T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# YARI-EINSTEIN MANİFOLDLAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Sibel ÇELİK**

**Balıkesir, Temmuz-2006**

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# YARI EINSTEIN MANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sibel ÇELİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

Sınav Tarihi : 07/07/2006

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Kadri ARSLAN (UÜ)
Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK (BAÜ)
Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR ( Danışman / BAÜ)

Balıkesir, Temmuz-2006

**ÖZET**

**YARI-EINSTEIN MANİFOLDLAR**

**Sibel ÇELİK**

**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı**

**(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir, 2006**

Bu çalışmada yarı-Einstein manifoldlar, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlar, yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzeyler ile N(k)-yarı Einstein manifoldlar ele alınmıştır.

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde yarı-Einstein manifoldların genel bir tanımı yapılarak yarı-Einstein manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu bölümdeki sonuçların bazıları orijinaldir.

Dördüncü bölümde genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold tanımı verilmiş genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlarla ilgili bazı bilinen teoremler ve orijinal sonuçlar ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde $M^{n+1}(c)$ uzay formundaki yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzeylerin sırasıyla yarı umbilik ve 2-yarı umbilik oldukları gösterilmiştir. Ayrıca bunlara ait önemli bazı örnekler verilmiştir. Elde edilen sonuçlar orijinaldir.

Son bölümde ise N(k)-yarı Einstein manifoldların genel bir tanımı yapılarak ilgili teoremler verilmiş ve pseudosimetri sınıfından N(k)-yarı Einstein manifoldlar ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. İfade edilen sonuçların bir kısmı orijinaldir.

**ANAHTAR KELİMELER :** Einstein, yarı-Einstein, genelleştirilmiş yarı-Einstein, $\eta$-Einstein, N(k)-yarı Einstein manifold, sabit eğrilikli uzay form, hiperyüzey, yarı umbilik hiperyüzey, 2-yarı umbilik hiperyüzey.

**ABSTRACT**

**QUASI-EINSTEIN MANIFOLDS**

**Sibel ÇELİK**

**Balıkesir University, Institue of Science, Department of Mathematics**

**(M.Sc.Thesis / Supervisor : Associate Prof. Dr.Cihan ÖZGÜR)**
**Balıkesir – TÜRKİYE, 2006**

In this thesis, we consider quasi-Einstein, generalized quasi-Einstein, N(k)-quasi Einstein manifolds and hypersurfaces.

This study consists of six chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, we give some notions and definitions which will be used in the next chapters.

In the third chapter we introduce the notion of a quasi-Einstein manifold and we give some basic and original results.

In the fourth chapter we give the definition of generalized quasi-Einstein manifold and we prove some original results.

In the fifth chapter we study quasi-Einstein and generalized quasi-Einstein hypersurfaces in a space form. We prove that a quasi umbilical and 2-quasi umbilical hypersurfaces of a space form are quasi-Einstein and generalized quasi-Einstein manifolds, respectively.

In the final chapter we give the definition of N(k)-quasi Einstein manifold and we have proved some theorems related to this type manifolds with pseudosymmetry conditions.

**KEY WORDS :** Einstein, quasi-Einstein, generalized quasi-Einstein, $\eta$-Einstein, N(k)-quasi Einstein manifolds, hypersurface in a space form with quasi constant curvature, quasi umbilical hypersurface, 2-quasi umbilical hypersurface.

**İÇİNDEKİLER**

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $M, M^n$ | Manifold |
| $M^n(c)$ | Uzay Form |
| $g$ | Metrik Tensör |
| $[\ ,\ ]$ | Lie Parantez Operatörü |
| $T_pM$ | Tanjant Vektör Uzayı |
| $\chi(M)$ | Vektör Alanları Uzayı |
| $\nabla$ | Afin Koneksiyon |
| $D$ | Kovaryant Türev |
| $f_*$ | Jakobiyen Matris |
| $h$ | Hiperyüzeylerde 2. Temel Form |
| $H$ | Hiperyüzeylerde 2. Temel Tensör |
| $A_\xi$ | Şekil Operatörü |
| $R$ | Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü |
| $C$ | Weyl Konformal Eğrilik Tensörü |
| $\widetilde{C}$ | Yarı Konformal Eğrilik Tensörü |
| $K$ | Konharmonik Eğrilik Tensörü |
| $S$ | Ricci Tensörü |
| $Q$ | Ricci Operatörü |
| $\tau$ | Skaler Eğrilik |
| $\Lambda_g$ | Endomorfizm |
| $K(\Pi)$ | Kesitsel Eğrilik |

| | |
|---|---|
| $\otimes$ | Tensör Çarpımı |
| $C_{\theta}^{m}$ | Eliptik Hiperkoni |
| N(k) | k-Nullity Distribüsyonu |
| $\xi$ | Birim Normal Vektör Alanı |
| A, B, $\eta$ | 1-Form |

## ŞEKİL LİSTESİ

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada yarı-Einstein manifoldlar, genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlar, yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzeyler ve N(k)-yarı Einstein manifoldlarla ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalar ayrıntılı olarak incelenmiş ve bazı orijinal sonuçlar verilmiştir.

Çalışmalarım sırasında benden her türlü destek ve yardımını esirgemeyen ve bu tezin her bir satırında sonsuz emeği olan sayın hocam Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca son bölüm olan 6. bölümde, N(k)-yarı Einstein manifoldlar üzerine yapılan çalışmada bize yardımcı olan sayın Prof. Dr. Mukut Mani Tripathi'ye teşekkür ederim.

Yüksek lisans yaptığım süre içerisinde emeği geçen tüm Fen Edebiyat Fakültesi kadrosuna teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans çalışmalarım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, teşviklerini ve yardımlarını daima sürdüren aileme sonsuz teşekkür eder, sevgilerimi sunarım.

**Balıkesir, 2006** **Sibel ÇELİK**

# 1. GİRİŞ

Yarı-Einstein manifoldlar üzerinde yapılan araştırmalar topolojik uzayın global karakterinin anlaşılmasında bize yardımcı olur.

Genel relativite teorisinde bir M genel relativistik akışkan uzay zamanı için Einstein alan denklemi;

$$S(X, Y) - \frac{r}{2} g(X, Y) = (\rho + p)\, U(X)U(Y) + pg(X, Y)$$

biçimindedir. Burada U sıfırdan farklı bir 1-form, $\rho$ ve p sırasıyla enerji yoğunluğu ve akışkanın izotropik basıncını göstermektedir. Yukarıda verilen denklem;

$$S(X, Y) = \alpha\, g(X, Y) + \beta\, U(X)U(Y)$$

formunda da yazılabilir. Burada $\alpha = \frac{r}{2} + p$ ve $\beta = \rho + p$ biçiminde tanımlanan $(\beta = (\rho + p) \neq 0)$ skalerlerdir.

Böylece genel relativitenin bir akışkan uzay zamanı 4-boyutlu, (- ,+, +, +) Lorentz işaretli yarı-Riemann manifolddur, $\alpha = \frac{r}{2} + p$ ve $\beta = \rho + p$ dir [1].

Genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldların önemi ise 4-boyutlu yarı-Riemann manifoldunun ısı akışına izin veren genel relativistik akışkan uzay zaman çalışmaları ile bağlantılı olması gerçeğinde yatmaktadır. Böyle bir uzay zamanın ayrıntılı özellikleri araştırılmaktadır. Akışkan yoğunluğu ve elektromanyetik alanların varlığına izin veren uzay zamanların incelenmesi Ricci tensörünün daha fazla genelleştirilmesini gerektirmektedir ve üzerinde çalışılmaktadır [1].

Ayrıca yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlarla ilgili çalışmalar genel relativite teorisi ve kozmolojinin uygulamalarıyla anlam kazanır [1].

Fizik açısından ele alındığında enerji ve gerilme maddenin varlığı demektir. Dolayısıyla Ricci eğrilik tensörü uzay zamanın bir olayındaki madde ile doğrudan ilişkilidir. Bir olay noktasında Ricci tensörü yok oluyorsa o olayda kütle-enerji yoktur [2].

## 2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar verilecektir.

**Tanım 2.1.** M bir diferensiyellenebilir ($C^\infty$) manifold olsun. M üzerindeki $C^\infty$ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye $C^\infty$ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir [3].

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için; M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye *bağlantılı manifold* adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye *basit bağlantılıdır* denir [4].

**Tanım 2.2.** M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki $C^\infty$ vektör alanlarının uzayı $\chi$ (M) olmak üzere;

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty (M, \mathbb{R})$, $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

**i)** $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

**ii)** $\nabla_{fX + gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

**iii)** $\nabla_X(fY) = f\nabla x Y + X(f)Y$

özeliklerini sağlarsa, $\nabla$ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir [5].

**Tanım 2.3.** (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\nabla$ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall$ X, Y, Z $\in \chi(M)$ olmak üzere;

$\nabla$ dönüşümü;

**i)** $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özelliği),

**ii)** $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, $\nabla$ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Koneksiyonu* adı verilir [5].

**Tanım 2.4.** (M, g) bir Riemann manifoldu, $\nabla$ da M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2. 1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (l,3)-tensör alanıdır ve M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* adı verilir.

Her X, Y, Z, V, W$\in\chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{i)} & R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z, \\ \textbf{ii)} & g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V), \\ \textbf{iii)} & R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \\ \textbf{iv)} & g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y) \\ \textbf{v)} & g(X, R(Y, Z)W) = R(Y, Z, W, X) \end{array}\right\} \tag{2. 2}$$

[4].

**Tanım 2.5.** (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde sırası ile bir vektör alanı $\xi$ ve bir r-form $\omega$ olmak üzere $V_2, \ldots, V_r \in T_pM$ $(r\geq1)$ vektörleri için M üzerinde

$$(C_\xi\omega)(P)(V_2, \ldots, V_r) = \omega(\xi(P), V_2, \ldots, V_r)$$

biçiminde tanımlanan $C_\xi\omega$ (r-1)-formuna $\omega$ nin $\xi$ ile *kontraksiyonu* denir [4].

**Tanım 2.6.** (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_pM$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı $\Pi$ olmak üzere; $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V, W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)}$$

olup buna $\Pi$ nin *kesitsel eğriliği* denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [4].

**Tanım 2.7.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, lokal vektör alanları olsunlar.

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{R}$$

$$(X,Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{2. 3}$$

şeklinde tanımlı (0, 2)-tipindeki S tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir [4]. Ayrıca Q Ricci operatörü ve $S^2$ (0, 2)-tensörü sırası ile

$$g(QX, Y) = S(X, Y) \tag{2. 4}$$

$$S^2(X, Y) = S(QX, Y) \tag{2. 5}$$

biçiminde tanımlanır [7].

**Tanım 2.8.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \tag{2. 6}$$

olacak biçimde M üzerinde bir $\lambda : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlı ise, yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye bir *Einstein manifold* adı verilir [6].

**Tanım 2.9.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2. 7}$$

fonksiyonuna M nin *skalar eğrilik fonksiyonu* adı verilir [6].

**Tanım 2.10.** (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin eğrilik tensörü $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi$(M) için;

$$R(X, Y, Z, W) = c\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y,W)\}$$

biçiminde ise M ye *sabit eğrilikli uzay* adı verilir. $M^n(c)$ ile gösterilir [3].

**Tanım 2.11.** Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara *uzay form* denir. n-boyutlu bir M uzay formu $M^n(c)$ ile gösterilir.

Eğer;

$c = 0$ ise $M^n(c) \cong E^n$ Öklid uzayı,

$c = \frac{1}{r^2}$ ise $M^n(c) \cong S^n(r)$ küresi,

$c = -\frac{1}{r^2}$ ise $M^n(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzay

dır [6].

**Tanım 2.12.** M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her X, Y, Z$\in \chi$(M) ve $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ için M nin Weyl konformal eğrilik tensörü, yarı konformal eğrilik tensörü ve konharmonik eğrilik tensörü sırası ile;

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX$$
$$-g(X, Z)QY] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \qquad (2.\ 8)$$

$$\widetilde{C}(X, Y)Z = \lambda R(X, Y)Z + \mu[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX$$
$$-g(X, Z)QY] - \frac{\tau}{n}(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \qquad (2.\ 9)$$

$$K(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX$$
$$- g(X, Z)QY] \qquad (2.\ 10)$$

ile tanımlanır [8, 9].

**Tanım 2.13.** $n \geq 4$ boyutlu M manifoldu için $C = 0$ ise M ye *konformal flattir* denir [6].

Eğer $\widetilde{C} = 0$ ise M ye *yarı konformal flattir* denir [9].

**Tanım 2.14.** M, $n \geq 2$ boyutlu $C^{\infty}$ sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde tanımlı (0, 2)-tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi;

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y, Z)X - A(X, Z)Y \tag{2. 11}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer A = g alınırsa son denklem

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra $(X \wedge_g Y)$ yerine kısaca $X \wedge Y$ kullanılacaktır [7].

M üzerinde (0, k)-tipinde $(k \geq 1)$ bir T tensör alanı ve (0, 2)-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde T nin kovaryant türevi $\nabla T$;

$$(\nabla T)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X) = (\nabla_X T)(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$

$$= \nabla_X (T(X_1, X_2, \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_k) \tag{2. 12}$$

ile, $R \cdot T$ ve $Q(A, T)$ tensörleri de sırası ile:

$$(R \cdot T)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y) = -T(R(X, Y)X_1, X_2, \ldots, X_k) - \ldots - T(X_1, X_2, \ldots, R(X, Y)X_k) \tag{2. 13}$$

ve

$$Q(A, T)(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y) = -T((X \wedge_A Y)X_1, X_2, \ldots, X_k) - \ldots - T(X_1, X_2, \ldots, (X \wedge_A Y)X_k) \tag{2. 14}$$

biçiminde tanımlanır [7].

Böylece (2. 13) ve (2. 14) denklemlerinde T = R ve A = g alındığında;

$$(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \ldots - R(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4), \tag{2. 15}$$

$$Q(g, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R((X \wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \ldots - R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge_g Y)X_4), \tag{2. 16}$$

$T = C$ ve $A = g$ alındığında;

$$(R \cdot C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -C(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-... \\ -C(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4), \qquad (2.\ 17)$$

$$Q(g, C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -C((X\wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-\ldots \\ -C(X_1, X_2, X_3, (X\wedge_g Y)X_4), \qquad (2.\ 18)$$

$T = S$ ve $A = g$ alındığında;

$$(R \cdot S)(X_1, X_2; X, Y) = -S(R(X, Y)X_1, X_2,) - S(X_1, R(X, Y)X_2), \qquad (2.\ 19)$$

$$Q(g, S)(X_1, X_2; X, Y) = -S((X\wedge_g Y)X_1, X_2,) - S(X_1, (X\wedge_g Y)X_2) \qquad (2.\ 20)$$

ve ayrıca $A = S$, $T = R$ için (2. 13) denkleminden

$$Q(S, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R((X\wedge_S Y)X_1, X_2, X_3, X_4)-... \\ -R(X_1, X_2, X_3, (X\wedge_S Y)X_4) \qquad (2.\ 21)$$

olarak elde edilir.

Eğer;

$$R \cdot R = 0 \qquad (2.\ 22)$$

ise M ye *semisimetriktir* denir [10].

Eğer;

$$R \cdot S = 0 \qquad (2.\ 23)$$

ise M ye *Ricci-semisimetriktir* denir [7].

Eğer;

$$R \cdot C = 0 \qquad (2.\ 24)$$

ise M ye *Weyl-semisimetriktir* denir [7].

$n \geq 3$ boyutlu bir $(M, g)$ Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R\cdot R$ ve $Q(g, R)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye *pseudosimetriktir* denir. Bu durumda M nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart $U_R=\{p\in M:Q(g,R)\neq 0\}$ kümesi üzerinde;

$$R \cdot R = L_R Q(g, R) \qquad (2.\ 25)$$

olmasıdır. Burada $L_R$, $U_R$ üzerinde bir fonksiyondur [7].

$n \geq 3$ boyutlu bir $(M, g)$ Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R \cdot S$ ve $Q(g, S)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye *Ricci-pseudosimetrik manifold* denir. Bu durumda M nin Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart $U_S = \{p \in M : S - \frac{\tau}{n} g \neq 0\}$ kümesi üzerinde;

$$R \cdot S = L_S Q(g, S) \tag{2. 26}$$

olmasıdır. Burada $L_S$ fonksiyonu $U_S$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur [7].

$n \geq 4$ boyutlu bir $(M, g)$ Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R \cdot C$ ve $Q(g, C)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye *Weyl- pseudosimetrik manifold* denir. Bu durumda M nin Weyl - pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart $U_C = \{p \in M : p \in M \text{ de } C \neq 0\}$ kümesi üzerinde;

$$R \cdot C = L_C Q(g, C) \tag{2. 27}$$

olmasıdır. Burada $L_C$ fonksiyonu $U_C$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur [7].

Eğer $R \cdot R$ ve $Q(S, R)$ tensörleri lineer bağımlı yani

$$R \cdot R = L_R Q(S, R) \tag{2. 28}$$

ise M ye *genelleştirilmiş Ricci-pseudosimetriktir* denir [7].

Yukarıda tanımlanan eğrilik şartları için aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir [7].

$$R \cdot R = 0 \subset R \cdot S = 0,$$

$$R \cdot R = 0 \subset R \cdot C = 0,$$

$$R \cdot S = 0 \subset R \cdot S = L_S Q(g, S),$$

$$R \cdot R = 0 \subset R \cdot R = L_R Q(g, R),$$

$$R \cdot C = 0 \subset R \cdot C = L_C Q(g, C),$$

$$R \cdot R = L_R Q(g, R) \subset R \cdot S = L_S Q(g, S),$$

$$R \cdot R = L_R Q(g, R) \subset R \cdot C = L_C Q(g, C).$$

**Tanım 2.15.** Bir $(M, g)$ diferensiyellenebilir manifoldu için eğer

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = \alpha(X) S(Y, Z) \tag{2. 29}$$

olacak biçimde bir $\alpha(X)$ 1-formu var ise; M ye *Ricci Rekürent* denir.

Eğer;

$$(\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(Z, X) + (\nabla_Z S)(X, Y) = 0 \qquad (2.30)$$

ise M ye *dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir* denir [11].

**Tanım 2.16.** M ve N birer $C^\infty$ manifold olsun. f, M den N ye tanımlı bir $C^\infty$ fonksiyon olmak üzere, $(f_*)_p$ jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm, M nin her bir p noktası için birebir ise f fonksiyonuna bir *immersiyon* denir [6].

**Tanım 2.17.** M ve N birer $C^\infty$ manifold ve $f: M \to N$ bir $C^\infty$ fonksiyon olsun. f nin $f_*$ jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm birebir ve f tek değişkenli ise f ye M den N ye bir *imbeding* adı verilir [6].

**Tanım 2.18.** f bir immersiyon olmak üzere $\forall X, Y \in T_p M$ için;

$$< f_*(X), f_*(Y)> = <X, Y>$$

ise f ye *izometrik immersiyon* adı verilir. Burada $<,>$, $T_p M$ den indirgenmiş metriktir [6].

**Tanım 2.19.** M ve N sırasıyla n ve n+d boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin alt manifoldu ve $\nabla$ ve D sırası ile M ve N de kovaryant türevler olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \qquad (2.31)$$

biçiminde *Gauss denklemi* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve h(X,Y), $D_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2. 31) ile tanımlanan h ye M nin *ikinci temel formu* adı verilir. Eğer h = 0 ise M ye *total geodeziktir* denir [6]

**Tanım 2.20.** M ve N sırasıyla n ve n+d boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, N nin alt manifoldu olsun. M ye normal bir birim vektör alanı $\xi$ olsun. $D_X \xi$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_\xi(X)$ ve $\nabla^\perp_X \xi$ olmak üzere;

$$A : \chi(M) \times \chi^\perp(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$D_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi \qquad (2.32)$$

biçiminde *Weingarten denklemi* elde edilir. Burada $A_\xi$ ya şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M nin $T^{\perp}M$ *normal demetindeki (normal) koneksiyon* adı verilir. M nin şekil operatörü $A_\xi$ ile ikinci temel form h arasında;

$$g(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi) \qquad (2.\ 33)$$

bağıntısı vardır. Burada g, $T_p M$ de skalar çarpımdır [6].

**Tanım 2.21.** $M^n \subset M^{n+1}$ hiperyüzeyi için ikinci temel form;

$$H(X,Y) = \alpha g + \beta\, \omega \otimes \omega \qquad (2.\ 34)$$

biçiminde ise $M^n$ ye *yarı-umbiliktir* denir. Burada ω bir 1-form, ξ bir birim normal vektör alanı, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dir ve

$$H(X,Y) = g(AX, Y)$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca bu tanıma ek olarak (2. 34) denkleminin aşağıda verilen tanıma denk olduğu bilinmektedir.

- $n \geq 3$ olmak üzere; M yarı umbiliktir $\Leftrightarrow$ her $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri;

$$\mu,\ \underbrace{\lambda, \lambda, \ldots, \lambda}_{(n-1)\text{defa}}$$

biçimindedir [7].

**Tanım 2.22.** $M^n \subset M^{n+1}$ hiperyüzeyi için ikinci temel form;

$$H(X,Y) = \alpha g + \beta\, \nu \otimes \nu + \gamma\, \omega \otimes \omega \qquad (2.\ 35)$$

biçiminde ise $M^n$ ye *2-yarı umbiliktir* denir. Burada ν, ω birer 1-form, ξ bir birim normal vektör alanı; $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in \mathbb{R}$ dir. Ayrıca U ve V;

$$\nu(X) = g(X, U) \text{ ve } \omega(X) = g(X, V)$$

biçiminde tanımlanan ve

$$g(U, V) = 0$$

koşulunu sağlayan birim normal vektör alanlarıdır. Bu tanıma ek olarak (2. 35) denkleminin aşağıda verilen tanıma denk olduğu bilinmektedir.

- $n \geq 4$ olmak üzere; M 2-yarı umbiliktir $\Leftrightarrow$ her $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri;

$$\mu, \upsilon \underbrace{\lambda, \ldots, \lambda}_{(n-2)\text{defa}}$$

biçimindedir.

**Teorem 2.23.** (M,g) bir Riemann manifoldu, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. M nin eğrilik tensörü R, $\widetilde{M}$ nın eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere $\forall$ X, Y, Z, W$\in \chi(M)$ için;

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) - \widetilde{g}(h(X,W), h(Y,Z)) + \widetilde{g}(h(X,Z), h(Y,W)) \quad (2.36)$$

dir [6].

**İspat :** (2. 1) eşitliği gereği

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = \widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) - \widetilde{\nabla}_Y(\widetilde{\nabla}_X Z) - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \quad (2.\ 37)$$

yazılabilir. Burada Gauss ve Weingarten denklemleri kullanılırsa;

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = \widetilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + h(Y, Z)) - \widetilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + h(X, Z))$$
$$- \nabla_{[X,Y]} Z - h([X,Y], Z) \quad (2.\ 38)$$

elde edilir. O halde (2.38) denkleminde tekrar Gauss ve Weingarten denklemleri kullanıldığında;

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + h(X, \nabla_Y Z) - A_{h(Y, Z)} X + D_X h(Y, Z)$$
$$- h(Y, \nabla_X Z) - A_{h(X, Z)} Y + D_Y h(X, Z) - h([X,Y], Z) \quad (2.\ 39)$$

bulunur. Buradan eşitliğin her iki yanının W ile iç çarpımı alındığında;

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z, W) = g(R(X,Y)Z, W) - g(A_{h(Y, Z)} X, W) + g(A_{h(X, Z)} Y, W) \quad (2.40)$$

sonucuna ulaşılır. (2. 33) gereği

$$g(A_{h(Y, Z)}X, W) = g(h(Y, Z), h(X, W))$$
$$g(A_{h(X, Z)}Y, W) = g(h(X, Z), h(Y, W))$$

olduğundan bu ifadeler (2. 40) denkleminde yerine yazıldığında;

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) - g(h(X, W), h(Y,Z)) + g(h(X, Z), h(Y, W) \quad (2.\ 41)$$

eşitliği elde edilir. ■

**Sonuç 2.24.** Eğer $\widetilde{M}^{n+d}(c)$ sabit eğrilikli bir uzay form ve $M^n \subset \widetilde{M}^{n+d}(c)$ alt manifold ise;

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W) = c\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\} \qquad (2.42)$$

olduğundan (2. 42) eşitliği (2. 41) de yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= g(h(X,W),h(Y,Z)) - g(h(X,Z),h(Y,W)) \\ &\quad + c[g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)] \end{aligned} \qquad (2.43)$$

elde edilir.

**Tanım 2.25.** M, (2n +1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde her yerde;

$$\eta \wedge (d\eta^n) \neq 0$$

olacak şekilde bir $\eta$-diferensiyel 1-formu var ise $\eta$ ya *değme form*, (M, $\eta$) ikilisine de *değme manifold* adı verilir. Burada $(d\eta)^n$ ile, $d\eta$ nın kendisiyle n. mertebeden dış çarpımı gösterilmiştir. Yani;

$$(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n-\text{defa}}$$

dir [12].

**Tanım 2.26.** M, (2n +1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\phi$,(1, 1)-tipinden bir tensör alanı, $\xi$ bir vektör alanı, $\eta$ M üzerinde bir diferensiyel 1-form olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için $\{\phi, \xi, \eta\}$ üçlüsü;

$$\phi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \qquad (2.44)$$

koşullarını sağlıyor ise bu üçlüye bir *hemen hemen değme yapı*, $\{M, \phi, \xi, \eta\}$ dörtlüsüne de bir *hemen hemen değme manifold* denir [12].

Eğer M hemen hemen değme manifoldu için,

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{ve} \quad (d\eta)(\xi, X) = 0 \qquad (2.45)$$

olacak biçimde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı var ise; $\xi$ ye $\eta$-*değme yapısının öz vektör alanı* denir.

Eğer M üzerinde, $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) ve $\xi \in \chi$(M) için;

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.46)$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.47)$$

koşullarını sağlayan bir g metriği var ise; $\{\phi, \xi, \eta, g\}$ dörtlüsüne bir *hemen hemen değme metrik yapı*, $\{M, \phi, \xi, \eta, g\}$ beşlisine de bir *hemen hemen değme metrik manifold* denir [12].

Eğer bir M hemen hemen değme metrik manifoldu için;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y)$$

yazılabiliyor ise M ye *değme metrik manifold* adı verilir.

**Tanım 2.27.** $\{M, \phi, \xi, \eta, g\}$ bir değme metrik manifold ve S, M nin Ricci tensörü olsun. Eğer $\forall$ X, Y $\in \chi$(M) için M nin Ricci tensörü

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y) \quad , \quad (a, b: M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R})$$

formunda ise M ye $\eta$-*Einstein manifold* denir [12].

**Tanım 2.28.** $\{M, \phi, \xi, \eta, g\}$ bir değme metrik manifold olsun.

$$N(k) = \{Z : R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)\} \quad (2.48)$$

distribüsyonunu tanımlayalım. Eğer $\xi \in N(k)$ ise M ye *N(k)-değme metrik manifold* denir. Bu durumda;

$$R(X, Y)\xi = k(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \quad (2.49)$$

dir [12].

## 3. YARI-EINSTEIN MANİFOLDLAR

Bu bölümde yarı-Einstein manifoldlar incelenmiştir. Bir yarı-Einstein manifoldun Ricci semi-simetrik ve Ricci pseudosimetrik olması, dairesel paralel Ricci tensöre sahip olması ve $K \cdot S = 0$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

**Tanım 3.1.** $(M^n, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $M^n$ nin Ricci tensörü $\forall X, Y \in \chi(M^n)$ için;

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + bA(X)A(Y) \qquad (3.\ 1)$$

koşulunu sağlıyor ise $M^n$ ye *yarı-Einstein manifold* adı verilir [13]. Burada a ve b, $M^n$ üzerinde reel değerli fonksiyonlardır. $M^n$ üzerinde bir birim tanjant vektör alanı U olmak üzere;

$$g(X, U) = A(X) \qquad (3.\ 2)$$

biçiminde tanımlanan 1-formu için U vektör alanına *A 1-formunun üreteci* adı verilir.

(3. 1) eşitliğinden kontraksiyon yardımı ile $M^n$ nin skaler eğrilik fonksiyonu

$$\tau = na + b \qquad (3.\ 3)$$

dir.

**Teorem 3.2.** $(M^n, g)$ Ricci semi-simetrik bir yarı-Einstein manifold olsun. Bu taktirde $a + b = 0$ dır [14].

**İspat :** $(M^n, g)$ Ricci semi-simetrik bir manifold olduğundan (2. 23) gereği

$$R \cdot S = 0$$

dır. Böylece (2. 19) gereği $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$(R(X,Y) \cdot S)(Z, W) = - S(R(X,Y)Z, W) - S(Z, R(X,Y)W)$$

olup buradan

$$S(R(X, Y)Z, W) + S(Z, R(X, Y)W) = 0 \qquad (3.\ 4)$$

yazılabilir. Böylece (3. 1) yardımı ile

$$ag(R(X, Y)Z, W) + bA(R(X, Y)Z)A(W) + ag(Z, R(X, Y)W) + bA(R(X, Y)W)A(Z) = 0 \quad (3.5)$$

bulunur. Buradan da Tanım 2.4 kullanıldığında;

$$aR(X, Y, Z, W) + bR(X, Y, Z, U)A(W) + aR(X, Y, W, Z) + bR(X, Y, W, U)A(Z) = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece Tanım 2. 4 (ii) gereği

$$aR(X, Y, Z, W) + bR(X, Y, Z, U)A(W) - aR(X, Y, Z, W) + bR(X, Y, W, U)A(Z) = 0 \quad (3.7)$$

olup buradan da

$$bR(X, Y, Z, U)A(W) + bR(X, Y, W, U)A(Z) = 0 \quad (3.8)$$

sonucuna ulaşılır. (3. 8) eşitliğinde $W = U$ alındığında;

$$b[R(X, Y, Z, U)A(U) + R(X, Y, U, U)A(Z)] = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. $A(U) = 1$ ve $R(X, Y, U, U) = 0$ olduğundan

$$bR(X, Y, Z, U) = 0 \quad (3.10)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$bA(R(X, Y)Z) = 0 \quad (3.11)$$

bulunur. Böylece $b \neq 0$ olduğundan $A(R(X, Y)Z = 0$ elde edilir. Buradan (3. 2) kullanılarak

$$A(R(X, Y)Z) = g(R(X, Y)Z, U) = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir ve Tanım 2. 4 (v) yardımı ile

$$g(R(X, Y)Z, U) = R(X, Y, Z, U) = 0 \quad (3.13)$$

bulunur. O halde;

$$R(X, Y, U, Z) = 0 \quad (3.14)$$

olduğu görülür. (3. 14) denkleminden $X$ ve $Z$ ye göre kontraksiyon yapıldığında;

$$S(Y, U) = 0 \quad (3.15)$$

eşitliği bulunur. (3. 1) gereği

$$S(Y, U) = ag(Y, U) + bA(Y)A(U) = aA(Y) + bA(Y) = (a+b)A(Y)$$

olduğundan

$$S(Y, U) = (a + b)A(Y) = 0 \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. $A(Y) \neq 0$ olduğundan;

$$a + b = 0$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar. ■

**Teorem 3.3.** $(M^n, g)$ dairesel paralel Ricci tensöre sahip bir yarı-Einstein manifold olsun. Eğer U paralel bir vektör alanı ise a fonksiyonu, U vektör alanı boyunca sabittir.

**İspat :** $(M^n, g)$ manifoldu dairesel paralel Ricci tensöre sahip olduğundan (2. 30) eşitliği gereği $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$(\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(Z, X) + (\nabla_Z S)(X, Y) = 0$$

yazılabilir. Buradan (2. 12) kullanıldığında;

$$\begin{aligned} 0 = {} & X[a]g(Y, Z) + X[b]A(Y)A(Z) + bA(Z)g(Y, \nabla_X U) + bA(Y)g(Z, \nabla_X U) \\ & + Y[a]g(Z, X) + Y[b]A(X)A(Z) + bA(X)g(Z, \nabla_Y U) + bA(Z)g(X, \nabla_Y U) \\ & + Z[a]g(X, Y) + Z[b]A(X)A(Y) + bA(Y)g(X, \nabla_Z U) + bA(X)g(Y, \nabla_Z U) \end{aligned} \quad (3.\ 17)$$

elde edilir. U paralel bir vektör alanı olduğuna göre $\forall X \in \chi(M^n)$ için;

$$\nabla_X U = 0 \quad (3.\ 18)$$

koşulu sağlanır. O halde (2. 1) eşitliği kullanılarak (3. 18) yardımı ile

$$R(X, Y)U = 0 \quad (3.\ 19)$$

yazılabilir ve buradan da

$$R(X, Y, U, V) = 0 \quad (3.\ 20)$$

elde edilir. (3. 20) eşitliğinden X ve V ye göre kontraksiyon yapıldığında;

$$S(Y, U) = 0 \quad (3.\ 21)$$

olduğu görülür. Buradan (3. 1) denklemi yardımı ile

$$S(Y, U) = (a+b)A(Y) = 0 \quad (3.\ 22)$$

elde edilir. $A(Y) \neq 0$ olduğundan ;

$$a + b = 0 \quad (3.\ 23)$$

dır. Öyleyse $b = -a$ dır.

Böylece (3. 18) ve (3. 23) eşitlikleri (3.17) denkleminde yerlerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} & (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(Z, X) + (\nabla_Z S)(X, Y) \\ & = X[a]g(Y, Z) - X[a]A(Y)A(Z) + Y[a]g(Z, X) \\ & -Y[a]A(X)A(Z) + Z[a]g(X, Y) - Z[a]A(X)A(Y) = 0 \end{aligned} \quad (3.\ 24)$$

bulunur. (3. 24) eşitliğinde Z = U olarak alındığında;

$$\begin{aligned} & X[a]g(Y, U) - X[a]A(Y)A(U) + Y[a]g(U, X) \\ & -Y[a]A(X)A(U) + U[a]g(X, Y) - U[a]A(X)A(Y) = 0 \end{aligned} \quad (3.\ 25)$$

elde edilir. Böylece (3. 25) denkleminden

$$U[a]\{g(X, Y) - A(X)A(Y)\} = 0 \qquad (3.\ 26)$$

bulunur. Buradan Tanım 3.1 kullanıldığında;

$$U[a]\frac{1}{a}S(X, Y) = 0 \qquad (3.\ 27)$$

eşitliğinden

$$U[a] = 0 \qquad (\ a \neq 0 \text{ olduğundan }) \qquad (3.\ 28)$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır. ■

**Teorem 3.4.** $(M^n, g)$ Ricci- pseudosimetrik bir yarı-Einstein manifold ise

$$L_S = \frac{a+b}{n-1}$$

dir.

**İspat :** $(M^n, g)$ Ricci-pseudosimetrik bir manifold olduğundan (2. 26) gereği

$$R \cdot S = L_S Q(g, S)$$

dir.

$\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için (2. 19) eşitliğinden

$$(R(X, Y) \cdot S)(Z, W) = - S(R(X,Y)Z, W) - S(Z, R(X,Y)W) \qquad (3.\ 29)$$

olup $M^n$ bir yarı-Einstein manifold olduğundan;

$$(R(X, Y) \cdot S)(Z, W) = -a\, g(R(X, Y)Z, W) - bA(W)A(R(X, Y)Z)$$
$$-a\, g(R(X, Y)W, Z) - bA(Z)A(R(X, Y)W)$$

ve buradan da

$$(R(X, Y) \cdot S)(Z, W) = -b[A(W)A(R(X, Y)Z) + A(Z)A(R(X, Y)W)] \qquad (3.\ 30)$$

yazılabileceği görülür. Diğer taraftan (2. 20) eşitliği yardımı ile

$$Q(g, S)(Z, W; X, Y) = - S((X \wedge_g Y)Z, W) - S(Z, (X \wedge_g Y)W)$$

yazılabilir. Buradan da (2. 11) kullanıldığında;

$$Q(g, S)(Z, W; X, Y) = - g(Y, Z)S(X, W) + g(X, Z)S(Y, W)$$
$$- g(Y, W)S(X, Z) + g(X, W)S(Y, Z) \qquad (3.\ 31)$$

olduğu görülür. $M^n$ yarı-Einstein olduğundan;

$$Q(g, S)(Z, W; X, Y) = - bg(Y, Z)A(X)A(W) + bg(X, Z)A(Y)A(W)$$
$$- bg(Y, W)A(X)A(Z) + bg(X, W)A(Y)A(Z) \qquad (3.\ 32)$$

elde edilir. (3. 30) ile (3. 32) denklemlerinde W = U alalım. Böylece $M^n$ Ricci-pseudosimetrik olduğundan;

$$bR(X, Y, Z, U) = L_S[bg(Y, Z)A(X) - bg(X, Z)A(Y) + bA(X)A(Y)A(Z) - bA(X)A(Y)A(Z)] \quad (3.33)$$

ve dolayısıyla

$$b\,R(X, Y, Z, U) = L_S\, b[g(Y, Z)A(X) - g(X, Z)A(Y)] \quad (3.34)$$

elde edilir. $b \neq 0$ olduğuna göre;

$$R(X, Y, Z, U) = L_S\,[g(Y, Z)A(X) - g(X, Z)A(Y)] \quad (3.35)$$

dır. Buradan Tanım 2.4 (ii) ve Tanım 3. 2 kullanıldığında;

$$-R(X, Y, U, Z) = L_S\,[g(Y, Z)g(X, U) - g(X, Z)g(Y, U)] \quad (3.36)$$

yazılabilir. (3. 36) denkleminde X ve Z ye göre kontraksiyon yapıldığında;

$$-S(Y, U) = L_S\,[g(Y, U) - ng(Y, U)] \quad (3.37)$$

elde edilir. Buradan

$$S(Y, U) = L_S\,(n-1)g(Y, U)$$

olup böylece

$$(a+b)A(Y) = L_S\,(n-1)A(Y) \qquad (A(Y) \neq 0 \text{ olduğundan })$$

dir ve buradan da

$$(a+b) = L_S\,(n-1)$$

bulunur. O halde

$$L_S = \frac{a+b}{n-1}$$

dir.■

**Teorem 3.5.** $(M^n, g)$ bir yarı-Einstein manifold olsun. K konharmonik eğrilik tensörü olmak üzere; $K \cdot S = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$ dır.

**İspat :** Riemann eğrilik tensörü R için tanımlanan (2.19) eşitliği K konharmonik eğrilik tensörü için de geçerli olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$(K(X, Y) \cdot S)(Z, W) = - S(K(X, Y)Z, W) - S(Z, K(X, Y)W) \quad (3.38)$$

yazılabilir. $M^n$ bir yarı-Einstein manifold olduğundan;

$$(K(X, Y) \cdot S)(Z, W) = -aK(X, Y, Z, W) - bA(W)K(X, Y, Z, U) -aK(X, Y, W, Z) - bA(Z)K(X, Y, W, U)$$

bulunur. K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z) olduğundan böylece

$$(K(X, Y)\cdot S)(Z, W) = -b[A(W)K(X, Y, Z, U) + A(Z)K(X, Y, W, U)] \qquad (3.\ 39)$$

elde edilir. (3. 39) denkleminde (2. 10) eşitliği kullanıldığında;

$$\begin{aligned}(K(X, Y)\cdot S)(Z, W) = - b[&A(W)\{R(X, Y, Z, U) - \frac{1}{n-2}\{g(Y, Z)S(X, U) \\ &- g(X, Z)S(Y, U) + S(Y, Z)g(X, U) - S(X, Z)g(Y, U)\} \\ &+ A(Z)\{R(X, Y, W, U) - \frac{1}{n-2}\{g(Y, W)S(X, U) \\ &- g(X, W)S(Y, U) + S(Y, W)g(X, U) - S(X, W)g(Y, U)\}\}]\end{aligned}$$

elde edilir.

Son denklemde W = U alalım. $M^n$ bir yarı-Einstein manifold ve $K \cdot S = 0$ olduğundan;

$$0 = -b[-R(X, Y, U, Z) - \frac{1}{n-2}\{(2a+b)A(X)g(Y, Z) - (2a+b)A(Y)g(X, Z)\}] \qquad (3.\ 40)$$

elde edilir. (3. 40) eşitliğinde X ve Z ye göre kontraksiyon yapıldığında;

$$0 = -b[-S(Y, U) - \frac{1}{n-2}\{(2a+b)A(Y) - (2a+b)nA(Y)\}] \qquad (3.\ 41)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}0 &= b[(a+b)A(Y) + \frac{2a+b}{n-2}(1-n)A(Y)] \\ &= bA(Y)[\frac{(a+b)(n-2)+(2a+b)(1-n)}{n-2}] \qquad (3.\ 42)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$- bA(Y)\left(\frac{an+b}{n-2}\right) = 0 \qquad (3.\ 43)$$

olduğu görülür. $b \neq 0$ ve $A(Y) \neq 0$ olduğundan;

$$an + b = 0$$

dır. Böylece (3. 3) gereği $\tau = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. ■

**Örnek 3.6.** Flat olmayan bir $(M^n, g)$, $(n > 3)$, Riemann manifoldu için $M^n$ nin Riemann Christoffel eğrilik tensörü;

$$\begin{aligned}R(X, Y, Z, W) = a[&g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] \\ &+ b[A(Y)A(Z)g(X, W) - A(X)A(Z)g(Y, W) \\ &+ A(X)A(W)g(Y, Z) - A(Y)A(W)g(X, Z)] \qquad (3.\ 44)\end{aligned}$$

biçiminde ise $M^n$ ye *yarı sabit eğriliklidir* denir. Burada a, b skalerler ve $b \neq 0$, A;

$$g(X, U) = A(X)$$

biçiminde bir 1-form ve U bir birim vektör alanıdır [15].

(3. 44) denkleminde X ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$S(Y, Z) = [a(n-1) + b]g(Y, Z) + b(n-2)A(Y)A(Z)$$

olup $M^n$ bir yarı-Einstein manifolddur.

**Örnek 3.7.** [7] den 3-boyutlu pseudosimetrik bir M manifoldunun Ricci tensörünün ;

$$S(X, Y) = \alpha g(X, Y) + \beta V(X)V(Y) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

biçiminde olduğu bilinmektedir. Burada V sıfırdan farklı bir 1-formdur. Böylece M bir yarı-Einstein manifolddur.

# 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-EINSTEIN MANİFOLDLAR

Bu bölümde genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlar incelenmiştir. Genelleştirilmiş bir yarı-Einstein manifoldun Ricci semi-simetrik ve Ricci pseudosimetrik olması, dairesel paralel Ricci tensöre sahip olması ve $C \cdot S = 0$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

**Tanım 4.1.** $(M^n, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $M^n$ nin Ricci tensörü $\forall X, Y \in \chi(M^n)$ için;

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + bA(X)A(Y) + cB(X)B(Y) \tag{4. 1}$$

formunda ise $M^n$ ye *genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold* adı verilir [16]. Burada a, b ve c, $M^n$ üzerinde reel değerli fonksiyonlardır. U ve V, $M^n$ üzerinde birim tanjant vektör alanları olmak üzere A ve B;

$$A(X) = g(X, U) \quad \text{ve} \quad B(X) = g(X, V) \tag{4. 2}$$

biçiminde tanımlanan 1-formlardır. U vektör alanı A 1-formunun, V vektör alanı ise B 1-formunun üretecidir.

(4. 1) eşitliğinden kontraksiyon yardımı ile $M^n$ nin skaler eğrilik fonksiyonu

$$\tau = na + b + c \tag{4. 3}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.** $(M^n, g)$ Ricci semi-simetrik bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold olsun. Bu taktirde b = c dir [17].

**İspat :** $(M^n, g)$ Ricci semi-simetrik bir manifold olduğundan (2. 23) gereği

$$R \cdot S = 0$$

dır. Böylece (2. 19) gereği $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$(R(X,Y) \cdot S)(Z, W) = -S(R(X,Y)Z, W) - S(Z, R(X,Y)W)$$

olup buradan

$$S(R(X, Y)Z, W) + S(Z, R(X, Y)W) = 0 \tag{4. 4}$$

yazılabilir. Buradan da (4. 1) denklemi yardımı ile

$$ag(R(X, Y)Z, W) + bA(R(X, Y)Z)A(W) + cB(R(X, Y)Z)B(W)$$
$$+ ag(Z, R(X, Y)W) + bA(R(X, Y)W)A(Z) + cB(R(X, Y)W)B(Z) = 0 \quad (4.\ 5)$$
elde edilir. Son eşitlikte Tanım 2. 4 (v) ve (4. 2) kullanıldığında;
$$b\,[R(X, Y, Z, U)A(W) + R(X, Y, W, U)A(Z)]$$
$$+ c\,[R(X, Y, Z, V)B(W) + R(X, Y, W, V)B(Z) = 0 \quad (4.\ 6)$$
bulunur ve (4. 6) denkleminde $W = U$ ve $Z = V$ olarak alındığında ;
$$b\,[R(X, Y, V, U)A(U) + R(X, Y, U, U)A(V)]$$
$$+ c\,[R(X, Y, U, V)B(U) + R(X, Y, U, V)B(V)] = 0 \quad (4.\ 7)$$
sonucuna ulaşılır. (4. 7) denkleminde (2. 2) (ii) ve (4. 2) kullanıldığında;
$$bR(X, Y, V, U) + cR(X, Y, U, V) = 0 \quad (4.\ 8)$$
ve buradan da
$$(b - c)R(X, Y, V, U) = 0 \quad (4.\ 9)$$
elde edilir. Böylece $R(X, Y, V, U) \neq 0$ olduğundan;
$$b - c = 0$$
bulunur. ■

**Teorem 4.3.** $(M^n, g)$ Ricci-pseudosimetrik bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold olsun. Bu durumda ya $b = c$ dir ya da $M^n$ üzerinde;
$$(n-1)(b+c)\,L_S = (a+c)(b+c) + b^2$$
eşitliği sağlanır.

**İspat :** $M^n$, Ricci - pseudosimetrik bir manifold olduğundan (2. 26) gereği
$$R \cdot S = L_S Q(g, S) \quad (4.\ 10)$$
yazılabilir. (2. 19) gereği
$$(R(X, Y)\cdot S)(Z, W) = - S(R(X, Y)Z, W) - S(Z, R(X, Y)W) \quad (4.\ 11)$$
olup $M^n$ yarı-Einstein olduğundan;
$$(R(X, Y)\cdot S)(Z, W) = -b\,[A(W)R(X, Y, Z, U) + A(Z)R(X, Y, W, U)]$$
$$-c\,[B(W)R(X, Y, Z, V) + B(Z)R(X, Y, W, V)] \quad (4.\ 12)$$
bulunur. Diğer taraftan (2. 20) eşitliği kullanılarak
$$Q(g, S)(Z, W; X, Y) = -S((X\wedge_g Y)Z, W) - S(Z, (X\wedge_g Y)W) \quad (4.\ 13)$$
yazılabilir. Buradan (2.11) eşitliği yardımıyla,
$$Q(g, S)(Z, W; X, Y) = - g(Y, Z)S(X, W) + g(X, Z)S(Y, W)$$
$$- g(Y, W)S(X, Z) + g(X, W)S(Y, Z) \quad (4.\ 14)$$

olup $M^n$ bir yarı-Einstein manifold olduğundan;

$$\begin{aligned}Q(g, S)(Z, W; X, Y) = &- ag(Y, Z)g(X,W) - bA(X)A(W)g(Y, Z)\\ &- cB(X)B(W)g(Y, Z) + ag(X, Z)g(Y, W)\\ &+ bA(Y)A(W)g(X, Z) + cB(Y)B(W)g(X, Z)\\ &- ag(Y, W)g(X, Z) - bA(X)A(Z)g(Y, W)\\ &- cB(X)B(Z)g(Y, W) + ag(Y, Z)g(X, W)\\ &+ bA(Y)A(Z)g(X, W) + cB(Y)B(Z)g(X, W)\end{aligned} \tag{4. 15}$$

elde edilir. (4. 12) ve (4. 15) denklemleri (4. 10) eşitliğinde yerlerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}&b\,[A(W)R(X, Y, Z, U) + A(Z)R(X, Y, W, U)]\\ &+ c\,[B(W)R(X, Y, Z, V) + B(Z)R(X, Y, W, V)]\\ &= L_S\,[ag(Y, Z)g(X, W) + bA(X)A(W)g(Y, Z) + cB(X)B(W)g(Y, Z)\\ &- ag(X,Z)g(Y, W) - bA(Y)A(W)g(X, Z) - cB(Y)B(W)g(X, Z)\\ &+ ag(Y, W)g(X, Z) + bA(X)A(Z)g(Y, W) + cB(X)B(Z)g(Y, W)\\ &- ag(Y, Z)g(X, W) - bA(Y)A(Z)g(X, W) - cB(Y)B(Z)g(X, W)]\end{aligned} \tag{4. 16}$$

bulunur. (4. 16) denkleminde X ve Z ye göre kontraksiyon yapıldığında;

$$\begin{aligned}&bS(Y, U)A(W) + cS(Y, V)B(W) + bR(W, U, Y, U) + cR(W, V, Y, V)\\ &= L_S\,[n( bA(Y)A(W) + cB(Y)B(W) ) - (b+c)g(Y, W)]\end{aligned} \tag{4. 17}$$

olduğu görülür. Son eşitlikte $W = Y = U$ alındığında;

$$b(a+b) + cR(V, U, V, U) = L_S\,[nb - (b+c)] \tag{4. 18}$$

elde edilir. Yine benzer şekilde (4. 17) eşitliğinde $W = Y = V$ olarak alındığında;

$$c(a+c) + bR(V, U, V, U) = L_S\,[nc- (b+c)] \tag{4. 19}$$

bulunur. (4. 18) ve (4. 19) eşitlikleri karşılaştırıldığında ya $b = c$ dir ya da $M^n$ üzerinde;

$$( n-1)(b+c)\, L_S = (a+c)(b+c) + b^2$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu da teoremi ispatlar. ■

**Teorem 4.4.** $(M^n, g)$ dairesel paralel Ricci tensöre sahip bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold olsun. Eğer U ve V paralel vektör alanları ise a, U ve V vektör alanları boyunca sabittir [18].

**İspat :** $(M^n, g)$ genelleştirilmiş yarı-Einstein manifold olsun. U ve V paralel vektör alanları olduğuna göre $\forall X \in \chi(M^n)$ için;

$$\nabla_X U = 0 \quad \text{ve} \quad \nabla_X V = 0 \tag{4. 20}$$

dır. O halde (2. 1) eşitliğinde U ve V vektör alanları için;

$$R(X, Y)U = \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X,Y]} U = 0 \quad (4.\ 21)$$

ve

$$R(X, Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X,Y]} V = 0 \quad (4.\ 22)$$

yazılabilir. Buradan da (4. 21) ve (4. 22) denklemlerinin uygun kontraksiyonu ile

$$S(X, U) = 0 \quad \text{ve} \quad S(X, V) = 0 \quad (4.\ 23)$$

olduğu görülür. (4. 23) eşitliklerinde (4. 1) kullanılarak

$$S(X, U) = (a+b)A(X) = 0 \quad \text{ve} \quad S(X, V) = (a+c)B(X) = 0 \quad (4.\ 24)$$

elde edilir. $A(X) \neq 0$ ve $B(X) \neq 0$ olduğundan

$$a + b = 0 \ \text{ ve } \ a + c = 0$$

dır. Dolayısıyla $a = -b = -c$ elde edilir. O halde S Ricci tensörünün

$$S(X, Y) = a\{g(X, Y) - A(X)A(Y) - B(X)B(Y)\} \quad (4.\ 25)$$

biçimine dönüştüğü görülür. (2. 12) gereği S nin kovaryant türevi

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = \nabla_X S(Y, Z) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z) \quad (4.\ 26)$$

olup (4. 25) denklemi (4. 26) denkleminde kullanıldığında;

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(Y, Z) = {} & X[a]\{g(Y, Z) - A(Y)A(Z) - B(Y)B(Z)\} + a\,[g(\nabla_X Y, Z) \\ & + g(Y, \nabla_X Z) - g(Z, U)\{g(\nabla_X Y, U) + g(Y, \nabla_X U)\} - g(Y, U)\{g(\nabla_X Z, U) \\ & + g(Z, \nabla_X U)\} - g(Z, V)\{g(\nabla_X Y, V) + g(Y, \nabla_X V)\} - g(Y, V)\{g(\nabla_X Z, V) \\ & + g(Z, \nabla_X V)\}] - a\{g(\nabla_X Y, Z) - A(\nabla_X Y)A(Z) - B(\nabla_X Y)B(Z)\} \\ & - a\{g(Y, \nabla_X Z) - A(Y)A(\nabla_X Z) - B(Y)B(\nabla_X Z)\} \quad (4.\ 27)\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = X[a]\{g(Y, Z) - A(Y)A(Z) - B(Y)B(Z)\} \quad (4.\ 28)$$

elde edilir. $M^n$ manifoldu dairesel paralel Ricci tensöre sahip olduğundan (2. 30) gereği

$$(\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(Z, X) + (\nabla_Z S)(X, Y) = 0$$

yazılabilir. (4. 28) denklemi bu eşitlikte yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned}0 = {} & X[a]\{g(Y, Z) - A(Y)A(Z) - B(Y)B(Z)\} \\ & + Y[a]\{g(X, Z) - A(X)A(Z) - B(X)B(Z)\} \\ & + Z[a]\{g(X, Y) - A(X)A(Y) - B(X)B(Y)\} \quad (4.\ 29)\end{aligned}$$

elde edilir. (4. 29) denkleminde $X = U$ olarak alındığında;

$$\frac{1}{a} U[a] S(Y, Z) = 0 \quad (4.\ 30)$$

bulunur. $S \neq 0$ olduğundan $U[a] = 0$ elde edilir. O halde a nın, U vektör alanı boyunca sabit olduğu görülür. Yine benzer şekilde (4. 29) denkleminde $X = V$ olarak alındığında;

$$\frac{1}{a} V[a]\, S(Y, Z) = 0 \tag{4. 31}$$

elde edilir. Son eşitlik a nın, V vektör alanı boyunca sabit olduğunu gösterir. Bu da teoremi ispatlar. ■

**Teorem 4.5.** $(M^n, g)$, $C \cdot S = 0$ eşitliğini sağlayan genelleştirilmiş bir yarı-Einstein manifold olsun. O halde ya $A(C(X, Y)V) = 0$ dır ( buna denk olarak $B(C(X, Y)U) = 0$ dır) ya da $b = c$ dir.

**İspat :** $(M^n, g)$, $C \cdot S= 0$ eşitliğini sağlayan bir manifold olduğuna göre $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$(C(X, Y)\cdot S)(Z, W) = -S(C(X, Y)Z, W) - S(Z, C(X, Y)W) = 0 \tag{4. 32}$$

yazılabilir. $M^n$ genelleştirilmiş yarı-Einstein olduğundan (4. 32) eşitliği

$$\begin{aligned} 0 &= aC(X, Y, Z, W) + bA(C(X, Y)Z)A(W) + cB(C(X, Y)Z)B(W) \\ &\quad + aC(X, Y, W, Z) + bA(C(X, Y)W)A(Z) + cB(C(X, Y)W)B(Z) \end{aligned} \tag{4. 33}$$

biçimine dönüşür. (4. 33) eşitliğinde $W = U$ ve $Z = V$ olarak alındığında;

$$\begin{aligned} 0 &= aC(X, Y, V, U) + bA(C(X, Y)V)A(U) + cB(C(X, Y)V)B(U) \\ &\quad - aC(X, Y, V, U) + bA(C(X, Y)U)A(V) + cB(C(X, Y)U)B(V) \end{aligned} \tag{4. 34}$$

elde edilir. U ve V vektör alanlarının ortogonal olma özelliğinden yararlanılarak

$$bA(C(X, Y)V) + cB(C(X, Y)U) = 0 \tag{4. 35}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$bg(C(X, Y)V, U) + cg(C(X, Y)U, V) = 0 \tag{4. 36}$$

veya buna denk olarak

$$(b-c)C(X, Y, V, U) = 0 \tag{4. 37}$$

elde edilir. Buradan da;

**i)** $b = c$ dir ya da

**ii)** $M^n$ üzerinde $C(X, Y, V, U) = 0$

eşitliği sağlanır. İkinci durum bize $A(C(X, Y)V) = 0$ olduğunu ya da buna denk olarak $B(C(X, Y)U) = 0$ olması gerektiğini gösterir. ■

**Örnek 4.6.** Flat olmayan bir $(M^n, g)$, $(n > 3)$, Riemann manifoldu için $M^n$ nin Riemann Christoffel eğrilik tensörü;

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = {} & a[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] \\ & + b[A(Y)A(Z)g(X, W) - A(X)A(Z)g(Y, W) \\ & + A(X)A(W)g(Y, Z) - A(Y)A(W)g(X, Z)] \\ & + c[B(Y)B(Z)g(X, W) - B(X)B(Z)g(Y, W) \\ & + B(X)B(W)g(Y, Z) - B(Y)B(W)g(X, Z)] \end{aligned} \tag{4. 38}$$

biçiminde ise $M^n$ ye *genelleştirilmiş yarı sabit eğriliklidir* denir [17]. Burada a, b, c skalerler ve $b, c \neq 0$, A ve B sıfırdan farklı 1-formlar,

$$g(X, U) = A(X) \ , \ g(X, V) = B(X)$$

ve

$$g(U, V) = 0 \ , \ g(U, U) = 1 = g(V, V)$$

dir. (4. 38) denkleminde X ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$S(Y, Z) = [a(n-1) + b + c]g(Y, Z) + b(n-2)A(Y)A(Z) + c(n-2)B(Y)B(Z)$$

olup $M^n$ bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifolddur.

# 5. YARI-EINSTEIN VE GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI-EINSTEIN HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde $M^{n+1}(c)$ sabit eğrilikli uzay formunda yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzeyler incelenmiştir. $M^{n+1}(c) = E^{n+1}$ olma durumunda yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlar sırası ile [19] ve [17] de incelenmiştir. Bu bölümde, [19] ve [17] de verilen sonuçların sabit $M^{n+1}(c)$ eğrilikli uzay formunda da geçerli olduğu gösterilmiştir.

**Teorem 5.1.** $M^n \subset M^{n+1}(c)$ yarı umbilik bir hiperyüzey olsun. Bu taktirde $M^n$ bir yarı-Einstein manifolddur.

**İspat :** $M^n \subset M^{n+1}(c)$ bir hiperyüzey olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için (2. 41) Gauss denklemi;

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = {} & c[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] \\ & + H(Y, Z)H(X, W) - H(X, Z)H(Y, W) \end{aligned} \tag{5. 1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$H(Y, Z) = g(AY, Z) \tag{5. 2}$$

dir ve A şekil operatörüdür. $M^n$ yarı umbilik bir hiperyüzey olduğundan (2. 34) gereği

$$H(Y, Z) = \alpha g(Y, Z) + \beta\, \omega(Y)\omega(Z) \tag{5. 3}$$

yazılabilir. Böylece (5. 3) denklemi, (5. 1) denkleminde kullanıldığında;

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = {} & c[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] \\ & + \alpha^2 [g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)] \\ & + \alpha\beta [g(Y, Z)\omega(X)\omega(W) + g(X, W)\omega(Y)\omega(Z) \\ & - g(X, Z)\omega(Y)\omega(W) - g(Y, W)\omega(X)\omega(Z)] \end{aligned} \tag{5. 4}$$

elde edilir. Buradan X ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$S(Y, Z) = [c(n-1) + \alpha^2(n-1) + \alpha\beta]\, g(Y, Z) + \alpha\beta\,(n-2)\,\omega(Y)\omega(Z) \tag{5. 5}$$

elde edilir. O halde Tanım 3.1 gereği $M^n$ bir yarı-Einstein manifolddur. ■

**Teorem 5.2.** $M^n \subset M^{n+1}(c)$ 2-yarı umbilik bir hiperyüzey olsun. Bu taktirde $M^n$ genelleştirilmiş bir yarı -Einstein manifolddur.

**İspat :** $M^n \subset M^{n+1}(c)$ bir hiperyüzey olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için (2. 41) Gauss denklemi;

$$R(X, Y, Z, W) = c\,[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] + H(Y, Z)H(X, W) - H(X, Z)H(Y, W) \quad (5.\ 6)$$

biçiminde yazılabilir. $M^n$ 2-yarı umbilik bir hiperyüzey olduğundan, (2. 35) gereği $M^n$ nin 2. temel formu

$$H(X, Y) = \alpha\, g(X, Y) + \beta\, \omega(X)\omega(Y) + \gamma\, \eta(X)\eta(Y) \quad (5.\ 7)$$

biçimindedir. Buradan (5. 7) denklemi, (5. 6) denkleminde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) =& c\,[g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)] + \alpha^2 g(X, W)g(Y, Z) \\ &+ \alpha\beta\, g(Y, Z)\,\omega(X)\omega(W) + \alpha\gamma\, g(Y, Z)\,\eta(X)\eta(W) \\ &+ \alpha\beta\, g(X, W)\,\omega(Y)\omega(Z) + \beta^2 \omega(X)\omega(Y)\omega(Z)\omega(W) \\ &+ \beta\gamma\, \omega(Y)\omega(Z)\eta(X)\eta(W) + \alpha\gamma\, g(X, W)\,\eta(Y)\eta(Z) \\ &+ \beta\gamma\, \omega(X)\omega(W)\eta(Y)\eta(Z) + \gamma^2 \eta(X)\eta(W)\eta(Y)\eta(Z) \\ &- \alpha^2 g(X, Z)g(Y, W) - \alpha\beta\, g(X, Z)\,\omega(Y)\omega(W) \\ &- \alpha\gamma\, g(X, Z)\,\eta(Y)\eta(W) - \alpha\beta\, g(Y, W)\,\omega(X)\omega(Z) \\ &- \beta^2 \omega(X)\omega(Y)\omega(Z)\omega(W) - \beta\gamma\, \omega(X)\omega(Z)\eta(Y)\eta(W) \\ &- \alpha\gamma\, g(Y, W)\,\eta(X)\eta(Z) - \beta\gamma\, \omega(Y)\omega(W)\eta(X)\eta(Z) \\ &- \gamma^2 \eta(X)\eta(W)\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \quad (5.\ 8)$$

elde edilir. (5. 8) denkleminde X ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$\begin{aligned} S(Y, Z) =& c(n-1)g(Y, Z) + \alpha^2 n\, g(Y, Z) + \alpha\beta\, g(Y, Z) + \alpha\gamma\, g(Y, Z) \\ &+ \alpha\beta\, n\, \omega(Y)\omega(Z) + \beta\gamma\, \omega(Y)\omega(Z) + \alpha\gamma\, n\, \eta(Y)\eta(Z) \\ &+ \beta\gamma\, \eta(Y)\eta(Z) - \alpha^2 g(Y, Z) - \alpha\beta\, \omega(Y)\omega(Z) \\ &- \alpha\gamma\, \eta(Y)\eta(Z) - \alpha\beta\, \omega(Y)\omega(Z) - \alpha\gamma\, \eta(Y)\eta(Z) \end{aligned} \quad (5.\ 9)$$

bulunur. Böylece (5. 9) denklemi

$$\begin{aligned} S(Y, Z) =& [(c+\alpha^2)(n-1) + \alpha\beta + \alpha\gamma\,]\, g(Y, Z) + [(n-2)\alpha\beta + \beta\gamma\,]\,\omega(Y)\omega(Z) \\ &+ [(n-2)\alpha\gamma + \beta\gamma\,]\,\eta(Y)\eta(Z) \end{aligned}$$

biçimine dönüşür. O halde $M^n$, genelleştirilmiş bir yarı-Einstein manifolddur. ■

**Tanım 5.3.** $M \subset E^{n+1}$ n-boyutlu bir alt manifold olmak üzere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ $T_pM$ tanjant uzayının bir ortonormal bazını ve K da M nin kesitsel eğriliğini göstersin. $e_i$ ve $e_j$ vektörleri tarafından gerilen düzlem kesitini $e_i \wedge e_j$ $(i \neq j)$ ile gösterelim. $\rho$, M hiperyüzeyinin skalar eğriliği olmak üzere her $p \in M$ noktası için M üzerinde bir

$$(\inf K)(p) := \inf \{ K(\pi) : \pi \subset T_pM \text{ bir düzlemdir} \}$$

reel fonksiyonu tanımlansın. B. Y. Chen inf K, $\rho$ ve ortalama eğrilik vektörünün boyu $\|\widetilde{H}\|$ arasında aşağıdaki

$$(\inf K) \geq \frac{1}{2} \{ \rho - \frac{n^2(n-2)}{n-1} \|\widetilde{H}\|^2 \} \tag{5. 10}$$

eşitsizliğini ispatladı [20]. Bu eşitsizlik daha sonraları literatürde B. Y. Chen Eşitsizliği olarak kullanılmaya başlanıldı.

**Teorem 5.4.** $M^n \subset E^{n+1}$ n-boyutlu $(n \geq 2)$ bir hiperyüzey olsun. O zaman (5. 10) eşitsizliği sağlanır. (5. 10) denkleminde eşitlik sağlanır $\Leftrightarrow$ $T_pM$ tanjant uzayının uygun bir $e_1, \ldots, e_n$ lokal ortonormal çatısı için $\xi$ (normal) kesitine göre M nin şekil operatörü matrisi;

$$A_\xi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{bmatrix}$$

formundadır. Burada $\mu = a + b$ dir [20].

**Örnek 5.5.** Johan Deprez Eliptik Hiperkoniyi;

$$C_\theta^m := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 > 0 \text{ ve } (tg^2\, \theta)\, x_0{}^2 = x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 \}, \ \theta \neq 0$$

biçiminde tanımlamıştır [21]. Burada $C_\theta^m$ eliptik hiperkonisi;

$$L_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} := \{t, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_n t \mid t \in \mathbb{R}_0^+\}$$

doğruları ve

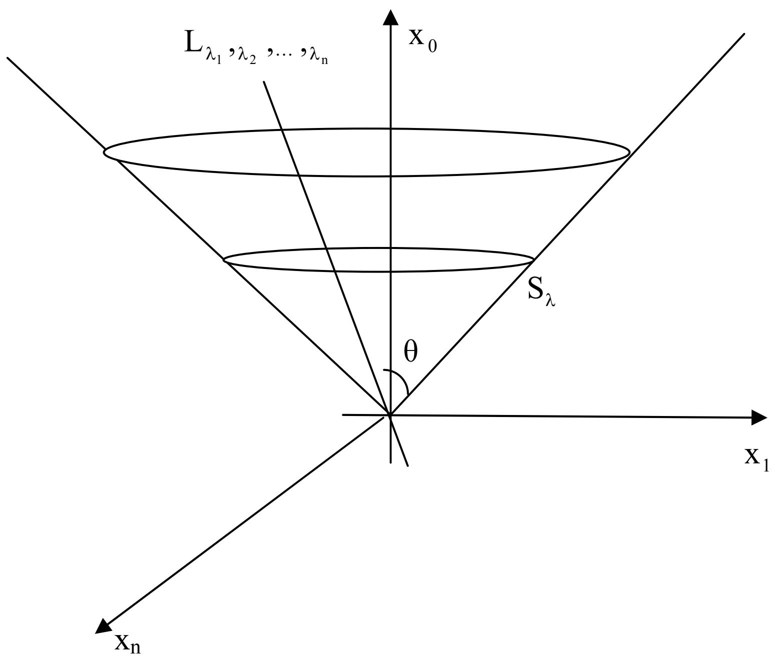
$$S\lambda := \{(\lambda, x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \text{ ve } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \theta\}$$

hiperküreleri tarafından üretilir (Bakınız Şekil 5. 1.).

Aynı yazar, aynı çalışmada $C_\theta^m$ eliptik hiperkonisinin şekil operatörü matrisinin;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{1}{x_0} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{1}{x_0} \end{bmatrix}$$

biçiminde olduğunu göstermiştir. Tanım 2.21 gereği $C_\theta^m$ yarı umbilik bir hiperyüzeydir. Buradan da Teorem 5.1 gereği eliptik hiperkoninin bir yarı-Einstein manifold olduğu görülür. Ayrıca $C_\theta^m$ nın Chen eşitsizliğini sağladığı Tanım 5.3 gereği açıkça görülmektedir.




**Şekil 5. 1.**

**Örnek 5.6.** Chen eşitliğini sağlayan hiperyüzeyler birer 2-yarı umbilik hiperyüzey olup böylece genelleştirilmiş yarı-Einstein manifolddurlar.

**Örnek 5.7.** $\widetilde{M} \subset E^3$ sıfırdan ve birbirinden farklı iki $\lambda, \mu$ asli eğriliklerine sahip bir yüzey olsun.

$E^{n+1}$ deki $M = \widetilde{M} \times E^{n-2}$, $n \geq 4$, hipersilindirini düşünelim. M nin asli eğrilikleri $(\lambda,\ \mu,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{(n-2)\text{defa}})$ dir. Böylece M, 2-yarı umbilik bir manifolddur. Dolayısıyla Teorem 5.2 gereği M bir genelleştirilmiş yarı-Einstein manifolddur.

## 6. N(k)-YARI EINSTEIN MANİFOLDLAR

Bu bölümde N(k)-yarı Einstein manifoldlar incelenmiştir. Bir N(k)-yarı Einstein manifoldun semi-simetrik, pseudosimetrik, genelleştirilmiş Ricci-pseudosimetrik, Ricci semi-simetrik, Ricci pseudosimetrik, Weyl semi-simetrik, Weyl pseudosimetrik ve yarı konformal flat olması ile $R \cdot \widetilde{C} = 0$ şartını sağlaması için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

**Tanım 6.1.** M Riemann manifoldunun k-nullity distribüsyonu $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $k \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için;

$$N(k) : p \rightarrow N_p(k)$$

$$N_p(k) = \{ Z \in T_p(M) : R(X, Y)Z = k\,(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \} \qquad (6.\ 1)$$

biçiminde tanımlanır [12].

**Tanım 6.2.** $(M^n, g)$ bir yarı-Einstein manifold olsun. Eğer $\xi$ üreteci bazı $k \in C^{\infty}(M^n, \mathbb{R})$ için k-nullity distribüsyonuna ait ise; $(M^n, g)$ ye *N(k)-yarı Einstein manifold* adı verilir [22].

$(M^n, g)$ bir yarı-Einstein manifold olsun. O halde;

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\,\eta(X)\eta(Y) \qquad (6.\ 2)$$

$$QY = aY + b\,\eta(Y)\xi \qquad (6.\ 3)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\eta$ ve $\xi$ sırasıyla

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad \text{ve} \quad g(\xi, \xi) = 1 \qquad (6.\ 4)$$

eşitliklerini sağlayan 1-form ve $M^n$ manifoldunun üretecidirler. (6. 2) ve (6. 3) eşitliklerinde $Y = \xi$ olarak alındığında;

$$S(X, \xi) = (a+b)\,\eta(X) \qquad (6.\ 5)$$

$$Q\xi = (a+b)\,\xi \qquad (6.\ 6)$$

elde edilir. Ayrıca (6. 2) denkleminden kontraksiyon yapıldığında;

$$\tau = na + b \qquad (6.\ 7)$$

bulunur.

$(M^n, g)$ bir N(k)-yarı Einstein manifold olsun. O halde;

$$R(Y, Z)\xi = k(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z) \tag{6. 8}$$

$$R(\xi, Y)Z = k(g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y) \tag{6. 9}$$

$$R(\xi, Y)\xi = k(\eta(Y)\xi - Y) \tag{6. 10}$$

yazılabilir. (6. 8) ve (6. 9) eşitliklerinden;

$$\begin{aligned} \eta(R(Y, Z)\xi) &= \eta(k(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z)) \\ &= k(\eta(Z)\eta(Y) - \eta(Y)\eta(Z)) = 0 \end{aligned} \tag{6. 11}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta(R(\xi, Y)Z) &= \eta(k(g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y)) \\ &= k(g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)) \end{aligned} \tag{6. 12}$$

elde edilir [22].

**Teorem 6.3.** M bir N(k)-yarı Einstein manifold olsun. Bu taktirde;

$$k = \frac{a+b}{n-1}$$

dir [23].

**İspat :** (6. 8) eşitliğinin her iki yanının W ile iç çarpımı alındığında;

$$R(Y, Z, \xi, W) = k(\eta(Z)g(Y, W) - \eta(Y)g(Z, W)) \tag{6. 12}$$

elde edilir. Buradan da Y ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$S(Z, \xi) = k(n\text{-}1)\eta(Z) \tag{6. 13}$$

bulunur. Böylece (6. 5) gereği

$$k(n\text{-}1) = a + b \tag{6. 14}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$k = \frac{a+b}{n-1}$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar. ■

**Örnek 6.4.** n-boyutlu konformal flat bir yarı-Einstein manifold $(M^n, g)$ bir $N\left(\frac{a+b}{n-1}\right)$-yarı Einstein manifolddur [22].

**İspat :** $(M^n, g)$ konformal flat olduğundan $n \geq 4$ için $C = 0$ dır. Dolayısıyla $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için (2. 8) denkleminden

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2}\{g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\}$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} = 0$$

yazılabilir. Böylece son denklem;

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{n-2}\{g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY + S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\}$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \qquad (6.\ 15)$$

biçimine dönüşür. (6. 2) ve (6. 3) eşitlikleri kullanıldığında;

$$R(X, Y)Z = \frac{(n-2)a-b}{(n-1)(n-2)}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} + \frac{b}{n-2}\{g(Y, Z)\eta(X)\xi$$

$$-g(X, Z)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \qquad (6.\ 16)$$

elde edilir. (6.16) eşitliğinde $Z = \xi$ olarak alındığında;

$$R(X, Y)\xi = \frac{a+b}{n-1}\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} \qquad (6.\ 17)$$

bulunur. Böylece (6. 8) yardımı ile, n-boyutlu konformal flat bir yarı-Einstein manifoldda $\xi$ üreteci $\left(\frac{a+b}{n-1}\right)$-nullity distribüsyonu $N\left(\frac{a+b}{n-1}\right)$ e aittir.■

**Sonuç 6.5.** Her 3-boyutlu yarı-Einstein manifold bir $N\left(\frac{a+b}{2}\right)$-yarı Einstein manifolddur [22].

**İspat :** $n = 3$ için $C = 0$ olduğundan Örnek 6.4 gereği $M^n$ bir $N\left(\frac{a+b}{n-1}\right)$-yarı Einstein manifolddur. Burada $n = 3$ olduğundan her 3-boyutlu yarı-Einstein manifoldun $N\left(\frac{a+b}{2}\right)$-yarı Einstein manifold olduğu görülür. ■

**Teorem 6.6.** Bir N(k)-yarı Einstein manifold $(M^n, g)$, $R(\xi, X)\cdot R = 0$ şartını sağlar $\Leftrightarrow$ $k = 0$ dır [22].

**İspat :** $(M^n, g)$, $R(\xi, X) \cdot R = 0$ koşulunu sağlayan bir N(k)-yarı Einstein manifold olsun. O halde (2. 15) yardımı ile $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$(R(\xi, X)\cdot R)(Y, Z, W) = R(\xi, X)R(Y, Z)W - R(R(\xi, X)Y, Z)W$$
$$- R(Y, R(\xi, X)Z)W - R(Y, Z)R(\xi, X)W = 0 \quad (6.\ 18)$$

yazılabilir. Buradan $W = \xi$ olarak alındığında (6. 18) eşitliği;

$$R(\xi, X)R(Y, Z)\xi - R( R(\xi, X)Y, Z)\xi$$
$$- R(Y, R(\xi, X)Z)\xi - R(Y, Z) R(\xi, X)\xi = 0 \quad (6.\ 19)$$

biçimine dönüşür. Buradan da (6. 8), (6. 9) ve (6. 10) eşitlikleri kullanıldığında;

$$R(\xi, X)k(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z) - R( k(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), Z)\xi$$
$$- R(Y, k(g(X, Z)\xi - \eta(Z)X))\xi - R(Y, Z)k(\eta(X)\xi - X) = 0 \quad (6.\ 20)$$

elde edilir. Böylece (6. 20) eşitliği

$$k\,[\eta(Z) R(\xi, X)Y - \eta(Y) R(\xi, X)Z - g(X, Y)R(\xi, Z)\xi$$
$$+\eta(Y)R(X, Z)\xi - g(X, Z)R(Y,\xi)\xi + \eta(Z) R(Y, X)\xi$$
$$-\eta(X)R(Y, Z)\xi + R(Y, Z)X] = 0 \quad (6.\ 21)$$

biçimine indirgenir. Buradan tekrar (6. 8), (6. 9) ve (6. 10) eşitlikleri kullanılırsa;

$$k\,[k\eta(Z)( g(X, Y)\xi - \eta(Y)X ) - k\eta(Y)( g(X, Z)\xi - \eta(Z)X )$$
$$-kg(X, Y)(\eta(Z)\xi - Z) + k\eta(Y)(\eta(Z)X - \eta(X)Z) - kg(X, Z)(Y - \eta(Y)\xi )$$
$$+ k\eta(Z)(\eta(X)Y - \eta(Y)X ) - k\eta(X)(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z) + R(Y, Z)X] = 0 \quad (6.\ 22)$$

denklemi ve buradan da

$$k\,[R(Y, Z)X + k(g(X, Y)Z - g(X, Z)Y)] = 0 \quad (6.\ 23)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (6. 23) eşitliğinden ya $k = 0$ dır ya da

$$R(Y, Z)X = k\{g(X, Z)Y - g(X, Y)Z\} \quad (6.\ 24)$$

dır. (6. 24) eşitliğinin her iki yanının W ile iç çarpımı alındığında;

$$R(Y, Z, X, W) = k\{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, Y)g(Z, W)\} \quad (6.\ 25)$$

elde edilir. Son eşitlikte Y ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$S(X, Z) = k\{ng(X, Z) - g(X, Z)\} \quad (6.\ 26)$$

ve buradan da

$$S(X, Z) = k(n\text{-}1)g(X, Z) \quad (6.\ 27)$$

bulunur. Böylece $M^n$ nin bir Einstein manifold olduğu görülür. Fakat $M^n$ bir yarı-Einstein manifold olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla;

$$k = 0$$

dır. ■

**Sonuç 6.7.** Eğer $(M^n, g)$ semi-simetrik bir N(k)-yarı Einstein manifold ise $k = 0$ dır [22].

**İspat :** $(M^n, g)$ semi-simetrik bir N(k)-yarı Einstein manifold olduğundan (2. 22) gereği

$$R(X, Y) \cdot R = 0$$

dır. Buradan $X = \xi$ olarak alındığında;

$$R(\xi, Y) \cdot R = 0 \tag{6. 28}$$

bulunur. O halde Teorem 6.6 gereği

$$k = 0$$

dır. ■

**Teorem 6.8.** Eğer M, proper pseudosimetrik bir N(k)-yarı Einstein manifold ise $k = L_R$ dir.

**İspat :** M pseudosimetrik bir manifold olduğundan (2. 25) gereği

$$R \cdot R = L_R Q(g, R)$$

yazılabilir. O halde $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$(R(\xi, X) \cdot R)(Y, Z, W) = L_R Q(g, R)(Y, Z, W; \xi, X) \tag{6. 29}$$

dir. (2. 15) eşitliği yardımı ile

$$\begin{aligned}(R(\xi, X) \cdot R)(Y, Z, W) = {} & R(\xi, X)R(Y, Z)W - R(R(\xi, X)Y, Z)W \\ & -R(Y, R(\xi, X)Z)W - R(Y, Z) R(\xi, X)W\end{aligned}$$

ve buradan da ve (6. 9) kullanılarak

$$\begin{aligned}(R(\xi, X) \cdot R)(Y, Z, W) = k\, [ & R(Y, Z, W, X)\xi - \eta(R(Y, Z)W)X \\ & -g(X, Y)R(\xi, Z)W + \eta(Y)R(X, Z)W \\ & -g(X, Z)R(Y, \xi)W + \eta(Z)R(X, Y)W \\ & -g(X, W)R(Y, Z)\xi + \eta(W)R(Y, Z)X]\end{aligned} \tag{6. 30}$$

yazılabilir. Benzer şekilde (2. 16) yardımı ile

$$\begin{aligned}Q(g, R)(Y, Z, W; \xi, X) = {} & (\xi \wedge_g X)R(Y, Z)W - R((\xi \wedge_g X)Y, Z)W \\ & -R(Y, (\xi \wedge_g X)Z)W - R(Y, Z)(\xi \wedge_g X)W\end{aligned}$$

ve (2. 11) eşitliği kullanılarak

$$Q(g, R)(Y, Z, W; \xi, X) = R(Y, Z, W, X)\xi - \eta(R(Y, Z)W)X$$
$$-g(X, Y)R(\xi, Z)W + \eta(Y)R(X, Z)W$$
$$-g(X, Z)R(Y, \xi)W + \eta(Z)R(X, Y)W$$
$$-g(X, W)R(Y, Z)\xi + \eta(W)R(Y, Z)X \qquad (6.\ 31)$$

elde edilir. Böylece (6. 30) ve (6. 31) denklemleri, (6. 29) eşitliğinde yerlerine konulduğunda;

$$k\,[R(Y, Z, W, X)\xi - \eta(R(Y, Z)W)X - g(X, Y)R(\xi, Z)W$$
$$+\eta(Y)R(X, Z)W - g(X, Z)R(Y, \xi)W + \eta(Z)R(X, Y)W$$
$$-g(X, W)R(Y, Z)\xi + \eta(W)R(Y, Z)X]$$
$$= L_R\,[R(Y, Z, W, X)\xi - \eta(R(Y, Z)W)X - g(X, Y)R(\xi, Z)W$$
$$+\eta(Y)R(X, Z)W - g(X, Z)R(Y, \xi)W + \eta(Z)R(X, Y)W$$
$$-g(X, W)R(Y, Z)\xi + \eta(W)R(Y, Z)X] \qquad (6.\ 32)$$

bulunur. Buradan eşitliğin her iki yanının $\xi$ ile iç çarpımı alındığında;

$$k\,[R(Y, Z, W, X) - \eta(R(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(R(\xi, Z)W)$$
$$+\eta(Y)\eta(R(X, Z)W) - g(X, Z)\eta(R(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(R(X, Y)W)$$
$$-g(X, W)\eta(R(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(R(Y, Z)X)]$$
$$= L_R\,[R(Y, Z, W, X) - \eta(R(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(R(\xi, Z)W)$$
$$+\eta(Y)\eta(R(X, Z)W) - g(X, Z)\eta(R(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(R(X, Y)W)$$
$$-g(X, W)\eta(R(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(R(Y, Z)X)] \qquad (6.\ 33)$$

elde edilir. Böylece;

$$(k - L_R)\,[R(Y, Z, W, X) - \eta(R(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(R(\xi, Z)W)$$
$$+\eta(Y)\eta(R(X, Z)W) - g(X, Z)\eta(R(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(R(X, Y)W)$$
$$-g(X, W)\eta(R(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(R(Y, Z)X)] = 0$$

olup $R \cdot R \neq 0$ olduğundan;

$$k = L_R$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar. ■

**Teorem 6.9.** M, $R(\xi, X) \cdot R = LQ(S, R)(\xi, X)$ şartını sağlayan bir N(k)-yarı Einstein manifolddur $\Leftrightarrow$ $k = 0$ dır.

**İspat :** $R \cdot R = LQ(S, R)$ olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$(R(\xi, X) \cdot R)(Y, Z, W) = LQ(S, R)(Y, Z, W; \xi, X) \tag{6. 34}$$

yazılabilir. (2. 15) gereği;

$$\begin{aligned}(R(\xi, X) \cdot R)(Y, Z, W) = {} & R(\xi, X)R(Y, Z)W - R( R(\xi, X)Y, Z)W \\ & - R(Y, R(\xi, X)Z)W - R(Y, Z)R(\xi, X)W\end{aligned} \tag{6. 35}$$

dir. Buradan (6. 35) denklemi, (6. 9) eşitliği yardımı ile

$$\begin{aligned}(R(\xi, X)\cdot R)(Y, Z, W) = k\, [ & R(Y, Z, W, X)\xi - \eta(R(Y, Z)W)X \\ & - g(X, Y)R(\xi, Z)W + \eta(Y)R(X, Z)W \\ & - g(X, Z)R(Y, \xi)W + \eta(Z)R(X, Y)W \\ & - g(X, W)R(Y, Z)\xi + \eta(W)R(Y, Z)X]\end{aligned} \tag{6. 36}$$

biçimine dönüşür. Diğer taraftan (2. 21) yardımı ile

$$\begin{aligned}Q(S, R)(Y, Z, W; \xi, X) = {} & (\xi \wedge_S X)R(Y, Z)W - R((\xi \wedge_S X)Y, Z)W \\ & -R(Y, (\xi \wedge_S X)Z)W - R(Y, Z)(\xi \wedge_S X)W\end{aligned}$$

ve (2. 11) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}Q(S, R)(Y, Z, W; \xi, X) = {} & S(X, R(Y, Z)W)\xi - S(\xi, R(Y, Z)W)X \\ & - S(X, Y)R(\xi, Z)W - S(\xi, Y)R(X, Z)W \\ & - S(X, Z)R(Y, \xi)W + S(\xi, Z)R(Y, X)W \\ & - S(X, W)R(Y, Z)\xi + S(\xi, W)R(Y, Z)X\end{aligned} \tag{6. 37}$$

yazılabilir. Buradan (6. 36) ve (6. 37) denklemleri (6. 34) eşitliğinde yerlerine konulduğunda;

$$\begin{aligned}& k\, [R(Y, Z, W, X)\xi - \eta(R(Y, Z)W)X - g(X, Y)R(\xi, Z)W \\ & +\eta(Y)R(X, Z)W - g(X, Z)R(Y, \xi)W + \eta(Z)R(X, Y)W \\ & - g(X, W)R(Y, Z)\xi + \eta(W)R(Y, Z)X] \\ & = L\, [S(X, R(Y, Z)W)\xi - S(\xi, R(Y, Z)W)X - S(X, Y)R(\xi, Z)W \\ & - S(\xi, Y)R(X, Z)W - S(X, Z)R(Y, \xi)W + S(\xi, Z)R(Y, X)W \\ & - S(X, W)R(Y, Z)\xi + S(\xi, W)R(Y, Z)X]\end{aligned} \tag{6. 38}$$

elde edilir. (6. 38) denkleminde $Y = \xi$ olarak seçilip, eşitliğin her iki yanının $\xi$ ile iç çarpımı alındığında;

$$k\,[R(\xi, Z, W, X) - \eta(R(\xi, Z)W)\eta(X) - \eta(X)\eta(R(\xi, Z)W)$$
$$+\eta(R(X, Z)W)+\eta(Z)\eta(R(X, \xi)W) +\eta(W)\eta(R(\xi, Z)X]$$
$$= L\,[S(X, R(\xi, Z)W) - S(\xi, R(\xi, Z)W)\eta(X)$$
$$- S(X, \xi)\eta(R(\xi, Z)W) - S(\xi,\xi)\eta(R(X, Z)W)$$
$$+ S(\xi, Z)\eta(R(\xi, X)W) + S(\xi, W)\eta(R(\xi, Z)X)] \qquad (6.\ 39)$$

bulunur. Buradan (6. 9) eşitliği yardımı ile

$$k[g(Z, W)\eta(X) - g(X, Z)\eta(W) - g(Z, W)\eta(X) +\eta(X)\eta(Z)\eta(W)$$
$$- g(Z, W)\eta(X) +\eta(X)\eta(Z)\eta(W) + g(X, Z)\eta(W) - \eta(X)\eta(Z)\eta(W)]$$
$$+ k^2[g(Z, W)\eta(X) - g(X, W)\eta(Z) + g(X, W)\eta(Z) - \eta(X)\eta(Z)\eta(W)]$$
$$= k\,L\,[(a+b)g(Z, W)\eta(X) - \eta(W)\,S(X,Z) - (a+b)\eta(X)g(Z, W)$$
$$+ (a+b)\eta(X)\eta(Z)\eta(W) - (a+b)g(Z, W)\eta(X) + (a+b)\eta(X)\eta(Z)\eta(W)$$
$$+ (a+b)g(Z, W)\eta(X) - (a+b)g(X, W)\eta(Z) + (a+b)g(X, W)\eta(Z)$$
$$- (a+b)\eta(X)\eta(Z)\eta(W) + (a+b)g(X,Z)\eta(W) - (a+b)\eta(X)\eta(Z)\eta(W)] \qquad (6.\ 40)$$

ve buradan da

$$(k-1)k\,[g(Z, W)\eta(X) - \eta(X)\eta(Z)\eta(W)]$$
$$= k\,L\eta(W)\,[-S(X, Z) + (a+b)g(X, Z)] \qquad (6.\ 41)$$

elde edilir. O halde;

**i)** $k = 0$ dır veya;

**ii)** $k = 1$ dir. Böylece $S(X, Z) = (a + b)g(X, Z)$ dir. Bu durumda M bir Einstein manifolddur. Fakat M yarı-Einstein manifold olduğundan bu mümkün değildir.

Böylece mümkün olan tek durum

$$k = 0$$

olmasıdır. Bu da teoremi ispatlar. ■

**Teorem 6.10.** $(M^n, g)$ bir N(k)-yarı Einstein manifold olsun. Bu taktirde $M^n$, $R(\xi, X)\cdot S = 0$ şartını sağlar $\Leftrightarrow$ $k = 0$ dır [22].

**İspat :** $(M^n, g)$, $R(\xi, X) \cdot S = 0$ koşulunu sağlayan bir N(k)-yarı Einstein manifold olsun. Böylece (2. 19) yardımı ile $\forall X, Y, Z\in \chi(M^n)$ için;

$$( R(\xi, X) \cdot S)(Y, Z) = -S(R(\xi, X)Y, Z ) - S(Y, R(\xi, X)Z ) = 0 \qquad (6.\ 42)$$

yazılabilir. (6. 9) eşitliği (6. 42) denkleminde yerine yazıldığında;

$$S(k(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), Z) + S(Y, k(g(X, Z)\xi - \eta(Z)X)) = 0 \quad (6.43)$$

elde edilir. Böylece

$$k[g(X, Y)S(\xi, Z) - \eta(Y)S(X, Z) + g(X, Z)S(Y, \xi) - \eta(Z)S(X, Y)] = 0 \quad (6.44)$$

bulunur. Diğer taraftan $M^n$ bir N(k)-yarı Einstein manifold olduğundan;

$$k[(a+b)g(X, Y)\eta(Z) - a\eta(Y)g(X, Z) - b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)$$
$$+ (a+b)g(X, Z)\eta(Y) - \eta(Z)S(X, Y)] = 0 \quad (6.45)$$

yazılabilir. (6. 45) eşitliğinde $Z = \xi$ olarak alındığında;

$$k[(a+b)g(X, Y) - S(X, Y)] = 0 \quad (6.46)$$

bulunur. O halde ya k = 0 dır ya da

$$S(X, Y) = (a+b)g(X, Y) \quad (6.47)$$

dır. Bu durumda $M^n$ nin Einstein manifold olduğu görülür. Ancak $M^n$ yarı-Einstein olduğundan bu mümkün değildir. O halde;

$$k = 0$$

dır. ■

**Teorem 6.11.** M, proper Ricci-pseudosimetrik bir N(k)-yarı Einstein manifold ise $k = L_S$ dir.

**İspat :** $R \cdot S = L_S Q(g, S)$ eşitliğinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$(R(\xi, X) \cdot S)(Y, Z) = L_S Q(g, S)(Y, Z; \xi, X) \quad (6.48)$$

yazılabilir. (2. 19) gereği

$$(R(\xi, X) \cdot S)(Y, Z) = -S(R(\xi, X)Y, Z) - S(Y, R(\xi, X)Z) \quad (6.49)$$

dir. (6. 9) eşitliği yardımıyla (6. 49) denklemi

$$(R(\xi, X) \cdot S)(Y, Z) = -S(k(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), Z)$$
$$- S(Y, k(g(X, Z)\xi - \eta(Z)X)) \quad (6.50)$$

biçimine dönüşür. M bir N(k)-yarı Einstein manifold olduğundan;

$$(R(\xi, X \cdot S)(Y, Z) = -k[g(X, Y)S(\xi, Z) - \eta(Y)S(X, Z)$$
$$+g(X, Z)S(\xi, Y) - \eta(Z)S(X, Y)]$$

ve buradan da

$$(R(\xi, X)\cdot S)(Y, Z) = k\,[-(a+b)g(X, Y)\eta(Z) + ag(X, Z)\eta(Y) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - (a+b)g(X, Z)\eta(Y) + ag(X, Y)\eta(Z) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)] \quad (6.51)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2. 20) eşitliği kullanılarak

$$Q(g, S)(Y, Z; \xi, X) = -S(\xi \wedge_g X)Y, Z) - S(Y, (\xi \wedge_g X)Z)$$

ve buradan da (2. 11) eşitliği yardımı ile

$$Q(g, S)(Y, Z; \xi, X) = -S( (g(X, Y)\xi - \eta(Y)X), Z) - S(Y, (g(X, Z)\xi - \eta(Z)X))$$

yazılabilir. M bir N(k)-yarı Einstein manifold olduğundan;

$$Q(g, S)(Y, Z; \xi, X) = -(a+b)g(X, Y)\eta(Z) + ag(X, Z)\eta(Y) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - (a+b)g(X, Z)\eta(Y) + ag(X, Y)\eta(Z) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \quad (6.52)$$

bulunur. (6. 51) ve (6. 52) denklemleri (6. 48) eşitliğinde yerlerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} & k\,[-(a+b)g(X, Y)\eta(Z) + ag(X, Z)\eta(Y) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \\ & - (a+b)g(X, Z)\eta(Y) + ag(X,Y)\eta(Z) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)] \\ = {} & L_S\,[-(a+b)g(X, Y)\eta(Z) + ag(X, Z)\eta(Y) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \\ & - (a+b)g(X, Z)\eta(Y) + ag(X,Y)\eta(Z) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)] \end{aligned} \quad (6.53)$$

elde edilir. Böylece;

$$\begin{aligned} & (k - L_S)[-(a+b)g(X, Y)\eta(Z) + ag(X, Z)\eta(Y) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) \\ & - (a+b)g(X, Z)\eta(Y) + ag(X,Y)\eta(Z) + b\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)] = 0 \end{aligned}$$

olup $R(\xi, X)\cdot S \neq 0$ olduğundan;

$$k = L_S$$

dir. ■

**Teorem 6.12.** Eğer $(M^n, g)$ Weyl semi-simetrik bir N(k)-yarı Einstein manifold $(R \cdot C = 0)$ ise ya $k = 0$ dır ya da $M^n$ konformal flattir.

**İspat :** $(M^n, g)$ Weyl semi-simetrik olduğundan $R \cdot C = 0$ dır. Dolayısıyla (2. 17) yardımı ile $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$( R(\xi, X)\cdot C)(Y, Z, W) = R(\xi, X)C(Y, Z)W - C( R(\xi, X)Y, Z)W - C(Y, R(\xi, X)Z)W - C(Y, Z) R(\xi, X)W = 0 \quad (6.54)$$

yazılabilir. (6. 9) eşitliği (6. 54) denkleminde kullanıldığında;

$$k\,[C(Y, Z, W, X)\xi - \eta(C(Y, Z)W)X - g(X, Y)C(\xi, Z)W + \eta(Y)C(X, Z)W - g(X, Z)C(Y, \xi)W + \eta(Z)C(Y, X)W - g(X, W)C(Y, Z)\xi + \eta(W)C(Y, Z)X] = 0 \qquad (6.\ 55)$$

elde edilir. Buradan eşitliğin her iki yanının $\xi$ ile iç çarpımı alındığında son denklem;

$$k\,[C(Y, Z, W, X) - \eta(C(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(C(\xi, Z)W) + \eta(Y)\eta(C(X, Z)W) - g(X, Z)\eta(C(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(C(Y, X)W) - g(X, W)\eta(C(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(C(Y, Z)X)] = 0 \qquad (6.\ 56)$$

biçimine dönüşür. O halde ya k = 0 dır ya da

$$C(Y, Z, W, X) - \eta(C(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(C(\xi, Z)W) + \eta(Y)\eta(C(X, Z)W) - g(X, Z)\eta(C(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(C(Y, X)W) - g(X, W)\eta(C(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(C(Y, Z)X) = 0 \qquad (6.\ 57)$$

dır. Diğer taraftan (2. 8) gereği

$$C(Y, Z, W, \xi) = R(Y, Z, W, \xi) - \frac{1}{n-2}\{S(Z, W)\eta(Y) - S(Y, W)\eta(Z) + g(Z, W)S(Y, \xi) - g(Y,W)S(Z, \xi)\} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(Z, W)\eta(Y) - g(Y, W)\eta(Z)\} \qquad (6.\ 58)$$

dir. Buradan (6. 5) ve (6. 8) denklemleri yardımı ile

$$C(Y, Z, W, \xi) = [\,k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\,]\, g(Z, W)\eta(Y) + [-k + \frac{2a+b}{n-2} - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\,]\, g(Y, W)\eta(Z) \qquad (6.\ 59)$$

elde edilir. (6. 57) denkleminde bulunan tüm ifadeler için benzer eşitlikler yazıldığında;

$$\eta(C(Y, Z)W) = [\,k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\,]\,(g(Z,W)\eta(Y) - g(Y,W)\eta(Z)) \qquad (6.\ 60)$$

$$\eta(C(\xi, Z)W) = [\,k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\,]\,(g(Z,W) - \eta(W)\eta(Z)) \qquad (6.\ 61)$$

$$\eta(C(X, Z)W) = [\,k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\,]\,(g(Z,W)\eta(X) - g(X,W)\eta(Z)) \qquad (6.\ 62)$$

$$\eta(C(Y, \xi)W) = [\, k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \,]\, (\eta(W)\eta(Y) - g(Y,W)) \tag{6. 63}$$

$$\eta(C(Y, X)W) = [\, k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \,]\, (g(X,W)\eta(Y) - g(Y,W)\eta(X)) \tag{6. 64}$$

$$\eta(C(Y, Z)X) = [\, k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \,]\, (g(Z,X)\eta(Y) - g(Y,X)\eta(Z)) \tag{6. 65}$$

denklemleri elde edilir. Burada;

$$\lambda = k - \frac{2a+b}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

diyelim. Burada $k = \frac{a+b}{n-1}$ ve $\tau = na+b$ değerleri $\lambda$ ifadesinde yerine yazıldığında;

$$\lambda = 0$$

bulunur. Böylece (6. 57) den C = 0 olduğu görülür. Bu da manifoldun konformal flat olduğunu gösterir. ■

**Teorem 6.13.** Eğer M, proper Weyl pseudosimetrik bir N(k)-yarı Einstein manifold ise

$$k = L_C$$

dir.

**İspat :** M, Weyl pseudosimetrik bir manifold iken (2. 27) gereği

$$R \cdot C = L_C Q(g, C)$$

olduğundan $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$(R(\xi, X) \cdot C)(Y, Z, W) = L_C Q(g, C)(Y, Z, W; \xi, X) \tag{6. 66}$$

yazılabilir. Buradan (2. 17) eşitliği ve (6. 9) yardımı ile

$$\begin{aligned}(R(\xi, X) \cdot C)(Y, Z, W) &= R(\xi, X)C(Y, Z)W - C(R(\xi, X)Y, Z)W \\ &\quad - C(Y, R(\xi, X)Z)W - C(Y, Z)R(\xi, X)W\end{aligned}$$

olup M N(k)-yarı Einstein olduğundan;

$$\begin{aligned}(R(\xi, X) \cdot C)(Y, Z, W) = k\, [&C(Y, Z, W, X)\xi - \eta(C(Y, Z)W)X \\ &- g(X, Y)C(\xi, Z)W + \eta(Y)C(X, Z)W \\ &- g(X, Z)C(Y, \xi)W + \eta(Z)C(X, Y)W \\ &- g(X, W)C(Y, Z)\xi + \eta(W)C(Y, Z)X]\end{aligned} \tag{6. 67}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (2. 18) eşitliği kullanılarak

$$Q(g, C)(Y, Z, W; \xi, X) = (\xi \wedge_g X)C(Y, Z)W - C((\xi \wedge_g X)Y, Z)W$$
$$- C(Y, (\xi \wedge_g X)Z)W - C(Y, Z)(\xi \wedge_g X)W$$

ve buradan da (2. 11) yardımı ile

$$\begin{aligned} Q(g, C)(Y, Z, W; \xi, X) = {} & C(Y, Z, W, X)\xi - \eta(C(Y, Z)W)X \\ & - g(X, Y)C(\xi, Z)W + \eta(Y)C(X, Z)W \\ & - g(X, Z)C(Y, \xi)W + \eta(Z)C(X, Y)W \\ & - g(X, W)C(Y, Z)\xi + \eta(W)C(Y, Z)X \end{aligned} \tag{6. 68}$$

yazılabilir. M Weyl-pseudosimetrik olduğundan (6. 67) ve (6. 68) denklemleri (6. 66) denkleminde yerlerine konulduğunda;

$$\begin{aligned} & k\,[C(Y, Z, W, X)\xi - \eta(C(Y, Z)W)X - g(X, Y)C(\xi, Z)W \\ & +\eta(Y)C(X, Z)W - g(X, Z)C(Y, \xi)W + \eta(Z)C(X, Y)W \\ & - g(X, W)C(Y, Z)\xi + \eta(W)C(Y, Z)X] \\ & = L_C\,[C(Y, Z, W, X)\xi - \eta(C(Y, Z)W)X - g(X, Y)C(\xi, Z)W \\ & +\eta(Y)C(X, Z)W - g(X, Z)C(Y, \xi)W + \eta(Z)C(X, Y)W \\ & - g(X, W)C(Y, Z)\xi + \eta(W)C(Y, Z)X] \end{aligned} \tag{6. 69}$$

elde edilir. Buradan eşitliğin her iki yanının $\xi$ ile iç çarpımı alındığında (6. 69) denklemi;

$$\begin{aligned} & k\,[C(Y, Z, W, X) - \eta(C(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(C(\xi, Z)W) \\ & +\eta(Y)\eta(C(X, Z)W) - g(X, Z)\eta(C(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(C(X, Y)W) \\ & - g(X, W)\eta(C(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(C(Y, Z)X)] \\ & = L_C\,[R(Y, Z, W, X) - \eta(C(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(C(\xi, Z)W) \\ & +\eta(Y)\eta(C(X, Z)W) - g(X,Z)\eta(C(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(C(X, Y)W) \\ & - g(X, W)\eta(C(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(C(Y, Z)X)] \end{aligned} \tag{6. 70}$$

biçimine dönüşür. Böylece;

$$\begin{aligned} & (k - L_C)\,[C(Y, Z, W, X) - \eta(C(Y, Z)W)\eta(X) - g(X, Y)\eta(C(\xi, Z)W) \\ & +\eta(Y)\eta(C(X, Z)W) - g(X, Z)\eta(C(Y, \xi)W) + \eta(Z)\eta(C(X, Y)W) \\ & - g(X, W)\eta(C(Y, Z)\xi) + \eta(W)\eta(C(Y, Z)X)] = 0 \end{aligned}$$

olup $R \cdot C \neq 0$ olduğundan;

$$k = L_C$$

elde edilir.■

**Teorem 6.14.** M, N(k)-yarı Einstein yarı konformal flat bir manifold ise M üzerinde $\lambda = \mu(2\text{-}n)$ şartı sağlanır.

**İspat :** M yarı konformal flat bir manifold olduğundan Tanım 2.13 gereği

$$\tilde{C} = 0$$

dır. Buradan (2. 9) eşitliği yardımı ile $\forall$ X, Y, Z, W $\in \chi(M)$ için;

$$\tilde{C}(X, Y)Z = \lambda R(X, Y)Z + \mu\{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX$$

$$- g(X, Z)QY\} - \frac{\tau}{n}\left[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right]\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} = 0$$

yazılabilir. Böylece son denklem

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{\mu}{\lambda}\{S(X, Z)g(Y, W) - S(Y, Z)g(X, W)$$

$$+ g(X, Z)S(Y, W) - g(Y, Z)S(X, W)\}$$

$$+ \frac{na+b}{n\lambda}\left[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right]\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \quad (6.\ 71)$$

biçimine dönüşür. (6. 71) denkleminde $X = \xi$ olarak alındığında;

$$R(\xi, Y, Z, W) = \frac{\mu}{\lambda}\{(a+b)\eta(Z)g(Y, W) - S(Y, Z)\eta(W) + \eta(Z)S(Y, W)$$

$$-(a+b)\eta(W)g(Y, Z)\} + \frac{na+b}{n\lambda}\left[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right]\{g(Y, Z)\eta(W) - \eta(Z)g(Y, W)\}$$

$$+ \frac{a+b}{n-1}\{g(Y, Z)\eta(W) - \eta(Z)g(Y, W)\} \quad (6.\ 72)$$

elde edilir. M yarı-Einstein olduğundan;

$$- R(\xi, Y, Z, W) + \frac{\mu}{\lambda}\{(a+b)\eta(Z)g(Y, W) - ag(Y, Z)\eta(W)$$

$$- b\eta(Y)\eta(Z)\eta(W) + ag(Y, W)\eta(Z) + b\eta(Y)\eta(Z)\eta(W) - (a+b)\eta(W)g(Y, Z)$$

$$+ \frac{na+b}{n\lambda}\left[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right]\{g(Y, Z)\eta(W) - \eta(Z)g(Y, W)\} = 0 \quad (6.\ 73)$$

olup buradan da

$$\left\{-\frac{a+b}{n-1} - \frac{(2a+b)\mu}{\lambda} + \frac{na+b}{n(n-1)} + \frac{2(na+b)\mu}{n\lambda}\right\}[g(Y, Z)\eta(W) - \eta(Z)g(Y, W)] = 0$$

bulunur. Burada

$$g(Y, Z)\eta(W) - \eta(Z)g(Y, W) \neq 0$$

olduğundan

$$\frac{a+b}{n-1} + \frac{(2a+b)\mu}{\lambda} - \frac{na+b}{n(n-1)} - \frac{2(na+b)\mu}{n\lambda} = 0 \qquad (6.74)$$

dır. O halde

$$b\lambda(n-1) = -\mu(n-1)(n-2) \qquad (b \neq 0 \text{ ve } n \neq 1 \text{ olduğundan})$$

olup buradan da

$$\lambda = \mu(2-n)$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar. ■

**Teorem 6.15.** M, $R \cdot \widetilde{C} = 0$ şartını sağlayan bir N(k)-yarı Einstein manifold olsun. Bu taktirde ya $a + b = 0$ dır ya da $\lambda = \mu(2-n)$ dir.

**İspat :** $R \cdot \widetilde{C} = 0$ olduğundan (2. 17) gereği $\forall U, V, W, Y \in \chi(M)$ için;

$$(R(\xi, Y) \cdot \widetilde{C})(U, V, W) = R(\xi, Y)\widetilde{C}(U, V)W - \widetilde{C}(R(\xi, Y)U, V)W$$
$$- \widetilde{C}(U, R(\xi, Y)V)W - \widetilde{C}(U, V)R(\xi, Y)W = 0 \qquad (6.75)$$

yazılabilir. Buradan (6. 9) kullanıldığında (6. 75) eşitliği

$$k[\widetilde{C}(U, V, W, Y)\xi - \eta(\widetilde{C}(U, V)W)Y - g(Y, U)\widetilde{C}(\xi, V)W$$
$$+\eta(U)\widetilde{C}(Y, V)W - g(Y, V)\widetilde{C}(U, \xi)W + \eta(V)\widetilde{C}(U, Y)W$$
$$- g(Y, W)\widetilde{C}(U, V)\xi + \eta(W)\widetilde{C}(U, V)Y] = 0 \qquad (6.76)$$

biçimine dönüşür. Buradan eşitliğin her iki yanının $\xi$ ile iç çarpımı alındığında;

$$k[\widetilde{C}(U, V, W, Y) - \eta(\widetilde{C}(U, V)W)\eta(Y) - g(Y, U)\eta(\widetilde{C}(\xi, V)W)$$
$$+ \eta(U)\eta(\widetilde{C}(Y, V)W) - g(Y, V)\eta(\widetilde{C}(U, \xi)W) + \eta(V)\eta(\widetilde{C}(U, Y)W)$$
$$- g(Y, W)\eta(\widetilde{C}(U, V)\xi) + \eta(W)\eta(\widetilde{C}(U, V)Y)] = 0 \qquad (6.77)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2. 9) eşitliği gereği $\forall U, V, W \in \chi(M)$ için,

$$\widetilde{C}(U, V)W = \lambda R(U, V)W + \mu\{S(V, W)U - S(U, W)V + g(V, W)QU$$
$$- g(U, W)QV\} - \frac{\tau}{n}[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu]\{g(V, W)U - g(U, W)V\}$$

olup son eşitlikte her iki yanın $\xi$ ile iç çarpımı alındığında;

$$\eta(\widetilde{C}(U, V)W) = k\lambda\{\eta(U)g(V, W) - g(U, W)\eta(V)\} + \mu\{S(V, W)\eta(U)$$

$$- S(U, W)\eta(V) + (a+b)g(V, W)\eta(U) - (a+b)g(U, W)\eta(V)$$

$$- \frac{\tau}{n}\left[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right]\{g(V, W)\ \eta(U) - g(U, W)\ \eta(V)\} \qquad (6.\ 78)$$

bulunur. Buradan $k$ ve $\tau$ değerleri yerlerine yazılır ve M nin yarı- Einstein olduğu kullanılırsa;

$$\eta(\widetilde{C}(U, V)W) = \frac{\lambda(a+b)}{n-1}\{\eta(U)g(V, W) - g(U, W)\eta(V)\}$$

$$+ \mu\{a\eta(U)g(V, W) + b\eta(U)\eta(V)\eta(W) - a\eta(V)g(U, W)$$

$$- b\eta(U)\eta(V)\eta(W) + (a+b)\eta(U)g(V, W) - (a+b)\eta(V)g(U, W)$$

$$- \frac{an+b}{n}\left[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right]\{g(V, W)\eta(U) - g(U, W)\eta(V)\}\} \qquad (6.\ 79)$$

elde edilir. Böylece (6. 79) denkleminden

$$\eta(\widetilde{C}(U, V)W) = \left[\frac{\lambda(a+b)}{n-1} + (2a+b)\mu - \frac{an+b}{n}\left(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right)\right]\{g(V, W)\eta(U)$$

$$- g(U, W)\eta(V)\} \qquad (6.\ 80)$$

bulunur. (6. 77) denkleminde kullanılan tüm ifadeler benzer şekilde bulunur ve bulunan değerler yerlerine yazılırsa

$$0 = k\,[\widetilde{C}(U, V, W, Y) + \left(\frac{\lambda(a+b)}{n-1} + (2a+b)\mu\right.$$

$$\left.- \frac{an+b}{n}\left(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right)\right)\{-g(V, W)\eta(U)\eta(Y) + g(U, W)\eta(Y)\eta(V)$$

$$- g(V, W)g(Y, U) + g(Y, U)\eta(W)\eta(V) + g(V, W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$- g(Y, W)\eta(V)\eta(U) - g(Y, V)\eta(U)\eta(W) + g(U, W)g(Y, V)$$

$$+ g(Y, W)\eta(V)\eta(U) - g(U, W)\eta(Y)\eta(V) + g(V, Y)\eta(U)\eta(W)$$

$$- g(Y, U)\eta(W)\eta(V)\}] \qquad (6.\ 81)$$

elde edilir. Burada ya $k = 0$ dır ya da

$$\widetilde{C}(U, V, W, Y) = \left[\frac{\lambda(a+b)}{n-1} + (2a+b)\mu - \frac{an+b}{n}\left(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu\right)\right]\{-g(Y, V)g(U, W)$$

$$+ g(V, W)g(Y, U)\} \qquad (6.\ 82)$$

olduğu görülür. Burada (2. 9) eşitliği kullanıldığında;

$$\lambda R(U, V, W, Y) + \mu\{S(V, W)g(Y, U) - S(U, W)g(V, Y) + g(V, W)S(Y, U)$$

$$-g(U, W)S(V, Y)\} - \frac{na+b}{n\lambda}[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu]\{g(Y, U)g(V, W) - g(Y, V)g(U, W)\}$$

$$= [\frac{\lambda(a+b)}{n-1} + (2a+b)\mu - \frac{an+b}{n}(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu)]\{g(Y, U)g(V, W) - g(Y, V)g(U, W)\}$$

elde edilir. Son denklemden Y ve U ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$\lambda S(V, W) + \mu\{ nS(V, W) - S(V, W) + \tau g(V, W) - S(V, W) \}$$

$$- \frac{na+b}{n\lambda}[\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu]\{ng(V, W) - g(V, W)\}$$

$$= [\frac{\lambda(a+b)}{n-1} + (2a+b)\mu - \frac{an+b}{n}(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu)]\{ng(V, W) - g(V, W)\}$$

ve buradan da

$$[\lambda + \mu(n-2)]S(V, W) + [\mu\tau - \frac{na+b}{n\lambda}(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu)(n-1)]g(V, W)$$

$$= [\frac{na+b}{n\lambda}(\frac{\lambda}{n-1} + 2\mu)(n-1)]g(V, W) \tag{6. 83}$$

bulunur. Böylece (6. 83) denkleminden

$$[\lambda + \mu(n-2)]\{S(V, W) - (a+b)g(V, W)\} = 0 \tag{6. 84}$$

olduğu görülür. Böylece

**i )** $\lambda + \mu(n-2) = 0$ dır veya;

**ii)** $S(V, W) = (a+b)g(V, W)$ dir. Öyleyse M bir Einstein manifolddur. Ancak bu mümkün değildir. Çünkü M bir yarı-Einstein manifolddur.

Böylece mümkün olan tek durum

$$\lambda + \mu(n-2) = 0$$

olmasıdır. ■

**Teorem 6.16.** $(\widetilde{M}^{n+1}, g)$ bir $N(\widetilde{k})$-yarı Einstein manifold olsun. Eğer $M^n$, $\widetilde{M}^{n+1}$ nin $M^n$, $\xi$ vektör alanına normal olacak şekilde bir yarı umbilik hiperyüzeyi ise $M^n$, $k = \widetilde{k} + \alpha(\alpha+\beta)$ eşitliğini sağlayan bir N(k)-yarı Einstein manifolddur [22].

**İspat :** $M^n \subset \widetilde{M}^{n+1}$ iken $M^n$ yarı umbilik bir hiperyüzey olduğundan (2. 36) gereği $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ için;

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + H(X, Z)H(Y, W) - H(Y, Z)H(X, W) \quad (6.85)$$

yazılabilir. Buradan (2. 34) kullanıldığında (6. 85) denklemi

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = {} & R(X, Y, Z, W) + \alpha^2\{g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)\} \\ & + \alpha\beta\{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) + g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) \\ & - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g(X, W)\eta(Y)\eta(Z)\} \quad (6.86)\end{aligned}$$

biçimine dönüşür. (6. 86) denkleminde X ve W ya göre kontraksiyon yapıldığında;

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\widetilde{R}(e_i, Y, Z, e_i) - \widetilde{R}(\xi, Y, Z, \xi) = {} & S(Y, Z) + \alpha^2\{g(Y, Z) - ng(Y, Z)\} \\ & + \alpha\beta\{\eta(Y)\eta(Z) + \eta(Y)\eta(Z) - g(Y, Z) - n\eta(Y)\eta(Z)\}\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(Y, Z) - \widetilde{k}\{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\} = {} & S(Y, Z) + [\alpha^2(1-n) - \alpha\beta]g(Y, Z) \\ & + [\alpha\beta(2-n)]\eta(Y)\eta(Z) \quad (6.87)\end{aligned}$$

elde edilir. $\widetilde{M}^{n+1}$ bir yarı-Einstein manifold olduğundan;

$$\widetilde{S}(Y, Z) = \alpha g(Y, Z) + \beta\eta(Y)\eta(Z)$$

dır. Bu eşitlik (6. 87) denkleminde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} & \alpha g(Y, Z) + \beta\eta(Y)\eta(Z) - \widetilde{k}\{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\} \\ & = S(Y, Z) + [\alpha^2(1-n) - \alpha\beta]g(Y, Z) + [\alpha\beta(2-n)]\eta(Y)\eta(Z) \quad (6.88)\end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$\begin{aligned}S(Y, Z) = {} & [\alpha - \widetilde{k} + \alpha^2(n-1) + \alpha\beta]g(Y, Z) \\ & + [\beta + \widetilde{k} + \alpha\beta(n-2)]\eta(Y)\eta(Z) \quad (6.89)\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $M^n$ bir yarı-Einstein manifolddur.

Diğer taraftan

$$\widetilde{R}(X, Y, \xi, W) = \widetilde{k}\{\eta(Y)g(X, W) - \eta(X)g(Y, W)\}$$

eşitliğinde (6. 86) denklemi kullanıldığında;

$$R(X, Y, \xi, W) = [\widetilde{k} + \alpha^2 + \alpha\beta]\{\eta(Y)g(X, W) - \eta(X)g(Y, W)\} \quad (6.90)$$

bulunur. Burada $W \in \chi(M^n)$ keyfi olduğundan

$$R(X, Y)\xi = [\widetilde{k} + \alpha(\alpha + \beta)]\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\}$$

eşitliği elde edilir. O halde $M^n$ bir N(k)-yarı Einstein manifold olup

$$k = \widetilde{k} + \alpha(\alpha + \beta)$$

dır. ■

**Örnek 6.17.** Her N(k)-değme metrik, $\eta$-Einstein manifold N(k)-yarı Einstein manifolddur.

# 7. SONUÇ VE TARTIŞMA

3. bölümde yarı-Einstein manifoldlar incelenerek $(M^n, g)$ nin bir yarı-Einstein manifold olması durumunda Teorem 3.3, Teorem 3.4 ve Teorem 3.5 ispatlanmıştır.

4. bölümde genelleştirilmiş yarı-Einstein manifoldlar incelenmiş, Teorem 4.3 ve Teorem 4.5 ispatlanmıştır.

5. bölümde yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein hiperyüzeyler incelenerek yarı umbilik ve 2-yarı umbilik hiperyüzeylerin Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 yardımıyla sırasıyla yarı-Einstein ve genelleştirilmiş yarı-Einstein oldukları ispatlanmıştır.

Son bölümde N(k)-yarı Einstein manifoldlar incelenerek $(M^n, g)$ nin bir N(k)-yarı Einstein manifold olması durumunda Teorem 6.8, Teorem 6.9, Teorem 6.11, Teorem 6.12, Teorem 6.13, Teorem 6.14 ve Teorem 6.15 ispatlanmıştır.

## KAYNAKLAR


[1] De, U. C. and Ghosh, G. C., "On quasi-Einstein and special quasi Einstein manifolds, Proc. of the Int. Conf. on Math. Appl., (2004), 178-191.

[2] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, Introduction to general relativity, Mc. Graw-Hill.

[3] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (1996).

[4] O'Neill, B., Elementary diferential geometry. Academic Press, New York-London (1996).

[5] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[6] Chen, B.Y, "Geometry of submanifolds", Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (1973).

[7] Deszcz, R., "On pseudosymmetric spaces" *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A* **44** (1992), no. 1, 1-34.

[8] Yano, K., Kon, M., Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, (1984).

[9] Chaki, M. C., Ghosh, M. L., On quasi-conformally flat and quasi-conformally conservative Riemannian manifolds. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.)* **43** (1997), no. 2, 375-381.

[10] Szabó, Z. I., "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying R(X,Y)·R=0 The local version", *J. Differential Geom.* **17** (1982), no. 4, 531-582.

[11] De, U. C., Guha, N., Kamilya, D. "On generalized Ricci-recurrent manifolds", *Tensor (N.S.)* **56** (1995), no. 3, 312-317.

[12] Blair, D. E., Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progress in Mathematics, 203. *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA,* 2002.

[13] Chaki, M. C., Maity, R. K. "On quasi Einstein manifolds", *Publ. Math. Debrecen* **57** (2000), no. 3-4, 297-306.

[14] Guha, S**.,** “On quasi Einstein and generalized quasi Einstein manifolds”, Nonlinear mechanics, nonlinear sciences and applications, I, *Facta Univ. Ser. Mech. Automat. Control Robot.* **3** (2003), no. 14, 821-842.

[15] Chen B.Y., Yano K**.,** Hypersurfaces of a conformally flat space, Vol. 3, *Tensor (N.S.)* **26** (1972), 318-322.

[16] Chaki, M. C., On generalized quasi Einstein manifolds. *Publ. Math. Debrecen* **58** (2001), no. 4, 683-691.

[17] De, U. C.**;** Ghosh, Gopal Chandra**.** On generalized quasi Einstein manifolds. *Kyungpook Math. J.* **44** (2004), no. 4, 607-615.

[18] Özgür C., “On a class of generalized quasi-Einstein manifolds”, *Applied Sciences*, 138-141 (2006).

[19] De, U. C.**,** Ghosh, G. C**.,** On quasi Einstein manifolds, *Period. Math. Hungar.* **48** (2004), no. 1-2, 223-231.

[20] Chen, B.Y.**,** Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds. *Arch. Math. (Basel)* **60** (1993), no. 6, 568-578.

[21] Deprez, J., Semiparallel hypersurfaces. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **44** (1986), no. 2, 303—316.

[22] M. M. Tripathi and J. S. Kim, On N(k)-quasi Einstein manifolds, Indian J. Math. Math. Sci., baskıda.

[23] Özgür C., Tripathi, M. M., On the concircular curvature tensor of an N(k)-quasi-Einstein manifolds, preprint.