ve (3.33) formülü ile tanımlanan $A_h^x(t)$ fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak çok boyutlu hiperbolik denklem için

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\sum\limits_{r=1}^{n}(a_r(t,x)u_{x_r})_{x_r}=f(t,x), \\ x=(x_1,...,x_n)\in\Omega,\ 0<t<T, \\ u(0,x)=\varphi(x),\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\psi(x),\ x\in\overline{\Omega}, \\ u(t,x)=0,\ x\in S \end{cases} \tag{3.34}$$

başlagıç değer problemi ele alınacaktır; burada Ω, $\mathbb{R}^n$ $n-$ boyutlu Euclid uzayında S sınır kümesine sahip açık bir küptür yani $\Omega=\{x=(x_1,\cdots,x_n):(0<x_j<1, 1\le j\le n)\}$; $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$; ayrıca $a_r(t,x)$ $(x\in\Omega)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)$ $(t\in(0,T),\ x\in\Omega)$ verilen düzgün fonksiyonlardır ve $a_r(t,x)\ge a>0$.

Burada da (3.34) probleminin ayrıklaştırılması iki adımda incelenir. Birinci adımdan önce,

$$\bar{\Omega}_h=\{x=x_j=(h_1j_1,\cdots,h_nj_n), j=(j_1,\cdots,j_n), 0\le j_r\le M_r,$$
$$h_rM_r=1,\ r=1,\cdots,n\},\ \Omega_h=\bar{\Omega}_h\cap\Omega,\ S_h=\bar{\Omega}_h\cap S$$

ağ uzayı tanımlanır. Sonra $\overline{\Omega}_h$ kümesinde tanımlanan $\varphi^h(x)=\{\varphi(h_1m_1,\cdots,h_nm_n)\}$ ağ fonksiyonları, $L_{2h}=L_2\left(\overline{\Omega}_h\right)$ Banach uzayı olarak tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|\ \varphi^h\ \|_{L_{2h}(\bar{\Omega}_h)}=\left(\sum_{x\in\overline{\Omega}_h}|\varphi^h(x)|^2h_1\cdots h_n\right)^{\frac{1}{2}}$$

formülüyle ifade edilir. Daha sonra da, (3.34) problemi tarafından oluşturulan $A(t)$ diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x(t)u^h(t,x)=-\sum_{r=1}^{n}\left(a_r(t,x)u_{\bar{x}_r}^h\right)_{x_r,j_r} \tag{3.35}$$

formülüyle tanımlanan $A_h^x(t)$ fark operatörü, alınır. Burada, $A_h^x(t)$ fark operatörü $\forall x \in S_h$ değerleri için $u^h(t,x) = 0$ koşullarını sağlayan $u^h(t,x)$ ağ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. $A_h^x(t)$ fark operaötürünün yardımıyla (3.34) başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2} + A_h^x(t)u^h(t,x) = f^h(t,x),\ 0 \leq t \leq T,\ x \in \Omega_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x),\ x \in \bar{\Omega}_h \\ \frac{du^h(0,x)}{dt} = \psi^h(x),\ x \in \bar{\Omega} \end{cases} \tag{3.36}$$

adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda ise, (3.36) problemi için (3.3) fark şeması kullanılarak,

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^2}\left(u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)\right) + \frac{1}{2}A_h^x(t_k)u_k^h + \frac{1}{4}A_h^x(t_k)u_{k+1}^h \\ +\frac{1}{4}A_h^x(t_k)u_{k-1}^h = f_k^h(x),\ f_k^h(x) = f^h(t_k,x), \\ t_k = k\tau,\ 1 \leq k \leq N-1,\ N\tau = T,\ x \in \Omega_h, \\ u_0^h = \varphi^h,\ \varphi^h = \varphi^h(x),\ x \in \bar{\Omega}_h, \\ \frac{1}{\tau}(u_1^h(x) - u_0^h(x)) + \tau A_h^x(0)(u_1^h(x) - u_0^h(x)) \\ = \frac{\tau}{2}(f_0^h(x) - A_h^x(0)u_0^h(x)) + \psi^h(x), x \in \bar{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.37}$$

fark şeması elde edilir.

Teorem 3.4. τ ve h yeterince küçük sayılar olsun. Bu durumda (3.37) fark şemasının çözümü için

$$\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-1}\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}} \leq M\left[\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}} + \sum_{r=1}^{n}\left\|\varphi^h_{\bar{x}_r,j_r}\right\|_{L_{2h}} + \max_{1\leq k\leq N-1}\left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}}\right],$$

$$\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}$$
$$\leq M\left[\sum_{r=1}^{n}\left\|\psi^h_{\bar{x}_r,j_r}\right\|_{L_{2h}} + \sum_{r=1}^{n}\left\|\varphi^h_{x_r\bar{x}_r,j_r}\right\|_{L_{2h}} + \left\|f_0^h\right\|_{L_{2h}} + \max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-1}\left(f_k^h - f_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}\right]$$

kararlılık kestirimleri geçerlidir; burada M katsayısı, τ, h, f_k^h $(0 \leq k \leq N-1)$, ψ^h ve φ^h'den bağımsızdır.

Teorem 3.4'ün ispatı, soyut Teorem 3.3 ve (3.35) formülü ile tanımlanan $A_h^x(t)$ fark operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki L_{2h} uzayındaki eliptik fark problemlerinin çözümü için koersiv kestirimi elde edilen teoreme dayanmaktadır.

Teorem 3.5. Eliptik fark probleminin

$$A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), x \in \Omega_h,$$

$$u^h(x) = 0, x \in S_h$$

çözümü için

$$\sum_{r=1}^{m} \left\| u^h_{x_r \bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_{2h}} \leq M ||\omega^h||_{L_{2h}}$$

koersiv kestirimi sağlanır [Sobolevskii, P. E., 1975].

4 $A^2(t)$ İLE OLUŞTURULAN İKİNCİ BASAMAKTAN DOĞRULUKLU FARK ŞEMASI

4.1 İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasının Kurulması

Taylor açılımını kullanarak

$$\frac{u\left(t_{k+1}\right)-2u\left(t_{k}\right)+u\left(t_{k-1}\right)}{\tau^{2}}-u''\left(t_{k}\right)=o(\tau^{2}) \tag{4.1}$$

denklemi yazılabilir. (4.1) ve

$$u''\left(t_{k}\right)=-A\left(t_{k}\right)u\left(t_{k}\right)+f\left(t_{k}\right)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{u\left(t_{k+1}\right)-2u\left(t_{k}\right)+u\left(t_{k-1}\right)}{\tau^{2}}+A\left(t_{k}\right)\left(u\left(t_{k}\right)+\frac{\tau^{2}}{4}A(t_{k})u\left(t_{k+1}\right)\right) \tag{4.2}$$
$$=f\left(t_{k}\right)+o(\tau^{2})$$

elde edilir. Ayrıca,

$$(I+\tau^{2}A\left(0\right))\frac{u\left(\tau\right)-u\left(0\right)}{\tau}=\frac{\tau}{2}(-A\left(0\right)u\left(0\right)+f\left(0\right))+\psi+o(\tau^{2}). \tag{4.3}$$

(4.2) ve (4.3) $A^2\left(t\right)$ ile oluşturulan tam iki adımlı fark şemalarıdır. $o(\tau^2)$ mertebesindeki terimler ihmal edilerek (1.1)'deki başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases}\frac{u_{k+1}-2u_{k}+u_{k-1}}{\tau^{2}}+A_{k}u_{k}+\frac{\tau^{2}}{4}A_{k}^{2}u_{k+1}=f_{k},\\ A_{k}=A\left(t_{k}\right),f_{k}=f(t_{k}),t_{k}=k\tau,1\leq k\leq N-1,\ N\tau=T,\\ (I+\tau^{2}A_{0})\tau^{-1}(u_{1}-u_{0})=\frac{\tau}{2}(f_{0}-A_{0}u_{0})+\psi,f_{0}=f(0),\ u_{0}=\varphi\end{cases} \tag{4.4}$$

fark şeması elde edilir. Şimdi, (4.4)'deki fark şemasının çözümü için gereken fark formüllerini oluşturalım. Denklem (4.4)'den

$$
\begin{cases}
\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)=\frac{\tau}{2}A_ku_{k+1}+iA_k^{1/2}v_{k+1},\ 1\le k\le N-1,\\
u_1=(I+\tau^2A_0)^{-1}\left[\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_0\right)u_0+\tau u_0'+\frac{\tau^2}{2}f_0\right],\\
\tau^{-1}(v_{k+1}-v_k)=\frac{\tau}{2}A_kv_{k+1}+iA_k^{1/2}u_{k+1}+\varphi_k,\\
\varphi_k=-iA_k^{-1/2}f_k+iA_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)A_{k-1}^{-1/2}\tau^{-2}\left(u_k-u_{k-1}\right)\\
+\frac{i}{2}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)u_k,\ 1\le k\le N-1,\\
v_1=\frac{1}{i\tau}A_0^{-1/2}\left[\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_0\right)u_1-u_0\right]
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

yazılabilir. (4.5) denkleminde $\eta_{k+1}=u_{k+1}+v_{k+1}$ ve $\mu_{k+1}=u_{k+1}-v_{k+1}$ dönüşümleri yapılarak aşağıdaki fark denklemleri sistemi elde edilir;

$$
\begin{cases}
\tau^{-1}(\eta_{k+1}-\eta_k)=\left(iA_k^{1/2}+\frac{\tau}{2}A_k\right)\eta_k+\varphi_k,\ 1\le k\le N-1,\\
\eta_1=B^+u_0+C^+u_0'+D^+f_0,\\
\tau^{-1}(\mu_k-\mu_{k-1})=\left(-iA_k^{1/2}+\frac{\tau}{2}A_k\right)\mu_k-\varphi_k,\ 1\le k\le N-1,\\
\mu_1=B^-u_0+C^-u_0'+D^-f_0,\\
\varphi_k=iA_k^{-1/2}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)A_{k-1}^{-1/2}\tau^{-2}\left(u_k-u_{k-1}\right)+\frac{i}{2}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)u_k.
\end{cases}
$$

Burada

$$
B^{\pm}=\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\left[I-\frac{\tau^2}{2}A_0+\frac{1}{i\tau}A_0^{-1/2}\left(\mp 2\tau^2A_0\pm\frac{\tau^4}{4}A_0^2\right)\right],
$$

$$
C^{\pm}=\tau\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\left[I\pm\frac{1}{i\tau}A_0^{-1/2}\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_0\right)\right],
$$

$$
D^{\pm}=\frac{\tau^2}{2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\left[I\pm\frac{1}{i\tau}A_0^{-1/2}\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_0\right)\right].
$$

Yukarıdaki denklem sisteminden

$$
\begin{cases}
\eta_{k+1}=\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k-i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\eta_k+\tau\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k-i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\varphi_k,\ 1\le k\le N-1,\\
\mu_{k+1}=\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k+i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\mu_k-\tau\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k+i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\varphi_k,\ 1\le k\le N-1
\end{cases}
$$

fark formülleri elde edilir. Böylece

$$
\eta_k=P_k^-(k)\eta_1+\sum_{m=1}^{k}R_m^-(k)\varphi_m,\mu_k=P_k^+(k)\mu_1+\sum_{m=1}^{k}R_m^+(k)\varphi_m,
$$

bulunur; burada

$$
P_k^{\pm}(k)=X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_1^{\pm},\ R_m^{\pm}(k)=X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_m^{\pm},
$$

$$X_k^{\pm}=\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k\pm i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}.$$

Sonra $u_{k+1}=\frac{1}{2}(\eta_{k+1}+\ \mu_{k+1})$ formülü kullanılarak

$$u_{k+1}=2^{-1}\left\{\left[P_k^{+}(k)B^{-}+P_k^{-}(k)B^{+}\right]u_0+[P_k^{+}(k)C^{-}+P_k^{-}(k)C^{+}]u_0'\right.$$
$$\left.+[P_k^{+}(k)D^{-}+P_k^{-}(k)D^{+}]f_1+\tau\sum_{m=1}^{k}\left[R_m^{-}(k)-R_m^{+}(k)\right]\varphi_m\right\}$$

bulunur. Ayrıca, $k-m=s$ dönüşümü yapılarak

$$u_{k+1}=2^{-1}\left\{\left[P_k^{+}(k)B^{-}+P_k^{-}(k)B^{+}\right]u_0+[P_k^{+}(k)C^{-}+P_k^{-}(k)C^{+}]u_0'\right.$$

$$\left.+[P_k^{+}(k)D^{-}+P_k^{-}(k)D^{+}]f_1+\tau\sum_{s=0}^{k-1}\left[E_s^{-}(k)-E_s^{+}(k)\right]\varphi_{k-s}\right\}\tag{4.6}$$

elde edilir; burada

$$\varphi_{k-s}=-iA_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}+iA_{k-s}^{-1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1/2}\tau^{-2}\left(u_{k-s}-u_{k-s-1}\right)$$
$$+\frac{i}{2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)u_{k-s},$$
$$E_s^{\pm}(k)=X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_{k-s}^{\pm}.$$

Son olarak (4.6) denkleminden

$$u_k=2^{-1}\left\{\left[P_{k-1}^{+}(k-1)B^{-}+P_{k-1}^{-}(k-1)B^{+}\right]u_0+[P_{k-1}^{+}(k-1)C^{-}+P_{k-1}^{-}(k-1)C^{+}]u_0'\right.$$
$$+[P_{k-1}^{+}(k-1)D^{-}+P_{k-1}^{-}(k-1)D^{+}]f_0$$

$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[E_{s-1}^{-}(k-1)-E_{s-1}^{+}(k-1)\right]\varphi_{k-s}\right\}\tag{4.7}$$

ve

$$\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})=(2\tau)^{-1}\left\{\left[\left[P_{k-1}^{-}(k-1)-P_{k-2}^{-}(k-2)\right]B^{+}\right.\right.$$
$$\left.+\left[P_{k-1}^{+}(k-1)-P_{k-2}^{+}(k-2)\right]B^{-}\right]u_0$$
$$+\left[\left[P_{k-1}^{-}(k-1)-P_{k-2}^{-}(k-2)\right]C^{+}+\left[P_{k-1}^{+}(k-1)-P_{k-2}^{+}(k-2)\right]C^{-}\right]u_0'$$
$$+\left[\left[P_{k-1}^{-}(k-1)-P_{k-2}^{-}(k-2)\right]D^{+}+\left[P_{k-1}^{+}(k-1)-P_{k-2}^{+}(k-2)\right]D^{-}\right]f_0$$
$$+\tau\left[E_0^{-}(k-1)-E_0^{-}(k-1)\right]\varphi_{k-1}$$

$$+\tau\sum_{s=2}^{k-1}\left[\left[E_{s-1}^{-}(k-1)-E_{s-2}^{-}(k-2)\right]-\left[E_{s-1}^{+}(k-1)-E_{s-2}^{+}(k-2)\right]\right]\varphi_{k-s}\Bigg\} \quad (4.8)$$

elde edilir. Bir sonraki alt bölümde yukarıda elde edilen formüller (4.4) fark şemasının kararlılık kestirimlerini bulmak için kullanılacaktır.

4.2 (4.4) Fark Şemasının Kararlılığı

Önce $A(t)$ operatörü için ileride gerekecek bazı ikinci derecede önemli koşulları verelim. $A(t)$'ler, H Hilbret uzayında t'ye bağımsız bir $D(A(t)) : A(t) \geq \delta I > 0$: alanında pozitif tanımlı öz-adjoint operatörler olsun. Bu durumda aşağıdaki kestirimler geçerlidir;

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{\alpha/2}\left(I+\tau^2A_k\right)^{-1}\right\| \leq 1, \ \alpha=0,2, \quad (4.9)$$

$$\left\|\tau A_k^{1/2}\left(I+\tau^2A_k\right)^{-1}\right\| \leq 2^{-1}, \quad (4.10)$$

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{\alpha/2}\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k \pm i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{\alpha^2-\alpha}{2}+1, \ \alpha=0,1,2. \quad (4.11)$$

$A^{\rho}(t)A^{-\rho}(z), \rho\in[0,2]$ operatör fonksiyonunun

$$\left\|\left[A^{\rho}(t)-A^{\rho}(s)\right]A^{-\rho}(z)\right\| \leq M_{\rho}|t-s| \quad (4.12)$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin; burada M_{ρ}, $t,s,z \in [0,T]$ için bu değerlerden bağımsız pozitif sabitlerdir. Bu sonuçtan hareketle $A^{\rho}(t)A^{-\rho}(z)$ operatör fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde sınırlı bir değişime sahiptir; yani öyle bir P_{ρ} sayısı mevcuttur ki

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\left(A^{\rho}(s_k)-A^{\rho}(s_{k-1})\right)A^{-\rho}(z)\right\| \leq P_{\rho}$$

eşitsizliği herhangi bir $0=s_0<s_1<\cdots<s_N=T$ sıralaması için sağlanır. Burada P_{ρ}, s_0, $s_1,\cdots,s_N$ ve z'den bağımsız pozitif bir sabittir.

Ayrıca $A^{\rho+1/2}(p)A^{1/2}(t)A^{-\rho-1}(z)$, $\rho\in[0,1]$ operatör fonksiyonunun

$$\left\|A^{\rho+1/2}(t)\left[A^{1/2}(t)-A^{1/2}(s)\right]A^{-\rho-1}(z)\right\|\leq M_{\rho+1}|t-s| \tag{4.13}$$

eşitsizliğini sağladığı kabul edilsin; burada M_ρ, $t,s,z,p\in[0,T]$ için bu değerlerden bağımsız pozitif sabittir. Bu sonuçtan hareketle $A^{\rho+1/2}(p)A^{1/2}(t)A^{-\rho-1}(z)$ operatör fonksiyonu $[0,T]$ üzerinde sınırlı bir değişime sahiptir; yani öyle bir P_ρ sayısı mevcuttur ki

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|A^{\rho+1/2}(p)\left[A^{1/2}(s_k)-A^{1/2}(s_{k-1})\right]A^{-\rho-1}(z)\right\|\leq P_{\rho+1}$$

eşitsizliği herhangi bir $0=s_0<s_1<\cdots<s_N=T$ sıralaması için sağlanır. Burada $P_{\rho+\frac{1}{2}}$, $s_0,s_1,\cdots,s_N$, p ve z'den bağımsız pozitif bir sabittir.

Eğer

$$\left\|A^{\rho}(t)A^{-\rho}(s)\right\|\leq M_\rho \tag{4.14}$$

ise, bu eşitsizlikten her $t_k\in[0,T]_\tau$ için

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left\|A_{k+1}^{1/2}\left(A_{k+1}^{1/2}-A_k^{1/2}\right)A_{k+1/2}^{-1}\right\|\leq\left(M_1+1\right)M_1P_1$$

yazılabilir.

Son olarak $P_k^{\pm}(k)=X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_1^{\pm}$ ve $E_s^{\pm}(k)=X_k^{\pm}X_{k-1}^{\pm}\cdots X_{k-s}^{\pm}$ olsun; burada $X_k^{\pm}=\left(I-\frac{\tau^2}{2}A_k\pm i\tau A_k^{1/2}\right)^{-1}$. Yukarıdaki varsayım ve tanımlardan hareketle aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir:

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k\left[P_k^{\pm},E_s^{\pm}\right](k)A_0^{\frac{\alpha}{2}-1}\right\|\leq e^{M_{1/2}\sum_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{1/2}-A_{i-1}^{1/2}\right)A_0^{-1/2}\right\|},\quad \alpha=1,2, \tag{4.15}$$

$$\left\|A_k^{\alpha}\left[P_k^{\pm},E_s^{\pm}\right](k)A_{0,k-s}^{-\alpha}\right\|\leq e^{M_\alpha\sum_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{\alpha}-A_{i-1}^{\alpha}\right)A_0^{-\alpha}\right\|},\quad \alpha=1,2, \tag{4.16}$$

$$\left\|\tau^{\alpha}\tau^{-1}\left[P_k^{\pm}(k)-P_{k-1}^{\pm}(k-1)\right]A_0^{\frac{\alpha-1}{2}}\right\|\leq\frac{3}{2}e^{M_{1/2}\sum_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{1/2}-A_{i-1}^{1/2}\right)A_0^{-1/2}\right\|},\ \alpha=0,1, \tag{4.17}$$

$$\left\|A_k^{\alpha-1/2}\tau^{-1}\left[E_s^{\pm}(k)-E_{s-1}^{\pm}(k-1)\right]A_{k-s}^{-\alpha}\right\|\leq\frac{3}{2}e^{M_\alpha\sum_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{\alpha}-A_{i-1}^{\alpha}\right)A_0^{-\alpha}\right\|},\ \alpha=\frac{1}{2},2 \tag{4.18}$$

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{1/2}\tau^{-1}\left[P_k^{\pm}(k)-P_{k-1}^{\pm}(k-1)\right]A_0^{\frac{\alpha}{2}-1}\right\|\leq\frac{3}{2}e^{M_1\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|(A_i-A_{i-1})A_0^{-1}\right\|},\ \alpha=0,1,2, \tag{4.19}$$

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{1/2}\tau^{-1}\left[E_s^{\pm}(k)-E_{s-1}^{\pm}(k-1)\right]A_{k-s}^{\frac{\alpha}{2}-1}\right\|\leq\frac{3}{2}e^{M_1\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|(A_i-A_{i-1})A_0^{-1}\right\|},\ \alpha=\frac{1}{2},1, \tag{4.20}$$

$$\left\|\tau^{\alpha}A_k^{2}\left[P_k^{\pm},E_s^{\pm}\right](k)A_0^{\frac{\alpha}{2}-1}\right\|\leq 2e^{M_1\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|(A_i-A_{i-1})A_0^{-1}\right\|},\quad \alpha=2,3, \tag{4.21}$$

$$\left\|\tau A_k^{2}E_s^{\pm}(k)A_{k-s}^{-3/2}\right\|\leq e^{M_{3/2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{3/2}-A_{i-1}^{3/2}\right)A_0^{-3/2}\right\|}, \tag{4.22}$$

$$\left\|\tau^{2}A_k^{3/2}\tau^{-1}\left[P_k^{\pm}(k)-P_{k-1}^{\pm}(k-1)\right]A_0^{-1}\right\|$$

$$\leq 2e^{M_1\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|(A_i-A_{i-1})A_0^{-1}\right\|}+M_1e^{M_{3/2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{3/2}-A_{i-1}^{3/2}\right)A_0^{-3/2}\right\|}, \tag{4.23}$$

$$\left\|\tau^{3}A_k^{3/2}\tau^{-1}\left[P_k^{\pm}(k)-P_{k-1}^{\pm}(k-1)\right]A_0^{-1/2}\right\|$$

$$\leq 2M_{1/2}\left(e^{M_1\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|(A_i-A_{i-1})A_0^{-1}\right\|}+e^{M_{3/2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{3/2}-A_{i-1}^{3/2}\right)A_0^{-3/2}\right\|}\right), \tag{4.24}$$

$$\left\|\tau^{2}A_k^{3/2}\tau^{-1}\left[E_s^{\pm}(k)-E_{s-1}^{\pm}(k-1)\right]A_{k-s}^{-1}\right\|$$

$$\leq 2e^{M_1\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|(A_i-A_{i-1})A_0^{-1}\right\|}+M_1e^{M_{3/2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{3/2}-A_{i-1}^{3/2}\right)A_0^{-3/2}\right\|}, \tag{4.25}$$

$$\left\|\tau A_k^{3/2}\tau^{-1}\left[E_s^{\pm}(k)-E_{s-1}^{\pm}(k-1)\right]A_{k-s}^{-3/2}\right\|\leq 2e^{M_{3/2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left\|\left(A_i^{3/2}-A_{i-1}^{3/2}\right)A_0^{-3/2}\right\|}. \tag{4.26}$$

Teorem 4.1. $u(0)\in D(A^{\frac{1}{2}}(0))$ olsun. Bu durumda (4.4) fark şemasının çözümü için

$$\max_{0\leq k\leq N}||\tau A_k u_k||_H+\max_{1\leq k\leq N}||\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}||_H+\max_{0\leq k\leq N}||u_k||_H$$

$$\leq M\left[||A^{\frac{1}{2}}(0)u_0||_H+||u_0'||_H+\tau\sum_{s=0}^{N-1}||f_s||_H\right]$$

kararlılık kestirimi geçerlidir; burada M, u_0, u_0', f_s $(0 \leq s \leq N-1)$ ve τ'dan bağımsızdır.

İspat. İlk olarak $\|\tau A_k u_k\|_H$ için kestirim elde edilecektir. (4.6) formülü kullanılarak

$$\tau A_k u_k = J_{1k} + J_{2k} + J_{3k} + J_{4k} \tag{4.27}$$

yazılabilir; burada

$$J_{1k} = \tau A_k 2^{-1}\left[P_{k-1}^{-}(k-1)B^{+} + P_{k-1}^{+}(k-1)B^{-}\right]u_0,$$

$$J_{2k} = \tau A_k 2^{-1}\left[P_{k-1}^{-}(k-1)C^{+} + P_{k-1}^{+}(k-1)C^{+}\right]u_0',$$

$$J_{3k} = \tau A_k 2^{-1}\left[P_{k-1}^{-}(k-1)D^{+} + P_{k-1}^{+}(k-1)D^{-}\right]f_0,$$

$$J_{4k} = \tau^2 A_k 2^{-1}\sum_{s=1}^{k-1}[E_{s-1}^{-}(k-1) + E_{s-1}^{+}(k-1)]\varphi_{k-s}.$$

Şimdi, $\|J_{mk}\|_H$, $m = \overline{1,4}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m = 1$ için, (4.9), (4.10), (4.15) ve (4.16) kestirimleri uygulanarak

$$\begin{aligned}||J_{1k}||_H &\leq \left\|\tau A_k P_{k-1}^{\pm}(k-1)B^{\mp}u_0\right\|_H \\ &\leq \left\{\left\|\tau A_k P_{k-1}^{-}(k-1)A_0^{-1/2}\right\|\right. \\ &\times \left[\left\|\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\| + 2\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\| + 2^{-1}\left\|\tau^2 A_0\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\|\right] \\ &\left.+4^{-1}\left\|\tau^2 A_k P_{k-1}^{-}(k-1)\right\|\left\|\tau^2 A_0\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\|\right\}\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H \\ &\leq \frac{11}{4}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H\end{aligned}$$

bulunur.

$m = 2$ için, (4.9), (4.10) ve (4.15) kestirimleri uygulanarak

$$\begin{aligned}||J_{2k}||_H &\leq \left\|\tau A_k P_{k-1}^{\pm}(k-1)C^{\mp}u_0'\right\|_H \\ &\leq \left\|\tau A_k P_{k-1}^{-}(k-1)A_0^{-1/2}\right\| \\ &\times \left[\left\|\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\| + \left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\| + 2^{-1}\left\|\tau^2 A_0\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\|\right]\|u_0'\|_H \\ &\leq 2e^{M_{1/2}P_{1/2}}\|u_0'\|_H\end{aligned}$$

elde edilir.

$m=3$ için, (4.9), (4.10), (4.15) ve (4.16), kestirimleri uygulanarak

$$||J_{3k}||_H \leq \left\|\tau A_k P_{k-1}^{\pm}(k-1)D^{\mp} f_0\right\|_H$$

$$\leq 2^{-1}\tau\left[\left\|\tau^2 A_k P_{k-1}^{-}(k-1)A_0^{-1/2}\right\|\left\|\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\|\right.$$

$$+\left\|A_k P_{k-1}^{-}(k-1)A_0^{-1}\right\|\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\|$$

$$\left.+2^{-1}\left\|\tau A_k P_{k-1}^{-}(k-1)A_0^{-1/2}\right\|\left\|\tau^2 A_0\left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1}\right\|\right]\|f_0\|_H$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(3e^{M_{1/2}P_{1/2}}+e^{M_1 P_1}\right)\|f_0\|_H\,\tau$$

bulunur.

$m=4$ için, (4.12), (4.13) ve (4.15) kestirimleri uygulanarak

$$||J_{4k}||_H \leq \sum_{s=1}^{k-1}\left\|\tau^2 A_k E_{s-1}^{\pm}(k-1)\varphi_{k-s}\right\|$$

$$\leq \tau\sum_{s=1}^{k-1}\left\|\tau A_k E_{s-1}^{-}(k-1)A_{k-s}^{-1/2}\right\|\left[\|f_{k-s}\|_H+\left\|\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1/2}\right\|\right.$$

$$\left.\times\left\|\tau^{-2}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H+2^{-1}\left\|A_{k-s}^{1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s}^{-1}\right\|\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H\right]$$

$$\leq e^{M_{1/2}P_{1/2}}\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[\|f_{k-s}\|_H+M_{1/2}\left\|\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H+2^{-1}M_{1/2}\|\tau A_{k-s}u_{k-s}\|_H\right]$$

elde edilir. (4.27) formülü, üçgen eşitsizliği ve $\|J_{mk}\|_H$'nun, $m=\overline{1,4}$ için bulunan kestirimler kullanılarak

$$\|\tau A_k u_k\|_H \leq \frac{11}{4}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H$$

$$+2e^{M_{1/2}P_{1/2}}\|u_0'\|_H+\frac{1}{4}\left(3e^{M_{1/2}P_{1/2}}+e^{M_1P_1}\right)\|f_0\|_H\,\tau$$

$$+e^{M_{1/2}P_{1/2}}\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[\|f_{k-s}\|_H+M_{1/2}\left\|\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H+2^{-1}M_1\|\tau A_{k-s}u_{k-s}\|_H\right]$$

$$\leq C_1\left[\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H+\|u_0'\|_H+\tau\|f_0\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s}\|_H\right.$$

$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[\left\|\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H+\|\tau A_{k-s}u_{k-s}\|_H\right]\right]$$

bulunur; burada

$$C_1 = \max\left\{\frac{11}{4}e^{M_{1/2}P_{1/2}}, \frac{1}{4}\left(3e^{M_{1/2}P_{1/2}} + e^{M_1P_1}\right), M_1e^{M_{1/2}P_{1/2}}\right\}.$$

Yukarıdaki sonuçtan

$$\|\tau A_k u_k\|_H \leq C_1\left[\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H + \|u_0'\|_H + \tau\sum_{s=0}^{k-1}\|f_s\|_H\right.$$

$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left(\left\|\frac{u_s-u_{s-1}}{\tau}\right\|_H + \|\tau A_s u_s\|_H\right)\right] \tag{4.28}$$

yazılabilir.

İkinci olarak $||\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})||_H$ için kestirim elde edilecektir. (4.8) formülü kullanılarak

$$\tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) = S_{1k} + S_{2k} + S_{3k} + S_{4k} + S_{5k} \tag{4.29}$$

yazılabilir; burada

$$S_{1k} = (2\tau)^{-1}\left\{\left[P_{k-1}^-(k-1) - P_{k-2}^-(k-2)\right]B^+ + \left[P_{k-1}^+(k-1) - P_{k-2}^+(k-2)\right]B^-\right\}u_0,$$

$$S_{2k} = (2\tau)^{-1}\left\{\left[P_{k-1}^-(k-1) - P_{k-2}^-(k-2)\right]C^+ + \left[P_{k-1}^+(k-1) - P_{k-2}^+(k-2)\right]C^-\right\}u_0',$$

$$S_{3k} = (2\tau)^{-1}\left\{\left[P_{k-1}^-(k-1) - P_{k-2}^-(k-2)\right]D^+ + \left[P_{k-1}^+(k-1) - P_{k-2}^+(k-2)\right]D^-\right\}f_0,$$

$$S_{4k} = 2^{-1}\left[E_0^-(k-1) - E_0^+(k-1)\right]\varphi_{k-1},$$

$$S_{5k} = 2^{-1}\sum_{s=2}^{k-1}\left\{\left[E_{s-1}^-(k-1) - E_{s-2}^-(k-2)\right] + \left[E_{s-1}^+(k-1) - E_{s-2}^+(k-2)\right]\right\}\varphi_{k-s}.$$

Şimdi, $\|S_{mk}\|_H$, $m = \overline{1,5}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimleer belirlenecektir. $m = 1$ için, (4.9), (4.10) ve (4.17) kestirimleri uygulanarak

$$||S_{1k}||_H \leq \left\|\tau^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1) - P_{k-2}^{\pm}(k-2)]B^{\mp}u_0\right\|_H$$

$$\leq \left\{\left\|\tau^{-1}[P_{k-1}^-(k-1) - P_{k-2}^-(k-2)]A_0^{-1/2}\right\|\right.$$

$$\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\| + 2\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\| + 2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]$$

$$\left.+4^{-1}\left\|[P_{k-1}^-(k-1) - P_{k-2}^-(k-2)]\right\|\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right\}\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H$$

$$\leq \frac{39}{8}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H$$

elde edilir.

$m=2$ için, (4.9) ve (4.17) kestirimleri uygulanarak

$$\begin{aligned}
||S_{2k}||_H &\le \left\|\tau^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)-P_{k-2}^{\pm}(k-2)]C^{\mp}u_0'\right\|_H \\
&\le \left\{\left\|\tau^{-1}[P_{k-1}^{-}(k-1)-P_{k-2}^{-}(k-2)]A_0^{-1/2}\right\|\right. \\
&\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right] \\
&\left.+\left\|[P_{k-1}^{-}(k-1)-P_{k-2}^{-}(k-2)]\right\|\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right\}\|u_0'\|_H \\
&\le \frac{15}{4}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\|u_0'\|_H
\end{aligned}$$

bulunur.

$m=3$ için, (4.9), (4.10) ve (4.17) kestirimleri uygulanarak

$$||S_{3k}||_H \le \left\|\tau^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)-P_{k-2}^{\pm}(k-2)]D^{\mp}f_0\right\|_H$$

$$\begin{aligned}
&\le 2^{-1}\tau\left\{\left\|[P_{k-1}^{-}(k-1)-P_{k-2}^{-}(k-2)]\right\|\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2^{-1}\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]\right. \\
&\left.+\left\|\tau^{-1}[P_{k-1}^{\pm}(k-1)-P_{k-2}^{\pm}(k-2)]A_0^{-1/2}\right\|\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right\}\|f_0\|_H \\
&\le \frac{27}{16}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\|f_0\|_H\,\tau
\end{aligned}$$

elde edilir.

$m=4$ için, önce $2^{-1}\left[E_0^{-}(k-1)-E_0^{+}(k-1)\right]=\tau A_{k-1}^{1/2}X_{k-1}^{-}X_{k-1}^{+}$ olduğu kolayca gösterilir; sonra (4.11), (4.12) ve (4.13) kestirimleri uygulanarak

$$||S_{4k}||_H \le \left\|2^{-1}\left[E_0^{-}(k-1)-E_0^{+}(k-1)\right]\varphi_{k-1}\right\|_H \le \left\|\tau A_{k-1}^{1/2}X_{k-1}^{-}X_{k-1}^{+}\varphi_{k-1}\right\|_H$$

$$\begin{aligned}
&\le \tau\left[\|f_{k-1}\|_H+\left\|\left(A_{k-1}^{1/2}-A_{k-2}^{1/2}\right)A_{k-2}^{-1/2}\right\|\left\|\tau^{-2}(u_{k-1}-u_{k-2})\right\|_H\right. \\
&\left.+2^{-1}\left\|A_{k-1}^{1/2}\left(A_{k-1}^{1/2}-A_{k-2}^{1/2}\right)A_{k-1}^{-1}\right\|\|A_{k-1}u_{k-1}\|_H\right] \\
&\le \tau\left[\|f_{k-1}\|_H+M_{1/2}\left\|\tau^{-1}(u_{k-1}-u_{k-2})\right\|_H+2^{-1}M_{1/2}\|\tau A_{k-1}u_{k-1}\|_H\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

$m=5$ için, (4.12), (4.13) ve (4.18) kestirimleri uygulanarak

$$||S_{5k}||_H \le \sum_{s=2}^{k-1}\left\|[E_{s-1}^{\pm}(k-1)-E_{s-2}^{\pm}(k-2)]\varphi_{k-s}\right\|$$

$$\leq \tau \sum_{s=2}^{k-1} \left\| \tau^{-1}[E_{s-1}^{-}(k-1) - E_{s-2}^{-}(k-2)] A_{k-s}^{-1/2} \right\|$$

$$\times \left[\|f_{k-s}\|_H + \left\| \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) A_{k-s-1}^{-1/2} \right\| \left\| \tau^{-2}(u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right\|_H \right.$$

$$\left. +2^{-1} \left\| A_{k-s}^{1/2} \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) A_{k-s}^{-1} \right\| \|A_{k-s} u_{k-s}\|_H \right]$$

$$\leq \frac{3}{2} \tau e^{M_{1/2}P_{1/2}} \sum_{s=2}^{k-1} \left[\|f_{k-s}\|_H + M_{1/2} \left\| \tau^{-1}(u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right\|_H + 2^{-1} M_1 \|\tau A_{k-s} u_{k-s}\|_H \right]$$

elde edilir.

(4.29) formülü, üçgen eşitsizliği ve $\|S_{mk}\|_H$'nın $m = \overline{1,5}$ için bulunan kestirimler kullanılarak

$$\left\| \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) \right\|_H \leq e^{M_{1/2}P_{1/2}} \left(\frac{39}{8} \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \frac{15}{4} \|u_0'\|_H + \frac{27}{16} \|f_0\|_H \tau \right)$$

$$+\tau \left[\|f_{k-1}\|_H + M_{1/2} \left\| \tau^{-1}(u_{k-1} - u_{k-2}) \right\|_H + 2^{-1} M_1 \|\tau A_{k-1} u_{k-1}\|_H \right]$$

$$+\frac{3}{2} \tau e^{M_{1/2}P_{1/2}} \sum_{s=2}^{k-1} \left[\|f_{k-s}\|_H + M_{1/2} \left\| \tau^{-1}(u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right\|_H + 2^{-1} M_1 \|\tau A_{k-s} u_{k-s}\|_H \right]$$

$$\leq C_2 \left[\left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \|u_0'\|_H + \tau \|f_0\|_H + \tau \|f_{k-1}\|_H + \tau \sum_{s=2}^{k-1} \|f_{k-s}\|_H \right.$$

$$+\tau \left[\left\| \tau^{-1}(u_{k-1} - u_{k-2}) \right\|_H + \|\tau A_{k-1} u_{k-1}\|_H \right]$$

$$\left. +\tau \sum_{s=2}^{k-1} \left[\left\| \tau^{-1}(u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right\|_H + \|\tau A_{k-s} u_{k-s}\|_H \right] \right.$$

bulunur; burada

$$C_2 = \max \left\{ \frac{39}{8} e^{M_{1/2}P_{1/2}}, 1, M_{1/2}, M_1, \frac{3}{2} M_{1/2} e^{M_{1/2}P_{1/2}}, \frac{3}{4} M_1 e^{M_{1/2}P_{1/2}} \right\}.$$

Yukarıdaki sonuçtan

$$\left\| \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) \right\|_H \leq C_2 \left[\left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \|u_0'\|_H + \tau \sum_{s=0}^{k-1} \|f_s\|_H \right.$$

$$\left. +\tau \sum_{s=1}^{k-1} \left(\left\| \frac{u_s - u_{s-1}}{\tau} \right\|_H + \|\tau A_s u_s\|_H \right) \right] \tag{4.30}$$

yazılır. (4.28) ve (4.30)'deki kestirimler birleştirilerek herhangi bir $k, 1 \leq k \leq N$ için

$$\|\tau A_k u_k\|_H + \left\| \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) \right\|_H \leq (C_1 + C_2) \left[\left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \|u_0'\|_H \right.$$

$$+\tau \sum_{s=0}^{k-1} \|f_s\|_H + \tau \sum_{s=1}^{k-1} \left(\left\| \frac{u_s - u_{s-1}}{\tau} \right\|_H + \|\tau A_s u_s\|_H \right) \Bigg]$$

$$\leq C_3 \left[\left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \|u_0'\|_H + \tau \sum_{s=0}^{k-1} \|f_s\|_H + \tau \sum_{s=1}^{k-1} \left(\left\| \frac{u_s - u_{s-1}}{\tau} \right\|_H + \|\tau A_s u_s\|_H \right) \right]$$

bulunur; burada

$$C_3 = \max \{C_1, C_2\}.$$

Entegral eşitsizliğinin fark benzetimi uygulanarak

$$\|\tau A_k u_k\|_H + \left\| \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) \right\|_H$$

$$\leq C_4 \left[\left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \|u_0'\|_H + \sum_{s=0}^{k-1} \|f_s\|_H \tau \right] \tag{4.31}$$

sonucuna varılır; burada

$$C_4 = C_3 e^{C_3 \tau k}.$$

Şimdi, $||u_k||_H$, $k = 1, \cdots, N$, için kestirim elde edilecektir. $u_k = u_0 + \sum_{s=1}^{k} \tau^{-1} (u_s - u_{s-1}) \tau$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu denklemden, (4.31) kararlılık kestirimi ve üçgen eşitsizliği kullanılarak herhangi bir $k, 1 \leq k \leq N$, için

$$\|u_k\|_H \leq \|u_0\|_H + \sum_{s=1}^{k} \left\| \tau^{-1}(u_s - u_{s-1}) \right\|_H \tau$$

$$\leq \left\| A_0^{-1/2} \right\| \left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + C_4 k \tau \left[\left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \|u_0'\|_H + \sum_{s=0}^{k-1} \|f_s\|_H \tau \right]$$

bulunur. $\left\| A_s^{-1/2} \right\| \leq \sqrt{\delta}^{-1}$ olduğundan dolayı

$$\|u_k\|_H \leq C_5 \left[\left\| A_0^{1/2} u_0 \right\|_H + \|u_0'\|_H + \sum_{s=0}^{k-1} \|f_s\|_H \tau \right],$$

yazılabilir; burada

$$C_5 = \max \left\{ \sqrt{\delta}^{-1} + T C_4,\ C_4 \right\}.$$

Bu sonuç Theorem 4.1'in ispatını tamamlar.

Teorem 4.2. $u(0) \in D(A(0))$, $u'(0) \in D(A^{1/2}(0))$ olsun. Bu durumda (4.4) fark şemasının çözümü için

$$\max_{0 \leq k \leq N} ||A_k u_k||_H + \max_{0 \leq k \leq N-1} ||4^{-1} \tau^4 A_k^2 u_{k+1}||_H + \max_{1 \leq k \leq N-1} ||\tau^{-2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) ||_H$$

$$\leq M\left[||A(0)u_0||_H+||A^{\frac{1}{2}}(0)u_0'||_H+\left\|\tau A_k^{1/2}f_k\right\|_H+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H+\sum_{s=0}^{N-1}||f_{s+1}-f_s||_H\right]$$

kararlılık kesitirimi geçerlidir; burada M, u_0, u_0', f_s $(0\leq s\leq N)$ ve τ'dan bağımsızdır.

İspat. İlk olarak $||A_k u_k||_H$ için kestirim elde edilecektir. (4.7) formülü kullanılarak

$$A_k u_k = Y_{1k}+Y_{2k}+Y_{3k}+Y_{4k} \tag{4.32}$$

yazılabilir; burada

$$Y_{1k}=2^{-1}A_k\left[P_{k-1}^{-}(k-1)B^{+}+P_{k-1}^{+}(k-1)B^{-}\right]u_0,$$

$$Y_{2k}=2^{-1}A_k\left[P_{k-1}^{-}(k-1)C^{+}+P_{k-1}^{+}(k-1)C^{-}\right]u_0',$$

$$Y_{3k}=2^{-1}A_k\left[P_{k-1}^{-}(k-1)D^{+}+P_{k-1}^{+}(k-1)D^{-}\right]f_0,$$

$$Y_{4k}=\tau A_k 2^{-1}\sum_{s=1}^{k-1}[E_{s-1}^{-}(k-1)+E_{s-1}^{+}(k-1)]\varphi_{k-s}.$$

Şimdi, $\|Y_{mk}\|_H$, $m=\overline{1,4}$, terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$ için, (4.9), (4.10), (4.15) ve (4.16) kestirimleri uygulanarak

$$||Y_{1k}||_H\leq\left\|A_kP_{k-1}^{\pm}(k-1)B^{\mp}u_0\right\|_H$$

$$\leq\Big\{\left\|A_kP_{k-1}^{-}(k-1)A_0^{-1}\right\|$$

$$\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]$$

$$+4^{-1}\left\|\tau^2A_kP_{k-1}^{-}(k-1)\right\|\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\Big\}\|A_0u_0\|_H$$

$$\leq 2^{-1}\left(5e^{M_1P_1}+\frac{1}{4}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\right)\|A_0u_0\|_H$$

elde edilir.

$m=2$ için, (4.9), (4.10) ve (4.16) kestirimleri uygulanarak

$$||Y_{2k}||_H\leq\left\|A_kP_{k-1}^{\pm}(k-1)C^{\mp}u_0'\right\|_H$$

$$\leq\left\|A_kP_{k-1}^{-}(k-1)A_0^{-1}\right\|$$

$$\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

$$\leq 2e^{M_1P_1}\left\|A_0^{1/2}u_0\right\|_H$$

bulunur.

$m=3$ için, (4.9), (4.10), (4.15) ve (4.16) kestirimleri uygulanarak

$$||Y_{3k}||_H \leq \left\| A_k P^{\pm}_{k-1}(k-1) D^{\mp} f_0 \right\|_H$$
$$\leq 2^{-1}\left\{ \left\| A_k P^{-}_{k-1}(k-1) A_0^{-1} \right\| \left[\left\| \tau A_0^{1/2} \left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| + \left\| \tau^2 A_0 \left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| \right] \right.$$
$$\left. +4^{-1} \left\| \tau A_k P^{-}_{k-1}(k-1) A_0^{-1/2} \right\| \left\| \tau^2 A_0 \left(I+\tau^2 A_0\right)^{-1} \right\| \right\} \|f_0\|_H$$
$$\leq 4^{-1}\left(3e^{M_1 P_1} + e^{M_{1/2} P_{1/2}}\right) \|f_0\|_H$$

elde edilir.

$m=4$ için, Y_{4k}'nın formülünden

$$Y_{4k} = Q_{1k} + Q_{2k} + Q_{3k} \tag{4.33}$$

yazılabilir; burada

$$Q_{1k} = 2^{-1}\tau A_k \sum_{s=1}^{k-1} [E^{-}_{s-1}(k-1) - E^{+}_{s-1}(k-1)] \left(-i A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}\right),$$

$$Q_{2k} = 2^{-1}\tau A_k \sum_{s=1}^{k-1} [E^{-}_{s-1}(k-1) - E^{+}_{s-1}(k-1)]$$
$$\times \left[-i A_{k-s}^{-1/2} \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) A_{k-s-1}^{-1/2} \tau^{-2} (u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right],$$
$$Q_{3k} = 2^{-1}\tau A_k \sum_{s=1}^{k-1} [E^{-}_{s-1}(k-1) - E^{+}_{s-1}(k-1)] \left[-i 2^{-1} \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) u_{k-s} \right].$$

Şimdi ise $||Q_{mk}||_H$, $m=\overline{1,3}$ terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$ için,

$$A_k E^{-}_{s-1}(k-1) \left(-i\tau A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}\right) = A_k E^{-}_{s-2}(k-1) \left(I - X^{-}_{k-s}\right) \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1} f_{k-s}$$

olduğundan, bu eşitlik $||Q_{1k}||_H$'nın içinde kullanılarak

$$\sum_{s=1}^{k-1} A_k E^{-}_{s-1}(k-1) \left(-i\tau A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}\right)$$
$$= \sum_{s=1}^{k-1} A_k E^{-}_{s-2}(k-1) \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1} f_{k-s}$$

$$-\sum_{s=1}^{k-1} A_k E_{s-2}^{-}(k-1) X_{k-s}^{-} \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1} f_{k-s}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci toplamın içindeki ifadede $s+1 = m$ dönüşümü kullanılarak, terimler düzenlenerek ve Abel formülü kullanılarak

$$\sum_{s=1}^{k-1} A_k E_{s-1}^{-}(k-1) \left(-i\tau A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}\right)$$

$$= A_k E_{k-2}^{-}(k-1) \left(I - \frac{i\tau}{2} A_1^{1/2}\right)^{-1} A_1^{-1} f_1$$

$$+ A_k E_{-1}^{-}(k-1) \left(I - \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right)^{-1} A_k^{-1} f_k$$

$$+ \sum_{s=1}^{k-1} A_k E_{s-2}^{-}(k-1) \left[\left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1} f_{k-s} - \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s+1}^{-1} f_{k-s+1}\right]$$

bulunur. Diğer taraftan aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıkca görülmektedir;

$$\left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1} f_{k-s} - \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s+1}^{-1} f_{k-s+1}$$

$$= -\left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1} \left(f_{k-s+1} - f_{k-s}\right)$$

$$+ \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1} \left(A_{k-s+1} - A_{k-s}\right) A_{k-s+1}^{-1} f_{k-s+1}$$

$$- \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} \left(A_{k-s+1}^{1/2} - A_{k-s}^{1/2}\right) A_{k-s+1}^{-3/2} \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2}\right)^{-1} i\frac{\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2} f_{k-s+1}.$$

Bu sonuçtan

$$\sum_{s=1}^{k-1} A_k E_{s-1}^{-}(k-1) \left(-i\tau A_{k-s}^{-1/2} f_{k-s}\right)$$

$$= A_k E_{k-2}^{-}(k-1) \left(I - \frac{i\tau}{2} A_1^{1/2}\right)^{-1} A_1^{-1} f_1 + A_k E_{-1}^{-}(k-1) \left(I - \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2}\right)^{-1} A_k^{-1} f_k$$

$$- \sum_{s=1}^{k-1} A_k E_{s-2}^{-}(k-1) \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1} A_{k-s}^{-1}$$

$$\times \Big[\left(f_{k-s+1} - f_{k-s}\right) - \left(A_{k-s+1} - A_{k-s}\right) A_{k-s+1}^{-1} f_{k-s+1}$$

$$+ A_{k-s} \left(A_{k-s+1}^{1/2} - A_{k-s}^{1/2}\right) A_{k-s+1}^{-3/2} \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2}\right)^{-1} i\frac{\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2} f_{k-s+1}\Big]$$

yazılabilir. Sonra, (4.9), (4.12), (4.13), (4.14) ve (4.16) kestirimleri uygulanarak

$$||Q_{1k}||_H \leq \left\| \sum_{s=1}^{k-1} \tau A_k [E_{s-1}^-(k-1) + E_{s-1}^+(k-1)] \left(-iA_{k-s}^{-1/2} f_{k-s} \right) \right\|$$

$$\leq \left\| A_k E_{k-1}^-(k-1) A_1^{-1} \right\| \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2} A_1^{1/2} \right)^{-1} \right\| \|f_1\|_H$$

$$+ \left\| A_k E_{-1}^-(k-1) A_k^{-1} \right\| \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2} A_k^{1/2} \right)^{-1} \right\| \|f_k\|_H$$

$$+ \sum_{s=1}^{k-1} \left\| A_k E_{s-2}^-(k-1) A_{k-s}^{-1} \right\| \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s}^{1/2} \right)^{-1} \right\|$$

$$\times \left[\|f_{k-s+1} - f_{k-s}\|_H + \left\| (A_{k-s+1} - A_{k-s}) A_{k-s+1}^{-1} \right\| \|f_{k-s+1}\|_H \right.$$

$$+ \left\| A_{k-s} A_{k-s+1}^{-1} \right\| \left\| A_{k-s+1} \left(A_{k-s+1}^{1/2} - A_{k-s}^{1/2} \right) A_{k-s+1}^{-3/2} \right\|$$

$$\left. \times \left\| \left(I - \frac{i\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2} \right)^{-1} \frac{\tau}{2} A_{k-s+1}^{1/2} \right\| \|f_{k-s+1}\|_H \right]$$

$$\leq e^{M_1 P_1} \|f_1\|_H + \|f_k\|_H + e^{M_1 P_1} \sum_{s=1}^{k-1} \|f_{k-s+1} - f_{k-s}\|_H$$

$$+ \tau M_1 \left(1 + M_{3/2} \right) e^{M_1 P_1} \sum_{s=1}^{k-1} \|f_{k-s+1}\|_H$$

elde edilir.

$m = 2$ için, (4.13) ve (4.16) kestirimleri uygulanarak

$$\|Q_{2k}\|_H \leq \left\| \sum_{s=1}^{k-1} \tau A_k E_{s-1}^-(k-1) \left[A_{k-s}^{-1/2} \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) A_{k-s-1}^{-1/2} \tau^{-2} (u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right] \right\|_H$$

$$\leq \sum_{s=1}^{k-1} \left\| A_k E_{s-1}^-(k-1) A_{k-s}^{-1} \right\|$$

$$\times \left\| A_{k-s}^{1/2} \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) A_{k-s-1}^{-1} \right\| \left\| A_{k-s-1}^{1/2} \tau^{-1} (u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right\|_H$$

$$\leq \tau M_1 e^{M_1 P_1} \sum_{s=1}^{k-1} \left\| A_{k-s-1}^{1/2} \tau^{-1} (u_{k-s} - u_{k-s-1}) \right\|_H$$

bulunur.

$m = 3$ için, gene (4.13) ve (4.16) kestirimleri uygulanarak

$$\|Q_{3k}\|_H \leq \left\| \sum_{s=1}^{k-1} \tau A_k E_{s-1}^-(k-1) 2^{-1} \left(A_{k-s}^{1/2} - A_{k-s-1}^{1/2} \right) u_{k-s} \right\|_H$$

$$\leq 2^{-1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_kE_{s-1}^{-}(k-1)A_{k-s}^{-1/2}\tau\right\|\left\|A_{k-s}^{1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s}^{-1}\right\|\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H$$

$$\leq \frac{1}{2}\tau M_1e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H$$

elde edilir.

(4.33), üçgen eşitsizliği ve $||Q_{mk}||_H$'nın $m=\overline{1,3}$ için bulunan kestirimleri kullanılarak

$$\|Y_{4k}\|_H \leq e^{M_1P_1}\|f_1\|_H+\|f_k\|_H+\tau M_1\left(1+M_{3/2}\right)e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}\|_H$$

$$+e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\|_H$$

$$+\frac{1}{2}\tau M_1e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H+\tau M_1e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H$$

bulunur.

Şimdi de (4.32), üçgen eşitsizliği ve $||Y_{mk}||_H$'nın $m=\overline{1,4}$ için bulunan kestirimleri kullanılarak

$$||A_ku_k||_H \leq 2^{-1}\left(5e^{M_1P_1}+\frac{1}{4}e^{M_{1/2}P_{1/2}}\right)\|A_0u_0\|_H+2e^{M_1P_1}\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

$$+4^{-1}\left(3e^{M_1P_1}+e^{M_{1/2}P_{1/2}}\right)\|f_0\|_H+e^{M_1P_1}\|f_1\|_H+\|f_k\|_H$$

$$+M_1\left(1+M_{3/2}\right)e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}\|_H\tau+e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\|_H$$

$$+\tau M_1e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left[2^{-1}\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H+\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H\right]$$

sonucuna varılır. Yukarıdaki sonuçtan

$$||A_ku_k||_H \leq C_6\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[\|A_su_s\|_H+\left\|A_{s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H\right]\right] \tag{4.34}$$

yazılabilir; burada

$$C_6 = \max\left\{\frac{5}{2}e^{M_1P_1} + \frac{1}{8}e^{M_{1/2}P_{1/2}}, \frac{3}{4}e^{M_1P_1} + \frac{1}{4}e^{M_{1/2}P_{1/2}}, M_1\left(1+M_{3/2}\right)e^{M_1P_1}\right\}.$$

İkinci olarak $\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H$ için kestirim elde edilecektir. (4.8) formülü kullanılarak

$$A_k^{1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k) = V_{1k}+V_{2k}+V_{3k}+V_{4k}+V_{5k} \tag{4.35}$$

yazılabilir; burada

$$V_{1k} = (2\tau)^{-1}A_k^{1/2}\left\{\left[P_k^-(k)-P_{k-1}^-(k-1)\right]B^+ + \left[P_k^+(k)-P_{k-1}^+(k-1)\right]B^-\right\}u_0$$

$$V_{2k} = (2\tau)^{-1}A_k^{1/2}\left\{\left[P_k^-(k)-P_{k-1}^-(k-1)\right]C^+ + \left[P_k^+(k)-P_{k-1}^+(k-1)\right]C^-\right\}u_0',$$

$$V_{3k} = (2\tau)^{-1}A_k^{1/2}\left\{\left[P_k^-(k)-P_{k-1}^-(k-1)\right]D^+ + \left[P_k^+(k)-P_{k-1}^+(k-1)\right]D^-\right\}f_0$$

$$V_{4k} = 2^{-1}A_k^{1/2}\left[E_0^-(k)-E_0^+(k)\right]\varphi_k,$$

$$V_{5k} = 2^{-1}A_k^{1/2}\sum_{s=1}^{k-1}\left\{\left[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)\right]-\left[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)\right]\right\}\varphi_{k-s}.$$

Şimdi, $\|V_{mk}\|_H$, $m=\overline{1,5}$, terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$, için (4.9), (4.11) ve (4.19) kestirimleri uygulanarak

$$\begin{aligned}
||V_{1k}||_H &\le \left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[P_k^{\pm}(k)-P_{k-1}^{\pm}(k-1)]B^{\mp}u_0\right\|_H \\
&\le \left\{\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[P_k^-(k)-P_{k-1}^-(k-1)]A_0^{-1}\right\|\right. \\
&\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\| + 2\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\| + 2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right] \\
&\left.+4^{-1}\left\|\tau^2A_k^{1/2}[P_k^-(k)-P_{k-1}^-(k-1)]\right\|\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right\}\|A_0u_0\|_H \\
&\le \frac{33}{8}e^{M_1P_1}\|A_0u_0\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

$m=2$ için, gene (4.9), (4.11) ve (4.19) kestirimleri uygulanarak

$$\begin{aligned}
||V_{2k}||_H &\le \left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[P_k^{\pm}(k)-P_{k-1}^{\pm}(k-1)]C^{\mp}u_0'\right\|_H \\
&\le \left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[P_k^-(k)-P_{k-1}^-(k-1)]A_0^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

$$\times\left[\left\|\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+2^{-1}\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$
$$\leq 3e^{M_1P_1}\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H$$

bulunur.

$m=3$ için, yine (4.9), (4.11) ve (4.19) kestirimleri uygulanarak

$$||V_{3k}||_H \leq \left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[P_k^{\pm}(k)-P_{k-1}^{\pm}(k-1)]D^{\mp}f_0\right\|_H$$
$$\leq \left\{2^{-1}\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[P_k^{-}(k)-P_{k-1}^{-}(k-1)]A_0^{-1}\right\|\right.$$
$$\times\left[\left\|\tau^2A_0\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|+\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right]$$
$$\left.+4^{-1}\left\|\tau^2A_k^{1/2}\tau^{-1}[P_k^{-}(k)-P_{k-1}^{-}(k-1)]\right\|\left\|\tau A_0^{1/2}\left(I+\tau^2A_0\right)^{-1}\right\|\right\}\|f_0\|_H$$
$$\leq \frac{3}{2}e^{M_1P_1}\|f_0\|_H$$

elde edilir.

$m=4$ için, $\left[E_0^-(k)-E_0^+(k)\right]=2i\tau A_k^{1/2}X_k^-X_k^+$ olduğundan, bu eşitlik $||V_{4k}||_H$'de kullanılarak ve (4.11) ve (4.13) kestirimleri uygulanarak

$$||V_{4k}||_H \leq \left\|2^{-1}A_k^{1/2}\left[E_0^-(k)-E_0^+(k)\right]\varphi_k\right\|_H \leq \left\|\tau A_k^{1/2}X_k^-X_k^+\varphi_k\right\|_H$$
$$\leq \left[\|f_k\|_H+\left\|A_k^{1/2}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)A_{k-1}^{-1}\right\|\left\|A_{k-1}^{1/2}\tau^{-2}(u_k-u_{k-1})\right\|_H\right.$$
$$\left.+2^{-1}\left\|A_k^{1/2}\left(A_k^{1/2}-A_{k-1}^{1/2}\right)A_k^{-1}\right\|\|A_ku_k\|_H\right]$$
$$\leq \left[\|f_k\|_H+\tau M_1\left\|A_{k-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\right\|_H+2^{-1}\tau M_1\|A_ku_k\|_H\right]$$

bulunur.

$m=5$ için, V_{5k}'nın formülünden

$$V_{5k}=W_{1k}+W_{2k}+W_{3k} \tag{4.36}$$

yazılabilir; burada

$$W_{1k}=2^{-1}A_k^{1/2}\sum_{s=1}^{k-1}\left\{[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)]-[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)]\right\}\left(-iA_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}\right),$$

$$W_{2k}=2^{-1}A_k^{1/2}\sum_{s=1}^{k-1}\left\{[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)]-[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)]\right\}$$

$$\times\left[-iA_{k-s}^{-1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1/2}\tau^{-2}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right],$$

$$W_{3k}=2^{-1}A_k^{1/2}\sum_{s=1}^{k-1}\left\{[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)]-[E_s^+(k)-E_{s-1}^+(k-1)]\right\}$$

$$\times\left[-i2^{-1}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)u_{k-s}\right].$$

Şimdi, $||W_{mk}||_H$, $m=\overline{1,3}$, terimleri için ayrı ayrı kestirimler belirlenecektir. $m=1$ için, $||Q_{1k}||_H$ kestiriminin ispatında izlendiği gibi

$$\sum_{s=2}^{k-1}A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)]\left(-i\tau A_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}\right)$$

$$=A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_{k-1}^-(k)-E_{k-2}^-(k-1)]\left(I-\frac{i\tau}{2}A_1^{1/2}\right)^{-1}A_1^{-1}f_1$$

$$+A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_0^-(k)-E_{-1}^-(k-1)]\left(I-\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1}A_k^{-1}f_k$$

$$-\sum_{s=1}^{k-1}A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_{s-1}^-(k)-E_{s-2}^-(k-1)]\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1}A_{k-s}^{-1}$$

$$\times\Big[(f_{k-s+1}-f_{k-s})-(A_{k-s+1}-A_{k-s})A_{k-s+1}^{-1}f_{k-s+1}$$

$$+A_{k-s}\left(A_{k-s+1}^{1/2}-A_{k-s}^{1/2}\right)A_{k-s+1}^{-3/2}\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s+1}^{1/2}\right)^{-1}i\frac{\tau}{2}A_{k-s+1}^{1/2}f_{k-s+1}\Big]$$

yazılabilir. Sonra, (4.9), (4.12), (4.13), (4.14) ve (4.18) kestirimleri uygulanarak

$$||W_{1k}||_H\le\left\|\sum_{s=1}^{k-1}A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_s^-(k)-E_{s-1}^-(k-1)]\left(-i\tau A_{k-s}^{-1/2}f_{k-s}\right)\right\|$$

$$\le\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_{k-1}^-(k)-E_{k-2}^-(k-1)]A_1^{-1}\right\|\left\|\left(I-\frac{i\tau}{2}A_1^{1/2}\right)^{-1}\right\|\|f_1\|_H$$

$$+\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_0^-(k)-E_{-1}^-(k-1)]A_k^{-1}\right\|\left\|\left(I-\frac{i\tau}{2}A_k^{1/2}\right)^{-1}\right\|\|f_k\|_H$$

$$+\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_{s-1}^-(k)-E_{s-2}^-(k-1)]A_{k-s}^{-1}\right\|\left\|\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s}^{1/2}\right)^{-1}\right\|$$

$$\times\Big[\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\|_H+\left\|(A_{k-s+1}-A_{k-s})A_{k-s+1}^{-1}\right\|\|f_{k-s+1}\|_H$$

$$+\left\|A_{k-s}A_{k-s+1}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s+1}\left(A_{k-s+1}^{1/2}-A_{k-s}^{1/2}\right)A_{k-s+1}^{-3/2}\right\|$$

$$\times\left\|\left(I-\frac{i\tau}{2}A_{k-s+1}^{1/2}\right)^{-1}\frac{\tau}{2}A_{k-s+1}^{1/2}\right\|\|f_{k-s+1}\|_H\Big]$$

$$\leq \frac{3}{2}e^{M_1P_1}\left\|f_1\right\|_H+\frac{3}{2}\left\|f_k\right\|_H+\frac{3}{2}e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\right\|_H$$

$$+\frac{3}{2}\tau M_1\left(M_1+M_{3/2}\right)e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|f_{k-s+1}\right\|_H$$

bulunur.

$m=2$ için, (4.13) ve (4.18) kestirimleri uygulanarak

$$\left\|W_{2k}\right\|_H\leq\left\|\sum_{s=1}^{k-1}A_k^{1/2}[E_s^{\pm}(k)-E_{s-1}^{\pm}(k-1)]\right.$$

$$\left.\times\left[A_{k-s}^{-1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1/2}\tau^{-2}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right]\right\|_H$$

$$\leq\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_s^{-}(k)-E_{s-1}^{-}(k-1)]A_{k-s}^{-1}\right\|$$

$$\times\left\|A_{k-s}^{1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s-1}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H$$

$$\leq\frac{3}{2}\tau M_{1/2}e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|_H$$

elde edilir.

$m=3$ için, gene (4.13) ve (4.20) kestirimleri uygulanarak

$$\left\|W_{3k}\right\|_H\leq\left\|2^{-1}\sum_{s=1}^{k-1}A_k^{1/2}[E_s^{\pm}(k)-E_{s-1}^{\pm}(k-1)]\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)u_{k-s}\right\|_H$$

$$\leq 2^{-1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}[E_s^{-}(k)-E_{s-1}^{-}(k-1)]A_{k-s}^{-1/2}\tau\right\|_H$$

$$\times\left\|A_{k-s}^{1/2}\left(A_{k-s}^{1/2}-A_{k-s-1}^{1/2}\right)A_{k-s}^{-1}\right\|\left\|A_{k-s}u_{k-s}\right\|_H$$

$$\leq\frac{3}{4}\tau M_1e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_{k-s}u_{k-s}\right\|_H$$

bulunur.

(4.36) formülü, üçgen eşitsizliği ve $||W_{mk}||_H$'nın, $m=\overline{1,3}$ için bulunan kestirimleri kullanılarak

$$\left\|V_{5k}\right\|_H\leq\frac{3}{2}e^{M_1P_1}\left\|f_1\right\|_H+\frac{3}{2}\left\|f_k\right\|_H+\frac{3}{2}e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\right\|_H$$

$$+\frac{3}{2}\tau M_1\left(M_1+M_{3/2}\right)e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}\|_H+\frac{3}{4}\tau M_1 e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H$$

$$+\frac{3}{2}\tau M_1 e^{M_1P_1}\sum_{s=1}^{k-1}\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|$$

$$\leq C_7\left[\|f_1\|_H+\|f_k\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}\|_H+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\|_H\right.$$

$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H+\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|\right]\right]$$

elde edilir; burada

$$C_7=\max\left\{\frac{3}{2},\frac{3}{2}e^{M_1P_1},\frac{3}{2}M_1\left(M_1+M_{3/2}\right)e^{M_1P_1},\frac{3}{2}M_1e^{M_1P_1}\right\}.$$

(4.35) formülü, üçgen eşitsizliği ve $||V_{mk}||_H$'nın $m=\overline{1,5}$ için bulunan kestirimleri kullanılarak

$$\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H\leq\frac{33}{8}e^{M_1P_1}\|A_0u_0\|_H+3e^{M_1P_1}\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\frac{3}{2}e^{M_1P_1}\|f_0\|_H$$

$$+\|f_k\|_H+\tau M_1\left\|A_{k-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_k-u_{k-1})\right\|_H+2^{-1}\tau M_1\|A_ku_k\|_H$$

$$+C_7\left[\|f_1\|_H+\|f_k\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}\|_H+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{k-s+1}-f_{k-s}\|_H\right.$$

$$\left.+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[\|A_{k-s}u_{k-s}\|_H+\left\|A_{k-s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_{k-s}-u_{k-s-1})\right\|\right]\right]$$

bulunur. Yukarıdaki sonuçtan

$$\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H\leq C_8\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k}\left[\|A_su_s\|_H+\left\|A_{s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H\right]\right]\qquad(4.37)$$

yazılabilir; burada

$$C_8=\max\left\{2\left(\frac{33}{8}e^{M_1P_1},M_1,C_7\right)\right\}.$$

(4.34) ve (4.37)'deki kestirimler birleştirilerek herhangi bir k, $1\leq k\leq N$, için

$$||A_ku_k||_H+\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H\leq C_9\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k}\left[\|A_su_s\|_H+\left\|A_{s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H\right]\Bigg]$$

bulunur; burada

$$C_9=C_8+C_6.$$

Yukarıdaki eşitsizlikden

$$||A_ku_k||_H+\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H\leq C_{10}\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H+\tau\sum_{s=1}^{k-1}\left[\|A_su_s\|_H+\left\|A_{s-1}^{1/2}\tau^{-1}(u_s-u_{s-1})\right\|_H\right]\right]$$

eşitsiliği de yazılabilir; burada

$$C_{10}=(I-\tau C_9)^{-1}C_9.$$

Entegral eşitsizliğinin fark benzetimi uygulanarak

$$||A_ku_k||_H+\left\|A_k^{1/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H$$

$$\leq C_{11}\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H\right] \tag{4.38}$$

elde edilir; burada

$$C_{11}=C_{10}e^{C_{10}\tau k}.$$

(4.38)'deki kestirimin ispatında olduğu (4.9-4.14) kestirimleri ve bunlara ek olarak (4.27-4.31) kestirimleri kullanılarak

$$||\tau^2A_k^2u_{k+1}||_H+\left\|\tau^2A_k^{3/2}\tau^{-1}(u_{k+1}-u_k)\right\|_H$$

$$\leq C_{14}\left[\|A_0u_0\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\left\|\tau A_k^{1/2}f_k\right\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{0\leq s\leq k}\|f_s\|_H+\sum_{s=1}^{k-1}\|f_{s+1}-f_s\|_H\right] \tag{4.39}$$

yazılabilir; burada

$$C_{14}=2\left(C_{12}+C_{13}\right)e^{(C_{12}+C_{13})\tau k}$$

öyle ki

$$C_{12} = \max\left[\left(5+\frac{M_{1/2}}{2}\right)e^{M_1P_1}+\left(\frac{5M_1+M_{1/2}}{2}\right)e^{M_{3/2}P_{3/2}}, 6, \frac{3}{2}M_2,\right.$$

$$\left.\frac{3}{2}M_2e^{M_2P_2}, M_1\left(M_1+M_2\right)\left(2e^{M_1P_1}+M_1e^{M_{3/2}P_{3/2}}\right)\right]$$

$$C_{13} = \max\left[\left(3+\frac{M_{1/2}}{2}\right)e^{M_1P_1}+e^{M_2P_2}, 4e^{M_1P_1}, M_1\left(I+M_2\right)e^{M_1P_1}, 2M_2,\right.$$

$$\left.M_2e^{M_2P_2}, 2M_1e^{M_1P_1}\right].$$

Şimdi, $\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)\right\|_H$ için kestirim elde edilecektir. (4.4) kullanılarak her $k, 1\leq k\leq N-1$, için

$$\left\|\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}\right\|_H \leq \left\|A_ku_k\right\|_H+4^{-1}\left\|\tau^2A_k^2u_{k+1}\right\|_H+\left\|f_k\right\|_H$$

yazılabilir. (4.38) ve (4.39) kestirimleri ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}\right\|_H$$

$$\leq C_{15}\left[\left\|A_0u_0\right\|_H+\left\|A_0^{1/2}u_0'\right\|_H+\left\|\tau A_k^{1/2}f_k\right\|_H+\max_{0\leq s\leq k}\left\|f_s\right\|_H+\sum_{s=1}^{N-1}\left\|f_{s+1}-f_s\right\|_H\right]$$

elde edilir; burada

$$C_{15} = \max\left\{C_{14}+2^{-1}C_{11}\right\}.$$

Bu sonuç Teorem 4.2'nin ispatını tamamlar.

4.3 Uygulamalar

İlk olarak, bir boyutlu hiperbolik denklem için

$$\begin{cases} u_{tt}-\left(a\left(t,x\right)u_x\right)_x+\delta u=f\left(t,x\right), \ 0<t<T, \ \ 0\leq x\leq L, \\ u\left(0,x\right)=\varphi\left(x\right), \ u'\left(0,x\right)=\psi\left(x\right), \ 0\leq x\leq L, \\ u\left(t,0\right)=u\left(t,L\right), \ u_x\left(t,0\right)=u_x\left(t,L\right), \ 0\leq t\leq T \end{cases} \tag{4.40}$$

başlangıç-değer problemi ele alınacaktır. Eğer $a(t,x)\geq a>0$ $\left(t\in[0,T], \ x\in[0,L]\right)$, $\varphi\left(x\right)$ ve $\psi\left(x\right)$ $\left(x\in[0,L]\right)$, $f\left(t,x\right)$ $\left(t\in[0,T], \ x\in[0,L]\right)$ fonksiyonları tanım kümelerinde yeterince pürüzsüz ve $\delta > 0$ ise, bu durumda (4.40) probleminin çözümü vardır ve tektir. Bunun için, (4.40) problemi, $H = L_2[0,1]$ Hilbert uzayında öz-adjoint pozitif tanımlı $A(t)$ operatörlü (1.1) başlangıç değer problemine dönüştürülebilir.

Burada (4.40) probleminin ayrıklaştırılması iki adımda incelenir. Birinci adımda önce,

$$[0,L]_h = \{x : x_r = rh, 0 \le r \le M, Mh = L\}$$

ağ uzayı tanımlanır. Sonra $[0,L]_h$ aralığında tanımlanan $\varphi^h(x) = \{\varphi^n\}_1^{M-1}$ ağ fonksiyonları, $L_{2h} = L_2([0,L]_h)$ Hilbert uzayı olarak tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\| \varphi^h \|_{L_{2h}} = \left(\sum_{n=1}^{M-1} |\varphi^n|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülü ile ifade edilir. Daha sonra da, (4.40) problemi tarafından oluşturulan $A(t)$ diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x(t)\varphi^h(t,x) = \left\{ -\left(a(t,x)\, u_{\bar{x}} \right)_{x,n} + \delta u_n \right\}_1^{M-1} \tag{4.41}$$

formülüyle tanımlanan $A_h^x(t)$ fark operatörü alınır. Burada, $A_h^x(t)$ fark operatörü $\varphi^0(t) = \varphi^M(t)$, $\varphi^1(t) - \varphi^0(t) = \varphi^M(t) - \varphi^{M-1}(t)$ koşullarını sağlayan $\varphi^h(t,x) = \{\varphi^r(t)\}_0^M$ ağ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. $A_h^x(t)$ fark operatörünün yardımıyla (4.40) başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^h(t,x)}{dt^2} + A_h^x(t)u^h(t,x) = f^h(t,x), \ 0 \le t \le T, \ x \in [0,L]_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x), \ x \in [0,L]_h, \\ \frac{du^h(0,x)}{dt} = \psi^h(x), \ x \in [0,L]_h \end{cases} \tag{4.42}$$

adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda ise, (4.40) problemi için (4.4) fark şeması kullanılarak,

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^2}\left(u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)\right) + A_h^x(t_k)u_k^h + \frac{\tau^2}{4}\left(A_h^x(t_k)\right)^2 u_{k+1}^h = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k,x), \ t_k = k\tau, \ 1 \le k \le N-1, \ N\tau = T, \ x \in [0,L]_h, \\ \frac{1}{\tau}(u_1^h(x) - u_0^h(x)) + \tau A_h^x(0)(u_1^h(x) - u_0^h(x)) \\ = \frac{\tau}{2}(f_0^h(x) - A_h^x(0)u_0^h(x)) + \psi^h(x), x \in [0,L]_h \\ u_0^h = \varphi^h(x), \ x \in [0,L]_h \end{cases} \tag{4.43}$$

fark şeması elde edilir.

Teorem 4.3. τ ve h yeterince küçük sayılar olsun. Bu durumda (4.43) fark şemasının çözümü için

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-1}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}\le M\left[\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\varphi_x^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}}\right],$$

$$\begin{aligned}&\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}\\ &\le M\left[\left\|\psi_{\bar{x}}^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left(\varphi_{\bar{x}}^h\right)_x\right\|_{L_{2h}}+\left\|\tau\left(f_k^h\right)_x\right\|_{L_{2h}}\right.\\ &\left.+\left\|f_0^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|\tau^{-1}\left(f_k^h-f_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}\right]\end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri geçerlidir; burada M katsayısı, τ, h, f_k^h $(0\le k\le N-1)$, ψ^h ve φ^h'den bağımsızdır.

Teorem 4.3'ün ispatı, soyut Teorem 4.1 ve (4.41) formülü ile tanımlanan $A_h^x(t)$ fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak çok boyutlu hiperbolik denklem için

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2}-\sum\limits_{r=1}^{n}(a_r(t,x)u_{x_r})_{x_r}=f(t,x),\\ x=(x_1,...,x_n)\in\Omega,\ 0<t<T,\\ u(0,x)=\varphi(x),\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\psi(x),\ x\in\overline{\Omega},\\ u(t,x)=0,\ x\in S\end{cases}\tag{4.44}$$

başlagıç değer problemi ele alınacaktır; burada Ω, $\mathbb{R}^n$ $n-$ boyutlu Euclid uzayında S sınır kümesine sahip açık bir küptür yani $\Omega=\{x=(x_1,\cdot\cdot\cdot,x_n):(0<x_j<1,1\le j\le n)\}$; $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$; ayrıca $a_r(t,x)$ $(x\in\Omega)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)$ $(t\in(0,T),\ x\in\Omega)$ verilen düzgün fonksiyonlardır ve $a_r(t,x)\ge a>0$.

Burada da (4.44) probleminin ayrıklaştırılması iki adımda incelenir. Birinci adımdan önce,

$$\bar{\Omega}_h=\{x=x_j=(h_1j_1,\cdot\cdot\cdot,h_nj_n),j=(j_1,\cdot\cdot\cdot,j_n),0\le j_r\le M_r,$$

$$h_rM_r=1,\ r=1,\cdot\cdot\cdot,n\},\ \Omega_h=\bar{\Omega}_h\cap\Omega,\ S_h=\bar{\Omega}_h\cap S$$

ağ uzayı tanımlanır. Sonra $\overline{\Omega}_h$ kümesinde tanımlanan $\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1m_1, \cdot\cdot\cdot, h_nm_n)\}$ ağ fonksiyonları, $L_{2h} = L_2\left(\overline{\Omega}_h\right)$ Banach uzayı olarak tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\| \varphi^h \|_{L_{2h}(\bar{\Omega}_h)} = \left(\sum_{x\in\overline{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

formülüyle ifade edilir. Daha sonra da, (4.44) problemi tarafından oluşturulan $A(t)$ diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x(t)u^h(t,x) = -\sum_{r=1}^{n} \left(a_r(t,x) u^h_{\bar{x}_r} \right)_{x_r, j_r} \tag{4.45}$$

formülüyle tanımlanan $A_h^x(t)$ fark operatörü alınır. Burada, $A_h^x(t)$ fark operatörü $\forall x \in S_h$ değerleri için $u^h(t,x) = 0$ koşullarını sağlayan $u^h(t,x)$ ağ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. $A_h^x(t)$ fark operatörünün yardımıyla (4.44) başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \frac{d^2u^h(t,x)}{dt^2} + A_h^x(t)u^h(t,x) = f^h(t,x), \ 0 \le t \le T, \ x \in \Omega_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x), \ x \in \bar{\Omega}_h \\ \frac{du^h(0,x)}{dt} = \psi^h(x), \ x \in \bar{\Omega} \end{cases} \tag{4.46}$$

adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda ise, (4.46) problemi için (4.4) fark şeması kullanılarak,

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^2}\left(u^h_{k+1}(x) - 2u^h_k(x) + u^h_{k-1}(x)\right) + A_h^x(t_k)u_k^h + \frac{\tau}{4}\left(A_h^x(t_k)\right)^2 u^h_{k+1} \\ = f_k^h(x), \ f_k^h(x) = f^h(t_k, x), \\ t_k = k\tau, \ 1 \le k \le N-1, \ N\tau = T, \ x \in \Omega_h, \\ u_0^h = \varphi^h, \ \varphi^h = \varphi^h(x), \ x \in \bar{\Omega}_h, \\ \frac{1}{\tau}(u_1^h(x) - u_0^h(x)) + \tau A_h^x(0)(u_1^h(x) - u_0^h(x)) \\ = \frac{\tau}{2}(f_0^h(x) - A_h^x(0)u_0^h(x)) + \psi^h(x), x \in \bar{\Omega}_h. \end{cases} \tag{4.47}$$

fark şeması elde edilir.

Teorem 4.4. τ ve h yeterince küçük sayılar olsun. Bu durumda (4.47) fark şemasının çözümü için

$$\max_{1\le k\le N-1} \left\|\tau^{-1}\left(u_k^h - u_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}} \le M\left[\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}} + \sum_{r=1}^{n}\left\|\varphi^h_{\bar{x}_r, j_r}\right\|_{L_{2h}} + \max_{1\le k\le N-1}\left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}}\right],$$

$$\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}^{h}-2u_{k}^{h}+u_{k-1}^{h}\right)\right\|_{L_{2h}}$$
$$\leq M\left[\sum_{r=1}^{n}\left\|\psi_{\bar{x}_r,j_r}^{h}\right\|_{L_{2h}}+\sum_{r=1}^{n}\left\|\varphi_{x_r\bar{x}_r,j_r}^{h}\right\|_{L_{2h}}+\sum_{r=1}^{n}\left\|\tau\left(f_{k}^{h}\right)_{x_r,j_r}\right\|_{L_{2h}}\right.$$
$$\left.+\left\|f_{0}^{h}\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-1}\left(f_{k}^{h}-f_{k-1}^{h}\right)\right\|_{L_{2h}}\right]$$

kararlılık kestirimleri geçerlidir; burada M katsayısı, τ, h, f_{k}^{h} $(0\leq k\leq N-1)$, ψ^{h} ve φ^{h}'den bağımsızdır.

Teorem 4.4'ün ispatı, soyut Teorem 4.2 ve (4.45) formülü ile tanımlanan $A_{h}^{x}(t)$ fark operatörünün simetri özelliklerine ve Teorem 3.5'e dayanmaktadır.

5 SAYISAL SONUÇLAR

Elde edilen kararlılık eşitsizliklerindeki sabit katsayılar için net bir kestirim elde edilememektedir. Bu nedenle hiperbolik denklem için aşağıdaki başlangıç değer problemi ele alınmıştır:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - g(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x), \quad 0 < t < 1, \ 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = \varphi(x), \ u_t(0,x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ 0 \le t \le 1, \\ g(t,x) = t + x, \ f(t,x) = (1+t+x)\exp(-t)\sin x, \\ \varphi(x) = \sin x, \ \psi(x) = -\sin x. \end{cases} \tag{5.1}$$

Bu problemin tam çözümü

$$u\,(t,x) = \exp(-t)\sin x$$

şeklindedir.

Buradaki (5.1) sınır değer probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılmıştır. İkinci mertebeden, katsayıları matris olan, k' ya göre fark denklemleri elde edilmiştir. Bu fark denklemlerini çözmek için tekrarlı yöntem kullanılmıştır. Sayısal denemelerin sonucu olarak ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarına oranla daha doğru olduğu gösterilmiştir.

5.1 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması

Burada birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (1.2) uygulanarak (5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - g(t_{k+1}, x_n)\frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} = f(t_k, x_n), \\ t_k = k\tau, \ x_n = nh, 1 \le k \le N-1, 1 \le n \le M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), \ x_n = nh, \ 0 \le n \le M, \\ \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi(x_n), \ x_n = nh, \ 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 0 \le k \le N \end{cases} \tag{5.2}$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kurulur. Böylece, $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa,

$$\begin{cases} A^k\, U^{k+1} + BU^k + C\, U^{k-1} = D\vartheta^k, \quad 1 \le k \le N-1, \\ U^0 = \varphi, U^1 = (1-\tau)U^0, \;\; 0 \le n \le M, \end{cases} \tag{5.3}$$

elde edilir. Burada,

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1^{k+1} & b_1^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{k+1} & b_2^{k+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{M-2}^{k+1} & a_{M-2}^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M-1}^{k+1} & b_{M-1}^{k+1} & a_{M-1}^{k+1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$U^s = \begin{bmatrix} U_0^s \\ U_1^s \\ \vdots \\ U_M^s \end{bmatrix}_{(M+1)\times(1)}, \quad s = \ k \pm 1, k \text{ için.}$$

Ayrıca,

$$a_n^{k+1} = -\frac{t_{k+1}+x_n}{h^2}, b_n^{k+1} = \frac{1}{\tau^2} + \frac{t_{k+1}+x_n}{h^2}, \ 0 \leq k \leq N-1, 0 \leq n \leq M,$$

$$c = -\frac{2}{\tau^2}, \ d = \frac{1}{\tau^2}, e = \frac{1}{\tau},$$

$$f^k = \begin{cases} 0, \ \ n = 0, \\ f(t_k, x_n), \ 1 \leq n \leq M-1, \\ 0, \ \ n = M, \end{cases}, \varphi = \begin{bmatrix} \sin x_0 \\ \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_M \end{bmatrix}_{(M+1)\times 1}.$$

Dolayısıyla, katsayıları matris olan, k' ya göre ikinci mertebeden fark denklemleri elde edilmiş olur. Bu fark denklemlerini çözmek için

$$\begin{cases} U^{k+1} = \left(A^k\right)^{-1} D\vartheta^k - \left(A^k\right)^{-1} BU^k - \left(A^k\right)^{-1} CU^{k-1}, \\ k = 1, 2, \cdots, N-1, \\ U^0 = \varphi, \ U^1 = (1-\tau)\varphi, \qquad 0 \leq n \leq M \end{cases}$$

iteratif yöntemi kullanılır. Farklı N ve M değerleri verildiğinde, (5.1) probleminin sayısal çözümlerini yukarıdaki yöntem ile bulan bir matlab programı Ek 1 kısmında verilmiştir. Sonuçlar Bölüm 5.3'de sunulmuştur.

5.2 İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemaları

İlk olarak, ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması (3.3) uygulanarak, (5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2} - g(t_k, x_n)\left(\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{2h^2} + \frac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{4h^2}\right. \\ \left.+\frac{u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1}}{4h^2}\right) = f(t_k, x_n), \ x_n = nh, \ t_k = k\tau, \\ 1 \leq k \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1, \\ u_n^0 = \varphi(x_n), x_n = nh, \ 0 \leq n \leq M, \\ \frac{u_n^1-u_n^0}{\tau} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{u_{n+1}^1-2u_n^1+u_{n-1}^1}{h^2} + f(0, x_n)\right) + \psi(x_n), \\ x_n = nh, \ 1 \leq n \leq M-1, u_0^k = u_M^k = 0, \ 0 \leq k \leq N \end{cases} \tag{5.4}$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kurulur. Böylece, yine $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa,

$$\begin{cases} A^k\, U^{k+1} + B^k U^k + C^k\, U^{k-1} = D\vartheta^k, \quad 1 \le k \le N-1, \\ U^0 = \varphi, EU^1 = vU^0 + \gamma, \;\; 0 \le n \le M \end{cases} \tag{5.5}$$

elde edilir. Burada

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1^k & b_1^k & a_1^k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^k & b_2^k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{M-2}^k & a_{M-2}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M-1}^k & b_{M-1}^k & a_{M-1}^k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$B^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_1^k & d_1^k & c_1^k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^k & d_2^k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{M-2}^k & c_{M-2}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{M-1}^k & d_{M-1}^k & c_{M-1}^k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$C^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^k & b_1^k & a_1^k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^k & b_2^k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{M-2}^k & a_{M-2}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M-1}^k & b_{M-1}^k & a_{M-1}^k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ j_1 & p_1 & j_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_2 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & j_{M-2} & p_{M-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & j_{M-1} & p_{M-1} & j_{M-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)}.$$

Ayrıca,

$$a_n^k = -\frac{t_k + x_n}{4h^2},\ b_n^k = \frac{1}{\tau^2} + \frac{t_k + x_n}{2h^2},\ c_n^k = -\frac{t_k + x_n}{2h^2},\ d_n^k = -\frac{2}{\tau^2} + \frac{t_k + x_n}{h^2},$$

$$j_n = -\frac{\tau x_n}{2h^2},\ p_n = \frac{1}{\tau^2} + \frac{\tau x_n}{h^2}, v = \frac{1}{\tau},\ 0 \le k \le N,\ 0 \le n \le M,$$

$$f^k = \begin{cases} 0,\ \ n = 0, \\ f(t_k, x_n),\ 1 \le n \le M-1, \\ 0,\ n = M, \end{cases},\ \varphi = \begin{bmatrix} \sin x_0 \\ \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_M \end{bmatrix}_{(M+1)\times 1}, \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{bmatrix}_{(M+1)\times 1}$$

$$\gamma_n = (-1 + \frac{\tau}{2}(1 + x_n))\sin(x_n),\ 0 \le n \le M.$$

Dolayısıyla gene katsayıları matris olan, k' ya göre ikinci mertebeden fark denklemleri elde edilmiş olur. Bu fark denklemlerini çözmek için

$$\begin{cases} U^{k+1} = \left(A^k\right)^{-1} D\vartheta^k - \left(A^k\right)^{-1} B^k U^k - \left(A^k\right)^{-1} C^k U^{k-1}, \\ k = 1, 2, \cdots, N-1, \\ U^0 = \varphi,\ U^1 = E^{-1} v U^0 + E^{-1}\gamma, \qquad 0 \le n \le M \end{cases}$$

tekrarlı yöntem kullanılır. Farklı N ve M değerleri verildiğinde, (5.1) probleminin sayısal çözümlerini yukarıdaki yöntem ile bulan bir matlab programı Ek 2 kısmında verilmiştir. Sonuçlar Bölüm 5.3'de sunulmuştur.

İkinci olarak, ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması (4.4) ve

$$\frac{2u(0)-5u(h)+4u(2h)-u(3h)}{h^2}-u''(0)=O(h^2),$$

$$\frac{2u(\pi)-5u(\pi-h)+4u(\pi-2h)-u(\pi-3h)}{h^2}-u''(\pi)=O(h^2),$$

formülleri uygulanarak, (5.1) probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-g(t_k,x_n)\left(\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{2h^2}\right) \\ -g(t_{k+1},x_n)\tau^2\left(\frac{u_{n-2}^{k+1}-4u_{n-1}^{k+1}+6u_n^{k+1}-4u_{n+1}^{k+1}+u_{n+2}^{k+1}}{4h^4}\right)=f(t_k,x_n), \\ x_n=nh,\ t_k=k\tau, 1\le k\le N-1, 1\le n\le M-1, \\ u_n^0=\varphi(x_n), x_n=nh,\ 0\le n\le M, \\ \frac{u_n^1-u_n^0}{\tau}=\frac{\tau}{2}\left(\frac{u_{n+1}^1-2u_n^1+u_{n-1}^1}{h^2}+f(0,x_n)\right)+\psi(x_n), \\ x_n=nh,\ 1\le n\le M-1, \\ u_0^k=u_M^k=0,\ 0\le k\le N \end{cases} \tag{5.6}$$

ikinci basamaktan fark şeması kurulur. Böylece, yine $(M+1)\times(M+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa,

$$\begin{cases} A^k\,U^{k+1}+B^kU^k+CU^{k-1}=D\vartheta^k, \quad 1\le k\le N-1, \\ U^0=\varphi, EU^1=vU^0+\gamma,\ \ 0\le n\le M \end{cases} \tag{5.7}$$

elde edilir. Burada

$$A^k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & -5 & 0 \\ a_2^k & b_2^k & c_2^k & b_2^k & a_2^k & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^k & b_3^k & c_3^k & b_3^k & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{M-3}^k & c_{M-3}^k & b_{M-3}^k & a_{M-3}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M-2}^k & b_{M-2}^k & c_{M-2}^k & b_{M-2}^k & a_{M-2}^k \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$B^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2^k & f_2^k & d_2^k & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3^k & f_3^k & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{M-3}^k & f_{M-3}^k & d_{M-3}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{M-2}^k & f_{M-2}^k & d_{M-2}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ j_1 & p_1 & j_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_2 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & j_{M-2} & p_{M-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & j_{M-1} & p_{M-1} & j_{M-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(M+1)\times(M+1)}.$$

Ayrıca,

$$a_n^k = -\frac{\tau^2\left(t_k+x_n\right)}{4h^4},\ b_n^k = \frac{\tau^2\left(t_k+x_n\right)}{h^4},\ c_n^k = \frac{1}{\tau^2} - \frac{6\tau^2\left(t_k+x_n\right)}{4h^4},\ d_n^k = -\frac{t_k+x_n}{h^2},$$

$$f_n^k = -\frac{2}{\tau^2} + \frac{2\left(t_k+x_n\right)}{h^2},\ j_n = -\frac{\tau x_n}{2h^2},\ p_n = \frac{1}{\tau^2} + \frac{\tau x_n}{h^2},$$

$$e = \frac{1}{\tau^2}, v = \frac{1}{\tau},\ 0 \leq k \leq N,\ 0 \leq n \leq M,$$

$$f^k = \begin{cases} 0,\ \ n=0, \\ f(t_k, x_n),\ 1 \leq n \leq M-1, \\ 0,\ n=M, \end{cases},\ \varphi = \begin{bmatrix} \sin x_0 \\ \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_M \end{bmatrix}_{(M+1)\times 1},\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{bmatrix}_{(M+1)\times 1}$$

$$\gamma_n = (-1 + \frac{\tau}{2}(1+x_n))\sin(x_n),\ 0 \leq n \leq M.$$

Dolayısıyla yine katsayıları matris olan, k' ya göre ikinci mertebeden fark denklemleri elde edilmiş olur. Bu fark denklemlerini çözmek için

$$\begin{cases} U^{k+1} = \left(A^k\right)^{-1} D\vartheta^k - \left(A^k\right)^{-1} B^k U^k - \left(A^k\right)^{-1} C^k U^{k-1}, \\ k = 1, 2, \cdots, N-1, \\ U^0 = \varphi,\ U^1 = E^{-1} v U^0 + E^{-1}\gamma, \qquad 0 \leq n \leq M \end{cases}$$

tekrarlı yöntem kullanılır. Farklı N ve M değerleri verildiğinde, (5.1) probleminin sayısal çözümlerini yukarıdaki yöntem ile bulan bir matlab programı Ek 3 kısmında verilmiştir. Sonuçlar bir sonraki bölümde sunulmuştur.

5.3 Hata Analizi

(5.1) probleminin tam ve yaklaşık çözümleri için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılmıştır. (5.1) probleminin tam ve yaklaşık çözümleri verilmiştir. Şekillerde, Şekil 5.1-5.4'de farklı yaklaşık çözümlerin kendi aralarındaki ve bunların tam çözümle arasındaki farklar gözle görülür düzeyde değildir. Bunun için hata analizi de yapılmıştır.

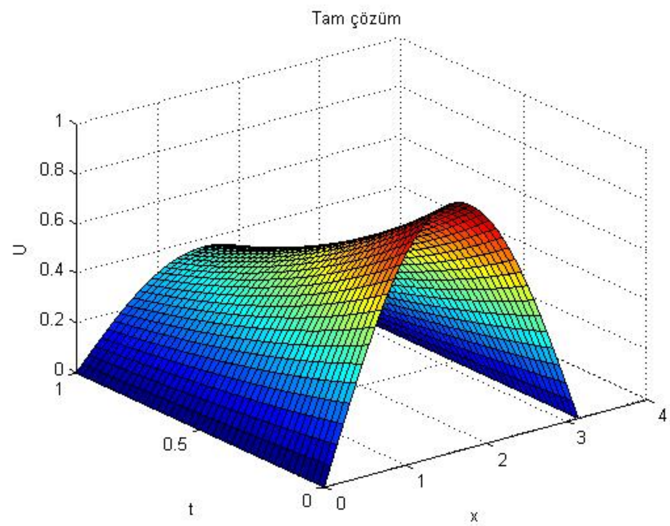

Figure 1: Şekil 5.1. Tam çözüm

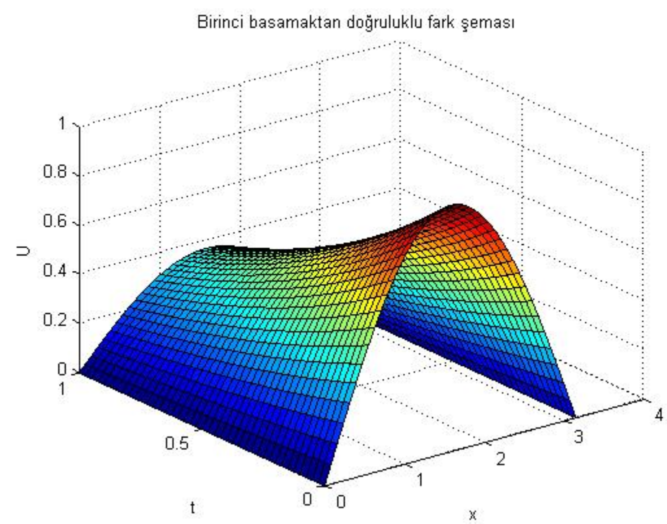

Figure 2: Şekil 5.2. Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (1.2) ile sayısal çözüm

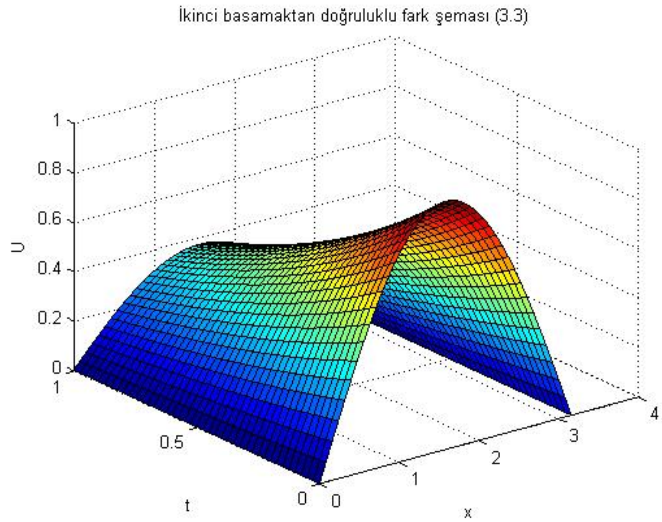

Figure 3: Şekil 5.3. İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (3.3) ile sayısal çözüm

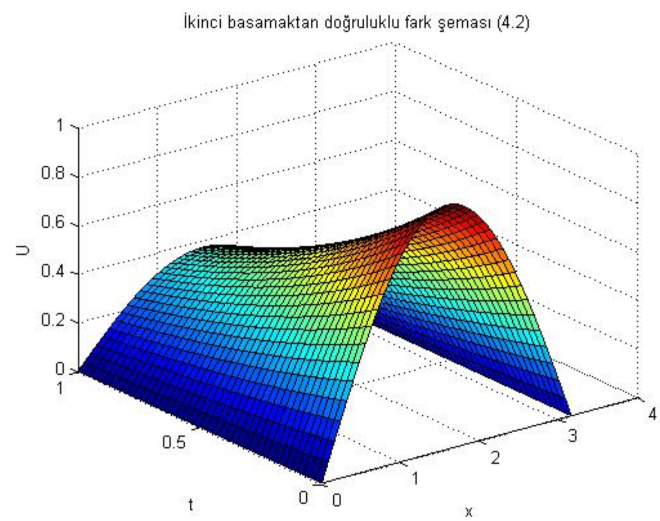

Figure 4: Şekil 5.4. İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (4.4) ile sayısal çözüm

Sonuçların karşılaştırılması için hatalar

$$E_M^N = \max_{1 \le k \le N-1} \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left| u(t_k, x_n) - u_n^k \right|^2 h \right)^{1/2}$$

formulüyle hesaplanmıştır. Burada $u(t_k, x_n)$, (5.1) probleminin gerçek çözümünü ve u_n^k da (t_k, x_n) noktasında sayısal çözümü temsil etmektedir. Sonuçlar aşağıdaki tablo da gösterilmiştir.

Tablo 5.1. $N = M = 30$ değerleri için farklı fark şemalarının hatalarının karşılaştırılması.

Fark Şemaları	E_M^N
Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (1.2)	0.0074
İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (3.3)	0.0012
İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (4.4)	0.0017

Tablo 5.2. $N = 30$ ve $M = 100$ değerleri için farklı fark şemalarının hatalarının karşılaştırılması.

Fark Şemaları	E_M^N
Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (1.2)	0.0076
İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (3.3)	0.0006
İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (4.4)	0.0008

Tablo 5.3. $N = M = 100$ değerleri için farklı fark şemalarının hatalarının karşılaştırılması.

Fark Şemaları	E_M^N
Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (1.2)	0.0023
İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (3.3)	0.0001
İkinci basamaktan doğruluklu fark şeması (4.4)	0.0001

Tablolardan da açık bir şekilde görüldüğü gibi, ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları yöntemi birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına kıyasla gerçek çözümlere daha yakın sonuçlar vermektedir. Ayrıca N ve M arttıkça hatalar azalmaktadır.

6 SONUÇLAR

Bu çalışmanın esas amacı hiperbolik denklemler için kurulan iki adımlı ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının kararlılık kestirimlerini elde etmektir. Yapılan bu çalışmanın sonucunda aşağıdaki orijinal sonuçlar elde edilmiştir:

- Soyut (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için, $A^{1/2}(t)$ operatörü tarafından oluşturulan, ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması

$$\begin{cases} \tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)=\left[A_{k+1}^{1/2}+\frac{\tau}{2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'\right]\Big\{-A_{k+1}^{1/2}u_{k+1} \\ +\left[\frac{\tau}{2}A_{k+1}-\frac{1}{2}A_{k+1}^{-1/2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'\right]A_{k+3/2}^{-1/2}\left[\tau^{-1}\left(u_{k+1}-u_k\right)\right. \\ \left.-\frac{\tau}{2}A_{k+1}u_{k+1}+\frac{\tau}{2}f_{k+1}\right]+A_{k+1}^{-1/2}f_{k+1}\Big\} \\ -\Big\{\left[A_{k+1}^{1/2}+\frac{\tau}{2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'\right]A_{k+1}^{-1/2}\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'A_{k+1/2}^{-1/2} \\ -\tau^{-1}\left[\left(A_{k+1}^{1/2}-A_k^{1/2}\right)+\frac{\tau}{2}\left(\left(A_{k+1}^{1/2}\right)'-\left(A_k^{1/2}\right)'\right)\right]\Big\}A_{k+1/2}^{-1/2} \\ \times\left[\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)-\frac{\tau}{2}A_ku_k+\frac{\tau}{2}f_k\right] \\ +2^{-1}\left(A_{k+1}u_{k+1}-A_ku_k\right)-2^{-1}\left(f_{k+1}-f_k\right), \\ 1\le k\le N-1,\quad u_0=u(0), \\ \tau^{-1}(u_1-u_0)+\frac{\tau}{2}A_{1/2}2^{-1}(u_1+u_0)+\frac{\tau}{2}\left(A_{1/2}^{1/2}\right)'A_{1/2}^{-1/2}\tau^{-1}(u_1-u_0) \\ =\frac{\tau}{2}f_1+A_{1/2}^{1/2}A_{1/2}^{-1/2}u_0'. \end{cases} \tag{6.1}$$

  kurulmuştur.

- Soyut (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için, tamsayı kuvvetli olan bir $A(t)$ operatörü tarafından oluşturulan, ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+\frac{1}{2}A_ku_k+\frac{1}{4}A_k\left(u_{k+1}+u_{k-1}\right)=f_k, \\ A_k=A\left(t_k\right), f_k=f(t_k), t_k=k\tau, 1\le k\le N-1,\ N\tau=T, \\ (I+\tau^2A_0)\tau^{-1}(u_1-u_0)=\frac{\tau}{2}(f_0-A_0u_0)+\psi, f_0=f(0),\ u_0=\varphi \end{cases} \tag{6.2}$$

  kurulmuştur.

- Soyut (1.1) başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için, tamsayı kuvvetli olan bir $A^2(t)$ operatörü tarafından oluşturulan, ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması

$$\begin{cases} \frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2} + A_k u_k + \frac{\tau^2}{4} A_k^2 u_{k+1} = f_k, \\ A_k = A\left(t_k\right), f_k = f(t_k), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1,\ N\tau = T, \\ (I+\tau^2 A_0)\tau^{-1}(u_1 - u_0) = \frac{\tau}{2}(f_0 \ - A_0 u_0) + \psi, f_0 \ = \ f(0),\ u_0 = \varphi \end{cases} \tag{6.3}$$

kurulmuştur.

- (6.1) fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.
- (6.2) ve (6.3) fark şemalarının çözümlerinin kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.
- (6.2) ve (6.3) fark şemalarının çözümlerinin kararlı oldukları sayısal örneklerle desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Sobolevskii, P. E. ve Pogorelenko, V. A., “Hyperbolic equations in Hilbert space”, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal., 1 (8) 123-145, (1967).

2. Sobolevskii, P. E. ve Chebotaryeva, L. M., “Approximate solution of the Cauchy problem for an abstract hyperbolic equation by the method of lines”, Izv. Vyssh.Uchebn. Zav. Mat.,5 (180) 103-116 (Russian), (1977).

3. Ashyralyev, A. ve Muradov, I., “On one difference scheme of a second order of accuracy for hyperbolic equations”, Proceeding of the IMM of AS of Turkmenistan, (3) 58-63 (Russian), (1995).

4. Mohanty, R. K., Jain, M. K. ve George, K., “High Order Difference Schemes for the system of two Space Second Order Nonlinear Hyperbolic Equations with Variable Coefficients ”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 70 (2) 231-243, (1996).

5. Ashyralyev, A. ve Muradov, I., “On Difference Schemes a Second Order of Accuracy for Hyperbolic Equations”, Modelling Prosesy Explotassi Gazovix Mestorojdeniya i Prikladnyye Problemy Teoreticheskix Gazodinamiki, 127-138, (1998).

6. Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., “A note on the difference schemes for hyperbolic equations”, Abstract and Applied Analysis, 2 (6) 63-70, (2001).

7. Samarskii, A. A., Gavrilyuk, I. P. ve Makarov, V. L., “Stability and regularization of three-level difference schemes with unbounded operator coefficients in Banach spaces”, SIAM Journal on Numerical Analysis, 39 (2) 709-723, (2001).

8. Kiguradze, T. ve Lakshmikantham, V., “On the Dirichlet Problem in a Characteristic Rectangle for Higher Order Linear Hyperbolic Equations”, Nonlinear Analysis, 50 1153-1178, (2002).

9. Mohanthy, R. K., "An Unconditionally Stable Difference Scheme for the One-Space-Dimensional Linear Hyperbolic Equation", Applied Mathematics Letters, 17 101-105, (2004).

10. Ashyralyev, A. ve Aggez, N., "A Note on the Difference Schemes of the Nonlocal Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations", Numerical Functional Analysis and Optimization, 25 (5-6) 1-24, (2004).

11. Ashyralyev, A. ve Yurtsever, A., "On Difference Schemes for Hyperbolic-Parabolic Equations", Dynamical Systems and Applications, Proceedings, 136-153, (2004).

12. Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., "Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations", Discrete Dynamics in Nature and Society, 2 (2) 183-213, (2005).

13. Mohanthy, R. K., "An Operator Splitting Technique for an Unconditionally Stable Difference Method for a Linear Three Space Dimensional Hyperbolic Equation with Variable Coefficient", Applied Mathematics and Computation, 162 (2) 549-557, (2005).

14. Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., "On the Second Order of Accuracy Difference Scheme for Hyperbolic Equations in a Hilbert Space", Numerical Functional Analysis & Optimization, 26 (7-8) 739-772, (2005).

15. Li, W., Sun, Z., ve Zhao, L., "An analysis for a high-order difference scheme for numerical solution to $u_{tt} = A(t,x)u_{xx} + F(t,x,u,u_t,u_x)$" Numerical Methods for Partial Differential Equations, 50 1143-1476, (2005).

16. Ashyralyev, A. ve Ozdemir, Y., "A note on the nonlocal boundary value problem for hyperbolic-parabolic equations", Functional Differential Equations, 12 (1-2) 67-81, (2005).

17. Krein, S. G., “Linear Differential Equations in a Banach Space”, Moscow: Nauka, (Russian), (1966).

18. Fattorini, H. O., “Second Order Linear Differential Equations in Banach

Spaces”, Notas de Matematica, North-Holland, (1985).Piskarev, S., “Approximation of holomorphic semigroups”, Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 3-15, (1989).

19. Piskarev, S., “Stability of difference schemes in Cauchy problems with almost periodic solutions”, Differentsial'nye Uravneyia, 689-695, (1984).

20. Piskarev, S., “Principles of discretization methods III. Report”, Acoustic Institute, Academy of Science USSR, 87, (1986).

21. Piskarev, S., ”Approximation of holomorphic semigroups”, Tartu Riikl. Ul. Toimetised, 3-15, (1989).

22. Ashyralyev, A., “Difference schemes of the high order of accuracy for second order evalution equations”, Functional-Differential Equations, pp. 145-150 (Russian), (1989).

23. Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P. E., New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin , 2004.

24. Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., ”On the Numerical Solution of Hyperbolic PDEs with Variable Space Operator”, Numerical Methods for Partial Differential Equations, doi 10.1002/num.20388, (2008).

25. Daletskii, Y. L., “Path integrals associated with the operator evolution equations”, Usp. Matem. Nauk., 17 (5) 3-115, (1958)

26. Sobolevskii, P.E., "The correct solvability in C of elliptic and parabolic difference boundary value problems", Voronezh. Gos. Univ. Trudy Nauchn.-Issled. Inst. Mat., (17) 94-95, (1975).

EKLER

Ek 1. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması için Matlab Programı

```
function ftx
N=30; M=30;
x=linspace(0,pi,M+1);
t=linspace(0,1,N+1);
h=pi/M; tau=1/N;
d=-2/(tau^2);
e=1/(tau^2);
U(:,1)=sin(x);
U(:,2)=(1-tau)*(sin(x));
for k=2:N;
for n=2:M+1;
A(n,n-1)=-g(t(k+1),x(n))/(h^2)+y(t(k+1))/(2*h);
A(n,n)=1/(tau^2)+2*g(t(k+1), x(n))/(h^2);
A(n,n+1)=-g(t(k+1),x(n))/(h^2)-y(t(k+1))/(2*h);
B(n,n)=d; C(n,n)=e;
fii(n,k-1)=ff(t(k), x(n));
end;
A(1,M+1)=1; A(M+1,1)=1;
B(M+1,M+1)=0; C(M+1,M+1)=0;
fii(1,k-1)=0;fii(M+1,k-1)=0;
U(:,k+1)=inv(A)*(-B*U(:,k)-C*U(:,k-1)+fii(:,k-1));
end;
```

```
U
%%%%%%%%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' %%%%%%%%
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(n-1)*h;
es(n, k:k)=(exp(-t))*sin(x);
end;
end;
es
%%%%%%%%%%% END EXACT SOLUTION %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%% ERROR ANALYSIS %%%%%%%%%%%%%
for n=1:M-1;
for k=1:N-1;
f(n, k)=U(n+1, k+1)-es(n+1, k+1);
end;
end;
fmat1=abs(f);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror=max(fmat4)
%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%
U;
es;
```

```
[xler,tler]=meshgrid(0:tau:1, 0:h:pi);
table=[es;U]; table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=U;
q=min(min(table));
w=max(max(table));
figure;
surf(tler,xler,es);
title('EXACT SOLUTION'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
figure; surf(tler,xler,U);
title('EULER-ROTHER'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d ;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
%%%%%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%%%
function u=g(t,x);
u=(t+x);
function u=y(t);
u=0*(1+t);
function u=ff(t,x);
u=(1+t+x)*(exp(-t))*(sin(x));
```

Ek 2. İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması (3.3) için Matlab Programı

```
function stx
N=30; M=30;
```

```
x=linspace(0,pi,M+1);
t=linspace(0,1,N+1);
h=pi/M; tau=1/N;
U(:,1)=sin(x);
for k=2:N;
for n=2:M;
A(n,n-1)=-g(t(k),x(n))/(4*(h^2));
A(n,n)=1/(tau^2)+g(t(k), x(n))/(2*(h^2));
A(n,n+1)=-g(t(k),x(n))/(4*(h^2));
B(n,n-1)=-g(t(k),x(n))/(2*(h^2));
B(n,n)=-2/(tau^2)+g(t(k), x(n))/(h^2);
B(n,n+1)=-g(t(k),x(n))/(2*(h^2));
D(n,n-1)=-tau/(2*(h^2))*x(n);
D(n,n)=1/tau+tau*x(n)/(h^2);
D(n,n+1)=-tau/(2*(h^2))*x(n);
fii(n,k-1)=ff(t(k), x(n));
ro(n,1)=(-1+(tau/2)*(1+x(n)))*sin(x(n));
end;
A(1,M+1)=1; A(M+1,1)=1;
B(M+1,M+1)=0; C=A; C(1,M+1)=0; C(M+1,1)=0;
D(1,M+1)=1; D(M+1,1)=1;
D;
fii(1,k-1)=0; fii(M+1,k-1)=0;
ro(1,1)=0; ro(M+1,1)=0;
ro;
```

```
U(:,1);
U(:,2)=inv(D)*(1/tau)*U(:,1)+inv(D)*ro(:,1);
U(:,k+1)=inv(A)*(-B*U(:,k)-C*U(:,k-1)+fii(:,k-1));
end;
%%%%%%%%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' %%%%%%
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(n-1)*h;
es(n, k:k)=(exp(-t))*sin(x);
end;
end;
%%%%%%%%%%%%% END EXACT SOLUTION %%%%%%
%%%%%%%%%%%% ERROR ANALYSIS %%%%%%%%%%
for n=1:M-1;
for k=1:N-1;
f(n, k)=U(n+1, k+1)-es(n+1, k+1);
end;
end;
fmat1=abs(f);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror=max(fmat4)
%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%
```

```
U;
es;
[xler,tler]=meshgrid(0:tau:1, 0:h:pi);
table=[es;U]; table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=U;
q=min(min(table));
w=max(max(table));
figure;
surf(tler,xler,es);
title('EXACT SOLUTION'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
figure; surf(tler,xler,U);
title('EULER-ROTHER'); set(gca,'ZLim',[q w]);
rotate3d ;
XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
%%%%%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%%%%
function u=g(t,x);
u=(t+x);
function u=ff(t,x);
u=(1+t+x)*(exp(-t))*(sin(x));
```

Ek 3. İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması (4.2) için Matlab Programı

```
function den
N=40; M=40;
```

```
x=linspace(0,pi,M+1);
t=linspace(0,1,N+1);
h=pi/M; tau=1/N;
U(:,1)=sin(x);
for k=2:N;
for n=3:M-1;
A(n,n-2)=(-g(t(k),x(n))*(tau^2))/(4*(h^4));
A(n,n-1)=(g(t(k),x(n))*(tau^2))/((h^4));
A(n,n)=1/(tau^2)-(g(t(k), x(n))*(tau^2)*6)/(4*(h^4));
A(n,n+1)=(g(t(k),x(n))*(tau^2))/((h^4));
A(n,n+2)=(-g(t(k),x(n))*(tau^2))/(4*(h^4));
B(n,n-1)=-g(t(k),x(n))/((h^2));
B(n,n)=-2/(tau^2)+2*g(t(k), x(n))/(h^2);
B(n,n+1)=-g(t(k),x(n))/((h^2));
C(n,n)=1/(tau^2);
end;
for i=2:M;
D(i,i-1)=-tau/(2*(h^2))*x(i);
D(i,i)=1/tau+tau*x(i)/(h^2);
D(i,i+1)=-tau/(2*(h^2))*x(i);
end;
for q=3:M-1;
fii(q,k-1)=ff(t(k), x(q));
end;
for w=2:M;
```

```
ro(w,1)=(-1+(tau/2)*(1+x(w)))*sin(x(w));
end;
A(1,M+1)=1; A(2,2)=-5; A(2,3)=4; A(2,4)=-1;
A(M+1,1)=1; A(M,M)=-5; A(M,M-1)=4; A(M,M-2)=-1;
B(M+1,M+1)=0;
C(M+1,M+1)=0;
D(1,M+1)=1; D(M+1,1)=1;
fii(1,k-1)=0; fii(M+1,k-1)=0;
ro(1,1)=0; ro(M+1,1)=0;
ro;
U(:,1);
U(:,2)=inv(D)*(1/tau)*U(:,1)+inv(D)*ro(:,1);
U(:,k+1)=inv(A)*(-B*U(:,k)-C*U(:,k-1)+fii(:,k-1));
end;
%%%%%%%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' %%%%%%%
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(n-1)*h;
es(n, k:k)=(exp(-t))*sin(x);
end;
end;
%%%%%%%%%%% END EXACT SOLUTION %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%% ERROR ANALYSIS %%%%%%%%%%%
for n=1:M-1;
```

```
for k=1:N-1;

f(n, k)=U(n+1, k+1)-es(n+1, k+1);

end;

end;

fmat1=abs(f);

fmat2=fmat1.*fmat1*h;

fmat3=sum(fmat2);

fmat4=fmat3.^(1/2);

sumerror=max(fmat4)

%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%

U;

es;

[xler,tler]=meshgrid(0:tau:1, 0:h:pi);

table=[es;U]; table(1:2:end,:)=es; table(2:2:end,:)=U;

q=min(min(table));

w=max(max(table));

figure;

surf(tler,xler,es);

title('EXACT SOLUTION'); set(gca,'ZLim',[q w]);

rotate3d;

XLabel('x axis'); YLabel('t axis');

figure; surf(tler,xler,U);

title('EULER-ROTHER'); set(gca,'ZLim',[q w]);

rotate3d ;

XLabel('x axis'); YLabel('t axis');
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%%

function u=g(t,x);

u=(t*0+1+x);

function u=ff(t,x);

u=(1+t*0+1+x)*(exp(-t))*(sin(x));
```

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Gaziantep'de Dünya'ya geldi. İlk öğrenimini bu şehirde, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1998 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölüm'ünde lisans eğitimine başlayarak 2002 yılında üçüncülükle mezun oldu. Mezun olduğu sene Fatih Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 1 yıl ingilizce hazırlık ve 1 yıl bilimsel hazırlık okuduktan sonra ders alımı ve tezini 2005 yılında tamamlayarak ikincilikle mezun oldu ve aynı sene Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora eğitimine başladı. Doktora eğitimine başladıkdan sonra 2006-2008 yılları arasında sırasıyla Bahçeşehir Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bölüm'ünde tam zamanlı araştırma görevlisi olarak, Fatih Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitü'sünde tam zamanlı araştırma görevlisi olarak, Fatih Üniversitesi Matematik Bölüm'ünde tam zamanlı öğretim görevlisi olarak görev almış bulunmakta olup halen Haliç Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölüm'ünde tam zamanlı öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.

Aynı zamanda yazarın basılan 7 tane makalesi bulunmaktadır. Bunlar;

Uluslararası Hakemli (SCI indeksli) Dergilerde Yayınlanan Makaleler

- Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., "On the Second Order of Accuracy Difference Scheme for Hyperbolic Equations in a Hilbert Space", Numerical Functional Analysis & Optimization, 26 (7-8) 739-772, 2005,

- Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., "Stability of the Second Order of Accuracy Difference Scheme for Hyperbolic Equation in a Hilbert Space", Discrete Dynamics in Nature and Society, 2007 1-25, 2007,

- Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., "A Numerical Solution of Wave Equation Arising in Non-Homogeneous Cylindrical Shells", Turkish Journal of Mathematics, 32 1-20 2008,

- Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., "On the Numerical Solution of Hyperbolic PDEs with Variable Space Operator", Numerical Methods for Partial Differential Equations, doi:10.1002/num.20388, 1-14, 2008.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Makaleler

- Abu-Alshaikh, I. A. ve Koksal, M. E., "One-dimensional Transient Dynamic Response in Functionally Gradient Spherical Multilayered Media", International Conference on Dynamical Systems and Applications, Antalya, Turkey, July 5-10, 2004, pp. 1-20.

- Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., "On the Stability of Difference Schemes for Hyperbolic Equations", International Conference on Differential and Difference Equations and its Applications, Melbourne, Florida, USA, Aug. 1-5, 2005, pp. 117-130.

- Ashyralyev, A. ve Koksal, M. E., "On a Difference Scheme of Second Order of Accuracy for Hyperbolic Equations", 6th International ISAAC Congress, Ankara, Turkey, Aug. 13-18, 2007, pp. 1-10.