

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇ YÜZEYİ FARKLI İKİ YUTUCU MALZEMEYLE
KAPLI SONSUZ BİR BORU İÇERİSİNE
YERLEŞTİRİLMİŞ AKIŞKANLI YARI SONSUZ BİR
BORUDAN SES YAYILIMI

ÖZGE YANAZ ÇINAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2009

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇ YÜZEYİ FARKLI İKİ YUTUCU MALZEMEYLE
KAPLI SONSUZ BİR BORU İÇERİSİNE
YERLEŞTİRİLMİŞ AKIŞKANLI YARI SONSUZ BİR
BORUDAN SES YAYILIMI

ÖZGE YANAZ ÇINAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
YRD.DOÇ.DR. AHMET DEMİR

GEBZE

2009

**İÇ YÜZEYİ FARKLI İKİ YUTUCU MALZEMEYLE KAPLI SONSUZ BİR
BORU İÇERİSİNE YERLEŞTİRİLMİŞ AKIŞKANLI YARI SONSUZ BİR
BORUDAN SES YAYILIMI**

Özge YANAZ ÇINAR

Anahtar Kelimeler: Akışkanlı akustik, Wiener-Hopf tekniği

Özet: Bu çalışmada, akışkanlı bir ortamda, bir yarı-sonsuz rijit borunun üzerinde empedans süreksizliği bulunan sonsuz uzunluklu bir borunun içine eşeksenli olarak yerleştirilmesi ile oluşturulmuş çatallanmış bir dairesel dalga kılavuzundan sesin yayılımı incelenmiştir. Söz konusu problem Fourier dönüşümü yardımı ile formüle edildiğinde bir matris Wiener-Hopf denkleminde ulaşılmaktadır. Matris Wiener-Hopf denkleminin orijinal biçimi bilinen herhangi bir yöntem ile çözülemeyecek türdendir. Ancak $l \leq 0$ için uygun bir matrisle çarpılarak, zayıf faktörizasyon kavramına dayalı yöntem ile çözülmeye uygun hale getirilmiştir. Çözüm, iki adet sonsuz bilinmeyenli cebirsel denklem sistemini sağlayan iki bilinmeyen katsayılar kümesi cinsinden elde edilmiştir. Bu denklem sistemleri sayısal olarak çözülmüş, dalga kılavuzu boşluğu, iki parçalı duvarın yüzey empedansları, Mach sayısı gibi parametrelerin kırınım olayına etkileri grafiksel olarak gösterilmiştir.

**PROPAGATION OF SOUND IN AN INFINITE TWO-PART DUCT
CARRYING MEAN FLOW INSERTED AXIALLY INTO A LARGER
INFINITE DUCT WITH WALL IMPEDANCE DISCONTINUITY**

Özge YANAZ ÇINAR

Keywords: Flow acoustics, Wiener-Hopf technique

Abstract: In this study, the propagation of sound wave along a two-part duct carrying mean flow inserted axially into a larger infinite duct with wall impedance discontinuity is investigated rigorously. Applying direct Fourier transform, a matrix Wiener-hopf equation is determined. In its original form, the matrix Wiener-Hopf equation encountered in this work does not seem to be solvable by applying the known factorization methods. However, for $l \leq 0$, it is shown that the pre multiplication by a suitable entire matrix reduces the matrix Wiener-Hopf equation into a form for which the weak factorization method is applicable. The solution contains two infinite sets of unknown coefficients satisfying two infinite systems of linear algebraic equations. These systems are solved numerically and the influence of the parameters such as the waveguide spacing and the surface impedances of the two-part plane, Mach number on the diffraction phenomenon is shown graphically.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında bilimsel katkılarıyla bana yardımcı olan, çalışmalarım sırasında beni destekleyen Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY'a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tez danışmanım Yrd.Doç.Dr. Ahmet DEMİR'e, değerli yardımlarını, önerilerini, eleştirilerini aldığım Prof.Dr. Gökhan UZGÖREN'e ve Prof.Dr. Ali ALKUMRU'ya teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmayı yapmam için beni destekleyen Prof.Dr. Aydın ŞALCI'ya, bu çalışma sırasında yardımlarını gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her zaman beni destekleyen ve yanımda olan değerli eşim Yrd.Doç.Dr. Gökhan ÇINAR'a, bu çalışma sırasında kendisini tanımaktan ve aynı ofiste birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum, her türlü desteği benden esirgemeyen arkadaşım Dr. Ayşegül İŞIKYER'e, bu günlere gelebilmem için bana hep güç vermiş olan anneme ve babama teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER KISALTMALAR DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Tezin İçeriği	2
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	4
2.1. Sınır, Geçiş ve Ayrıt Koşulları	11
2.2. Matris Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi	13
2.3. Zayıf Faktörizasyon Kavramına Dayalı Çözüm	20
2.4. Katsayıların Belirlenmesi	25
3. ALANIN ANALİZİ	26
4. SAYISAL HESAPLAMALAR	29
5. SONUÇLAR VE YORUMLAR	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER - KISALTMALAR DİZİNİ

ω	: Açısal frekans ($2\pi f$)
M	: Mach sayısı.
c	: Sesin hızı.
k	: Dalga sayısı.
χ	: Akustik yerdeğiştirme
v	: Akustik hız
p	: Akustik basınç
u	: Akustik skaler potansiyel

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2-1. Problemin geometrisi.	4
2-2. Kompleks α -düzleminde $H\alpha$ için kesimler.	10
2-3. Kompleks α -düzleminde $h\alpha$ için kesimler.	11
4-1. Sıfırların kompleks düzlemde dağılımı.	33
4-2. Sıfırların kompleks düzlemde dağılımı.	34
4-3. Sıfırların kompleks düzlemde dağılımı.	35
4-4. Kararsız kökün hareketi.	36
4-5. Kararsız kökün hareketi.	37
4-6. Kararsız kökün kb arttıkça hareketi.	38
4-7. Kökün frekans arttıkça hareketi.	39
4-8. Kesme sayısına göre iletim katsayısının değişimi.	40
4-9. Kök sayısına göre iletim katsayısının değişimi.	41
4-10. Kök sayısına göre faktörizasyonun tutarlılığı (reel kısım).	42
4-11. Kök sayısına göre faktörizasyonun tutarlılığı (sanal kısım).	43
4-12. $M = 0$ için iletim katsayısının kl ye göre değişimi.	44
4-13. $M = 0$ için iletim katsayısının kb ye göre değişimi	45
4-14. İletim katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.	46
4-15. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	47
4-16. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	48
4-17. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	49
4-18. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	50
4-19. İletim katsayısının genliğinin Mach sayısı ile değişimi.	51
4-20. Yansıma katsayısının genliğinin Mach sayısı ile değişimi	52
4-21. İletim katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	53
4-22. İletim katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	54
4-23. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	55
4-24. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.	56
4-25. İletim katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.	57
4-26. İletim katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.	58
4-27. Yansıma katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.	59

- 4-28. Yansıma katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi. 60
- 4-29. İletim katsayısının genliğinin ka 'ya göre değişimi. 61

1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Günümüz endüstriyel ortamında, çok kez gürültünün çeşitli boru sistemlerinden ilerleyerek kaynaktan çok uzaklara kadar yayıldığı durumlar oluşmaktadır. Kimi zaman mimari akustikte (ısıtma ve havalandırma borularında oluşan gürültü), kimi zaman deneysel aerodinamikte (rüzgar tünellerinde oluşan gürültü) ve kimi zamansa hava taşımacılığında (jetlerde ve turbo fanlarda oluşan gürültü) karşımıza çıkan bu “istenmeyen gürültü” sorunu uzun yıllardır ilgi çekmektedir. Bunların hepsi birer akışkanlı akustik problemi oluşturmaktadır. Akışkanlı akustik hem ses ve titreşim araştırmalarının hem de akışkan dinamiğinin bir parçası olarak kabul edilir. Konu ilk olarak Rayleigh tarafından incelendiğinden bu yana [Rayleigh, 1896], mühendisler, fizikçiler ve matematikçiler tarafından hakkında pek çok teorik ve deneysel çalışma yapılmıştır. Konu bu haliyle, disiplinlerarası bir özellik taşımakta, inceleme ve yorumlamalarda çok yönlü bir bakış açısına ihtiyaç duymaktadır.

Günlük yaşamamızda akışkanlı akustik problemler çeşitli örneklerle önemli ve etkili bir rol oynamaktadır. Akışkan ve maddenin etkileşiminin yarattığı sese en bilinen örneklerden biri motorlu taşıtlardaki egzost sistemidir. Bir başka ses kaynağı da jet motorlarında, jet akışkanının türbülanslı yapısıdır. Bu olayın Lighthill tarafından ilk kez farkedilişiyle, aeroakustik alanında bir milat yaşanmıştır [Lighthill, 1952]. Lighthill’in söz konusu keşfinden bu yana havacılık sektörü hem dünyada hem de Türkiye’de hızla gelişmiş, daha güçlü motorlara ihtiyaç duyan yolcu kapasitesi artırılmış uçaklar cazibe kazanmıştır. Daha güçlü motorlar ise daha fazla gürültü anlamına gelmektedir [Astley, 2006]. İstenmeyen bu gürültünün bastırılması için birçok yöntem önerilmiştir. Yüksek frekanslı ses dalgaları için, dalganın yayıldığı ortamın asbest gibi yarı-geçirgen bir madde ile kaplanması, sesin taşıdığı enerjinin bir kısmının bu madde üzerinde ısı enerjisine dönüşmesine olanak sağlar. Böylelikle sesin şiddeti kısmen bastırılmış olur. Bu tarz mekanizmalara “dağıtıcı susturucu” denir. Alçak frekanslı ses dalgaları için ise, dalganın yayıldığı ortamın geometrisinde ya da fiziksel özelliğinde (empedans) ani değişiklikler yaratmak,

böylelikle gelen dalganın bir kısmını geri yansıtmak suretiyle, tamamının ilerlemesini engellemek tercih edilmektedir (reaktif susturucular). Buna örnek olarak gösterilebilecek yöntemlerden biri de çatallanmış dairesel dalga kılavuzu sistemlerinde akustik olarak yutucu malzemelerle sonlandırılmış borulardan faydalanmaktır. Çeşitli durumlar için Nilsson ve Brander'in yaptıkları çalışmalar bu tarz araştırmalar için temel teşkil ederler [Nilsson&Brander, 1981a], [Nilsson&Brander, 1981b], [Nilsson&Brander, 1981c], [Nilsson&Brander, 1981d]. A. D. Rawlins dışta bulunan borunun belirli bir malzeme ile düzgün olarak kaplandığı durum, akışkansız ortam için incelemiştir [Rawlins, 1995]. A. Demir ve A. Büyükkaksoy ise dışta bulunan borunun üzerindeki kaplamanın süreksizlik içerdiği (iki parçalı empedans hali) durumu, bir başka deyişle, bu çalışmada incelenen problemin akışkansız ortam için özel halini çözmüştür [Demir&Büyükkaksoy, 2006]. 2006 tarihli bu çalışmada problem Fourier dönüşümü yöntemi ile bir matris Wiener-Hopf denklemine indirgenmiş ve “zayıf faktörizasyon” kavramına dayalı yöntemle çözüm elde edilmiştir.

1.2. Tezin İçeriği

Bu çalışmada, akışkanlı bir ortamda, bir yarı-sonsuz rijit borunun üzerinde empedans süreksizliği bulunan sonsuz uzunluklu bir borunun içine eşeksenli olarak yerleştirilmesi ile oluşturulmuş çatallanmış bir dairesel dalga kılavuzundan sesin yayılımı incelenmiştir. Söz konusu problem Fourier dönüşümü yardımı ile formüle edildiğinde bir matris Wiener-Hopf denkleminde ulaşılmaktadır. Genel olarak bir matris Wiener-Hopf denklemi

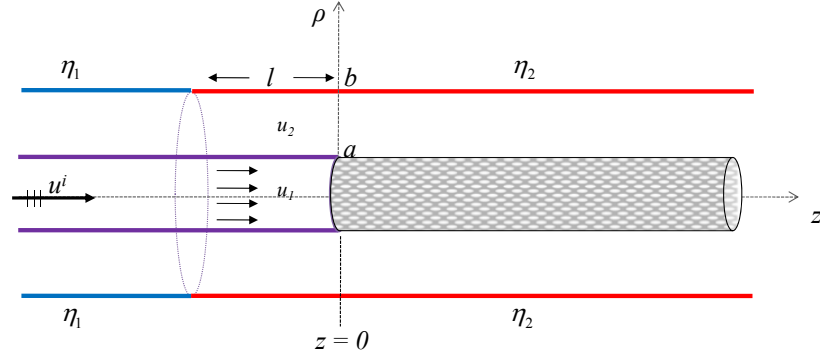
$$M(\alpha)\Phi^-(\alpha) + \Phi^+(\alpha) = N(\alpha)$$

yapısındadır. Burada $M(\alpha)$ çekirdek matris adını alır ve bir kare matristir. Bilindiği gibi, herhangi bir matris Wiener-Hopf denkleminin çözümü; çekirdek kare matrisin, biri üst diğeri alt yarı-düzlemde bulunan iki matrisin çarpımı şeklinde faktörize edilmesini gerektirir, öyle ki; bu matrislerin determinantları sıfırdan farklı olsun ve tüm girdileri ve tersi adı geçen bölgede regülerlik özelliğine sahip bulunsun. Matris çarpımı işleminin değişme özelliğine sahip olmaması nedeniyle keyfi bir çekirdek

matrisin faktörizasyonu için genel bir yöntem yoktur. Ancak bazı özel durumlar için geliştirilmiş yaklaşımlar mevcuttur. Çekirdek matrisin tekil noktaları yalnızca dallanma noktalarından ibaret ise Hurd [Hurd, 1976], Rawlins [Rawlins, 1975] ve Rawlins ve Williams'ın [Rawlins&Williams, 1981] önerdiği Wiener-Hopf-Hilbert yöntemini uygulamak mümkündür (örneğin bkz. [Hurd&Przedziecki, 1976], [Rawlins, 1984], [Büyükaksoy&Uzgören, 1988]). Bunun yanı sıra, tekil noktaların yalnızca kutup ve dallanma noktalarından ibaret olması durumunda da, birbirlerinden bağımsız olarak Daniele [Daniele, 1978] ve Khrapkov'un [Khrapkov, 1981] önerdikleri Daniele-Khrapkov yöntemi kullanışlıdır (örneğin bkz. [Daniele, 1984], [Hurd&Lüneburg, 1981], [Lüneburg&Hurd, 1982]). Eğer çekirdek matrisin tekillikleri yalnızca kutup noktalarından ibaret ise, M. İdemen [İdemen, 1979], [Büyükaksoy, Topsakal, İdemen, 1994] ve I. D. Abrahams'ın [Abrahams, 1987], [Abrahams&Wickham, 1991] önerdikleri “zayıf faktörizasyon” kavramına dayalı yöntemi uygulamak mümkündür (örneğin bkz. [Büyükaksoy&Çınar, 2006], [Demir&Büyükaksoy, 2006]). Bu yöntemlerle ilgili geniş bir araştırma A. Büyükaksoy ve A. H. Serbest tarafından yapılmıştır [Büyükaksoy&Serbest, 1993]. Bu çalışmada da, çekirdek matrisin yapısından ötürü “zayıf faktörizasyon” kavramına dayalı yöntem uygulanmış ve çözüm iki adet sonsuz bilinmeyenli lineer denklem sistemi aracılığıyla elde edilmiştir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Zamanla değişimi $\exp(-i\omega t)$ olan bir düzlemsel akustik dalga, içinde gaz akışı bulunan $S = \{(\rho, \varphi, z): \rho = a; \varphi \in (-\pi, \pi); z \in (-\infty, 0)\}$ ile tanımlı yarı-sonsuz katı bir boruda $+z$ yönünde yayılmaktadır. Söz konusu yarı-sonsuz boru ile uç uca çakışık bulunan $S = \{(\rho, \varphi, z): \rho = a; \varphi \in (-\pi, \pi); z \in (0, \infty)\}$ ile tanımlı bir delikli tüp bulunmaktadır. Bunlarla birlikte belirli parçaları iki farklı yutucu malzeme ile kaplanmış $S = \{(\rho, \varphi, z): \rho = b; \varphi \in (-\pi, \pi); z \in (-\infty, \infty)\}$ ile tanımlı sonsuz uzunluklu bir boru, yukarıda sözü edilen iki boruyu çevrelemektedir (bkz. Şekil 2-1).



Şekil 2-1. Problemin geometrisi.

Gelen dalganın ve problemin geometrisinin simetrik olmasından ötürü akustik dalga her yerde φ 'den bağımsız olacaktır. Bu sayede, yer değiştirme, akustik basınç ve hızın, sırasıyla $\vec{\chi}_j = \text{grad } u_j^T$, $p_j = -\rho_j D_j^2 u_j^T$ ve $\vec{v}_j = \text{grad}(D_j u_j^T)$ ($j = 1, 2$) şeklinde tanımlanmasına olanak sağlayacak $u_j^T(\rho, z)$ toplam skaler potansiyelinin kullanılması uygun olmaktadır. Burada ρ_j ortamın yoğunluğunu göstermektedir. Ayrıca, daha önce de belirtildiği gibi, $\rho < a$ ile belirli bölgede bir gaz akışı mevcuttur. Gaz akışından dolayı bu bölgeye ilişkin Mach sayısı pozitifdir ve analiz boyunca M ile gösterilecektir. Gaz akışı olan ve $j = 1$ ile gösterilen bölgede

$$D_1 = -i\omega + M c_1 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.1)$$

diğer bölgede ise

$$D_2 = -i\omega \quad (2.2)$$

olmaktadır [Nilsson&Brander, 1981a].

$\rho = b$ 'de bulunan sonsuz uzun borunun $z \in (-\infty, l)$ ve $z \in (l, \infty)$ parçaları η_1 ve η_2 yüzey admitansları ile karakterize edilen akustik yutucu malzemeler ile kaplanmıştır ($l < 0$). Herhangi bir kaplama için, \hat{n} kaplama yüzeyine dik birim vektör olmak üzere, kaplanmış bir yüzeyin akustik empedansı $Z = p/(\vec{v} \cdot \hat{n})$ şeklinde ifade edilir. Yukarıda sözü edilen admitanslar için ise $\eta_{1,2} = \rho_2 c / Z_{1,2}$ ilişkisi geçerlidir. Böyle bir malzeme ile kaplanmış yüzey üzerinde skaler potansiyel

$$\eta u - \frac{1}{ik} \hat{n} \cdot \text{grad } u = 0 \quad (2.3)$$

sınır koşulunu sağlar.

Problemde söz konusu olan $\rho < a$ ve $a < \rho < b$ bölgelerinin akustik özelliklerinin birbirlerinden farklı oldukları düşünülmüştür. Bu nedenle, her iki bölgede akustik dalganın yayılma hızı da farklı olacaktır. Eğer akustik dalganın $\rho < a$ bölgesindeki yayılma hızına c_1 , $a < \rho < b$ bölgesindeki yayılma hızına ise c_2 denirse, sözü geçen bölgelere ilişkin dalga sayıları da $k_1 = \omega/c_1$ ve $k_2 = \omega/c_2$ ile ifade edilir. Formülasyon sırasında, analitik uygunluk için her iki bölgenin de biraz kayıplı olduğu, bir başka deyişle k_1 ve k_2 'nin çok küçük da olsa birer pozitif sanal kısımlara sahip buldukları düşünülecektir. Gerçekte olduğu gibi, kayıpsız bir duruma ilişkin sonuçlar için, analizin sonunda $\text{Im}k_{1,2} \rightarrow 0$ yapmak yeterli olacaktır.

Bu problemin analizi, yayılabilecek tüm modlar için gerçekleştirilebileceği halde, gelen dalga için yalnızca temel mod dikkate alınmıştır. Bu nedenle, gelen dalganın z ile değişimi,

$$\xi_o^- = -\frac{k_1}{1 + M} \quad (2.4)$$

olmak üzere

$$u_i(\rho, z) = e^{-i\xi_o^- z} \quad (2.5)$$

şeklinde belirlenmiştir. Analizin kolaylığı açısından $z \in (-\infty, \infty)$ için toplam potansiyelin aşağıdaki gibi ifade edilmesi uygun olacaktır:

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z) + u_i(\rho, z) & , \quad \rho < a \\ u_2(\rho, z) & , \quad a < \rho < b \end{cases} \quad (2.6)$$

$\rho < a$ bölgesinde saçılan alan $u_1(\rho, z)$ aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklemi sağlar:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(-ik_1 + M \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] u_1(\rho, z) = 0 \quad (2.7)$$

Bu denklemin Fourier dönüşümü dikkate alınacak olursa,

$$F(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.8)$$

olmak üzere, (2.7) denkleminin birinci teriminin Fourier dönüşümü için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial \rho} \right) e^{i\alpha z} dz \quad (2.9)$$

işlemi gerçekleştirilir. Burada integrasyon z değişkenine, türevler ise ρ değişkenine göre olduğundan sıraları önemli değildir. Türev işlemleri integrasyondan sonra yapılırsa (2.9) integrali

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.10)$$

haline gelir. Bu ifadede görülen integral zaten $u_1(\rho, z)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olduğundan, sonuçta (2.7) denkleminin ilk teriminin Fourier dönüşümü için

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F(\rho, \alpha)}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F(\rho, \alpha)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F(\rho, \alpha)}{\partial \rho^2} \quad (2.11)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (2.7) denkleminin ikinci teriminin Fourier dönüşümü için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_1(\rho, z)}{\partial z^2} e^{iaz} dz \quad (2.12)$$

integralini hesaplamak gerekir. Burada kısmi integrasyon ile sonuca varılabilir. Bu durumda (2.12) integrali

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial z} e^{iaz} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial z} e^{iaz} dz \quad (2.13)$$

olur. Bu ifadenin doğru bir biçimde değerlendirmesini yapabilmek için $u_1(\rho, z)$ fonksiyonunun $z \rightarrow \pm\infty$ için davranışını bilmek gerekir. $u_1(\rho, z)$ nin sonlu kalabilmesi için davranışının

$$u_1(\rho, z) \sim \mathcal{O} \left(e^{\frac{ik_1}{1+M}z} \right) , \quad z \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

ve

$$u_1(\rho, z) \sim \mathcal{O} \left(e^{-\frac{ik_1}{1-M}z} \right) , \quad z \rightarrow -\infty \quad (2.15)$$

olması gerekir. Bu özellikler dikkate alınır, $u_1(\rho, z)$ nin z ye göre birinci mertebeden türevinin de üstel davranışının aynı şekilde olduğu görülür. Bu durumda (2.13) ifadesinin ilk terimi için

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial z} e^{iaz} \Big|_{-\infty}^{\infty} \sim \left[\frac{e^{iz(\alpha + \frac{k_1}{1+M})}}{2\pi} \right]_{z \rightarrow \infty} - \left[\frac{e^{iz(\alpha - \frac{k_1}{1-M})}}{2\pi} \right]_{z \rightarrow -\infty} \quad (2.16)$$

yazılabilir. α nın ve k_1 in kompleks birer büyüklük oldukları hatırlanır (2.16)

$$\left[\frac{e^{iz(\operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\frac{k_1}{1+M})} e^{-z(\operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\frac{k_1}{1+M})}}{2\pi} \right]_{z \rightarrow \infty} - \left[\frac{e^{iz(\operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\frac{k_1}{1-M})} e^{-z(\operatorname{Im}\alpha - \operatorname{Im}\frac{k_1}{1-M})}}{2\pi} \right]_{z \rightarrow -\infty} \quad (2.17)$$

olur. (2.17) ifadesinin $z \rightarrow \pm\infty$ oldukça sonsuz büyümemesi için $\operatorname{Im}\alpha > \operatorname{Im}(-k_1/(1+M))$ ve $\operatorname{Im}\alpha < \operatorname{Im}k_1/(1-M)$ şartlarının sağlanması gerektiği görülür. Bu şartlar altında (2.7) denkleminin Fourier dönüşümünden söz etmek mümkün olacaktır. Böylelikle bu şartlar bir Wiener-Hopf şeridinin belirmesine olanak sağlar. Söz konusu şartlar altında (2.7) denkleminin ikinci teriminin Fourier dönüşümü için elde edilmiş olan (2.13) ifadesinin birinci terimi sıfıra gider. İkinci terimde görülen integral de kısmi integrasyon ile değerlendirilirse

$$-\frac{i\alpha}{2\pi} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\alpha^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.18)$$

olur. Burada da ilk terim, (2.14) ve (2.15) dikkate alınıp, aynı tarzda bir inceleme sonucunda sıfır bulunur. İkinci terimdeki integral ise zaten $u_1(\rho, z)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür ve böylelikle (2.7) denkleminin ikinci teriminin Fourier dönüşümü için

$$-\alpha^2 F(\rho, \alpha) \quad (2.19)$$

elde edilir. (2.7) denkleminin üçüncü teriminin Fourier dönüşümünü belirlemeden önce, bu terimi daha açık yazmak gerekmektedir. Bu terimin açık ifadesi

$$\left[k_1^2 + 2ik_1M \frac{\partial}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_1(\rho, z) \quad (2.20)$$

şeklinindedir. İlk terimin Fourier dönüşümü $u_1(\rho, z)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünün k_1^2 katıdır. İkinci terimde ise kısmi integrasyon uygulamak gerekir. Buna göre

$$\frac{2ik_1M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_1(\rho, z)}{\partial z} e^{iaz} dz =$$

$$\frac{2ik_1M}{2\pi} u_1(\rho, z) e^{iaz} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2k_1M\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{iaz} dz$$
(2.21)

elde edilir. Yukarıdaki ilk terim, yine $u_1(\rho, z)$ nin $z \rightarrow \pm\infty$ için davranışından sıfıra gider. İkinci terimdeki integral ise bu fonksiyonun Fourier dönüşümünden başka bir şey değildir. (2.20) nin son terimi de (2.7) nin ikinci terimi gibi incelendiğinde, (2.7) nin üçüncü terimi için sonuç olarak

$$(k_1 + M\alpha)^2 F(\rho, \alpha)$$
(2.22)

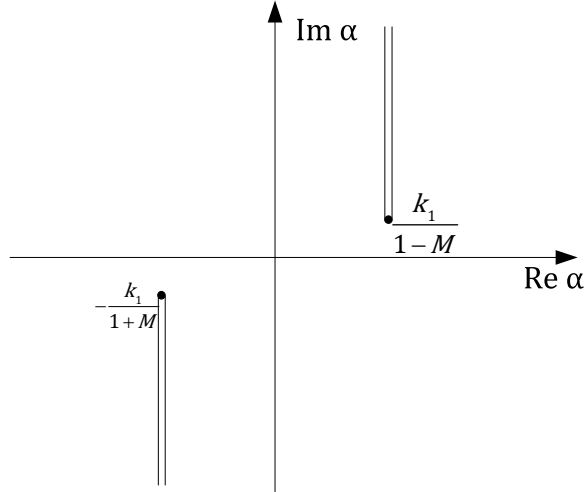
yazılır. Sonuç olarak, (2.11), (2.19) ve (2.22) den faydalanarak (2.7) nin Fourier dönüşümü için

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + H^2(\alpha) \right] F(\rho, \alpha) = 0$$
(2.23)

ifadesi elde edilir. Bilindiği gibi burada $F(\rho, \alpha)$, $u_1(\rho, z)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Ayrıca $H(\alpha)$ fonksiyonu Şekil 2-2'de görüldüğü gibi $H(0) = k_1$ olacak şekilde kesilmiş kompleks α -düzleminde

$$H(\alpha) = \sqrt{(k_1 + M\alpha)^2 - \alpha^2}$$
(2.24)

ile tanımlı karekök fonksiyonudur.



Şekil 2-2. Kompleks α -düzleminde $H(\alpha)$ için kesimler.

(2.23) denkleminin genel çözümü

$$F(\rho, \alpha) = A(\alpha)J_0[H(\alpha)\rho] + A_1(\alpha)Y_0[H(\alpha)\rho] \quad (2.25)$$

biçimindedir. Burada J_0 sıfırıncı mertebeden birinci türden Bessel fonksiyonunu, Y_0 ise sıfırıncı mertebeden Neumann fonksiyonunu göstermektedir. Bu çözüm $\rho < a$ bölgesinde yazıldığından ve $\rho = 0$ bu bölgede bulunduğundan, $F(\rho, \alpha)$ 'nin sonsuz büyümemesi için $A_1(\alpha) = 0$ olmalıdır. Bu durumda, geriye kalan ifade

$$F(\rho, \alpha) = A(\alpha)J_0[H(\alpha)\rho] \quad (2.26)$$

olur.

Benzer şekilde $a < \rho < b$ bölgesinde saçılan alan $u_2(\rho, z)$,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_2^2 \right] u_2(\rho, z) = 0 \quad (2.27)$$

denklemini sağlar. Bu denklemin Fourier dönüşümü

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + h^2(\alpha) \right] G(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.28)$$

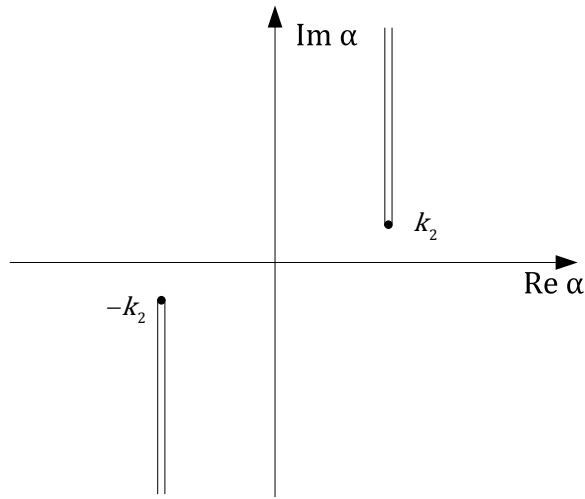
şeklinde elde edilir. Burada $G(\rho, \alpha)$, $u_2(\rho, z)$ fonksiyonunun

$$G(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.29)$$

ile tanımlı Fourier dönüşümüdür. Ayrıca $h(\alpha)$ Şekil 2-3'te görüldüğü gibi $h(0) = k_2$ olacak şekilde kesilmiş kompleks α -düzleminde

$$h(\alpha) = \sqrt{k_2^2 - \alpha^2} \quad (2.30)$$

ile tanımlı karekök fonksiyonudur.



Şekil 2-3. Kompleks α -düzleminde $h(\alpha)$ için kesimler.

(2.28) denkleminin genel çözümü

$$G(\rho, \alpha) = B(\alpha)J_0[h(\alpha)\rho] + C(\alpha)Y_0[h(\alpha)\rho] \quad (2.31)$$

biçimindedir.

2.1. Sınır, Geçiş ve Ayrıt Koşulları

Problemin geometrisi incelendiğinde $u_1(\rho, z)$ ve $u_2(\rho, z)$ alanlarının sağlaması gereken çeşitli koşullar şu şekilde ortaya çıkarılabilir: İlk olarak, $\rho = a$ ve $z \in (-\infty, 0)$ 'da bulunan yarı-sonsuz katı boru nedeniyle

$$\left. \frac{\partial(u_1 + u_i)}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0 \quad , \quad z < 0 \quad (2.32)$$

ve

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0 \quad , \quad z < 0 \quad (2.33)$$

koşullarının sağlanması gerektiği kolaylıkla belirlenir. Bunun yanısıra, (2.3) dikkate alınır, $\rho = b$ ve $z \in (-\infty, \infty)$ 'daki sonsuz uzun borunun η_1 yüzey admitansına sahip bulunan $z < l$ kısmında

$$\left(\eta_1 u_2 - \frac{1}{ik_2} \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=b} = 0 \quad , \quad z < l, \quad (2.34)$$

η_2 yüzey admitansına sahip bulunan $z > l$ kısmında ise

$$\left(\eta_2 u_2 - \frac{1}{ik_2} \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=b} = 0 \quad , \quad z > l \quad (2.35)$$

ile belirli karışık türden sınır koşullarının sağlandığı görülür. Delikli tüpün bulunduğu $\rho = a$, $z \in (0, \infty)$ 'da ise delikli tüplere özgü geçiş koşulları geçerlidir. Bu geçiş koşulları, $\rho < a$ ve $a < \rho < b$ bölgelerindeki yerdeğiştirme ve akustik basıncın $\rho = a$ 'da sahip oldukları bağıntılarla belirlenir. Delikli borularda bu bağıntılar sırasıyla

$$\hat{\rho} \cdot (\vec{\chi}_2 - \vec{\chi}_1) = 0 \quad , \quad z > 0 \quad (2.36)$$

ve

$$p_2(a, z) - p_1(a, z) = i\omega \rho_1 c_1 \eta_p \frac{\partial u_1(a, z)}{\partial \rho} \quad , \quad z > 0 \quad (2.37)$$

şeklindedir. (2.36) ve (2.37) denklemlerinde akustik basınç ve yerdeğiştirmenin skaler potansiyel cinsinden önceki bölümde verilen ifadeleri yerine konursa, sırasıyla

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) = \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(a, z) \quad , \quad z > 0 \quad (2.38)$$

ve

$$\begin{aligned} \varrho_2 u_2(a, z) - \varrho_1 \left(1 + i \frac{M}{k_1} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u_1(a, z) - \varrho_1 \frac{i \eta_p}{k_1} \frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) \\ = \varrho_1 \left(1 + i \frac{M}{k_1} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u_i(a, z) \quad , \quad z > 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

elde edilir. (2.37) ve (2.39) denklemlerinde görülen η_p , iki bölgedeki akustik basınçlar arasında, arayüzey üzerinde bağlantı kuran akustik empedanstır.

Problemin çözümünün tek olabilmesi için yukarıdaki koşullar yeterli değildir. Bunlara ek olarak $z = 0$ 'da ve $z = l$ de geçerli olan ayırıt koşullarını da belirtmek gerekir. Buna göre, ayırıtarda dalganın taşıdığı enerji sonlu kalmalı ve tam Kutta koşulu sağlanmalıdır. Böylelikle [Nilsson&Brander, 1981b] ve [Rawlins, 2007]'de ifade edildiği gibi ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) &= \mathcal{O}(\sqrt{z}) \quad , \quad z \rightarrow 0^+ \\ \frac{\partial}{\partial z} u_1(a, z) &\rightarrow 0 \quad , \quad z \rightarrow 0^+ \\ u_2(b, z) &= \mathcal{O}(1) \quad , \quad z \rightarrow l \\ \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(b, z) &= \mathcal{O}(1/\sqrt{z}) \quad , \quad z \rightarrow l \end{aligned} \quad (2.40)$$

elde edilir.

2.2. Matris Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi

$u_1(\rho, z)$ ve $u_2(\rho, z)$ 'nin Fourier dönüşümleri olan, sırasıyla $F(\rho, \alpha)$ ve $G(\rho, \alpha)$ fonksiyonları, $F^+(\rho, \alpha)$ ve $G^+(\rho, \alpha)$, $Im\alpha > -k_1/(1+M)$ ile tanımlı üst yarı-düzlemde, $F^-(\rho, \alpha)$ ve $G^-(\rho, \alpha)$, $Im\alpha < k_1/(1-M)$ ile tanımlı alt yarı-düzlemde regüler fonksiyonlar olmak üzere

$$F^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz, \quad (2.41)$$

$$F^-(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz, \quad (2.42)$$

$$G^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.43)$$

ve

$$G^-(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.44)$$

bağıntılarıyla tanımlı fonksiyonlar türünden

$$F(\rho, \alpha) = F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) \quad (2.45)$$

ve

$$G(\rho, \alpha) = G^-(\rho, \alpha) + G^+(\rho, \alpha) \quad (2.46)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda, (2.32) ifadesinin her iki yanını $e^{i\alpha z}/2\pi$ ile çarpılıp $z \in (-\infty, 0)$ aralığında integre edilecek olursa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) e^{i\alpha z} dz = 0, \quad (2.47)$$

dolayısıyla da,

$$\dot{F}^-(a, \alpha) = 0 \quad (2.48)$$

bağıntısı bulunur. Fonksiyonun üzerindeki nokta işareti, fonksiyonun ρ 'ya göre birinci mertebeden türevini ifade etmektedir. (2.26) nın ρ ya göre türevinden elde edilecek olan

$$\dot{F}(\rho, \alpha) = \dot{F}^-(\rho, \alpha) + \dot{F}^+(\rho, \alpha) = -H(\alpha)A(\alpha)J_1[H(\alpha)\rho] \quad (2.49)$$

bağıntısı $\rho = a$ için yazılır ve (2.48) dikkate alınırsa $A(\alpha)$ katsayısı için

$$A(\alpha) = -\frac{\dot{F}^+(a, \alpha)}{H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]} \quad (2.50)$$

elde edilir. Burada

$$\Phi_1^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) e^{iaz} dz \quad (2.51)$$

tanımı yapılırsa $\Phi_1^+(\alpha) = \dot{F}^+(a, \alpha)$ olur ve

$$A(\alpha) = -\frac{\Phi_1^+(\alpha)}{H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]} \quad (2.52)$$

yazılabilir. Benzer şekilde, sınır koşulu (2.33) ifadesinin her iki yanını $e^{iaz}/2\pi$ ile çarpılıp $z \in (-\infty, 0)$ aralığında integre edilecek olursa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(a, z) e^{iaz} dz = 0, \quad (2.53)$$

dolayısıyla

$$\dot{G}^-(a, \alpha) = 0 \quad (2.54)$$

olur.

$$\dot{G}(\rho, \alpha) = -h(\alpha)\{B(\alpha)J_1[h(\alpha)\rho] + C(\alpha)Y_1[h(\alpha)\rho]\} \quad (2.55)$$

ve

$$\dot{G}(\rho, \alpha) = \dot{G}^-(\rho, \alpha) + \dot{G}^+(\rho, \alpha) \quad (2.56)$$

birlikte düşünülür, $\rho = a$ konursa

$$B(\alpha)J_1[h(\alpha)a] + C(\alpha)Y_1[h(\alpha)a] = -\frac{1}{h(\alpha)}\dot{G}^+(a, \alpha) \quad (2.57)$$

bulunur.

Sınır koşulları (2.34) ve (2.35) ifadelerinin her iki yanını $e^{iaz}/2\pi$ ile çarpılıp sırasıyla $z \in (-\infty, l)$ ve $z \in (l, \infty)$ aralığında integre edilecek olursa

$$I_1(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^l u_2(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (2.58)$$

ve

$$I_2(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_l^{\infty} u_2(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (2.59)$$

tipinde integrallerin değerlendirilmesi gerekir. Bunlar için önce sırasıyla

$$I_1(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} e^{ial} \int_{-\infty}^l u_2(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz \quad (2.60)$$

ve

$$I_2(\rho, \alpha) = \frac{1}{2\pi} e^{ial} \int_l^{\infty} u_2(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz \quad (2.61)$$

yazılır. (2.60) ve (2.61) eşitliklerinin sağ yanlarındaki integraller açıkça, sırasıyla $G_-(\rho, \alpha)$ ve $G_+(\rho, \alpha)$ fonksiyonlarına eşittir. Bu durumda sınır koşulları (2.34) ve (2.35) için

$$e^{ial} \left[\eta_1 G^-(b, \alpha) - \frac{1}{ik_2} \dot{G}^-(b, \alpha) \right] = 0 \quad (2.62)$$

ve

$$e^{ial} \left[\eta_2 G^+(b, \alpha) - \frac{1}{ik_2} \dot{G}^+(b, \alpha) \right] = 0 \quad (2.63)$$

elde edilir. (2.31) denklemini dikkate alınırsa

$$J(\eta_j, \alpha) = \eta_j J_0[h(\alpha)b] + \frac{h(\alpha)}{ik_2} J_1[h(\alpha)b], \quad (2.64)$$

$$Y(\eta_j, \alpha) = \eta_j Y_0[h(\alpha)b] + \frac{h(\alpha)}{ik_2} Y_1[h(\alpha)b], \quad (2.65)$$

$$\Phi_2^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_l^\infty \left[\eta_1 u_2(b, z) - \frac{1}{ik_2} \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(b, z) \right] e^{i\alpha(z-l)} dz \quad (2.66)$$

ve

$$\Phi_2^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^l \left[\eta_2 u_2(b, z) - \frac{1}{ik_2} \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(b, z) \right] e^{i\alpha(z-l)} dz \quad (2.67)$$

olmak üzere

$$J(\eta_1, \alpha)B(\alpha) + Y(\eta_1, \alpha)C(\alpha) = e^{ial} \Phi_2^+(\alpha) \quad (2.68)$$

ve

$$J(\eta_2, \alpha)B(\alpha) + Y(\eta_2, \alpha)C(\alpha) = e^{ial} \Phi_2^-(\alpha) \quad (2.69)$$

elde edilir. Bu denklemlerden $B(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ için

$$B(\alpha) = \frac{e^{ial} [\Phi_2^-(\alpha) Y(\eta_1, \alpha) - \Phi_2^+(\alpha) Y(\eta_2, \alpha)]}{J(\eta_2, \alpha) Y(\eta_1, \alpha) - J(\eta_1, \alpha) Y(\eta_2, \alpha)} \quad (2.70)$$

ve

$$C(\alpha) = \frac{e^{ial} [\Phi_2^+(\alpha) J(\eta_2, \alpha) - \Phi_2^-(\alpha) J(\eta_1, \alpha)]}{J(\eta_2, \alpha) Y(\eta_1, \alpha) - J(\eta_1, \alpha) Y(\eta_2, \alpha)} \quad (2.71)$$

ilişkileri bulunur.

Geçiş koşulu (2.38), sınır koşulları (2.32) ve (2.33) ile birlikte düşünülecek olursa

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) = \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(a, z) \quad , \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (2.72)$$

biçiminde yazılabilir. Bunun Fourier dönüşümü için de açıkça

$$\dot{F}(a, \alpha) = \dot{G}(a, \alpha) \quad (2.73)$$

ilişkisi yazılır. Bu eşitlik (2.26) ve (2.31) yardımıyla

$$-H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]A(\alpha) = -h(\alpha)J_1[H(\alpha)a]B(\alpha) - h(\alpha)Y_1[H(\alpha)a]C(\alpha) \quad (2.74)$$

biçiminde ifade edilir.

Son olarak, geçiş koşulu (2.39) ifadesinin her iki yanını $e^{iaz}/2\pi$ ile çarpılıp $z \in (0, \infty)$ aralığında integre edilecek olursa, (2.14) ve (2.40) ile verilmiş bulunan ayrıt koşulu da dikkate alınarak

$$\begin{aligned} G^+(a, \alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 F^+(a, \alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{i\eta_p}{k_1} \dot{F}^+(a, \alpha) \\ = -\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.75)$$

bulunur. Burada da

$$\Phi_1^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left[u_2(a, z) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + i \frac{M}{k_1} \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u_1(a, z) \right] e^{iaz} dz \quad (2.76)$$

ve dolayısıyla

$$\Phi_1^-(\alpha) = G^-(a, \alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 F^-(a, \alpha) \quad (2.77)$$

olmak üzere (2.77) ve (2.75) in toplamı da dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
G(a, \alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 F(a, \alpha) &= \Phi_1^-(\alpha) \\
+ \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{i\eta_p}{k_1} \dot{F}^+(a, \alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} &
\end{aligned} \tag{2.78}$$

bağıntısı elde edilir. (2.26) ve (2.31) aracılığıyla (2.78) için

$$\begin{aligned}
J_o[h(\alpha)a]B(\alpha) + Y_o[h(\alpha)a]C(\alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 J_o[H(\alpha)a]A(\alpha) \\
= \Phi_1^-(\alpha) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{i\eta_p}{k_1} \Phi_1^+(\alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} &
\end{aligned} \tag{2.79}$$

yazılır. Burada daha önce de olduğu gibi $\Phi_1^+(\alpha) = \dot{F}^+(a, \alpha)$ konmuştur. (2.74) ve (2.79) denklemlerinde yer alan $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ ve $C(\alpha)$ katsayıları yerine sırasıyla (2.52), (2.70) ve (2.71) ile verilmiş ifadeler konursa

$$J(\eta_2, \alpha)Y(\eta_1, \alpha) - J(\eta_1, \alpha)Y(\eta_2, \alpha) = \frac{2(\eta_1 - \eta_2)}{i\pi k_2 b} \tag{2.80}$$

ve $p = 0,1$ ve $j = 1,2$ için

$$M_p(\eta_j, \alpha) = J_p[h(\alpha)a]Y(\eta_j, \alpha) - Y_p[h(\alpha)a]J(\eta_j, \alpha) \tag{2.81}$$

olmak üzere (2.74) ten

$$\begin{aligned}
\frac{2(\eta_1 - \eta_2)}{i\pi k_2 b} \Phi_1^+(\alpha) - hM_1(\eta_2, \alpha)e^{i\alpha l} \Phi_2^+(\alpha) \\
+hM_1(\eta_1, \alpha)e^{i\alpha l} \Phi_2^-(\alpha) = 0 &
\end{aligned} \tag{2.82}$$

ve (2.79) dan da

$$\begin{aligned}
\frac{2(\eta_1 - \eta_2)}{i\pi k_2 b} \left\{ \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 \frac{J_o[H(\alpha)a]}{H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]} - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{i\eta_p}{k_1} \right\} \Phi_1^+(\alpha) \\
-M_o(\eta_2, \alpha)e^{i\alpha l} \Phi_2^+(\alpha) + M_o(\eta_1, \alpha)e^{i\alpha l} \Phi_2^-(\alpha) &
\end{aligned} \tag{2.83}$$

$$-\frac{2(\eta_1 - \eta_2)}{i\pi k_2 b} \Phi_1^-(\alpha) = \frac{(\eta_1 - \eta_2) \varrho_1}{\pi^2 k_2 b \varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{(\alpha - \xi_o^-)}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler elde edilmeye çalışılan matris Wiener-Hopf denklemdir. (2.82) ve (2.83) denklemlerini

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} \frac{2i(\eta_1 - \eta_2)}{\pi k_2 b} & h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha) e^{i\alpha l} \\ \frac{2i(\eta_1 - \eta_2) \varrho_1}{\pi k_2 b \varrho_2} \left\{ \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 \frac{J_o[H(\alpha)a]}{H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]} - \frac{i\eta_p}{k_1} \right\} & M_o(\eta_2, \alpha) e^{i\alpha l} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi_1^+(\alpha) \\ \Phi_2^+(\alpha) \end{bmatrix} \\ & - \left[\begin{array}{cc} 0 & h(\alpha) M_1(\eta_1, \alpha) e^{i\alpha l} \\ \frac{2i(\eta_1 - \eta_2)}{\pi k_2 b} & M_o(\eta_1, \alpha) e^{i\alpha l} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Phi_1^-(\alpha) \\ \Phi_2^-(\alpha) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{(\eta_1 - \eta_2) \varrho_1}{\pi^2 k_2 b \varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{(\alpha - \xi_o^-)} \end{aligned} \quad (2.84)$$

biçiminde düzenlemek de mümkündür.

2.3. Zayıf Faktörizasyon Kavramına Dayalı Çözüm

Bu aşamada, öncelikle, (2.84) ile verilmiş bulunan matris Wiener-Hopf denkleminin çözüm anlamında daha uygun bir yapıya kavuşması için, denklemi soldan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -M_o(\eta_2, \alpha) & h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

matrisi ile çarpmak gerekir. Bu yapıldığında

$$\frac{2i(\eta_1 - \eta_2)}{\pi k_2 b} \frac{e^{-i\alpha l} \Phi_1^+(\alpha)}{h(\alpha) M_1(\eta_1, \alpha)} + N(\alpha) \Phi_2^+(\alpha) - \Phi_2^-(\alpha) = 0 \quad (2.86)$$

ve

$$L(\alpha) \Phi_1^+(\alpha) + \Phi_1^-(\alpha) - \frac{2}{\pi a} \frac{e^{i\alpha l} \Phi_2^-(\alpha)}{h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha)} \quad (2.87)$$

$$= \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)}$$

denklemleri elde edilir. Burada $N(\alpha)$ ve $L(\alpha)$ fonksiyonları sırasıyla

$$N(\alpha) = \frac{M_1(\eta_2, \alpha)}{M_1(\eta_1, \alpha)} \quad (2.88)$$

ve

$$L(\alpha) = \frac{M_0(\eta_2, \alpha)}{h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)} - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 \frac{J_0[H(\alpha)a]}{H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]} + \frac{\varrho_1 i\eta_p}{\varrho_2 k_1} \quad (2.89)$$

şeklindedir. (2.86) denklemini çözebilmek için önce $N(\alpha)$ fonksiyonunun faktörizasyonunu yapmak gerekmektedir. Bu fonksiyon meromorfik bir fonksiyondur (tekil noktaları sadece basit kutuplardan ibaret) ve

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= N^+(\alpha)N^-(\alpha) \\ N^-(\alpha) &= N^+(-\alpha) \end{aligned} \quad (2.90)$$

olmak üzere, faktörizasyonu

$$N^+(\alpha) = \sqrt{\frac{J_1(k_2 a) \mathcal{Y}(\eta_2, 0) - Y_1(k_2 a) \mathcal{J}(\eta_2, 0)}{J_1(k_2 a) \mathcal{Y}(\eta_1, 0) - Y_1(k_2 a) \mathcal{J}(\eta_1, 0)}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{\sigma_m}\right)} \quad (2.91)$$

olarak elde edilir [Demir&Büyükaksoy, 2006]. Yukarıdaki denklemde görülen $\alpha = \pm\sigma_m$ ler $h(\alpha)M_1(\eta_1, \alpha)$ fonksiyonunun, $\alpha = \pm\gamma_m$ ler ise $h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)$ fonksiyonunun simetrik sıfırlarıdır (alt ve üst yarı-düzlemdeki sıfırlar simetrik dizilirler). (2.86) denkleminin her iki yanını $N^-(\alpha)$ ya bölünecek olursa

$$\frac{2i(\eta_1 - \eta_2) e^{-ia\alpha} N^+(\alpha) \Phi_1^+(\alpha)}{\pi k_2 b h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha)} + N^+(\alpha) \Phi_2^+(\alpha) - \frac{\Phi_2^-(\alpha)}{N^-(\alpha)} = 0 \quad (2.92)$$

elde edilir. Eşitliğin sol yanındaki ilk terim, $\alpha = \gamma_m$ ler hariç üst yarı-düzlemde regülerdir. Bu noktadaki kutup tekilliklerini izole etmek için

$$c_m = \frac{2i(\eta_1 - \eta_2) e^{-i\gamma_m l} N^+(\gamma_m) \Phi_1^+(\gamma_m)}{\pi k_2 b [h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha)]'_{\alpha=\gamma_m}} \quad (2.93)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{2i(\eta_1 - \eta_2) e^{-i\alpha l} N^+(\alpha) \Phi_1^+(\alpha)}{\pi k_2 b h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\alpha - \gamma_m} + N^+(\alpha) \Phi_2^+(\alpha) \\ & = \frac{\Phi_2^-(\alpha)}{N^-(\alpha)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\alpha - \gamma_m} \end{aligned} \quad (2.94)$$

yazılabilir. (2.93) denkleminde görülen ' işaretleri, α ya göre birinci mertebeden türevi göstermektedir. (2.94) denkleminde analitik devam ilkesi ve Liouville teoremi uygulandığında, ayırıt koşulları yardımıyla (2.94) ün her iki tarafı da $\alpha \rightarrow \infty$ olurken $\mathcal{O}(\alpha^{-1})$ gibi davranmakta, doğal olarak sıfıra eşit bulunmaktadır. Böylelikle,

$$\frac{2i(\eta_1 - \eta_2) e^{-i\alpha l} N^+(\alpha) \Phi_1^+(\alpha)}{\pi k_2 b h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha)} + N^+(\alpha) \Phi_2^+(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\alpha - \gamma_m} \quad (2.95)$$

ve

$$\frac{\Phi_2^-(\alpha)}{N^-(\alpha)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\alpha - \gamma_m} \quad (2.96)$$

bulunur. Benzer şekilde (2.87) denklemini çözebilmek için $L(\alpha)$ fonksiyonunun faktörizasyonunu yapmak gerekmektedir. Bu fonksiyon da meromorfik bir fonksiyondur (tekil noktaları sadece basit kutuplardan ibaret) ve faktörizasyonu ile ilgili ayrıntılar [Nilsson&Brander, 1981b]'de bulunmaktadır. Buna göre

$$L^-(\alpha) \neq L^+(-\alpha) \quad (2.97)$$

olmakla birlikte

$$L^+(\alpha) = \sqrt{L(0)} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_o^+}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_m^-}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{p_m^-}\right)} \quad (2.98)$$

ve

$$L^-(\alpha) = \sqrt{L(0)} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_o^+}\right)^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_m^+}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{p_m^+}\right)} \quad (2.99)$$

yazılır. α_m^+ ve α_m^- ile gösterilen kompleks sayılar, $L(\alpha)$ fonksiyonunun sırasıyla üst yarı-düzlem ve alt yarı-düzlemdeki sıfırlarıdır. Benzer şekilde p_m^+ ve p_m^- ler de söz konusu fonksiyonun sırasıyla üst ve alt yarı-düzlemlerdeki kutuplarını göstermektedir. α_o^+ ile gösterilen sayı özel bir öneme sahiptir ve kararsız kök olarak adlandırılır. α_o^+ nın elde edilişi ve analizi Bölüm 4'te ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Bu durumda, faktörizasyon aşamasını takiben (2.87) denklemi

$$\begin{aligned} L^+(\alpha)\Phi_1^+(\alpha) + \frac{\Phi_1^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} - \frac{2}{\pi a} \frac{e^{i\alpha l}}{h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)} \frac{\Phi_2^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} \\ = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\alpha)} \end{aligned} \quad (2.100)$$

haline gelir. Sağ yandaki terime dekompozisyon işlemi uygulamak gerekmektedir. Bunun sonucunda

$$\begin{aligned} L^+(\alpha)\Phi_1^+(\alpha) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \\ = -\frac{\Phi_1^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} + \frac{2}{\pi a} \frac{e^{i\alpha l}}{h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)} \frac{\Phi_2^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} \\ + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \left[\frac{1}{L^-(\alpha)} - \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right] \end{aligned} \quad (2.101)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin sağ yanındaki ikinci terim $\alpha = -\gamma_m$ ler hariç alt yarı-düzlemde regülerdir. Bu noktadaki kutup tekilliklerini izole etmek için

$$d_m = \frac{2}{\pi a} \frac{e^{-i\gamma_m l} \Phi_2^-(-\gamma_m)}{L^-(-\gamma_m)} \frac{1}{[h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)]'_{\alpha=-\gamma_m}} \quad (2.102)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & L^+(\alpha)\Phi_1^+(\alpha) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \gamma_m} \\ & - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \\ & = -\frac{\Phi_1^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} + \frac{2}{\pi a} \frac{e^{i\alpha l}}{h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)} \frac{\Phi_2^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \gamma_m} \\ & + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \left[\frac{1}{L^-(\alpha)} - \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right] \end{aligned} \quad (2.103)$$

yazılabilir. (2.103) denkleminin analitik devam ilkesi ve Liouville teoremi uygulandığında, (2.40) ile verilmiş bulunan ayrıt koşulları yardımıyla, (2.103) denkleminin her iki yanı da $\alpha \rightarrow \infty$ olurken $\mathcal{O}(\alpha^{-1/2})$ gibi davranmakta, doğal olarak sifira eşit bulunmaktadır. Böylelikle,

$$\begin{aligned} L^+(\alpha)\Phi_1^+(\alpha) & = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \gamma_m} \\ & + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \end{aligned} \quad (2.104)$$

ve

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi_1^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} + \frac{2}{\pi a} \frac{e^{i\alpha l}}{h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)} \frac{\Phi_2^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} & = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \gamma_m} \\ -\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\alpha - \xi_o^-)} \left[\frac{1}{L^-(\alpha)} - \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right] \end{aligned} \quad (2.105)$$

sonuçları elde edilmiş olur.

2.4. Katsayıların Belirlenmesi

Önceki bölümde matris Wiener-Hopf denkleminin zayıf faktörizasyon kavramına dayalı çözümleri elde edilmiş, ancak bu çözümler c_m ve d_m adları verilmiş olan bilinmeyen katsayılar cinsinden yazılmıştır. Bu katsayılar (2.93) ve (2.102) denklemlerini sağladıklarına ve bu denklemlerde görülen $\Phi_1^+(\alpha)$ ve $\Phi_2^-(\alpha)$ fonksiyonları için (2.96) ve (2.105) çözümleri elde edilmiş olduğuna göre, söz konusu katsayılar bulunması için bir denklem sistemi oluşturmak mümkündür. (2.96) ve (2.105) ilişkileri doğrudan (2.93) ve (2.102) denklemlerine konursa $r = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} & \frac{\pi k_2 b}{2i(\eta_1 - \eta_2)} \frac{[h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)]'_{\alpha=\gamma_r} e^{i\gamma_r l}}{N^+(\gamma_r)} c_r - \frac{1}{L^+(\gamma_r)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\gamma_r + \gamma_m} \\ & = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_0^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i(\gamma_r - \xi_0^-)} \frac{1}{L^+(\gamma_r)L^-(\xi_0^-)} \end{aligned} \quad (2.106)$$

ve

$$\frac{2}{\pi a} \frac{e^{-i\gamma_r l}}{L^-(-\gamma_r)} \frac{N^+(\gamma_r)}{[h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)]'_{\alpha=-\gamma_r}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\gamma_r + \gamma_m} + d_r = 0 \quad (2.107)$$

bulunur.

3. ALANIN ANALİZİ

Bölüm 2’de yapılan analiz sonucu istenen bölgedeki alan ifadelerini bulmak mümkündür. (2.8) ve (2.26) denklemleri bir arada düşünüldüğünde

$$u_1(\rho, z) = \int_L A(\alpha) J_0[H(\alpha)\rho] e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.1)$$

bulunur. Burada görülen $A(\alpha)$ için (2.50) eşitliği dikkate alınırsa

$$u_1(\rho, z) = - \int_L \frac{\Phi_1^+(\alpha)}{H(\alpha) J_1[H(\alpha)a]} J_0[H(\alpha)\rho] e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.2)$$

elde edilir. $u_1(\rho, z)$ alanının $z < 0$ için çözümünden yansıma katsayısı, $z > 0$ için çözümünden ise iletim katsayısı belirlenir. Buna göre, $z < 0$ için Jordan lemması uyarınca L eğrisini üst yarı-düzlemde kapatmak uygundur. İntegralin sonucu, integrandın üst yarı-düzlemde bulunan kutuplarının rezidü katkısından ibaret olacaktır. $\Phi_1^+(\alpha)$ için (2.105) ile belirli çözüm yerine konursa

$$u_1(\rho, z) = - \int_L \frac{J_0[H(\alpha)\rho]}{H(\alpha) J_1[H(\alpha)a] L^+(\alpha)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \gamma_m} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1} \right)^2 \frac{1}{2\pi i (\alpha - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right\} e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.3)$$

bulunur. (3.3) ifadesindeki integrandın üst yarı-düzlemdeki kutupları yalnızca

$$H(\beta_n) J_1[H(\beta_n)a] = 0 \quad (3.4)$$

denklemini sağlayan $\alpha = \beta_n$ noktalarıdır. Bunların rezidü katkısından

$$u_1(\rho, z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi i}{\{H(\alpha) J_1[H(\alpha)a]\}'_{\alpha=\beta_n}} \frac{J_0[H(\beta_n)\rho] e^{-i\beta_n z}}{L^+(\beta_n)} \quad (3.5)$$

$$\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\beta_n + \gamma_m} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1} \right)^2 \frac{1}{2\pi i (\beta_n - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right\}$$

elde edilir. Temel mod için $\beta_1 = k_1/(1 - M)$ olduğu dikkate alınır ve ξ_o^- için de (2.4) ilişkisi yerine konursa

$$\frac{d\{H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]\}}{d\alpha} = H(\alpha)aJ_o[H(\alpha)a] \frac{dH(\alpha)}{d\alpha} \quad (3.6)$$

olmak üzere

$$R = \frac{1}{k_1 a L^+(\beta_1)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\beta_1 + \gamma_m} + \frac{\varrho_1 (1 - M)}{\varrho_2 (1 + M)} \frac{1}{4\pi i k_1 L^-(\xi_o^-)} \right\} \quad (3.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $z > 0$ için Jordan lemması uyarınca L eğrisini alt yarı-düzlemden kapatmak uygundur. İntegralin sonucu, integrandın alt yarı-düzlemde bulunan kutuplarının rezidü katkısından ibaret olacaktır. (3.3) ile verilmiş olan integral yeniden düzenlenirse

$$u_1(\rho, z) = - \int_L \frac{J_o[H(\alpha)\rho]L^-(\alpha)}{H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]L(\alpha)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \gamma_m} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1} \right)^2 \frac{1}{2\pi i (\alpha - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right\} e^{-iaz} d\alpha \quad (3.8)$$

yazılabilir. Bu durumda, integrandın alt yarı-düzlemde bulunan kutupları yalnızca

$$L(-\alpha_n) = 0 \quad (3.9)$$

denklemini sağlayan $\alpha = \alpha_n^{(-)}$ ($Im \alpha_n^{(-)} < 0$) ve $\alpha = \xi_o^-$ noktalarıdır. Bunların rezidü katkısından

$$\begin{aligned}
W(\alpha) = M_0(\eta_2, \alpha) H J_1[H(\alpha)a] + \frac{\varrho_1 i \eta_p}{\varrho_2 k_1} h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha) H(\alpha) J_1[H(\alpha)a] \\
- \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\alpha}{k_1}\right)^2 J_0[H(\alpha)a] h(\alpha) M_1(\eta_2, \alpha)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
u_1(\rho, z) = -e^{-i\xi_o^- z} + 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\alpha_n^{(-)} z} \\
\times \frac{J_0[H(\alpha_n^{(-)})\rho] h(\alpha_n^{(-)}) M_1(\eta_2, \alpha_n^{(-)}) L^-(\alpha_n^{(-)})}{W'(\alpha_n^{(-)})} \\
\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\gamma_m + \alpha_n^{(-)}} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i (\alpha_n - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (3.11) denkleminin sağ yanındaki ilk terim gelen dalgayı yok etmektedir. İkinci terimde ise temel mod için α_1 yerine konursa iletim katsayısı için

$$\begin{aligned}
T = 2\pi i \frac{h(\alpha_1^{(-)}) M_1(\eta_2, \alpha_1^{(-)}) L^-(\alpha_1^{(-)})}{W'(\alpha_1^{(-)})} \\
\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\gamma_m + \alpha_1^{(-)}} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \left(1 + M \frac{\xi_o^-}{k_1}\right)^2 \frac{1}{2\pi i (\alpha_1^{(-)} - \xi_o^-)} \frac{1}{L^-(\xi_o^-)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur.

4. SAYISAL HESAPLAMALAR

Bu çalışmada, sayısal hesaplamalar C++ programlama dilinde yapılmıştır. Öncelikle çekirdek fonksiyonlarının sıfırları ve kutuplarını hesaplayan programlar hazırlanmış, ardından bunlar kullanılarak lineer denklem sistemleri çözülmüş ve c_m ve d_m katsayıları belirlenmiştir. Son olarak bu katsayılar (3.7) ve (3.12) ilişkilerinde görüldüğü gibi yerine konmuş, iletim ve yansıma katsayıları hesaplanmıştır.

(2.89) ile belirli çekirdek fonksiyonun sıfırlarının, yani $\alpha_m^{(\pm)}$ lerin bulunması oldukça ayrıntılı ve aşamalı bir biçimde gerçekleştirilmiştir. Bu çekirdek fonksiyonun sıfırları hem kompleks sayılardır, hem de kompleks düzlemin üst ve alt yarı-düzlemlerinde simetrik bir biçimde yayılmamaktadır. Dolayısıyla, bu köklerin bulunması Sekant ya da Newton-Raphson gibi yöntemlerle mümkündür. Bu çalışmada izlenen yol ise aşamalıdır. Öncelikle Mach sayısının, η_2 ve η_p değerlerinin sıfıra eşit olduğu durum için “orta-nokta” (bisection) yöntemi ile kökler tespit edilmiştir. Böyle bir durumda çekirdek fonksiyonu $h = h(\alpha)$ olmak üzere

$$L(\alpha) = \frac{J_0(ha)Y_1(hb) - Y_0(ha)J_1(hb)}{h[J_1(ha)Y_1(hb) - Y_1(ha)J_1(hb)]} - \frac{\varrho_1 J_0(ha)}{\varrho_2 hJ_1(ha)} \quad (4.1)$$

olmaktadır. Bu fonksiyonun sıfırları

$$hJ_1(ha)[J_0(ha)Y_1(hb) - Y_0(ha)J_1(hb)] - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} hJ_0(ha)[J_1(ha)Y_1(hb) - Y_1(ha)J_1(hb)] = 0 \quad (4.2)$$

denklemini sağlamaktadır. Bu denklemin kökleri orta-nokta yöntemi ile kolaylıkla elde edilebilir. (4.2)’de $h(\alpha) = 0$ ın denklemin bir kökü olup olmadığını anlamak için Bessel ve Neumann fonksiyonlarının küçük argümanlar için davranışını göz önünde bulundurmak gerekir. Küçük z ’ler için

$$J_n(z) \sim \frac{(z/2)^n}{n!} \quad (4.3)$$

ve

$$Y_0(z) \sim \frac{2 \log z}{\pi}, \quad Y_n(z) \sim \frac{-(n-1)! (z/2)^{-n}}{\pi} \quad (4.4)$$

olduğuna göre (4.2) denklemi

$$h \frac{ha}{2} \left[\frac{2}{\pi hb} - \frac{hb \log ha}{\pi} \right] - \frac{q_1}{q_2} h \left[\frac{a}{\pi b} - \frac{b}{\pi a} \right] = 0 \quad (4.5)$$

haline gelir. Görülmektedir ki, $h(\alpha) = 0$, dolayısıyla $\alpha_0^\pm = \pm k_2$ (4.2) denkleminin birer köküdür.

Ardından önce η_2 , daha sonra Mach sayısı ve son olarak η_p yavaş yavaş gerçek değerlerine artırılmış ve her adımda Newton-Raphson yöntemi ile kökler izlenmiştir. Neticede elde edilen kökler sanal kısımlarına göre sıraya dizilmiş ve tekrar edenler ayıklanmıştır (Newton-Raphson yönteminin iteratif özelliği nedeniyle bazı kökler birden çok kez bulunabilir). Delikli tüpü karakterize eden η_p değeri frekans, Mach sayısı, deliklerin çapı gibi parametrelere bağlı olmalıdır. Bunun değeri için bu çalışmada akışkanlı ortamlarda

$$\eta_p = \frac{1}{\sigma} [7.337 \times 10^{-3}(1 + 72.23M) + i2.2245 \times 10^{-5}(1 + 51t_w)(1 + 204d_h)f] \quad (4.6)$$

$M = 0$ olduğu durumda ise

$$\eta_p = \frac{1}{\sigma} [0.006 - ik_1(t_w + 0.75d_h)] \quad (4.7)$$

eşitliği dikkate alınacaktır [Sullivan&Crocker, 1978], [Sullivan&Crocker, 1979]. Bu ifadelerde t_w delikli tüpün kalınlığını, d_h tüpteki deliklerin çapını, σ ise gözenekliliği (porozite, deliklerin sıklığı) göstermektedir.

Çekirdek fonksiyonun kutupları iki grupta düşünülmüştür. Birinci grup, $H(\alpha)J_1[H(\alpha)a]$ fonksiyonunu sıfır yapan değerlerdir. Bunlar, Bessel fonksiyonlarının sıfırlarının bilinmesi sayesinde, analitik olarak da hesaplanabilir. $J_1(\alpha)$ fonksiyonunun kökleri $j_m^{(1)}$ ise, söz konusu fonksiyonu sıfır yapan α değerleri

$$\beta_1^{(+)} = \frac{k_1}{1-M}, \quad \beta_1^{(-)} = -\frac{k_1}{1+M} \quad (4.8)$$

ve

$$\beta_m^{(\pm)} = \frac{k_1 M \mp \sqrt{k_1^2 - (1-M^2) \left(j_m^{(1)}/a\right)^2}}{(1-M^2)} \quad m = 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Çekirdek fonksiyonun kutuplarında ikinci grup ise $h(\alpha)M_1(\eta_2, \alpha)$ fonksiyonunu sıfır yapan değerlerdir. Bunlar da önce η_2 sıfır kabul edilerek ortanokta yöntemi ile belirlenmiş, bu sonuçlar ilk değer olarak kullanılarak η_2 yavaş yavaş olması gereken değere artırılmış, Newton-Raphson yöntemi ile nihai kutuplar, $\gamma_m^{(\pm)}$ ler hesaplanmıştır.

Sayısal hesaplamalarda bir başka önemli aşama da muhtemel kararsız kökün yerinin tespit edilmesidir. Bunun için öncelikle çekirdek fonksiyonun büyük α 'lar için asimptotik ifadesi çıkarılmış, çıkan ifadeyi sıfır yapan α 'lar aranmıştır. Çekirdek fonksiyonun büyük argümanlar için asimptotik ifadesini elde etmek için Bessel fonksiyonlarının büyük argümanlar için sahip oldukları

$$J_n(z) \approx \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-1/2} \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.10)$$

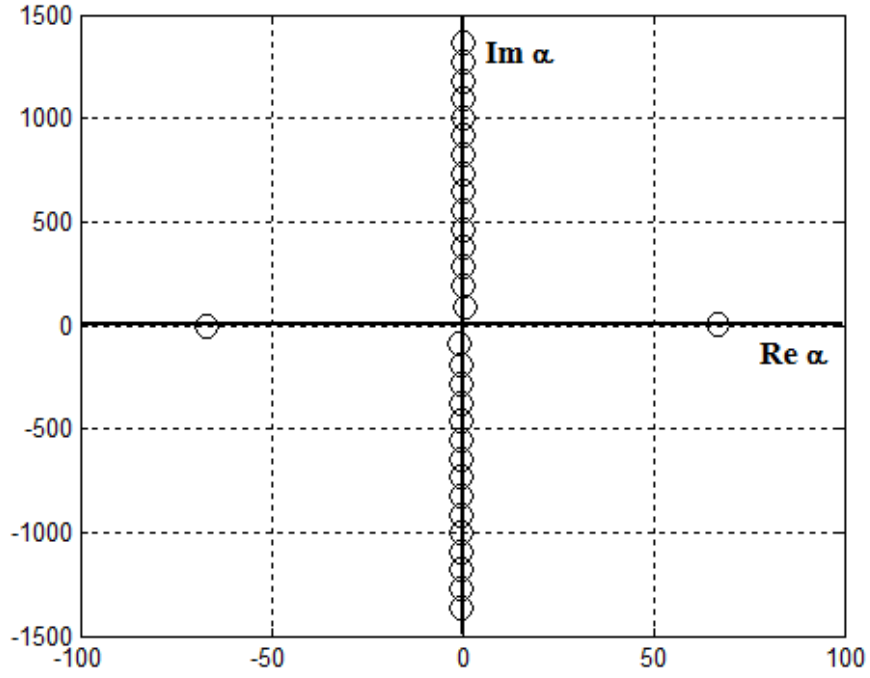
ve

$$Y_n(z) \approx \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-1/2} \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.11)$$

yaklaşıklıkları kullanılarak

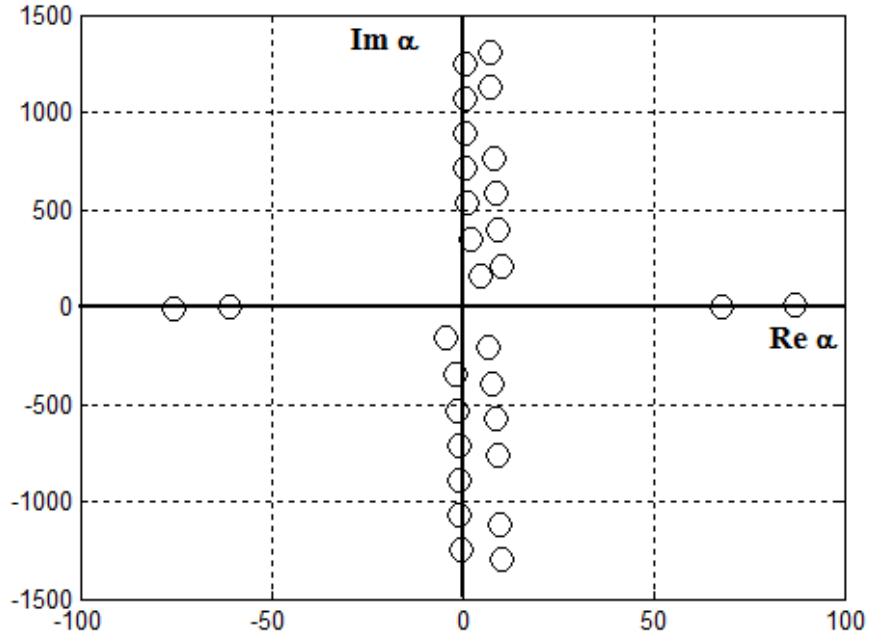
$$H(\alpha) \pm \left(1 + \frac{M\alpha}{k_1}\right)^2 h(\alpha) = 0 \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu denklemlerin birer kökü sıfırda (büyük argüman şartına uymadığından bunlar gerçekte aranılan kökler arasında değildir), diğer kökleri ise ikinci ve üçüncü çeyreklerde. Üçüncü çeyrekteki kök $ImH(\alpha) > 0$ ve $Imh(\alpha) > 0$ şartlarını bozmaktadır. Bu nedenle bu çeyrekteki kökler de aranılan kök olamazlar. Sonuç olarak, ikinci çeyrekteki kök elde kalan tek kök olur. Bunun grafiksel incelemesi de gerçekleştirilmiştir. Bu analiz temel olarak [Munt, 1977] dikkate alınarak yapılmıştır. Adı geçen çalışmada (3.4) ve (3.5) olarak numaralandırılmış denklemler ile yukarıdaki (4.12) denklemleri arasındaki ilişki, yukarıdaki denklemlerde $\alpha = -uk$, [Munt, 1977]'deki (3.4) ve (3.5)'te ise $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ ve $C = 1$ yazılarak kurulabilir. [Munt, 1977]'deki analizde, elde edilen tek kök birinci çeyrektedir. Bu durumda, $\alpha = -uk$ ilişkisi gereği (4.12) için şartları sağlayan tek kökün ikinci değil, üçüncü çeyrekte olması gerektiği anlaşılır. Demek ki, adı geçen kök, alt yarı-düzlemde olması gereken, ancak üst yarı-düzlemde bulunan, dolayısıyla kararsızlığa sebep olan bir köktür. Burada yapılan değerlendirmelerin benzeri de [Nilsson&Brander, 1981a]'da görülebilir. Çekirdek fonksiyonun sıfırlarının kompleks düzlemde gözlemlenmesi amacıyla, çeşitli değerler için Şekil 4-1, Şekil 4-2 ve Şekil 4-3 hazırlanmıştır.



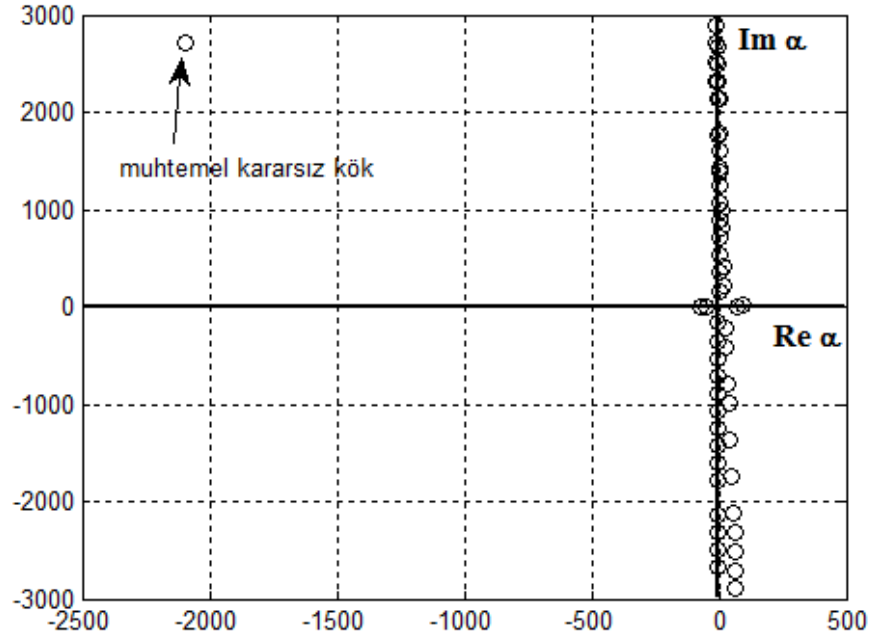
Şekil 4-1. Sıfırların kompleks düzlemde dağılımı.

Şekil 4-1'de gaz akışı olmadığı durumda, bir başka deyişle $M = 0$ için, $\eta_p = 0$, $ka = 1$, $kb = 2$ ve $\eta_1 = 1/0.3i$ değerleri verilerek çekirdek fonksiyonun sıfırları incelenmiştir. Burada reel eksen üzerinde simetrik birer kök görülmektedir. Bunların dışındaki tüm kökler tam sanal eksen üzerine sıralı ve simetrik olarak dizilmektedir. Gerçekten de gaz akışı olmayan bir durumda sonuçlar böyle çıkacaktır.



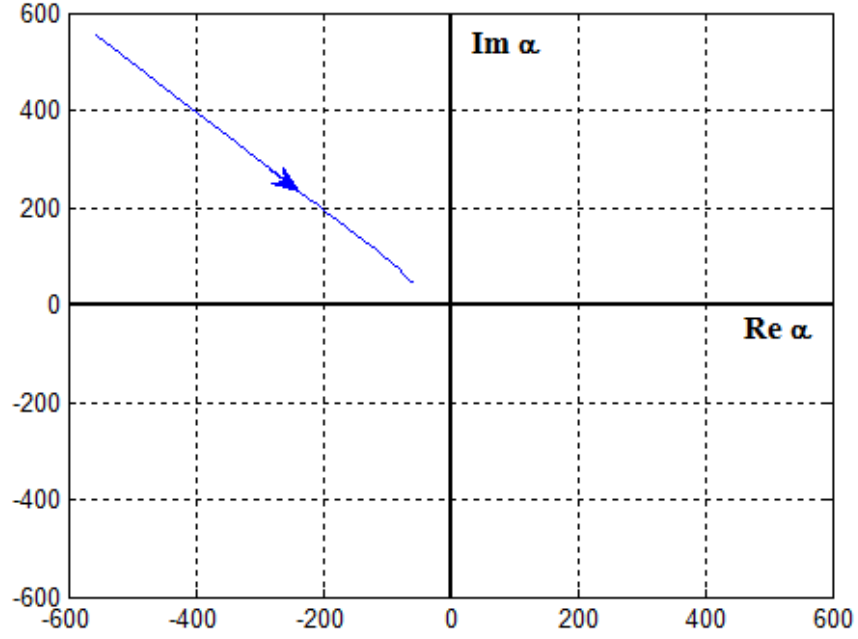
Şekil 4-2. Sıfırların kompleks düzlemde dağılımı.

Şekil 4-2’de gaz akışının olduğu durum için $M = 0.1$, $ka = 1$, $kb = 2$ ve $\eta_1 = 1/0.3i$ ve $\eta_2 = 1/(0.5 + 3i)$ değerleri verilerek, çekirdek fonksiyonun sıfırlarının kompleks düzlemdeki dağılımı incelenmiştir. Burada delikli tüpü karakterize eden η_p değeri de (4.6) ilişkisi ile belirlidir. Şekilden de görüldüğü gibi Şekil 4-1’de sanal eksen üzerindeki köklerden reel eksene en yakın olanı bulunduğu yerden sapmış ve reel eksen civarına orijinden uzağa yerleşmiştir. Bu kökler artık simetrik değildir.



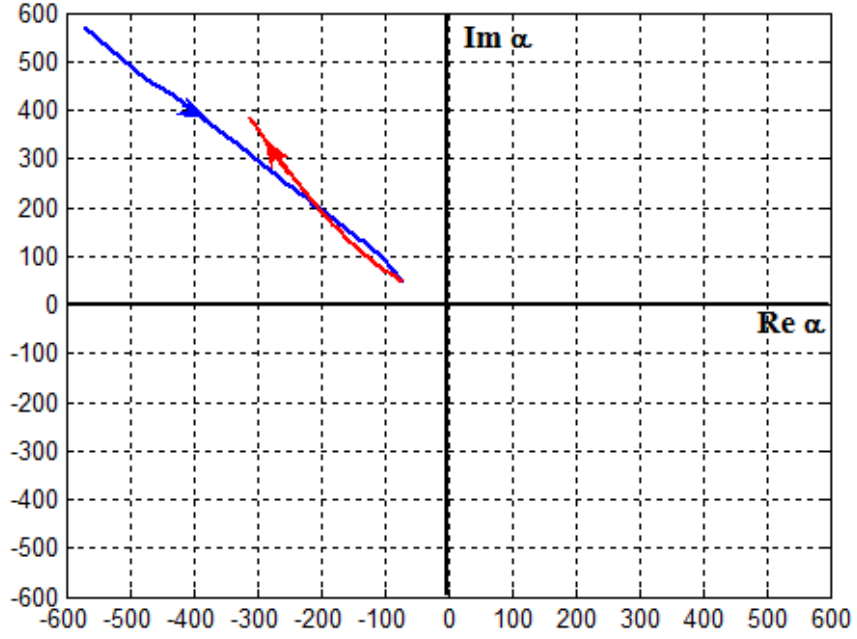
Şekil 4-3. Sıfırların kompleks düzlemde dağılımı.

Şekil 4-3'te gaz akışının olduğu durum için $M = 0.3$, $ka = 1$, $kb = 2$ ve $\eta_1 = 1/0.3i$ ve $\eta_2 = 1/(0.5 + 3i)$ değerleri verilerek, çekirdek fonksiyonun sıfırlarının kompleks düzlemdeki dağılımı incelenmiştir.



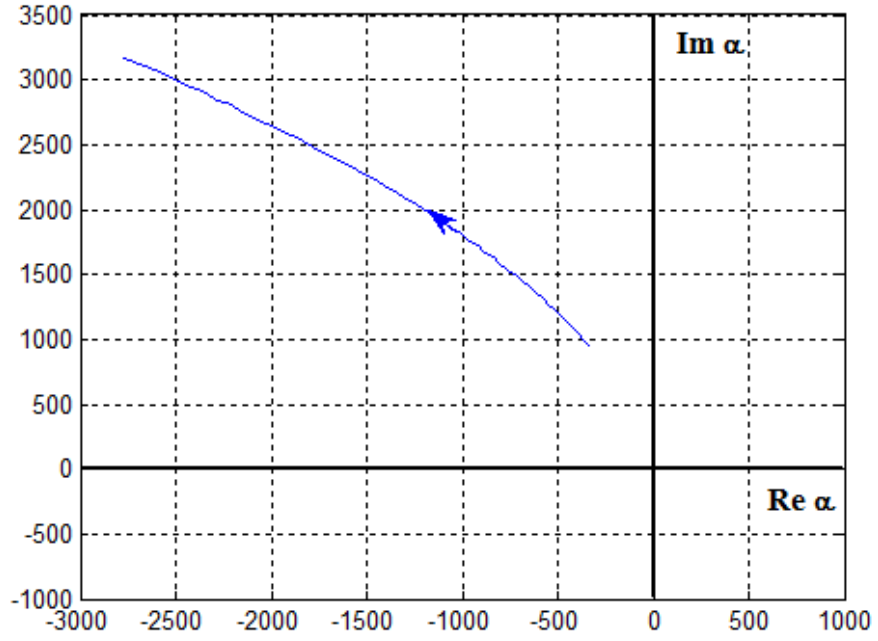
Şekil 4-4. Kararsız kökün hareketi.

Şekil 4-4'te, kararsız kökün Mach sayısına göre davranışı, $ka = 2$, $kb = 3$ ve $\eta_1 = 1/0.3i$ ve $\eta_2 = 1/3i$ değerleri verilerek incelenmiştir. Söz konusu muhtemel kararsız kökün hareketini izleyebilmek için öncelikle delikli tüpün olmadığı durum ($\eta_p = 0$) düşünülmüştür. Bu durumda Mach sayısı arttıkça (0'dan 0.9'a) kararsız kökün reel eksene gittikçe yaklaştığı gözlenmiştir.



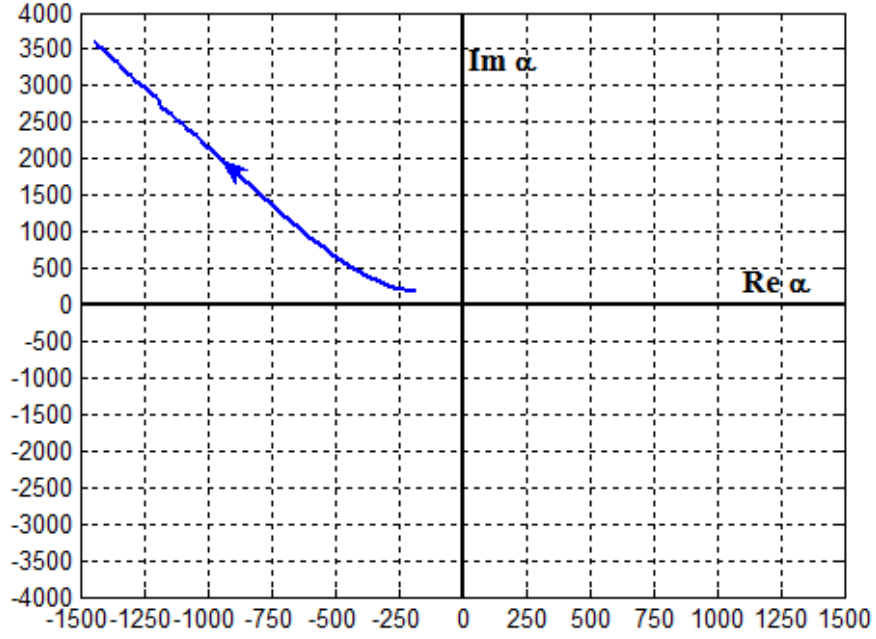
Şekil 4-5. Kararsız kökün hareketi.

Şekil 4-5'te delikli tüpün etkisinin ortaya çıkarılması için $M = 0.9$ iken η_p yavaş yavaş olması gereken değere artırılmış ve kararsız kökün hareketi izlenmiştir. Diğer parametrelere Şekil 4-4 için verilenlerle aynı değerler verilmiştir. Şekil 4-5'te görüldüğü gibi Mach 0.9'a gelirken kök reel eksene yaklaşmış (mavi eğri), η_p 'nin artmasıyla yeniden uzaklaşmıştır (kırmızı eğri).



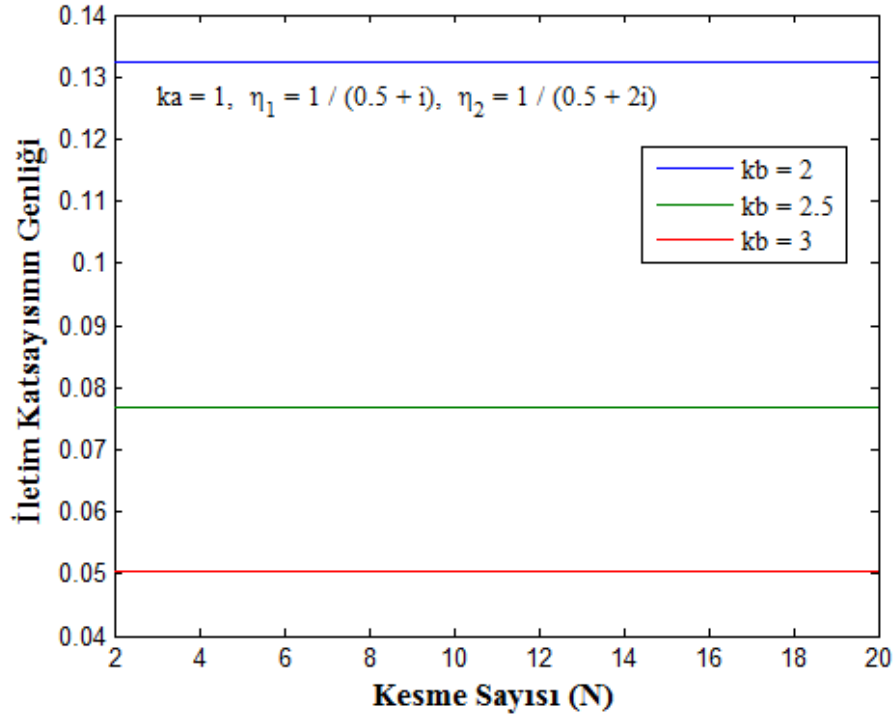
Şekil 4-6. Kararsız kökün kb arttıkça hareketi.

Şekil 4-6'da kararsız kökün kb arttıkça hareketi incelenmiştir. Burada $kb = 2$ den $kb = 5$ e artırılmış, $M = 0.3$, diğer parametreler için ise Şekil 4-4'teki değerler kullanılmıştır.



Şekil 4-7. Kökün frekans arttıkça hareketi.

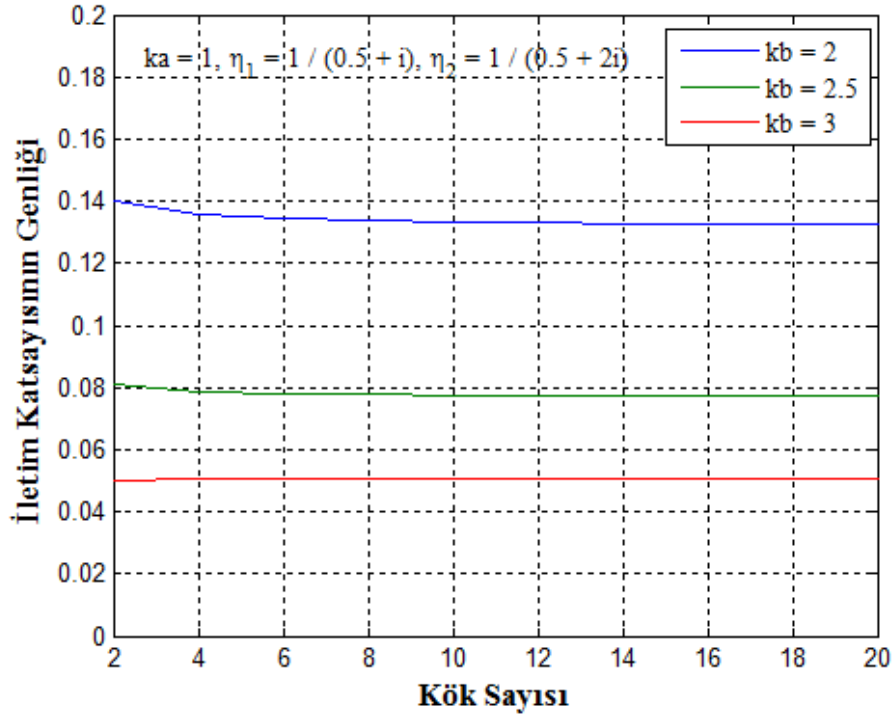
Şekil 4-7’de kararsız kökün frekans arttıkça hareketi incelenmiştir. Burada $M = 0.3$, diğer parametreler için ise Şekil 4-4’teki değerler kullanılmıştır.



Şekil 4-8. Kesme sayısına göre iletim katsayısının değişimi.

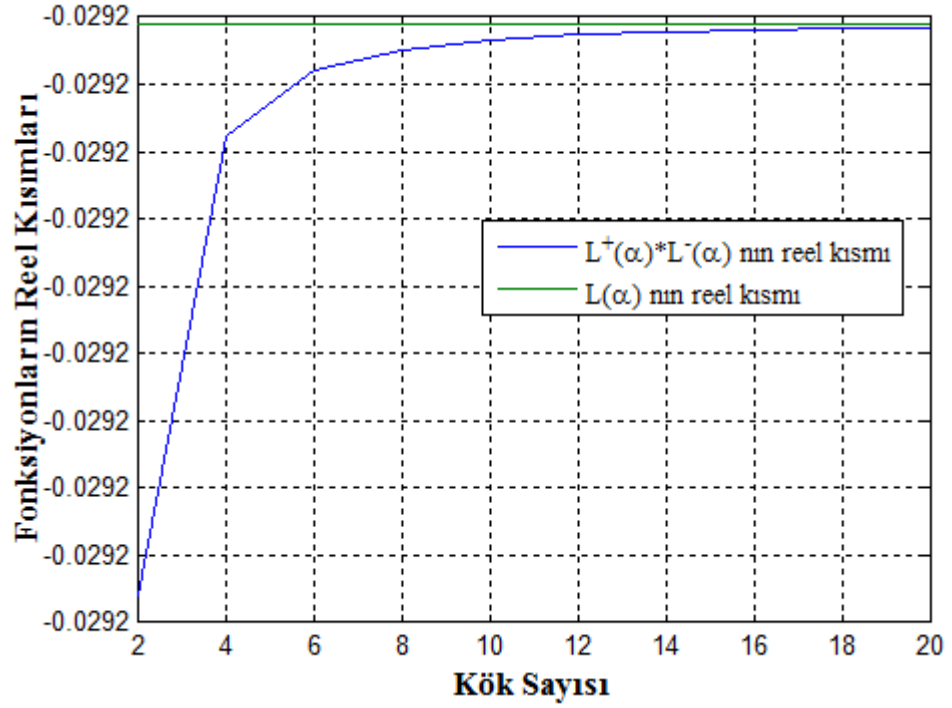
Sayısal hesaplamalarda, lineer denklem sisteminin boyutu ve dikkate alınacak kök sayısına göre de sonuçların nasıl değiştiği incelenmiştir. Kesme sayısına (sonsuz toplamda alınan terim sayısına) göre değişim Şekil 4-8'de görülmektedir.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, kesme sayısı için 4 almak bile sonucun yakınsamasına yetmektedir. Nitekim 4'ten itibaren sonuç hemen hemen hiç değişmemektedir.



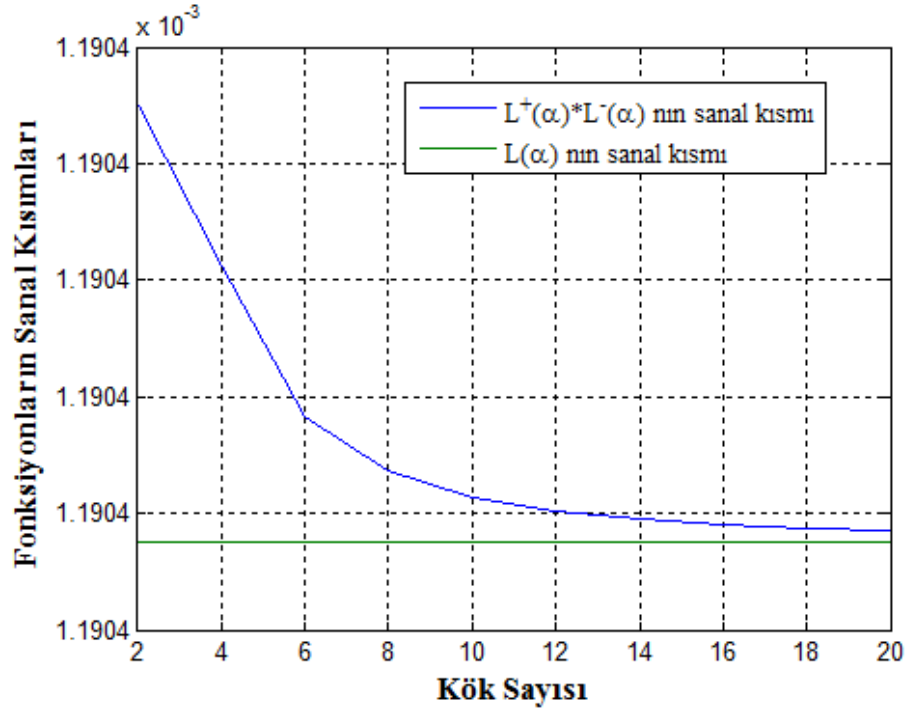
Şekil 4-9. Kök sayısına göre iletim katsayısının değişimi.

Şekil 4-9’da görüldüğü gibi hesaba katılan kök sayısına, dolayısıyla c_m ve d_m katsayıları bulunurken kurulan lineer denklem sisteminin boyutuna göre iletim katsayısının genliğinin yakınsaması oldukça hızlıdır. Kök sayısı 10’dan sonra sonuç hemen hemen hiç değişmemektedir.



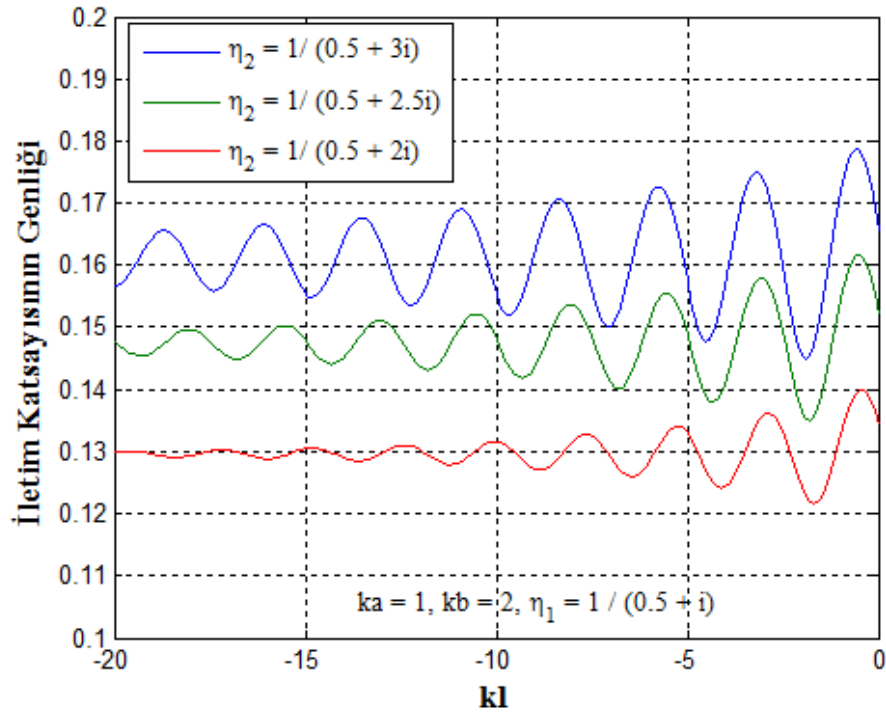
Şekil 4-10. Kök sayısına göre faktörizasyonun tutarlılığı (reel kısım).

Şekil 4-10'da hesaba katılan kök sayısına göre faktörizasyonun tutarlılığı da incelenmiştir. Şekildeki yeşil eğri $L(\alpha)$ nin reel kısmını göstermektedir. Faktörizasyon işlemi sonucu belirlenen çarpanların çarpımı olan $L^+(\alpha)L^-(\alpha)$ nin reel kısmı ise mavi eğri ile gösterilmektedir. Dikey eksende her bir adımda aynı sayı görülmektedir. Nedeni, sonuçların virgülden sonra en az beşinci basamakta farklılık göstermeleridir.



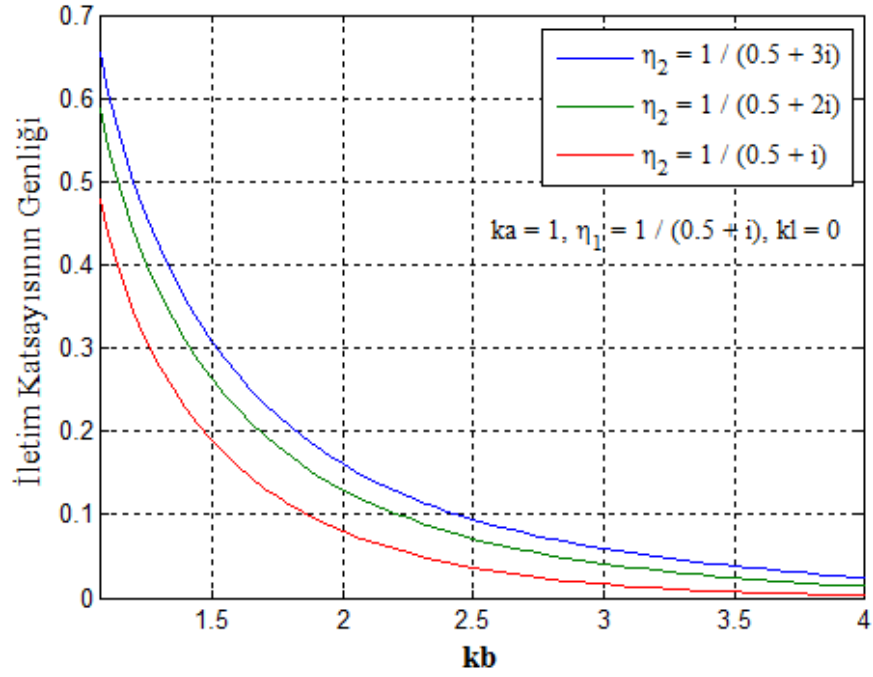
Şekil 4-11. Kök sayısına göre faktörizasyonun tutarlılığı (sanal kısım).

Şekil 4-11'de ise Şekil 4-10'dakine benzer bir analiz $L(\alpha)$ çekirdek fonksiyonunun sanal kısmına ilişkin yapılmıştır. Bu şekilde de dikey eksendeki hassasiyet oldukça fazladır ve $L(\alpha)$ nin sanal kısmı ile $L^+(\alpha)L^-(\alpha)$ nin sanal kısmı arasındaki fark virgülden sonra yedinci basamak mertebesinde. Bir başka deyişle, kök sayısına göre yakınsama çok hızlıdır.



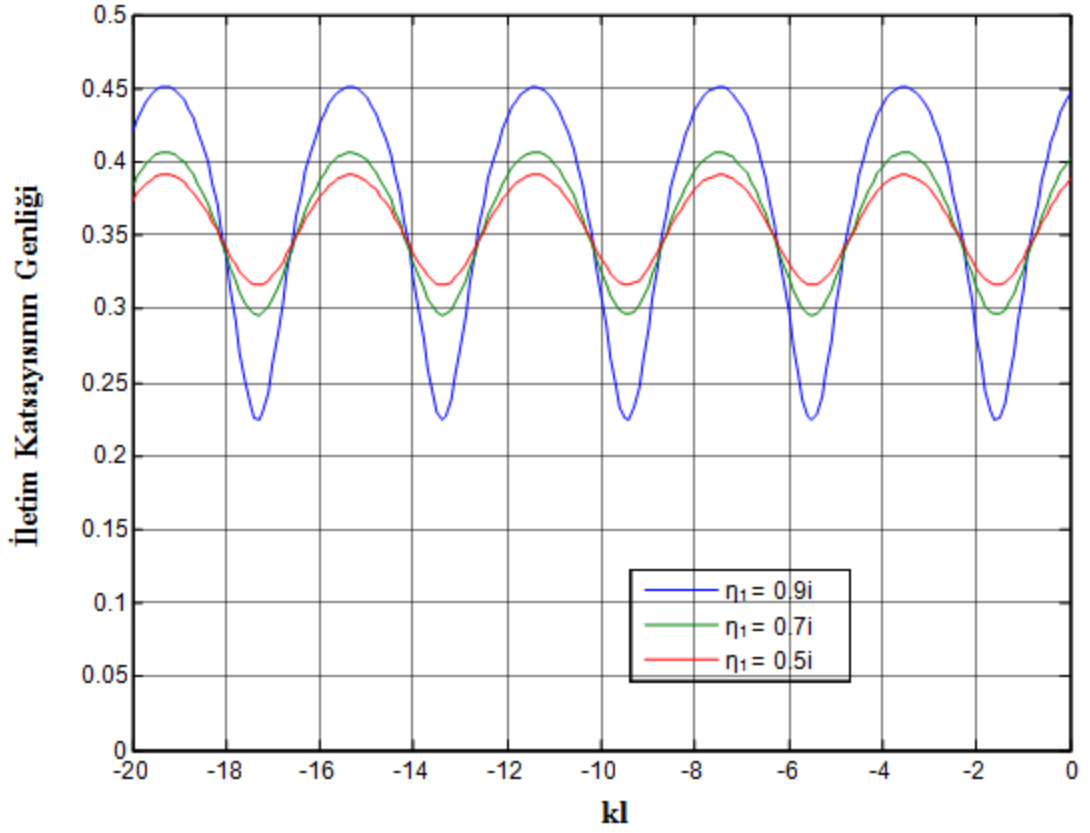
Şekil 4-12. $M = 0$ için iletim katsayısının kl ye göre değişimi.

Problemde bir gaz akışı mevcut değilken, bir başka deyişle Mach sayısı sıfıra eşitken ve bir delikli tüp bulunmuyorken elde edilecek sayısal sonuçların, geçmişte yapılmış çalışmalarla uyumluluk göstermesi, hesapların doğruluğunu göstermek bakımından önemlidir. Bu amaçla, bu çalışmada Mach sayısı ve η_p sıfıra eşitken bazı grafikler üretilmiştir. Şekil 4-12’de $ka = 1$, $kb = 2$, $\eta_1 = 1/(0.5 + i)$ ve çeşitli η_2 değerleri için iletim katsayısının kl ye göre değişimi görülmektedir. Bu sonuçlar [Demir&Büyükaksoy, 2006] çalışmasındaki sayısal sonuçlar ile tamamen uyumludur.



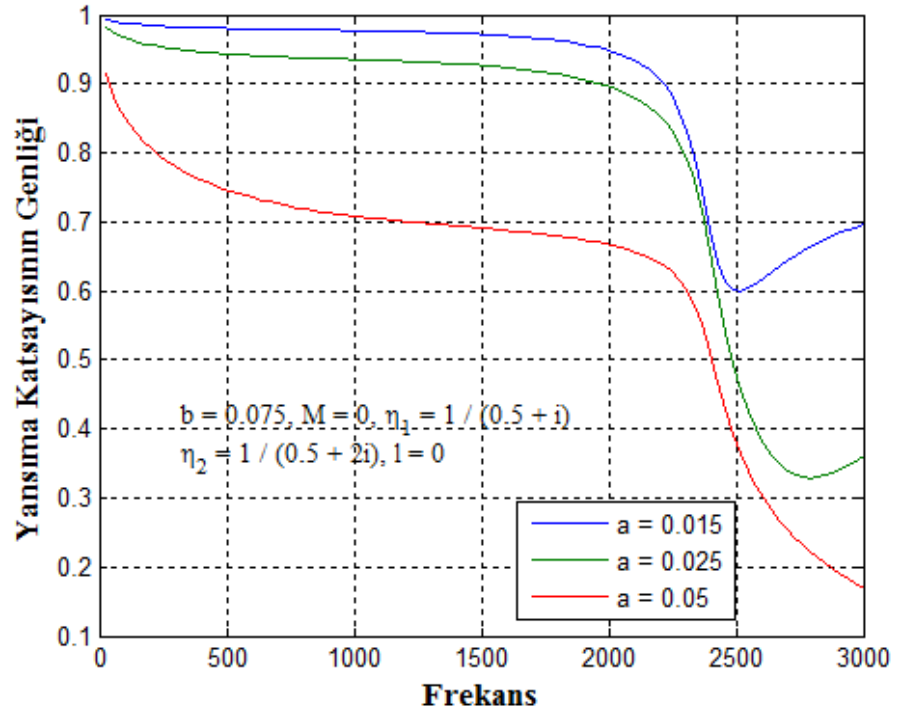
Şekil 4-13. $M = 0$ için iletim katsayısının kb ye göre değişimi

Şekil 4-13'te $ka = 1$, $kl = 0$, $\eta_1 = 1/(0.5 + i)$ ve çeşitli η_2 değerleri için iletim katsayısının kb ye göre değişimi görülmektedir. Bu sonuçlar [Demir&Büyükaksoy, 2006] çalışmasındaki sayısal sonuçlar ile tamamen uyumludur.



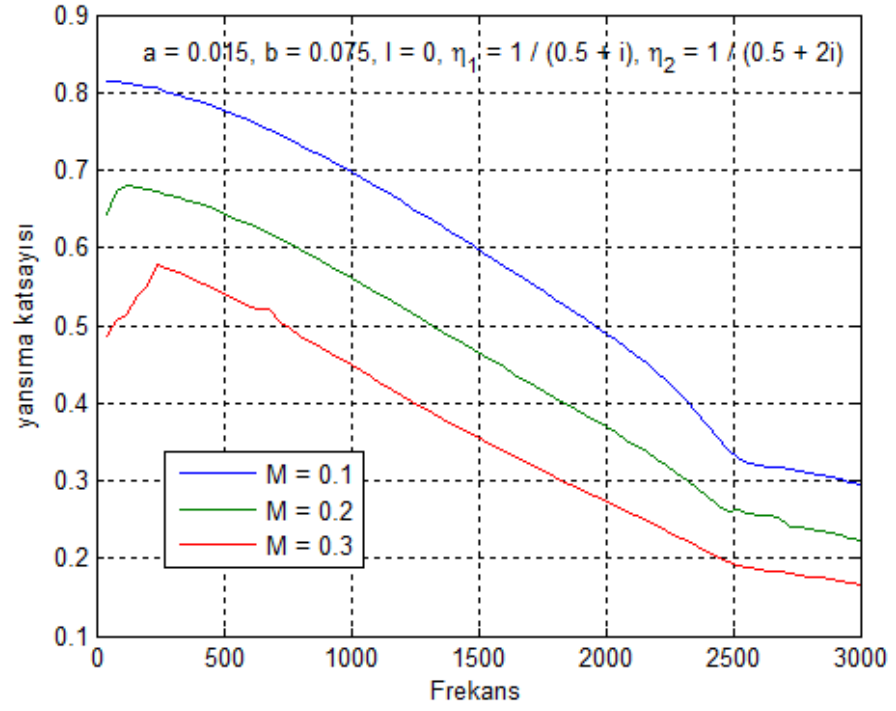
Şekil 4-14 . İletim katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.

Şekil 4-14'te $M = 0$, $ka = 1$, $kb = 2$, $\eta_2 = 1/(0.3i)$ ve çeşitli η_1 değerleri için iletim katsayısının kl ye göre değişimi görülmektedir. Bu sonuçlar [Demir&Büyükaksoy, 2006] çalışmasındaki sayısal sonuçlar ile tamamen uyumludur.



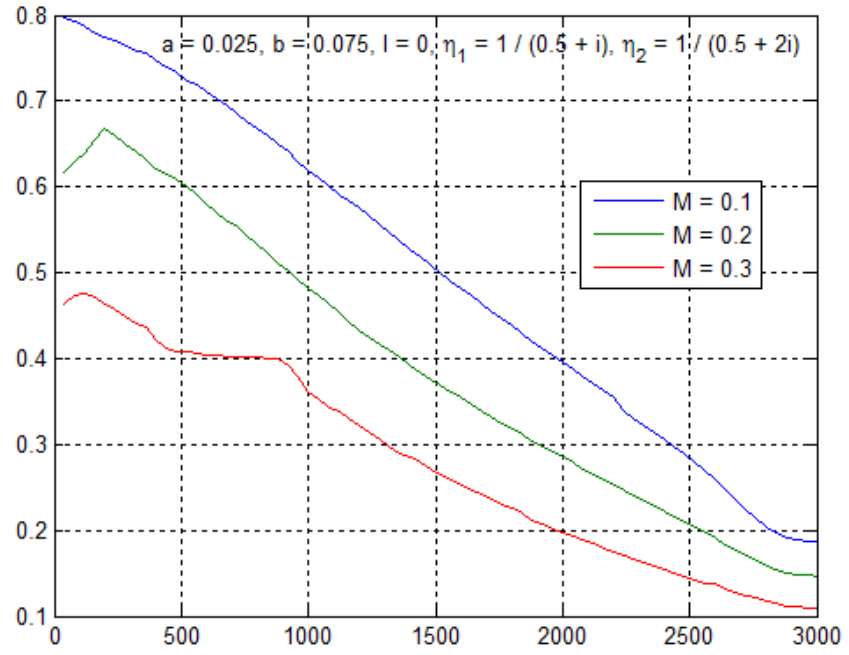
Şekil 4-15. Yansımaya katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-15'te Mach sayısı sıfıra eşitken çeşitli a değerleri için yansımaya katsayısının genliğinin değişimi gösterilmektedir. Burada görülen sonuçlar 2008 tarihli, "Propagation of waves in a bifurcated cylindrical waveguide with wall impedance discontinuity" başlıklı çalışmadaki sonuçlarla tamamen uyumludur.



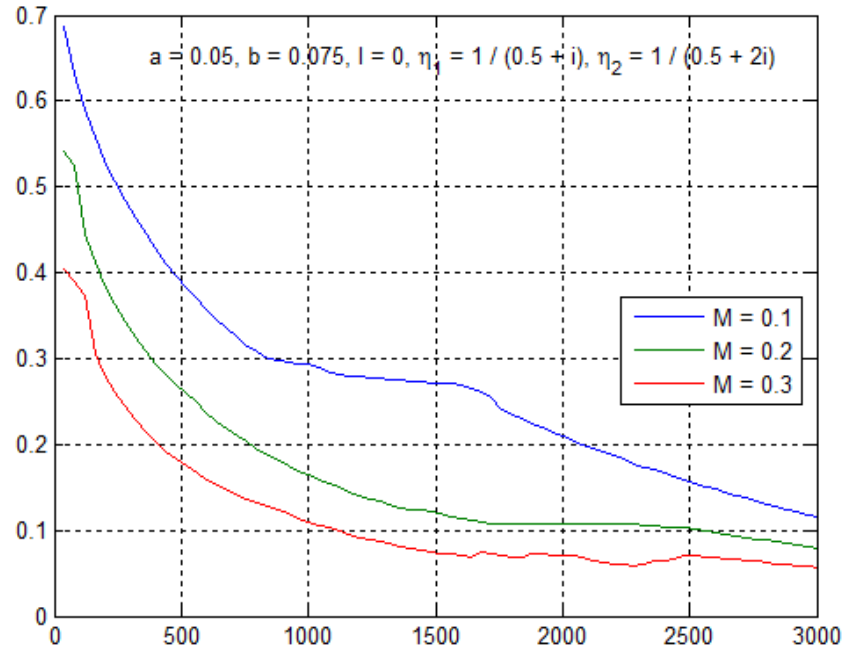
Şekil 4-16. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-16'da $a = 0.015$, $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.00249$ ve $\sigma = 0.037$ için yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi gösterilmektedir (diğer değerler şekil üstünde belirtilmiştir). Görülmektedir ki, Mach sayısı arttıkça yansıma katsayısının genliği düşmektedir.



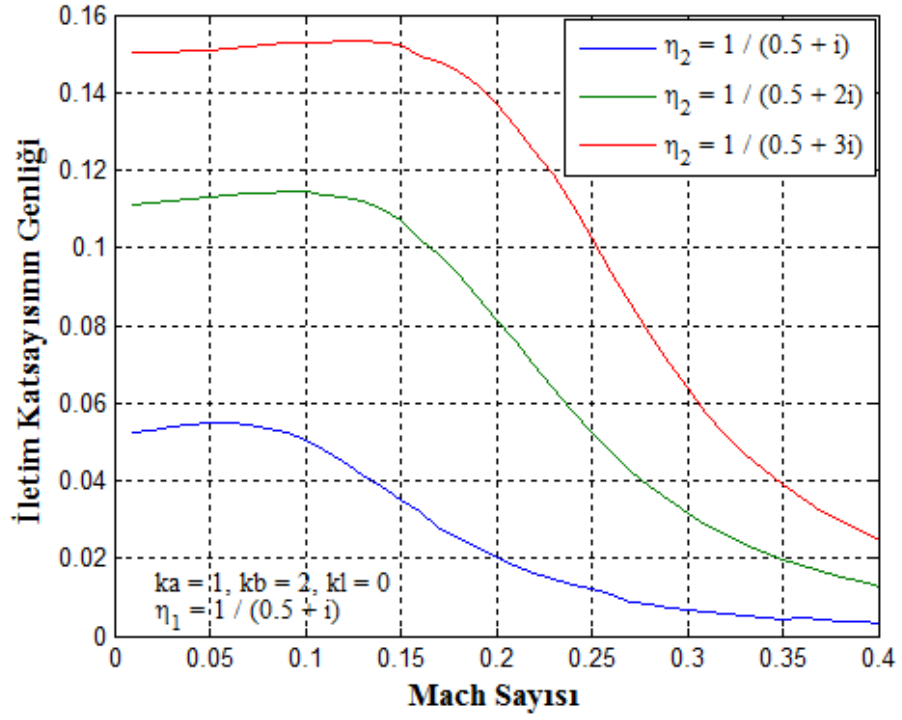
Şekil 4-17. Yansımaya katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-17’de $a = 0.025$, $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.00249$ ve $\sigma = 0.037$ için yansımaya katsayısının genliğinin frekans ile değişimi gösterilmektedir (diğer değerler şekil üstünde belirtilmiştir). Görülmektedir ki, Mach sayısı arttıkça yansımaya katsayısının genliği düşmektedir.



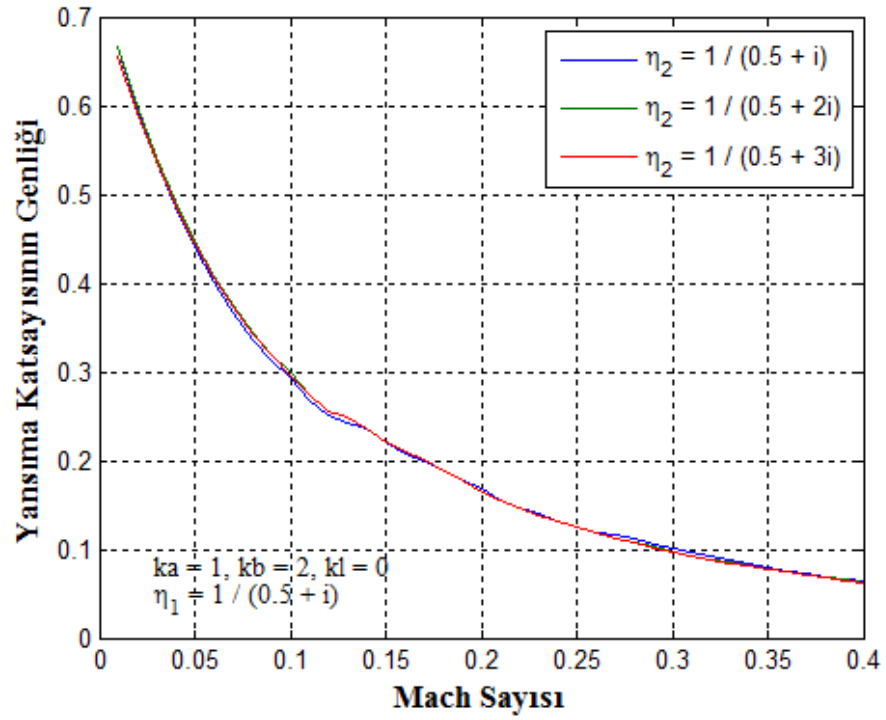
Şekil 4-18. Yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-18’de $a = 0.05$, $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.00249$ ve $\sigma = 0.037$ için yansıma katsayısının genliğinin frekans ile değişimi gösterilmektedir (diğer değerler şekil üstünde belirtilmiştir). Görülmektedir ki, Mach sayısı arttıkça yansıma katsayısının genliği düşmektedir.



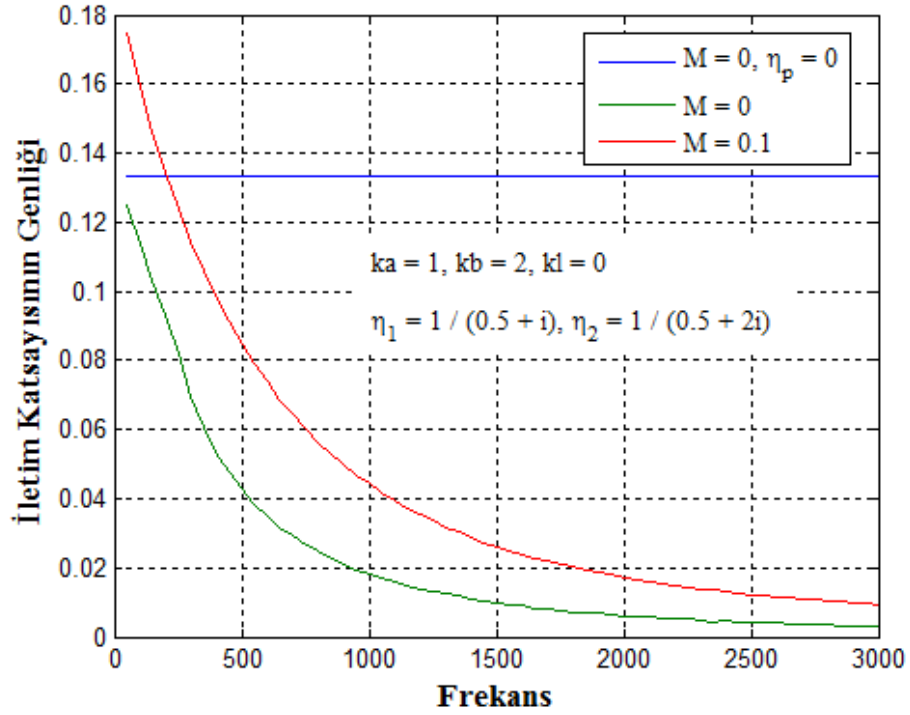
Şekil 4-19. İletim katsayısının genliğinin Mach sayısı ile değişimi.

Şekil 4-19’da iletim katsayısının genliğinin çeşitli η_2 değerleri için Mach sayısına göre değişimi gösterilmektedir. Bu şekilde $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.0249$ ve $\sigma = 0.057$ değerleri kullanılmıştır. Görüldüğü gibi Mach sayısı artarken başta iletim katsayısı çok yavaş da olsa artmaktadır. Ancak Mach sayısının belli bir değerinden sonra iletim katsayısı hızla düşmektedir.



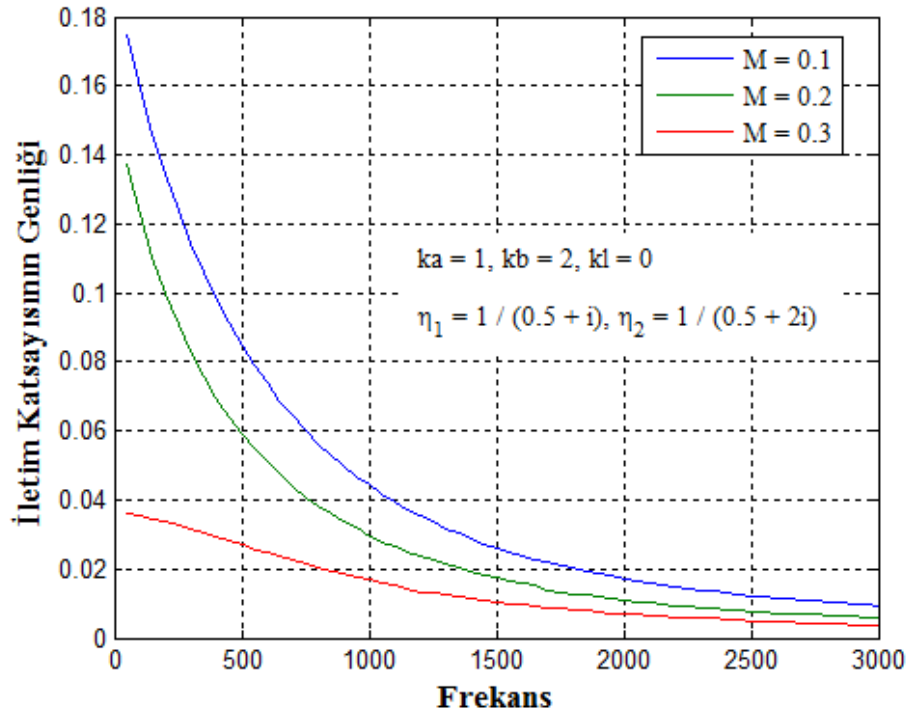
Şekil 4-20. Yansıma katsayısının genliğinin Mach sayısı ile değişimi

Şekil 4-20'de yansıma katsayısının genliğinin çeşitli η_2 değerleri için Mach sayısına göre değişimi gösterilmektedir. Bu şekilde $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.0249$ ve $\sigma = 0.057$ değerleri kullanılmıştır. Görüldüğü gibi Mach sayısı artarken yansıma katsayısı hızla düşmektedir. Sonuçlar aynı zamanda yansıma katsayısının η_2 admitansı ile pek değişmediğini göstermektedir.



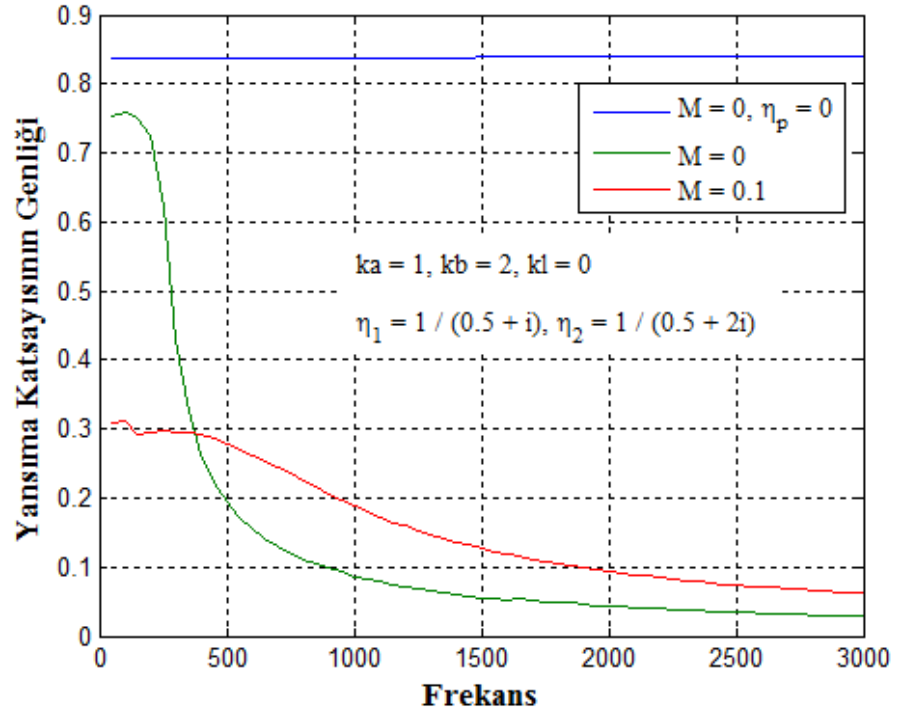
Şekil 4-21. İletim katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-21'de iletim katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için frekansa göre değişimi gösterilmektedir. Bu şekilde $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.0249$ ve $\sigma = 0.057$ değerleri kullanılmıştır. $M = 0$ ve $\eta_p = 0$ olduğu durumda (mavi renkli eğri) iletim katsayısının frekansa bağıllığı sadece ka ve kb parametrelerinde görülebilmektedir. Bunlar da sabit ($ka = 1, kb = 2$) kabul edildiğinden bu durumda iletim katsayısı frekansa göre değişmemektedir. Ancak $\eta_p \neq 0$ olduğu durumda frekansın etkisi η_p nin değerinde görülmekte ve iletim katsayısı da frekans ile değişmeye başlamaktadır. Şekil 4-19'da görülen sonuçlarda Mach sayısı artarken, iletim katsayısının genliğinin başta artış eğilimi gösterdiği, sonra ise hızla düştüğü anlaşılmıştı. Burada da $M = 0$ dan $M = 0.1$ e gelirken iletim katsayısının arttığı görülebilmektedir.



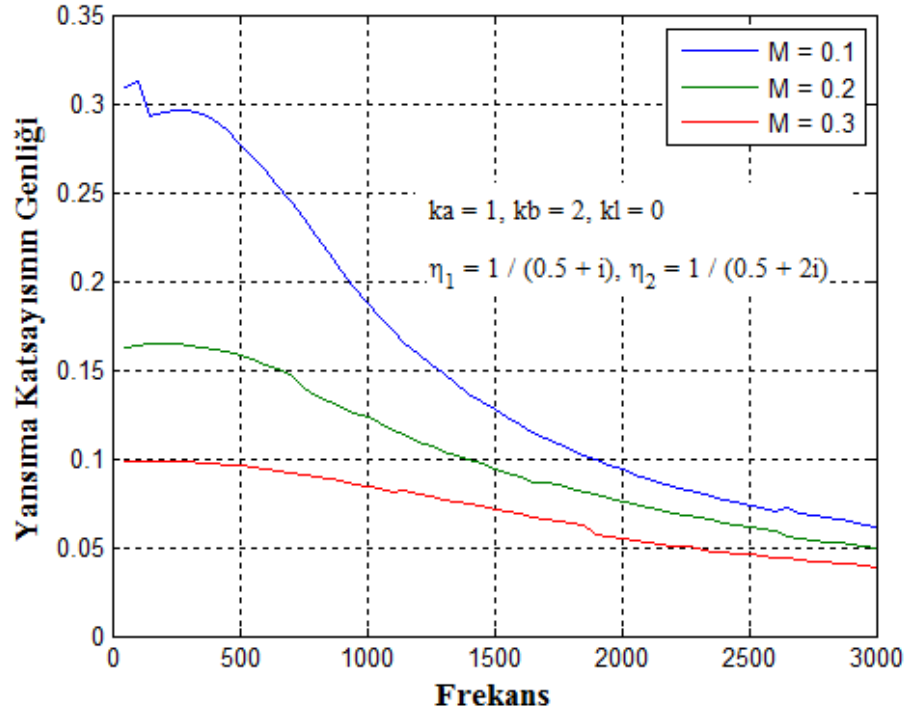
Şekil 4-22. İletim katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-22’de iletim katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için frekansa göre değişimi gösterilmektedir. Bu şekilde $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.0249$ ve $\sigma = 0.057$ değerleri kullanılmıştır. Şekil 4-19’da görülen sonuçlarda Mach sayısı artarken, iletim katsayısının genliğinin başta artış eğilimi gösterdiği, sonra ise hızla düştüğü anlaşılmıştı. Burada da $M = 0.1$ den $M = 0.3$ e gelirken iletim katsayısının azaldığı görülebilmektedir.



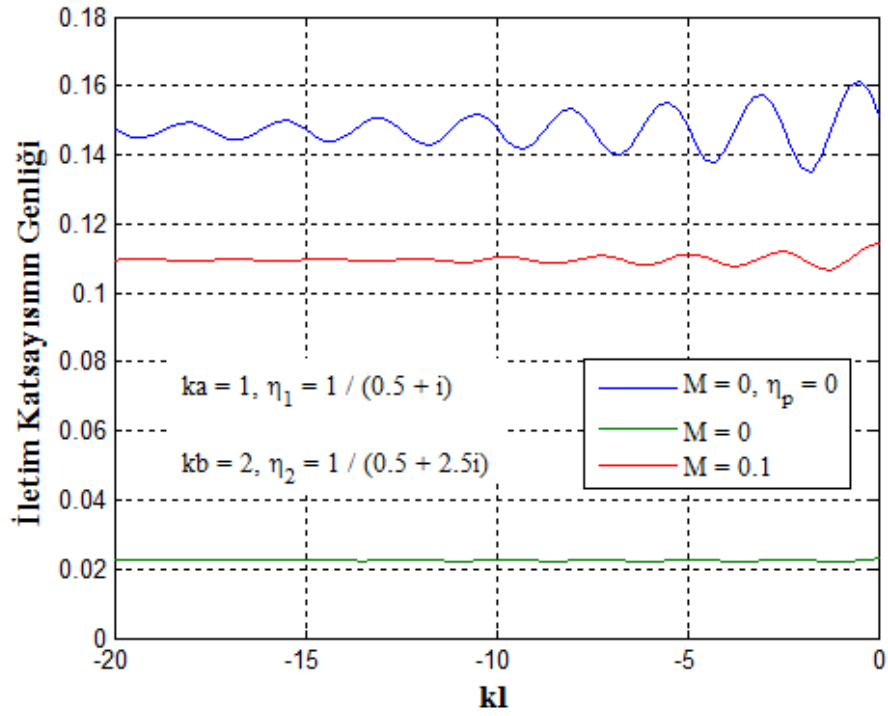
Şekil 4-23. Yansımaya katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-23'te yansımaya katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için frekansa göre değişimi gösterilmektedir. Bu şekilde $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.0249$ ve $\sigma = 0.057$ değerleri kullanılmıştır. Şekil 4-21'de iletim katsayısı için söylenenler burada yansımaya katsayısı için de geçerlidir.



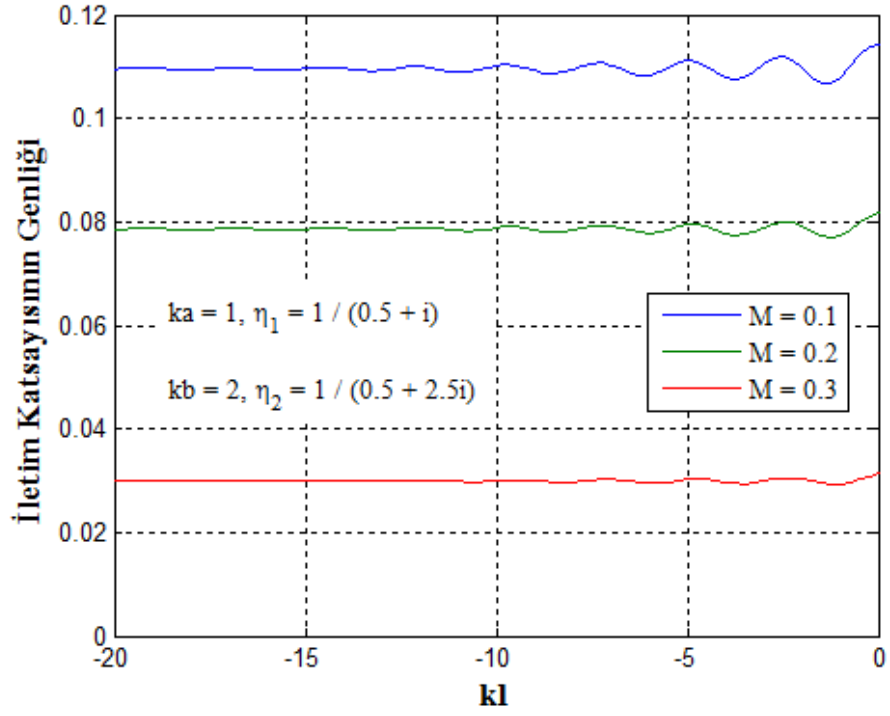
Şekil 4-24. Yansımaya katsayısının genliğinin frekans ile değişimi.

Şekil 4-24'te yansımaya katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için frekansa göre değişimi gösterilmektedir. Bu şekilde $t_w = 0.00081$, $d_h = 0.0249$ ve $\sigma = 0.057$ değerleri kullanılmıştır. Şekil 4-22'de iletim katsayısı için söylenenler burada yansımaya katsayısı için de geçerlidir.



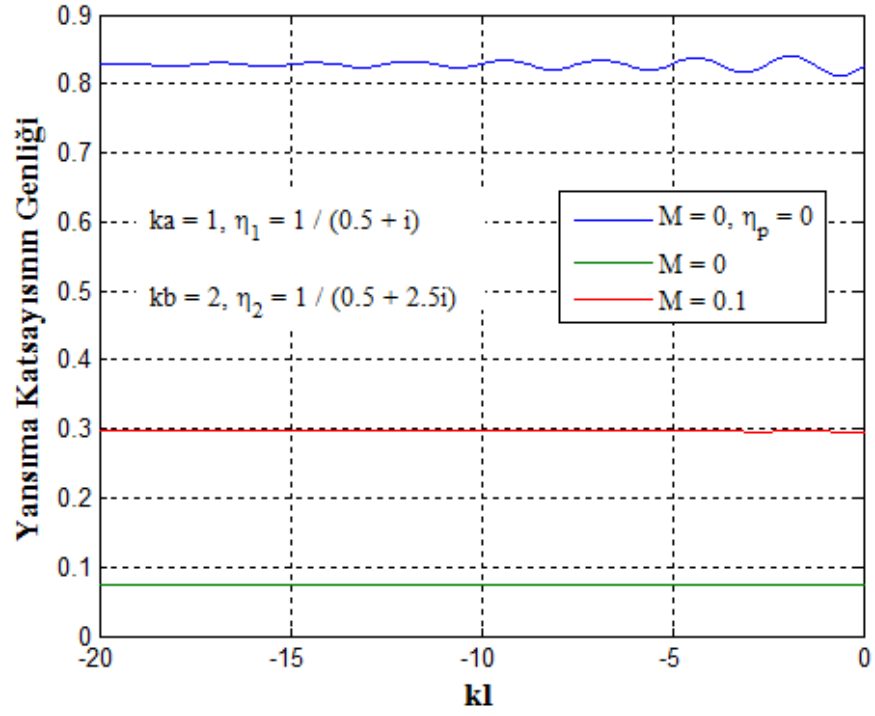
Şekil 4-25. İletim katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.

Şekil 4-25'te katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için kl 'ye göre değişimi görülmektedir. Burada $M = 0$ ve $\eta_p = 0$ olduğu mavi eğri Şekil 4-12'deki yeşil eğriye karşı gelmektedir. η_p nin etkisi dikkate alındığında iletim katsayısının genliğinin hızla düştüğü, ardından $M = 0$ dan $M = 0.1$ 'e artırıldığında arttığı anlaşılmaktadır. Yine Mach sayısının daha da artırılması durumunda, iletim katsayısının genliğinin düşmesi beklenmektedir.



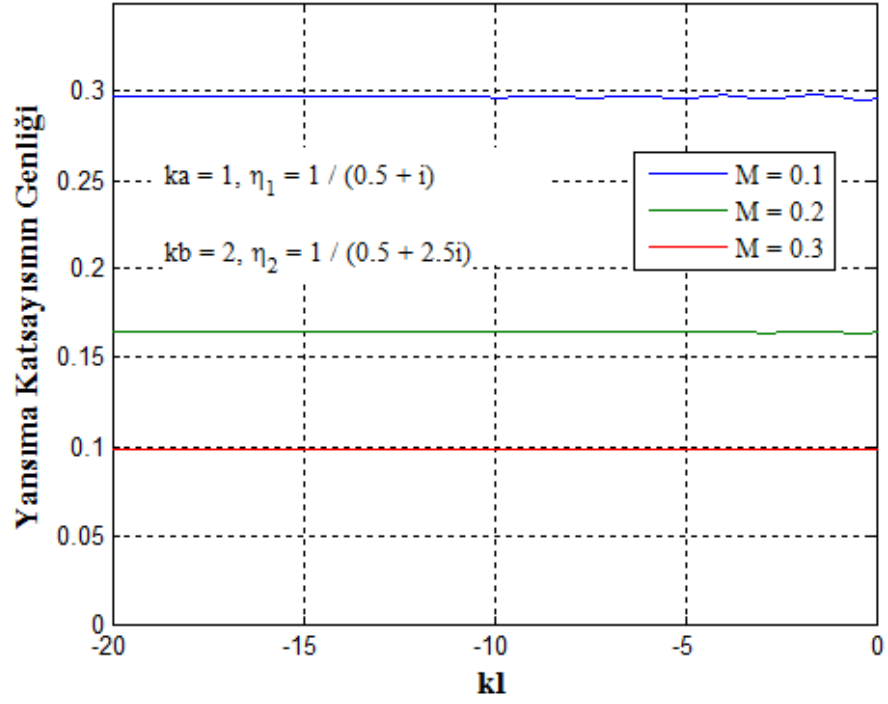
Şekil 4-26. İletim katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.

Şekil 4-26'da iletim katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için kl 'ye göre değişimi görülmektedir. Beklendiği gibi Mach sayısının 0.1'den 0.3'e artırılması durumunda iletim katsayısının genliği düşmektedir.



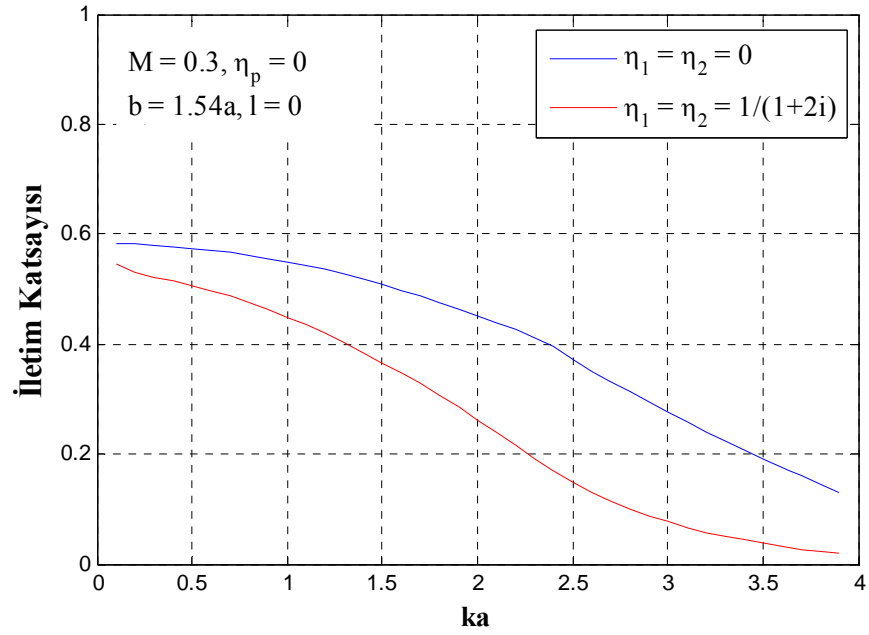
Şekil 4-27. Yansıma katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.

Şekil 4-27'de yansıma katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için kl 'ye göre değişimi görülmektedir. Şekil 4-25'te iletim katsayısı için yapılan yorumlar bu şekilde yansıma katsayısı için de geçerlidir.



Şekil 4-28. Yansıma katsayısının genliğinin kl 'ye göre değişimi.

Şekil 4-28'de yansıma katsayısının genliğinin çeşitli Mach sayıları için kl 'ye göre değişimi görülmektedir. Şekil 4-26'da iletim katsayısı için yapılan yorumlar bu şekilde yansıma katsayısı için de geçerlidir.



Şekil 4-29. İletim katsayısının genliğinin ka 'ya göre değişimi.

Şekil 4-29'da bu çalışmada elde edilmiş olan iletim katsayısının ka 'ya göre değişimi gösterilmiştir. $\eta_1 = \eta_2 = 0$ durumuna karşı gelen mavi renkli eğri [Nilsson&Brander, 1981b]'de Şekil-7'de görülen a numaralı eğriye karşı gelmektedir. Beklendiği gibi sonuçlar tamamen uyumludur.

5. SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu çalışmada, akışkanlı bir ortamda, bir yarı-sonsuz rijit borunun üzerinde empedans süreksizliği bulunan sonsuz uzunluklu bir borunun içine eşeksenli olarak yerleştirilmesi ile oluşturulmuş çatallanmış bir dairesel dalga kılavuzundan sesin yayılımı incelenmiş, söz konusu problem, Fourier dönüşümü yardımı ile formüle edildiğinde bir matris Wiener-Hopf denklemine ulaşılmıştır. Matris Wiener-Hopf denklemi, “zayıf faktörizasyon” kavramına dayalı yöntemle çözülmüş ve sonuç iki adet sonsuz bilinmeyenli lineer denklem sistemi aracılığıyla elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, daha önce yapılmış çalışmaların sonuçlarıyla sayısal olarak karşılaştırılmış ve sonuçların tam olarak tutarlı olduğu gözlenmiştir. Benzer bir karşılaştırma analitik olarak da yapılmıştır. Bu çalışmada elde edilen yansıma ve iletim katsayılarında $M = 0$ konulduğunda, [Demir & Büyükaksoy, 2006]’daki sonuçların aynısının bulunduğu görülmüştür.

Bu çalışmada uygulanan yöntem ile delikli tüp ve akışkan içeren başka geometrilere ilişkin incelemeler yapmak mümkündür. Bu tarz problemlerde genel olarak güçlük, çekirdek fonksiyonun sıfırlarının ve kutuplarının bulunmasında yaşanacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] RAYLEIGH, J. W. S., The theory of sound, London MacMillan, 1896.
- [2] LIGHTHILL, M. J., On sound generated aerodynamically. I – General theory, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 211, 564 – 587, 1952.
- [3] ASTLEY, J., Predicting and reducing aircraft noise, International Workshop on Acoustics and Vibration (IWAVE 2006), 3rd – 4th November 2006, Cairo, Egypt.
- [4] NILSSON, B. and BRANDER, O., The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. I-Modes in an infinite duct, *IMA J. Appl. Math.*, 26, 269 – 298, 1981a.
- [5] NILSSON, B. and BRANDER, O., The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. II-Bifurcated ducts, *IMA J. Appl. Math.*, 26, 381 – 410, 1981b.
- [6] NILSSON, B. and BRANDER, O., The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. III-Step discontinuities, *IMA J. Appl. Math.*, 27, 105 – 131, 1981c.
- [7] NILSSON, B. and BRANDER, O., The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. IV-Several interacting discontinuities, *IMA J. Appl. Math.*, 27, 263 – 289, 1981d.
- [8] RAWLINS, A. D., A bifurcated circular waveguide problem, *IMA J. Appl. Math.*, 54, 59 – 81, 1995.
- [9] DEMİR, A. and BÜYÜKAKSOY, A., Radiation of sound from a semi-infinite rigid duct inserted axially into a larger infinite tube with wall impedance discontinuity, *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 86(7), 563 – 571, 2006.
- [10] HURD, R. A., The Wiener–Hopf–Hilbert method for diffraction problems, *Can. J. Phys.*, 54(7), 775 – 780, 1976.
- [11] RAWLINS, A. D., The solution of a mixed boundary-value problem in the theory of diffraction by a semi-infinite plane, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 346, 469 – 484, 1975.
- [12] RAWLINS, A. D. and WILLIAMS, E. W., Matrix Wiener-Hopf factorisation, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 34, 1 – 8, 1981.

- [13] HURD, R. A. and PRZEZDZIECKI, S., Diffraction by a half-plane perpendicular to the distinguished axis of a gyrotropic medium, *J. Math. Phys.*, 17, 1838 – 1847, 1976.
- [14] RAWLINS, A. D., The solution of a mixed boundary value problem in the theory of diffraction, *J. Eng. Math.*, 18, 37 – 62, 1984.
- [15] BÜYÜKAKSOY, A. and UZGÖREN, G., Diffraction of high-frequency waves by a cylindrically curved surface with different face impedances, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 36, 690 – 696, 1988.
- [16] DANIELE, V. G., On the factorization of Wiener-Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 26(4), 614 – 616, 1978.
- [17] KHRAPKOV, A. A., Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a non-symmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces, *Prikl. Math. Mekh.*, 35, 1879 – 1885, 1981.
- [18] DANIELE, V. G., On the solution of two coupled Wiener-Hopf equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 44, 667 – 680, 1984.
- [19] HURD, R. A. and LÜNEBURG, E., Scattering by hard and soft parallel half-planes, *Can. J. Phys.*, 59, 1879 – 1885, 1981.
- [20] LÜNEBURG, E. and HURD, R. A., Diffraction by an infinite set of hard and soft parallel half planes, *Can. J. Phys.*, 60, 1 – 9, 1982.
- [21] RAWLINS, A. D., MEISTER, E. and SPECK, F. O., Diffraction by an acoustically transmissive or an electromagnetically dielectric half-plane, *Math. Methods Appl. Sci.*, 14, 387 – 402, 1991.
- [22] BÜYÜKAKSOY, A., ÇINAR, G. and SERBEST, A. H., Scattering of plane waves by a junction of a transmissive and soft/hard half-planes, *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*, 55(3), 483 – 499, 2004.
- [23] BÜYÜKAKSOY, A. and SERBEST, A. H., Matrix Wiener-Hopf factorization methods and applications to some diffraction problems, in: *Analytical and Numerical Techniques in Electromagnetic Wave Theory*, edited by M. Hashimoto, M. Idemen and O. A. Tretyakov (Science House, Tokyo, 1993), Chap. 6.
- [24] IDEMEN, M., A new method to obtain exact solutions of vector Wiener-Hopf equations, *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 59, 656 – 658, 1979.

- [25] BÜYÜKAKSOY, A., TOPSAKAL, E. and IDEMEN, M., Plane wave diffraction by a pair of parallel soft and hard overlapped half-planes, *Wave Motion*, 20, 273 – 282, 1994.
- [26] ABRAHAMS, I. D., Scattering of sound by two parallel semi-infinite screens, *Wave Motion*, 9, 289 – 300, 1987.
- [27] ABRAHAMS, I. D. and WICKHAM, G. R., The scattering of water waves by two semi-infinite vertical walls, *Wave Motion*, 14, 145 – 168, 1991.
- [28] BÜYÜKAKSOY, A. and ÇINAR, G., Solution of a matrix Wiener–Hopf equation connected with the plane wave diffraction by an impedance loaded parallel plate waveguide, *Math. Methods Appl. Sci.*, 28, 1633 – 1645, 2005.
- [29] SULLIVAN, J. W. and CROCKER, M. J., Analysis of concentric tube resonators having unpartitioned cavities, *Journal of the Acoustical Society of America*, 64, 207–215, 1978.
- [30] SULLIVAN, J. W., A method for modeling perforated tube muffler component, I. Theory, II Application, *Journal of the Acoustical Society of America*, 66, 772–788, 1979.
- [31] MUNT, R. M., The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe, *Journal of Fluid Mechanics*, 83, 609–640, 1977.
- [32] BOIJ, S., Acoustic scattering in ducts and influence of flow coupling, *PhD Dissertation, Royal Institute of Technology*, 2003.
- [33] RAWLINS, A. D., Wave propagation in a bifurcated impedance-lined cylindrical waveguide, *Journal of Engineering Mathematics*, 59, 419–435, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Özge Yanaz Çınar 1975'te İzmit'te doğmuştur. 1997 yılında İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nden mezun olmuş, yüksek lisans eğitimini ise Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda tamamlamıştır. Bu süre zarfında, aynı üniversitede Araştırma Görevlisi ve Öğretim Görevlisi olarak çalışmıştır. 2005 yılından beri Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimini sürdürmektedir. Aynı kurumda 2006 yılından bu yana Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır.