

## ÖZET:

### HECKE GRUPLARI ve FAREY DİZİLERİ

Ebru İPEK

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL)

Balıkesir, 2006

Bu tezin amacı Modüler grubun temel denklik altgrupları için elde edilmiş olan Farey dizilerini, iki önemli Hecke Grubunu tam denklik alt gruplarına genişletmek ve benzer diziler elde etmektir. Ayrıca Farey Matrisleri de tanımlanmıştır.

Tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde genel bazı bilgiler derlenmiştir.

İkinci bölümde Modüler grup, Farey dizileri ve Farey matrisleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde Hecke gruplarının genel tanımı verilmiş, Hecke gruplarına karşılık gelen Farey dizileri ve Farey matrisleri incelenmiş, ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Farey dizilerini veren hesaplayıcı bir program hazırlanmış ve kullanılmıştır.

İkinci ve üçüncü bölümdeki teoremlerin bazıları orijinaldir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Farey Dizisi, Farey Kesiri, Farey Matrisi, Hecke Grupları

**ABSTRACT :**

**HECKE GROUPS and FAREY SEQUENCES**

**Ebru İPEK**

**Balıkesir University, Institute Of Science, Department Of Mathematics**

**(M.Sc.Thesis / Supervisor : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL)  
Balıkesir – TÜRKİYE, 2006**

In this thesis, the Farey Sequences which are defined and calculated for the principal congruence subgroups of the modular group are generalised to two important Hecke Groups and similar sequences are obtained. Also, as a new concept, the Farey Matrices are defined.

The thesis consists of three chapters.

In the first chapter, some general background information are recalled.

In the second chapter, definitions and theorems of modular group, Farey sequences, Farey matrices are given with proofs.

In the last chapter, definitions and theorems of Farey sequences and Farey matrices with regard to Hecke groups are given with proofs. A software about Farey sequences is prepared and used.

Some results in second and last chapters are original.

**KEY WORDS:** Farey sequences, Farey fractions, Farey matrices, Hecke groups

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER</b>	i
<b>ABSTRACT, KEY WORDS</b>	ii
<b>İÇİNDEKİLER</b>	iii
<b>SEMBOL LİSTESİ</b>	v
<b>ÖNSÖZ</b>	vii
<b>GİRİŞ</b>	1
<b>1. ÖN BİLGİLER</b>	2
1.1 Tarihçe	2
1.2 Bölme Algoritması ve Öklid Algoritması	2
1.3 Gauss Yardımcı Teoremi ve İkinci Dereceden Kalanlar	3
<b>2. MODÜLER GRUP, FAREY DİZİLERİ ve FAREY MATRİSLERİ</b>	4
2.1 Modüler Grup ve Temel Denklik Altgrupları	4
2.2 Farey Dizileri	9
2.3. Ford Çemberleri	19
2.4 Stern-Brocot Ağacı	25
2.5 Rasyonel Yaklaşım	26
2.6 Modüler Grup ve Farey Matrisleri	32

<b>3. HECKE GRUPLARI, FAREY DİZİLERİ ve FAREY MATRİSLERİ</b>	<b>35</b>
3.1 Hecke Grupları ve Temel Denklik Altgrupları	35
3.2 Hecke Gruplarına Karşılık Gelen Farey Dizileri	35
3.3 Farey Kesir Formülü	174
3.4 Hesaplayıcı Programı	175
3.5 $H(\lambda_q)$ için Farey Matrisleri	177
<b>EKLER</b>	<b>179</b>
<b>SONUÇ</b>	<b>233</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>234</b>
<b>İNDEKS</b>	<b>235</b>

## SEMBOL LİSTESİ

### Kısaltmalar

### Acıklamalar

$F_n$	n-inci sıradaki Farey dizisi
$F_{n,q}^N$	$\sqrt{2} = q \pmod{N}$ olmak üzere n-inci satırdaki Farey dizisi
$GF(p)$	p elemanlı Galois cismi
(a,b)	a ve b tamsayılarının en büyük ortak böleni
$C[a,b]$ veya $C[a/b]$	$\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2.b^2}\right)$ merkezli, $\frac{1}{2.b^2}$ yarıçaplı Ford çemberi
SB	Stern-Brocot ağacı
FM	Farey matrisi
OBEB = e.b.o.b	en büyük ortak bölen
$PSL_2(\mathbf{Z})$	modüler grup
$SL_2(\mathbf{Z})$	özel lineer grup
$GL_2(\mathbf{Z})$	genel lineer grup
$PGL_2(\mathbf{Z})$	projektif genel lineer grup
$\varphi(n)$	$\varphi$ Euler fonksiyonu
$H(\lambda_q)$	Hecke grubu

## ŞEKİL ve TABLO LİSTESİ

<b><u>Şekil Numarası</u></b>	<b><u>Adı</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
Şekil 2.1.1	$PSL_2(\mathbf{Z})$ 'de Temel Bölge	4
Şekil 2.1.2	Yelpaze	5
Şekil 2.1.3	Yelpaze ve çemberler	5
Şekil 2.1.4	4-üncü mertebeden Farey dizisini veren Ford çemberleri	6
Şekil 2.1.5	Farey dizilerinin dallanması	6
Şekil 2.1.6	Diophantine yaklaşımda Ford çemberleri	7
Şekil 2.1.7	Ford çemberleri	8
Tablo 2.1.8	$F_n$ (n-inci satırdaki Farey dizisi)	9
Şekil 2.2.1	$\mathbf{R}^2$ 'nin kafesi	10
Şekil 2.2.2	Koordinat sisteminde görülebilir nokta	10
Şekil 2.2.3	J paralelkenarı	11
Şekil 2.2.4	POQ üçgeni	13
Şekil 2.3.1	Ford çemberleri	19
Şekil 2.3.2	$F_5$ için Ford çemberleri	20
Şekil 2.3.3	Ford çemberleri (yarıçap hesabı)	20
Şekil 2.3.4	Ford çemberleri (yarıçap hesabı)	22
Şekil 2.3.5	Ford çemberleri (yarıçap hesabı)	24
Şekil 2.4.1	Stern-Brocot ağacı	25
Tablo 2.6.1	$n = 1, 2, \dots, 10$ için Farey dizisi ve Farey matris bağlantıları	34
Şekil 3.4.1	Program Ekranı	176

## ÖNSÖZ

Matematik, sayılar, işlemler ve formüllerin dışında kişinin doğru bakış açısı altında görebileceği sonsuz güzelliğe, derinliğe, estetiğe, olağanüstülüğe sahip; akla, gerçekliğe uygunluğu ile ezbere değil, sorgulama, araştırma ve anlamaya dayalı bir dünyadır.

Matematik öyle derindir ki yaşamın her alanında karşımıza çıkar. Hepimiz günlük yaşantımızda bilerek ya da bilmeyerek, çoğu zaman araç olarak matematiği kullanırız. Matematik düşünmeyi, doğru yerden bakmayı öğrenmekle güzelleşir.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$  işleminin ilk bakışta matematik öğretiminin ilk yıllarında çokça yapılan bir hata olduğunu düşünsek de; araştırdığımızda Farey'in Rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu göstermede kullandığı bir yöntem olduğunu görürüz.

Bu çalışmamızda Farey'in toplama esasına dayalı sayı dizilerinden yola çıkarak, Farey dizilerini Modüler grup ve Hecke grupları ile birlikte inceleyip orijinal sonuçlar bulmanın mutluluğunu yaşadık.

Tez çalışmamda daima bana yol gösteren ve destek olan, matematiğin farklı bir güzelliğini görmeme sebep olan sayın hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e sonsuz teşekkürler ederim.

Eğitimimde emeği geçen anneme ve babama, sevgili kardeşime ve yardımlarını esirgemeyen ve destek olan çok değerli arkadaşlarıma yanımda oldukları için teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

## **GİRİŞ**

Bu tezde modüler grubun denklik altgruplarına karşılık gelen Farey dizilerine benzer olarak Farey dizileri ve Farey matrisleri tanımlanarak bunların temel özellikleri incelenmiş, aralarındaki bağıntılar elde edilmiştir.

Birinci bölümde genel bazı bilgiler derlenmiştir.

İkinci bölümde Modüler grup, Farey dizileri ve Farey matrisleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir.

Üçüncü bölümde Hecke gruplarının genel tanımı verilmiş, Hecke gruplarına karşılık gelen Farey dizileri ve Farey matrisleri incelenmiş, ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Farey dizilerini veren hesaplayıcı bir program hazırlanmış ve kullanılmıştır.

İkinci ve üçüncü bölümdeki teoremlerin bazıları orijinaldir.



# 1. ÖNBİLGİLER

## 1.1 Tarihçe

Farey 1816'da ardışık herhangi üç kesirin ortada kalanının diğer iki kesirin medyanı olduğunu belirleyen bir jeologtur. Bunun ilk ispatı Cauchy tarafından yapılmasına rağmen Farey'in adıyla anılmaktadır

Erich Hecke, 1936'da Dirichlet bölgeleri ile ilgili [14] nolu çalışmasında ilk olarak Hecke gruplarını tanımlamış ve bazı özelliklerini elde etmiştir.

## 1.2 Bölme Algoritması ve Öklid Algoritması

**1.2.1 Tanım (Bölme Algoritması):**  $m, n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \neq 0$  ise  $m = q.n + r$ ;  $0 \leq r < |n|$  olacak şekilde bir tek  $q$  ve  $r$  tamsayı ikilisi vardır.

**1.2.2 Tanım (Öklid Algoritması):** ( $m$  ve  $n$ 'nin en büyük ortak bölenini bulmak için kullanılır).

$$m, n \in \mathbf{Z}, (m, n) = (-m, n) = (m, -n) = (-m, -n)$$

olduğundan genelliği bozmaksızın  $m, n \in \mathbf{N}$  ve  $m \geq n$  alınabilir.

$$m = q_1.n + r_1, \quad 0 \leq r_1 < n$$

dir. Burada  $r_1 = 0$  ise  $(m, n) = n$ 'dir ve  $m, n$  ile kalansız bölünmektedir denilir.

$r_1 \neq 0$  ise  $n = q_2.r_1 + r_2$ ,  $0 \leq r_2 < r_1$  yazılabilir.

$r_2 = 0$  ise en büyük ortak bölen bulunur.

$r_2 \neq 0$  olsun.  $r_1 = q_3.r_2 + r_3$ ,  $0 \leq r_3 < r_2$  yazılabilir. Bu şekilde devam edilerek pozitif tamsayıların azalan bir

$$m > n > r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geq 0$$

dizisi elde edilir.  $m$  sonlu olduğundan bu dizinin sonlu tane elemanı olur. Yani belli  $k$  için  $r_{k+1} = 0$  olabilir.

Son birkaç adıma göz atarsak

$$r_{k-3} = q_{k-1}.r_{k-2} + r_{k-1}, \quad 0 \leq r_{k-1} < r_{k-2}$$

$$r_{k-2} = q_k.r_{k-1} + r_k, \quad 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

$$r_{k-1} = q_{k+1}.r_k + 0$$

Bu metoda Öklid Algoritması denir.

### 1.3 Gauss Yardımcı Teoremi ve İkinci Dereceden Kalanlar

**1.3.1 Gauss Yardımcı Teoremi:**  $p$  tek asal sayı ve  $\bar{a} \in U_p$  olsun.  $\mu = |aP \cap N|$  olmak üzere;

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu$$

olur. Burada  $U_p = \left\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$  ve  $N = \left\{\frac{p+1}{2}, \dots, \overline{p-1}\right\}$ 'dir.

$p$  asal olmak üzere,  $GF(p)$ ,  $p$  elemanlı Galois cisimidir ve  $GF(p) = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ 'dir.

$H(\sqrt{2})$ 'de  $\sqrt{2}$ 'yi,  $H(\sqrt{3})$ 'te  $\sqrt{3}$ 'ü tamsayı gibi düşünebileceğimizi görmek için Gauss Yardımcı Teoreminden faydalanacağız.

Şimdi hangi  $p$ 'ler için  $\sqrt{2} \in GF(p)$  olduğunu görelim:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \in GF(p) &\Leftrightarrow \sqrt{2} \equiv x \pmod{p} \text{ olacak şekilde } x \in GF(p) \text{ vardır.} \\ &\Leftrightarrow x^2 \equiv 2 \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow p \equiv \mp 1 \pmod{8}\end{aligned}$$

O halde bu özellikteki tüm  $p$  asal sayıları  $p = 7, 17, 23, 29, 31, \dots$  şeklindedir.

Benzer olarak  $\sqrt{3} \in GF(p)$  olacak şekildeki  $p$  asal sayılarını belirleyelim:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \in GF(p) &\Leftrightarrow \sqrt{3} \equiv x \pmod{p} \text{ olacak şekilde } x \in GF(p) \text{ vardır.} \\ &\Leftrightarrow x^2 \equiv 3 \pmod{p} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{p}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow p \equiv \mp 1 \pmod{12}\end{aligned}$$

Yani  $p = 11, 13, 23, 37, 47, \dots$  asalları için 3 bir sayının karesi olarak düşünülebilir.

## 2. MODÜLER GRUP ve FAREY DİZİLERİ

### 2.1 Modüler Grup ve Temel Denklik Alt grupları

**2.1.1 Tanım:** Üst yarı düzlemin yön koruyan otomorfizmlerinin grubu  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$  ile gösterilir. Bunun bir alt grubu olan ve katsayıları tamsayılar halkasından alınan

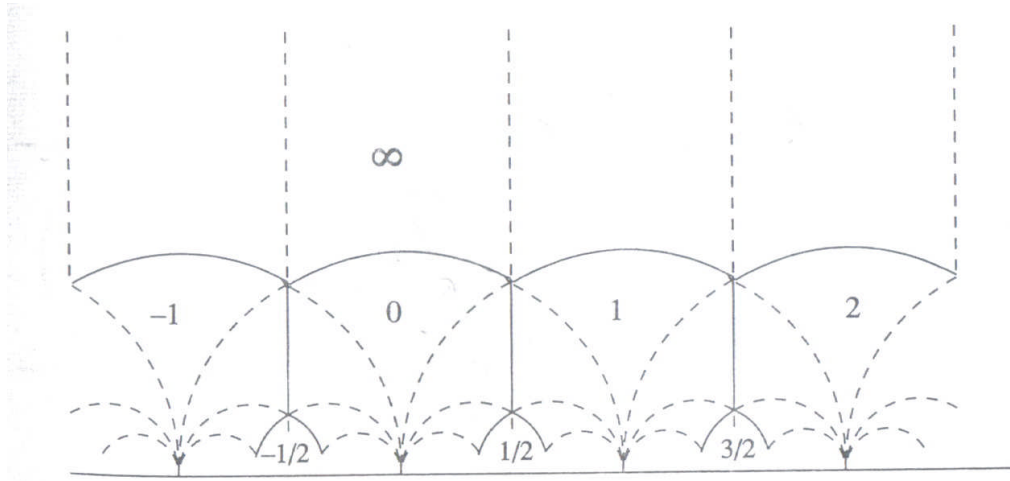
$$\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbf{Z}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d}; ad-bc=1; a, b, c, d \in \mathbf{Z} \right\}$$

grubuna modüler grup denilir.  $\Gamma$  en iyi bilinen ayrık gruptur ve  $R(z) = -\frac{1}{z}$  ile  $T(z) = z + 1$  dönüşümleri tarafından üretilebilir.

Üst yarı düzlemden kendi üzerine

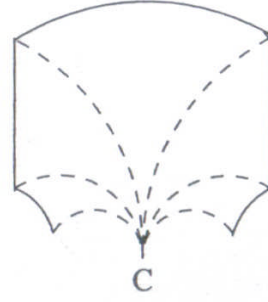
$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbf{Z}, ad - bc = 1$$

dönüşümlerinin kümesi olan  $\text{PSL}_2(\mathbf{Z})$  grubunu inceleyeceğiz.



Şekil 2.1.1

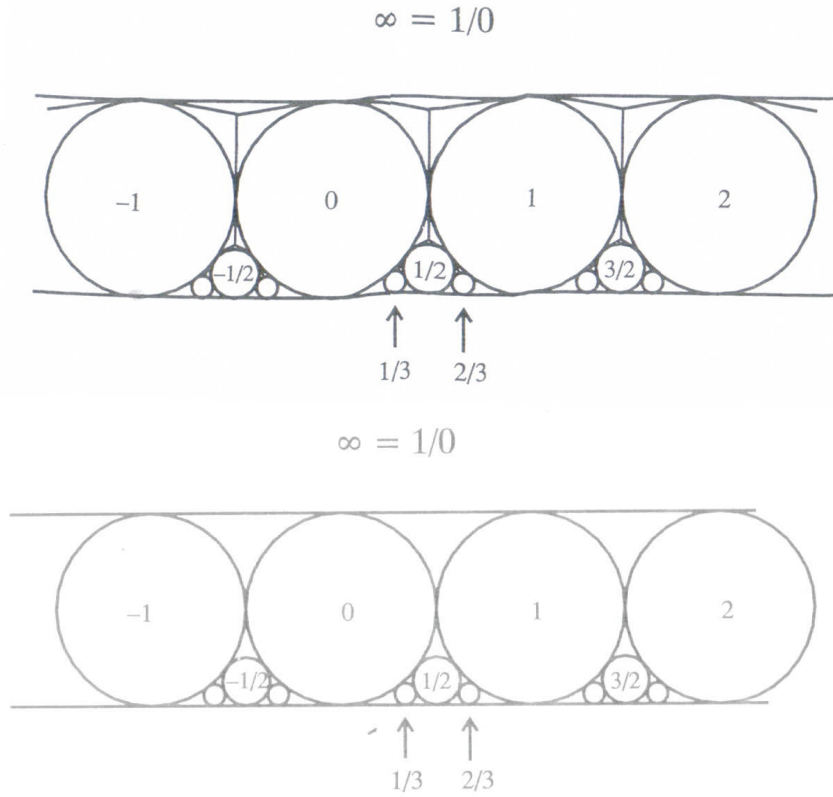
Şekil  $\text{PSL}_2(\mathbf{Z}) = \Gamma$  için  $H = \{x+iy/y>0\}$ 'ın temel bölgelere ayrılmış halini gösterir.



**Şekil 2.1.2**

$\frac{p}{q}$ ,  $\mathbf{Z}^2$ 'deki  $(p,q)$  ilkel vektörü eşleştirilerek yelpaze etiketlenir.  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısı yelpazenin C merkezi olur.  $\frac{-p}{-q}$ ,  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısı  $\frac{p}{q}$  sayısı ile aynı alındığında,  $(-p,-q)$  ve  $(p,q)$  ilkel vektörleri otomatik olarak aynı yelpazeyi verir.

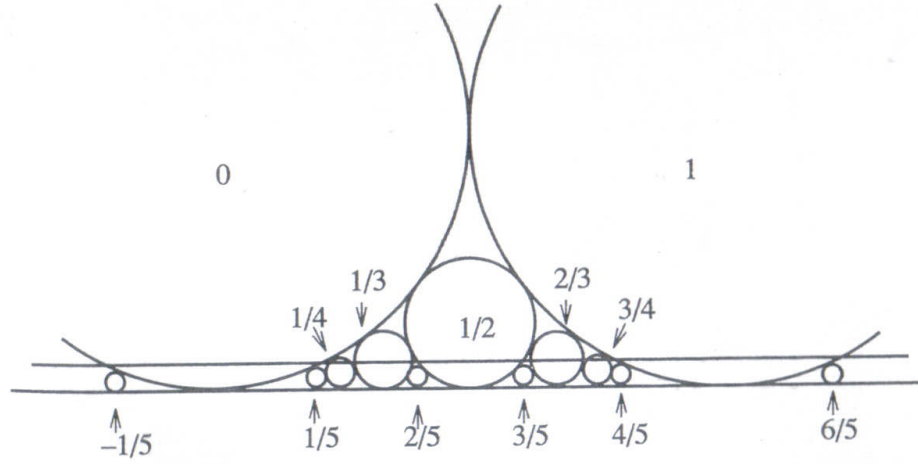
Bu şeklin geometrisi yani Öklidyen olmayan hiperbolik geometri bize birçok bilgi verir. Yelpazeler şimdi göreceğimiz içine çizilmiş çemberlere sahiptir.



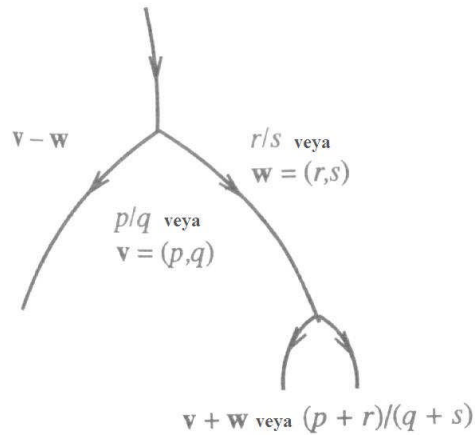
**Şekil 2.1.3**

Bunlar genellikle Ford çemberleri olarak adlandırılırlar.  $\infty = \frac{1}{0}$  için olan Ford çemberleri  $y = 1$  olan yatay doğrudur.  $\frac{p}{q}$  için Ford çemberleri reel eksene  $\frac{p}{q}$  noktasında teğet olan  $H'$ 'da  $\frac{1}{q^2}$  çaplı çemberlerdir.  $d$ -inci mertebeden Farey serileri paydası en çok  $d$  olan her rasyonel sayıyı içerir. Bunlar yüksekliği  $\frac{1}{d^2}$  ve  $\frac{1}{(d+1)^2}$  arasında olan herhangi bir  $L$  yatay doğrusuyla kesişen Ford çemberlerine karşılık gelir.

Aşağıdaki çizgiden 4-üncü mertebeden  $\dots \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \dots$  Farey serisini elde ederiz.



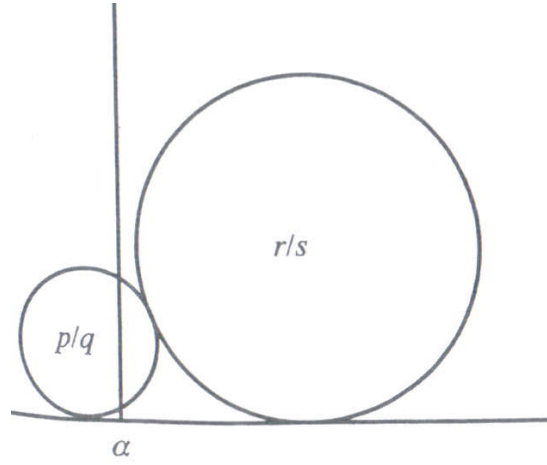
Şekil 2.1.4



Şekil 2.1.5

Farey serileri için “medyan” kuralı  $\frac{p}{q}$  ve  $\frac{r}{s}$  ardışık Farey kesirleri arasındaki ilk kesirin  $\frac{p+r}{q+s}$  olduğunu söylemektedir.

Böylece Diophantine yaklaşımının bazı sonuçları artık aşikârdır. Örneğin;  $\alpha$  herhangi bir irrasyonel sayı olmak üzere  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q^2}$  şeklinde sonsuz çoklukta  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısı vardır.



**Şekil 2.1.6**

$\alpha$ 'nın zıt tarafında bulunan  $\mathbf{R}$  ile teğet noktaları olan  $\frac{p}{q}$  ve  $\frac{r}{s}$  ardışık çemberlerini alırsak;  $\alpha$ 'dan geçen düşey doğru çemberlerden en az birini keser. Şekildeki gibi çizildiğinde bu doğru  $\frac{p}{q}$  için olan Ford çemberlerini kesiyorsa

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q^2} \text{ 'dir.}$$

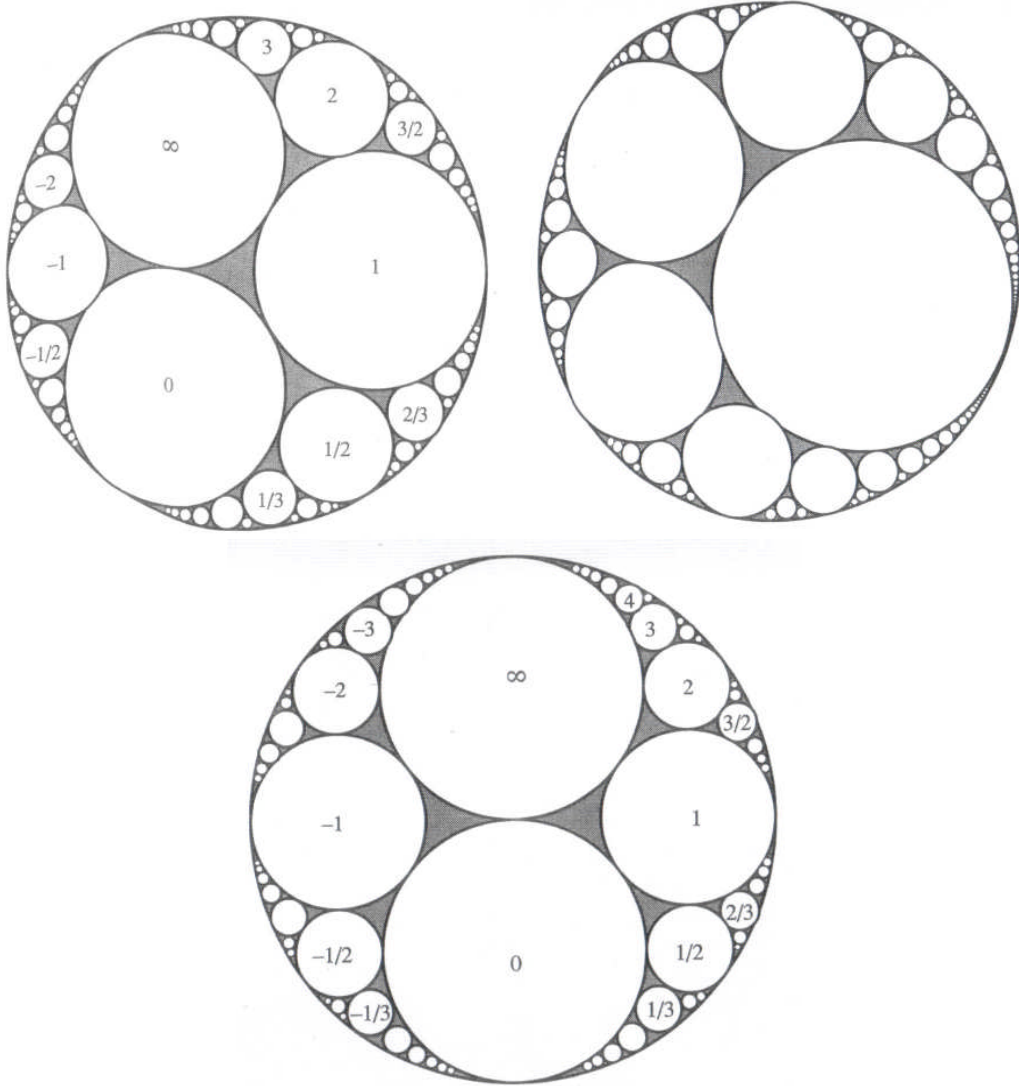
Önümüzdeki üç şekilde olduğu gibi üst yarı düzlemi Poincare birim diskine dönüştüren  $z \rightarrow \frac{z-i}{z+i}$  konform dönüşümünü uygularsak  $SL_2(\mathbf{Z})$  ve  $GL_2(\mathbf{Z})$  gruplarının  $\mathbf{Q}$  üzerindeki hareketini daha kolay canlandırabiliriz.

Şimdi Ford çemberleri birim diskin sınırına teğet çemberler olur.  $GL_2(\mathbf{Z})$  grubu şeklin tüm simetrilerini içerir.  $SL_2(\mathbf{Z})$ 'de ise sadece dönme dönüşümleri olacaktır.

Bu şekillerden birincisi  $GL_2(\mathbf{Z})$ 'nin 4-üncü mertebeden altgruplarının  $t \rightarrow -t$  ve  $t \rightarrow \frac{1}{t}$  ile üretildiğini gösterir. İkincisi; 6-ıncı mertebeden alt grubunun  $t \rightarrow \frac{1}{t}$  ve  $t \rightarrow 1-t$  ile üretildiğini gösterir.

Gerçekten  $GL_2(\mathbf{Z})$  bu iki sonlu grubun ortak  $C_2$  altgrupları yapıştırılmış serbest çarpımıdır. (Eğer dönme altgruplarına geçerse,  $SL_2(\mathbf{Z})$ 'nin 2-inci ve 3-üncü mertebeden grupların serbest çarpımından nasıl meydana geldiğini görürüz.)

Bu iki şekil  $PGL_2(\mathbf{Z})$ 'nin Öklid denklikleri yardımıyla elde edilen bazı sonlu altgruplarını gösterir. Bununla birlikte bütün simetriler Öklidyen olmayan geometridedirler. Gerçekten  $PGL_2(\mathbf{Z})$  sonsuz yarıçaplı çemberler ile hiperbolik uzayın bir paketlemesinin tam simetri grubudur.



Şekil 2.1.7

## 2.2 Farey Dizileri

**2.2.1 Tanım:** n-inci Farey dizisi  $F_n$  ile gösterilir ve 0 ile 1 arasında, küçükten büyüğe sıralanmış, paydası n'i geçmeyen indirgenmiş kesirlerin kümesidir.

Farey dizileri oluşturulurken ilk sıraya  $\frac{0}{1}$  ve  $\frac{1}{1}$  yazılır. Farey dizilerinin n = 2., 3., ... sıralarını oluştururken kullanacağımız kural aşağıdaki gibidir:

n-inci sıraya (n-1)-inci sıradaki elemanlar aynen yazılır. (n-1)-inci sırada  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  ardarda gelen kesirler olmak üzere  $b + d \leq n$  ise n-inci sırada  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  kesirleri arasına bu kesirlerin medyanı (orta değer) olan  $\frac{(a+b)}{(c+d)}$  yazılır. İlk beş Farey dizisi Tablo 2.1.1'de görülmektedir.

n	$F_n$ (n-inci satırdaki Farey dizisi)									
1	$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$									
2	$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$									
3	$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$									
4	$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$									
5	$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{1}$									

**Tablo 2.1.1**

Dördüncü satırdaki  $\frac{1}{3}$  ve  $\frac{1}{2}$  kesirleri için;  $3+2 > 4$  olduğundan bu kesirlerin arasına  $\frac{2}{5}$  yazılamaz.

n-inci satırdaki Farey kesir sayısı  $\sum_{k=0}^n \varphi(k)$ 'dir.

Burada  $\varphi(n) = \# \{k \in \mathbb{N}; (k,n) = 1, 1 \leq k < n\}$  şeklinde tanımlı olan Euler fonksiyonunu göstermektedir.

Örneğin, n = 4 için, 4-üncü satırdaki Farey kesiri sayısının



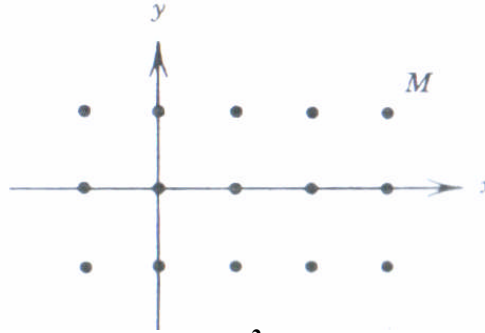
$$\sum_{k=0}^4 \varphi(k) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$$

olduğunu yukarıdaki tablodan görebiliriz.

**2.2.2 Teorem:**  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  Farey dizisinin ardışık elemanları olsun.  $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{a.c}$  dir. Denk olarak  $a.d - b.c = 1$  dir.

2.2.2 Teoremin ispatı ileride göreceğimiz geometrik teoreme dayanmaktadır.

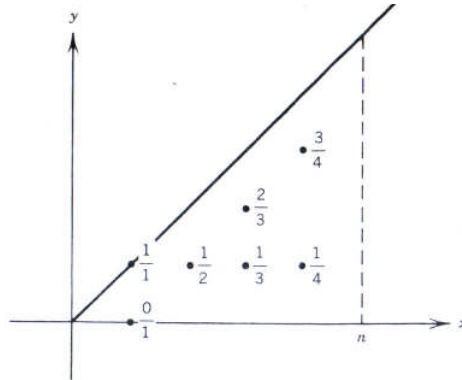
$M \subset \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{R}^2$ 'nin bir kafesi olsun.  $M = \{(m, n) \in \mathbf{R}^2 / m, n \in \mathbf{Z}\}$  olup  $M$ , vektörel toplama altında bir gruptur.



Şekil 2.2.1 (  $\mathbf{R}^2$ 'nin kafesi )

**2.2.3 Tanım:**  $P \neq 0$  olmak üzere  $P \in M$  noktasının orijinden görülebilmesi için gerek ve yeter şart  $OP$  doğru parçasının üzerinde  $M$ 'ye ait hiçbir eleman olmamasıdır.

Denk olarak  $P = (m, n) \in M$  olması için gerek ve yeter şart  $OBEB(m, n) = 1$  olmasıdır.  $0 \leq y \leq x$  bölgesindeki  $M$ 'nin  $P = (x, y)$  görülebilir noktalarının kümesi ile  $0 \leq q \leq 1$  şartını sağlayan  $q = \frac{y}{x}$  rasyonel sayıların kümesi arasında birebir, örten bir dönüşüm vardır.

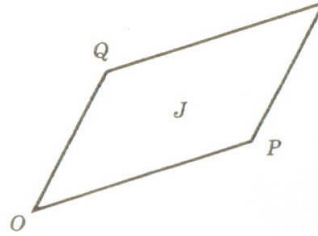


Şekil 2.2.2

**2.2.4 Tanım:**  $P \neq \mp Q$  olmak üzere  $P$  ve  $Q$ ,  $M'$ 'nin görülebilir iki noktası olsun.  $OP$  ve  $OQ$  ile tanımlanan  $J$  paralelkenarı

$$J = \{rP + sQ / r, s \in \mathbf{R}, 0 \leq r, s \leq 1\}$$

şeklindedir.



**Şekil 2.2.3**

Eğer  $P = (a, b)$ ,  $Q = (c, d)$  ise basit geometri ile  $J$  alanının  $|a.d - b.c|$ 'ye eşit olduğu bilinir ve pozitif bir tamsayıdır.

$OPQ$  üçgeni;  $OPQ = \{rP + sQ / r, s \in \mathbf{R}, 0 \leq r, s \leq 1, r + s \leq 1\}$  şeklindedir.

**2.2.5 Teorem Geometrik Teorem:**  $P \neq \mp Q$  olmak üzere  $P$  ve  $Q$ ,  $M'$ 'nin görülebilir iki noktası,  $\delta$ ,  $OP$  ve  $OQ$  ile tanımlanan  $J$  paralelkenarının alanı olsun.

Eğer  $\delta = 1$  ise;  $J$ 'nin içinde  $M'$ 'nin hiçbir noktası yoktur.

Eğer  $\delta > 1$  ise;  $J$ 'nin içi ile  $OPQ$ 'nin arakesitinde  $M'$ 'nin en az bir noktası vardır.

Önce bir Yardımcı Teorem ispatlayalım.

**2.2.6 Yardımcı Teorem:**  $P = (a, b)$ ,  $Q = (c, d) \in M$  olsun.  $M' = \{mP + nQ / m, n \in \mathbf{Z}\}$   $P$  ve  $Q$  tarafından üretilen  $M'$ 'nin alt grubu olsun.

Aşağıdakiler birbirine denktir.

1)  $M = M'$

2)  $(1, 0)$  ve  $(0, 1) \in M'$

3)  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mp 1$

**İspat:**  $M' \subset M$  olduğundan ve  $M$ ,  $\{(1,0), (0,1)\}$  tarafından üretildiğinden  $1 \Leftrightarrow 2$  olduğu aşikârdır.

**2  $\Rightarrow$  3:** Hipotez gereği  $m, n, p, q$  tamsayıları

$$(1, 0) = m.(a, b) + n.(c, d)$$

$$(0, 1) = p.(a, b) + q.(c, d) \text{ olacak şekilde bulunabilir.}$$

Bu denklemler;  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  şeklinde matris formunda yazılabilir.

Son denklemin determinanı alınırsa;

$$1 = \det \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ bulunur. Bu iki determinant tamsayıdır ve } \mp 1 \text{ 'e eşit}$$

olmak zorundadır.

**3⇒2:** Hipotezde  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mp 1$  oluşu  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , nin tersinin tamsayılardan oluştuğunu gösterir.

**2.2.5 Teoremin ispatı:** P, Q, J ve S Teoremde kullanıldığı gibidir.

**1.Hal:**  $\delta = 1$ , 2.2.6 Yardımcı Teorem gösterir ki  $M = \{mP + nQ / m, n \in \mathbf{Z}\}$ 'dir. Fakat J'nin içi  $\{rP + sQ / r, s \in \mathbf{R}, 0 < r, s < 1\}$ 'dir. Arakesitin olmadığı aşikârdır.

**2.Hal:**  $\delta > 1$ , 2.2.6 Yardımcı Teorem gereği  $R = xP + yQ$  olacak şekilde M' nin bir elemanı vardır. Fakat bu M'nün elemanı değildir.  $R \notin M$  olduğundan, x ve y'nin ikisi birden aynı anda tamsayı değildir.

$S = R - [x]P - [y]Q$  olsun. Burada  $[t]$ , t reel sayısına küçük veya eşit en büyük tamsayıdır.

S, M grubunun üç elemanının toplamı olduğundan  $S \in M$ 'dir.  $S \in J$  olduğu açıktır. Eğer  $S \in OPQ$  ise;  $T = S$  olsun. Eğer  $S \notin OPQ$  ise;  $T = P + Q - S$ , OPQ'nun elemanıdır ve  $M \cap J$ 'de bulunur.

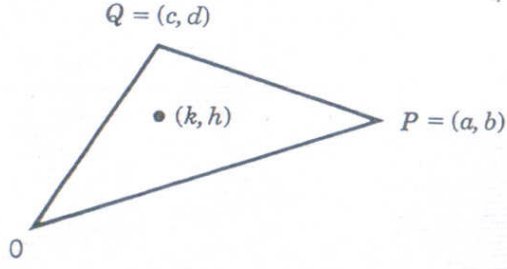
Son olarak T'nin J'nin içinde olduğunu göstereceğiz. Bu da  $T \neq OP \cup OQ$  demektir. r ve s'nin her ikisi de aynı anda tamsayı değilken  $T = rP + sQ$  olduğundan  $T \neq O$ , P, Q olduğuna biliyoruz. P ve Q görülebilir olduğundan M'nin T elemanı OP veya OQ'nun içinde değildir.

**2.2.2 Teoremin İspatı:**  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  Farey dizisinin ardışık iki kesiri olsun.  $P = (a,b)$ ,  $Q = (c,d)$  olsun.

Eğer  $\delta = |a.d - b.c| > 1$  ise 2.2.5 Teorem ile OPQ'nun içinde P ve Q dan başka M' nin bir (k,h) görülebilir noktası vardır. Eğim göz önüne alındığında

$$\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d} \text{ olduğu görülür. } k \leq \max \{b,d\} \leq n \text{ olduğundan, } \frac{h}{k} \in F_n \text{ olduğunu}$$

buluruz. Fakat bu  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ , nin ardışık olması ile çelişir.



**Şekil 2.2.4**

Böylece  $a.d - b.c = \mp 1$ 'dir. Ayrıca  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  olduğundan işaretin artı olacağını da biliyoruz.

2.2.2 Teoremin ikinci bir ispatını daha aşağıdaki şekilde verebiliriz.

**İspat:** 1. sıradaki  $\frac{0}{1}$  ve  $\frac{1}{1}$  Farey kesirleri için;  $1.1 - 0.1 = 1$  olup doğrudur.

(n-1)-inci sıradaki  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  ardışık Farey kesirleri için;  $bc - ad = 1$  eşitliği doğru olsun.

$\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$ , (n-1)-inci sırada ardarda gelen iki kesir olmak üzere; n-inci sıradaki ardarda gelen herhangi iki kesir; ya  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  ya  $\frac{a}{b}, \frac{(a+c)}{(b+d)}$  ya da  $\frac{(a+c)}{(b+d)}, \frac{c}{d}$ 'dir.

$$(a+c) \cdot b - a \cdot (b+d) = a \cdot b + c \cdot b - a \cdot b - a \cdot d = c \cdot b - a \cdot d = 1,$$

$$c \cdot (b+d) - d \cdot (a+c) = c \cdot b + c \cdot d - d \cdot a - d \cdot c = c \cdot b - a \cdot d = 1$$

olup n-inci sıradaki Farey kesirleri için eşitliğin doğru olduğu görülür.

Şimdi Farey dizisinin oluşturulmasını anlamak için 2.2.2 Teoremi kullanacağız.

**2.2.7 Önerme:**  $\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}$   $F_n$ 'in ardışık kesirleri olsun.

- i)  $\text{OBEB}(N_1, N_2) = \text{OBEB}(D_1, D_2) = 1$ ' dir. Yani  $F_n$ 'in ardışık payları ve ardışık paydaları aralarında asaldır.
- ii) Eğer  $n \geq 2$  ise;  $D_1 \neq D_2$ 'dir. Yani  $F_n$ 'in ardışık paydaları eşit değildir.

**İspat:** i-inci ifade  $D_1 \cdot N_2 - D_2 \cdot N_1 = 1$  eşitliğinden görülür.  $i$ 'nin ışığında,  $D_1 = D_2$  olması ancak  $D_1 = D_2 = 1$  olması ile gerçekleşir. Fakat paydası 1 olan  $F_n$  kesirleri  $\frac{0}{1}$  ve  $\frac{1}{1}$ 'dir ve  $n \geq 2$  için bunlar ardışık değildir.

**2.2.8 Sonuç:**  $F_n$ 'in iki ardışık elemanı arasında  $F_{n+1}$ 'in en çok bir tane elemanı vardır.

**İspat:**  $F_n$ 'in elemanı olmayan  $F_{n+1}$ 'in kesirlerinin hepsinin paydası  $n + 1$ 'dir.

2.2.7 Önerme ii herhangi iki değişik ve dolayısıyla daha küçük paydaya sahip bir kesirle ayrılmak zorundadır.

**2.2.9 Önerme:** Eğer  $\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \frac{N_3}{D_3}$ ,  $F_n$ 'in ardışık kesirleri ise  $\frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 + N_3}{D_1 + D_3}$ 'dir.

**İspat:** 2.2.2 Teoreminden;

$$D_1 \cdot N_2 - D_2 \cdot N_1 = 1$$

$$- D_3 \cdot N_2 + D_3 \cdot N_2 = 1$$

Farkı alınırsa;  $(D_1 + D_3) \cdot N_2 - (N_1 + N_3) \cdot D_2 = 0$ 'dır ki bu da iddiaya denktir.  $(D_1 + D_3) \cdot N_2 = (N_1 + N_3) \cdot D_2$  ve buradan  $\frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 + N_3}{D_1 + D_3}$  elde edilir.

**2.2.10 Teorem:**  $\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}$   $F_n$ 'in ardışık kesirleri olsun.

i)  $D_1 + D_2 > n$  ve  $\text{OBEB}(N_1 + N_2, D_1 + D_2) = 1$ 'dir.

ii)  $F_{D_1 + D_2}, \frac{N_1}{D_1}$  ve  $\frac{N_2}{D_2}$  arasında bir elemanı bulunan ilk Farey dizisidir. Bu eleman  $\frac{N_1 + N_2}{D_1 + D_2}$ 'dir.

**İspat:** Kolay bir hesaplama ile  $\frac{N_1}{D_1} < \frac{N_1 + N_2}{D_1 + D_2} = A < \frac{N_2}{D_2}$  olduğu görülür.  $A = \frac{N}{D}$

olarak yazılabilir.  $A$ , indirgenmiş (en sade) haldedir.  $F_n$ 'in  $\frac{N_1}{D_1}$  kesirleri ardışık olduğundan  $A \notin F_n$ 'dir.  $D > n$ 'dir. Fakat  $D, D_1 + D_2$ 'nin bölenidir ve  $D_1 + D_2 \leq 2 \cdot n$ 'dir. Dolayısıyla  $D = D_1 + D_2$ 'dir. Bu da  $i$ 'nin ispatıdır.

2.2.9 Önerme gereği  $\frac{N_1}{D_1}$  ve  $\frac{N_2}{D_2}$  arasında bir eleman içeren ilk Farey dizisi

bu şekildeki tek elemanı içerir. 2.2.9 Önerme ile bu eleman  $\frac{N_1+N_2}{D_1+D_2}$ 'dir. 2.2.10

Teorem i ile  $\frac{N_1+N_2}{D_1+D_2}$ 'in  $F_{D_1+D_2}$  de olduğu görülür.

2.2.9 Önerme  $F_n$ 'den  $F_{n+1}$ 'i oluşturmada bize basit bir metod vermektedir.  $F_{n+1}$ 'de paydası  $n + 1$  olan  $\frac{N_1+N_2}{n+1}$  şeklinde yeni bir kesir vardır ve bu  $F_n$ 'de paydasına  $n + 1$  eklediğimiz  $\frac{N_1}{D_1}$  ve  $\frac{N_2}{D_2}$  kesirlerinin arasına konulmaktadır.

**2.2.11 Teorem:**  $\frac{N}{D} \in F_n$  olsun.  $(x, y)$ , aşağıdaki koşulları sağlayan ve  $\frac{N}{D}$ 'yi takip eden  $F_n$ 'in elemanı  $\frac{y}{x}$  olacak şekildeki tek tamsayı çiftidir:

i)  $D.y - N.x = 1$  ve

ii)  $0 \leq n - D < x \leq n$ .

**İspat:**  $\frac{y_0}{x_0}, F_n$ 'in  $\frac{N}{D}$ 'den büyük bir elemanı olsun. 2.2.2 Teorem'den  $D.y_0 - N.x_0 = 1$ 'dir.  $F_n$ 'in tanımından,  $x_0 \leq n$ 'dir. 2.2.10 Teorem i ile  $x_0 + D > n$ 'dir. Bundan dolayı  $(x_0, y_0)$ ; i ve ii'nin çözümüdür. Geriye sadece i ve ii'nin çözümlerinin tekliğini göstermek kalır.

Gerçekten;  $\text{OBEB}(N, D) = 1$  olduğunda  $D.y - N.x = 1$  denkleminin tamsayılardaki genel çözümü  $\{(x_0 + t.D, y_0 + t.N), t \in \mathbf{Z}\}$  kümesidir.

Eğer  $t > 0$  ise;  $x_0 + t.D > n$ 'dir.

Eğer  $t < 0$  ise;  $x_0 + t.D \leq n - D$ 'dir. Dolayısıyla  $(x_0, y_0)$ ; aynı zamanda ii'yi de sağlayan i'nin tek çözümüdür.

Farey dizileri tek başına birçok ilginç özelliğe sahip olmakla beraber, çok değişik alanlarda da kullanılabilirler. Örnek olarak burada reel sayılara rasyonel sayılar yardımıyla yaklaşımda Farey dizilerini kullanacağız.

$\xi$ , reel sayı olsun.  $b < B$  olmak üzere  $b$  ve  $B$  pozitif tamsayılar olsun. İlk bakışta paydası  $B$  olan bir kesirle  $\xi$ 'ya yaklaşmanın paydası  $b$  olan bir kesirle yaklaşmaktan daha iyi olacağı düşünülebilir. Örnek olarak;  $\frac{1}{9}$  kesiri  $\xi =$

0,111111'e  $\frac{111}{1000}$ 'den çok daha yakındır. En ilginç belki de  $\frac{22}{7}$ 'e 3,14'ten daha yakın olan  $\frac{22}{7}$  ile  $\pi$  sayısına yaklaşabilmektir.

$F_5$  Farey dizisine baktığımızda  $\frac{1}{4}$  ve  $\frac{1}{3}$  arasındaki her sayının  $\frac{1}{4}$  ve  $\frac{1}{3}$ 'ten birine paydası 5 olan herhangi bir kesirle yaklaşmaktan daha yakın olacağını görürüz.

$b$  paydalı bir kesir ile  $\xi$  reel sayısına nasıl yaklaşılır? Bunu görmek  $a \in \mathbf{Z}$  sayısını,  $\frac{a}{b} - \frac{1}{2b} \leq \xi \leq \frac{a}{b} + \frac{1}{2b}$  olacak şekilde seçmek kolaydır. Dolayısıyla  $\left| \xi - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{2b}$  olur.

**2.2.12 Teorem:**  $\xi \in \mathbf{R}$  irrasyonel,  $\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$ 'yi sağlayan sonsuz çoklukta  $\frac{a}{b}$  rasyonel sayısı vardır.

**İspat:**  $\left| \xi - \frac{a}{b} \right| = \left| (\xi + k) - \frac{(a+b.k)}{b} \right|$  olduğundan  $0 < \xi < 1$  alınabilir.

$m$  pozitif tamsayı olsun.  $\frac{n}{d} < \xi < \frac{N}{D}$  olacak şekilde  $F_m$ 'in ardışık kesirleri olsun.  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{n}{d}$  veya  $\frac{N}{D}$ 'den biri olduğunda teoremdaki eşitsizliğin doğru olduğunu ispatlayacağız. Eğer  $m = 1$  ise aşikârdır. 2.2.2 Teorem ve 2.2.7 Önerme ii)'den ;

$$\left( \frac{n}{d} + \frac{1}{2d^2} \right) - \left( \frac{N}{D} - \frac{1}{2D^2} \right) = \frac{(D-d)^2}{2d^2.D^2} > 0$$

olduğu görülür. Bu yüzden;

$$\left( \frac{n}{d}, \frac{N}{D} \right) \subset \left( \frac{n}{d}, \frac{n}{d} + \frac{1}{2d^2} \right) \cup \left( \frac{N}{D} - \frac{1}{2D^2}, \frac{N}{D} \right) \text{dir.}$$

$$\xi \in \left( \frac{n}{d}, \frac{N}{D} \right) \text{ olduğunda, ya } \left| \xi - \frac{n}{d} \right| < \frac{1}{2d^2} \text{ dir ya da } \left| \xi - \frac{N}{D} \right| < \frac{1}{2D^2} \text{ dir.}$$

Farklı  $m$  ler için önceki paragraftaki işlemleri uygulayarak sonsuz sayıda  $\frac{a}{b}$  ile

$$\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2} \text{ 'yi elde edebiliriz.}$$

Gerçekten  $m$ 'nin seçimi ile  $\frac{a}{b}$ 'nin sonlu  $S$  kümesini genişletebiliriz. Böyle bir seçim yapmak mümkündür. Çünkü; rasyonel sayılar, reel sayılar içinde yoğunudur, 0 ve 1 arasında her rasyonel sayı yeterince büyük bir  $m$  değeri için  $F_m$ 'de kalır. 2.2.12 Teorem en iyi mümkün olan durum değildir.  $\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2}$  şeklindeki sonsuz çoklukta  $\frac{a}{b}$ 'nin varlığı gerçekten ispatlanabilir. Bir rasyonel sayıya daha küçük paydalı başka bir rasyonel sayı ile yaklaşmak için araya kullanılır.

**2.2.13 Önerme:**  $\eta \geq 1$  reel sayı ve  $\xi \in [0,1]$  olsun.  $\left| \xi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b_\eta}$  şeklindeki  $\frac{a}{b} \in F_{[\eta]}$  vardır.

**İspat:**  $\frac{n}{d} < \xi < \frac{N}{D}$  olmak üzere;  $\frac{n}{d}, \frac{N}{D} \in F_{[\eta]}$ 'in ardışık kesirleri olsun. 2.2.2 Teorem ve 2.2.10 Teorem i ile

$$\frac{n+N}{d+D} - \frac{n}{d} = \frac{1}{d \cdot (d+D)} \leq \frac{1}{d \cdot (\lceil \eta \rceil + 1)} < \frac{1}{d_\eta},$$

$$\frac{N}{D} - \frac{n+N}{d+D} = \frac{1}{d \cdot (d+D)} \leq \frac{1}{D \cdot (\lceil \eta \rceil + 1)} < \frac{1}{D_\eta}$$

şeklindedir.

Açıkça  $\frac{a}{b}; \frac{n}{d}, \frac{N}{D}$ 'den biri almabilir.

**2.2.14 Önerme:** Her  $\frac{a}{b}$  Farey kesiri indirgenmiş haldedir. Yani  $(a,b) = 1$ 'dir.

**2.2.15 Teorem:**  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  herhangi bir sırada ardarda gelen kesirler ve tüm rasyonel

kesirlerin değeri bu iki kesir arasında olmak üzere;  $\frac{(a+c)}{(b+d)}$  en küçük paydaya sahip tek kesirdir.

**İspat:**  $\frac{a}{b} < \frac{(a+c)}{(b+d)} < \frac{c}{d}$  dir ve bu ilk  $(b+d)$ -inci sırada görülür. Herhangi  $\frac{x}{y}$  kesiri

$\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  arasında olsun.  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$  dir. 2.2.2 Teorem'den  $b \cdot x - a \cdot y = 1$  ve  $y \cdot c - x \cdot d = 1$ 'dir.



$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} - \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right) = \frac{c.y - d.x}{d.y} + \frac{b.x - a.y}{b.y} \geq \frac{1}{d.y} + \frac{1}{b.y} = \frac{b+d}{b.d.y} \quad (*)$$

dir ve bu yüzden;

$$\frac{b+d}{b.d.y} \leq \frac{c.b - a.d}{b.d} = \frac{1}{b.d} \text{ dir ki bu } y \geq b + d \text{ olduğunu ifade eder.}$$

Eğer  $y > b + d$  ise;  $\frac{x}{y}$ ,  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  arasındaki en küçük paydaya sahip olamaz.

Eğer  $y = b + d$  ise; (\*) deki eşitsizlik eşitlik halini alır.  $c.y - d.x = 1$ ,  $b.x - a.y = 1$  ve  $x = a + c$ ,  $y = b + d$  bulunur. Dolayısıyla  $\frac{(a+c)}{(b+d)}$ ;  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  arasındaki  $(b + d)$  paydasına sahip olan tek kesirdir.

**2.2.16 Teorem:** Eğer  $0 \leq x \leq y$ ,  $(x,y) = 1$  ise;  $\frac{x}{y}$  kesiri  $y$ -inci ve  $y$  den sonraki bütün sıralarda bulunur.

**İspat:**  $y = 1$  için aşıkardır.  $y = y_0 - 1$ ,  $y_0 > 1$  için doğru olsun. Eğer  $y = y_0$  ise;  $\frac{x}{y}$  kesiri  $(y-1)$ -inci sırada bulunmaz ve bu  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  ardışık kesirleri arasındaki değer olmadığını gösterir.

**2.2.17 Önerme:**  $n$ -inci sıra;  $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$  ve  $0 < b \leq n$  olmak üzere tüm indirgenmiş kesirleri içerir.

**İspat:**  $\frac{n}{d} < \xi < \frac{N}{D}$  olmak üzere;  $\frac{n}{d}$ ,  $\frac{N}{D}$   $F_{[\eta]}$ 'in ardışık kesirleri olsun. 2.2.2

Teorem ve 2.2.10 Teorem i ile

$$\frac{n+N}{d+D} - \frac{n}{d} = \frac{1}{d.(d+D)} \leq \frac{1}{d.([\eta]+1)} < \frac{1}{d_n},$$

$$\frac{N}{D} - \frac{n+N}{d+D} = \frac{1}{d.(d+D)} \leq \frac{1}{D.([\eta]+1)} < \frac{1}{D_n} \text{ dir.}$$

Açıkça  $\frac{a}{b}$ ;  $\frac{n}{d}$ ,  $\frac{N}{D}$ 'den biri alınabilir.

### 2.3. Ford Çemberleri

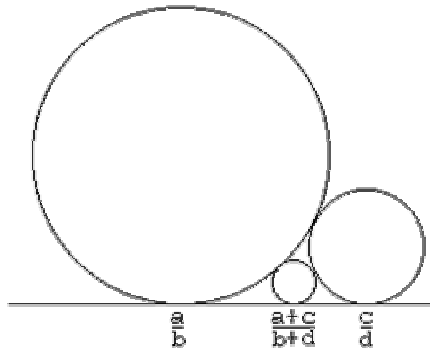
$\frac{a}{b}$  bir rasyonel sayı olsun. Her rasyonel sayının bir Ford çemberi ile ilgisi vardır.  $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$  kesirlerinin her birisi bir Ford çemberinin x-eksenine değme noktasını belirtir. Bir Ford çemberi, merkezi  $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$  ve yarıçapı  $\frac{1}{2b^2}$  olan bir çemberdir ve  $C[a,b]$  veya  $C[a/b]$  şeklinde gösterilir. Ford çemberlerinin tümü x-eksenine teğettirler.

$\frac{a}{b}$ , 0 ve 1 arasında ise;  $C[a,b]$  Ford çemberine teğet olan diğer Ford çemberleri, Farey dizisinde  $\frac{a}{b}$ 'nin komşuları olan kesirlere karşılık gelen çemberlerdir.

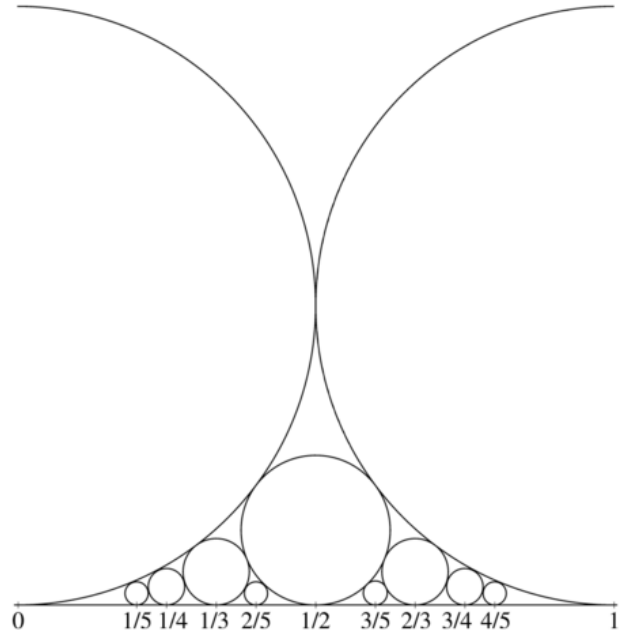
$\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  ardışık iki Farey kesiri ise;  $C[a,b]$  ve  $C[c,d]$  Ford çemberleri sadece tek bir noktada kesişirler yani birbirlerine teğettirler.

Aynı paydalı kesirler aynı büyüklükteki çemberlere sahiptir.

$\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  n-inci Farey dizisinin ardışık kesirleri olmak üzere; bunlara karşılık gelen tek noktada kesişen (birbirlerine teğet) ve x-eksenine teğet iki Ford çemberi çizilir.  $(n+1)$ -inci Farey kesirine geçildiğinde  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  kesirlerinin medyanı olan  $\frac{a+c}{b+d}$  kesirine karşılık gelen Ford çemberi, hem x-eksenine hem de  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  kesirlerine karşılık gelen Ford çemberlerine teğettir.



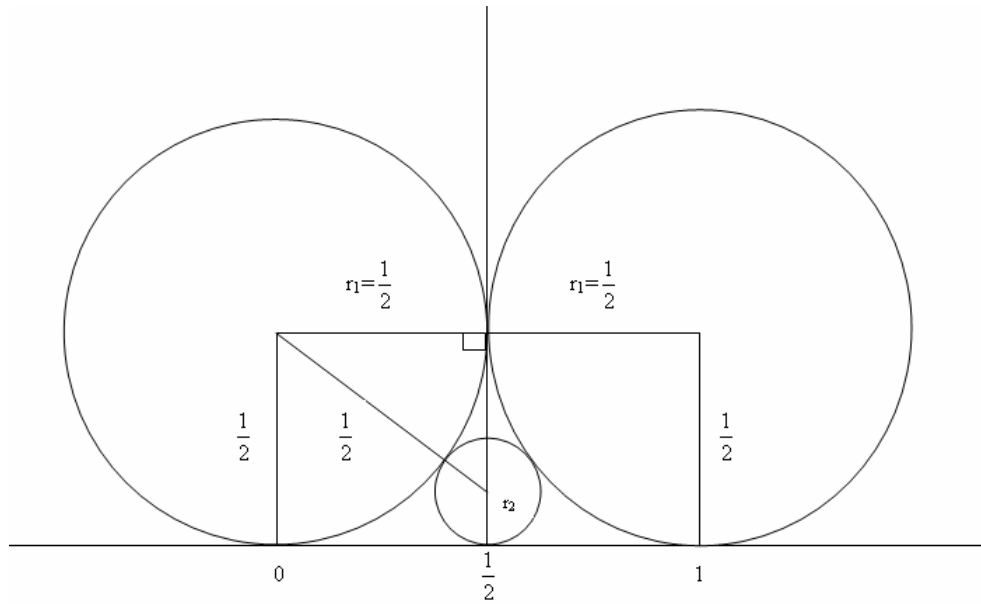
Şekil 2.3.1



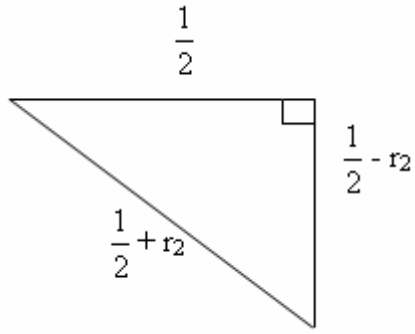
**Şekil 2.3.2 ( $F_5$  için Ford çemberleri)**

Şekilde,  $n = 5$  için  $F_5$  Farey dizisinin elemanlarına karşılık gelen Ford çemberleri yer alıyor.

Ford çemberlerinin yarıçaplarını hesaplayalım:



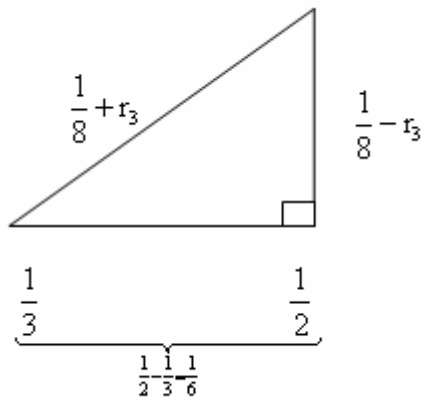
**Şekil 2.3.3**



$$\left(\frac{1}{2} + r_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - r_2\right)^2$$

$$\frac{1}{4} + r_2 + r_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + r_2 + r_2^2$$

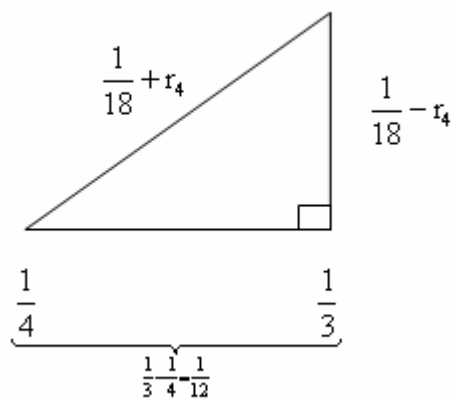
$$2r_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{8}$$



$$\left(\frac{1}{8} + r_3\right)^2 = \left(\frac{1}{8} - r_3\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

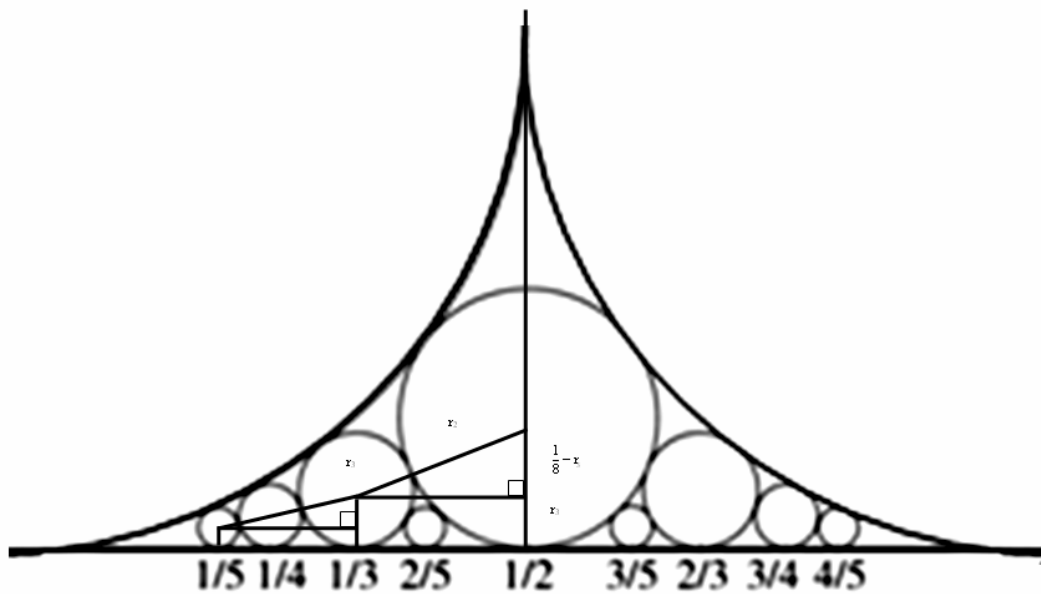
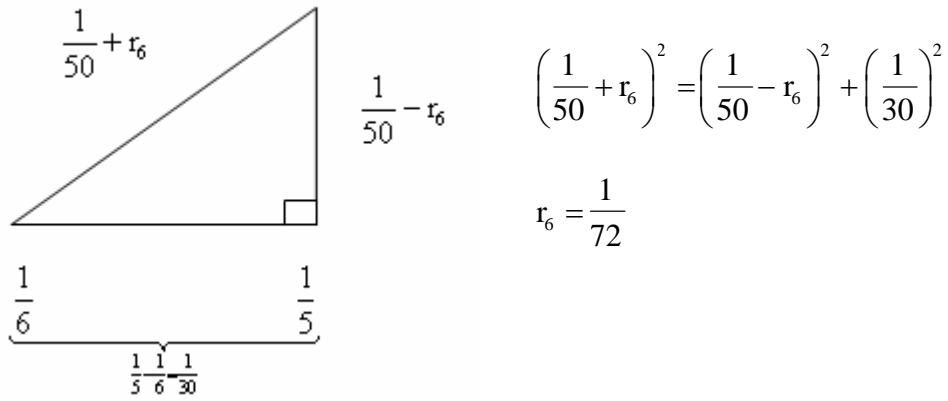
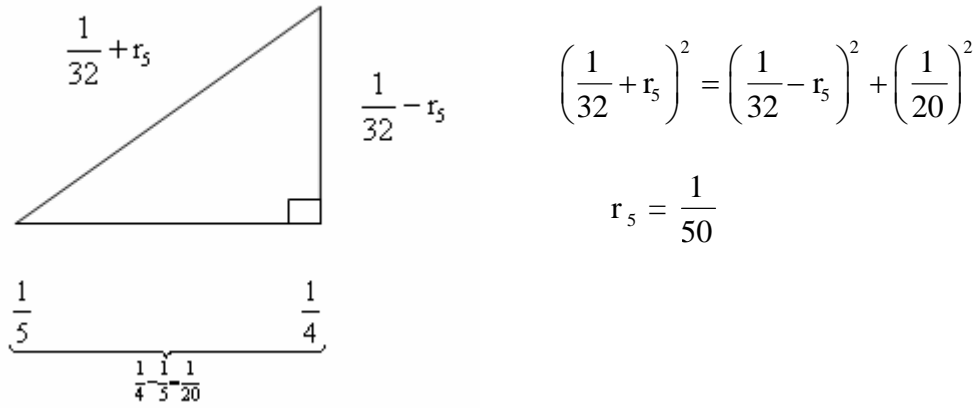
$$\frac{1}{64} + \frac{1}{4}r_3 + r_3^2 = \frac{1}{64} - \frac{1}{4}r_3 + r_3^2 + \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{2}r_3 = \frac{1}{36} \Rightarrow r_3 = \frac{1}{18}$$



$$\left(\frac{1}{18} + r_4\right)^2 = \left(\frac{1}{18} - r_4\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$r_4 = \frac{1}{32}$$



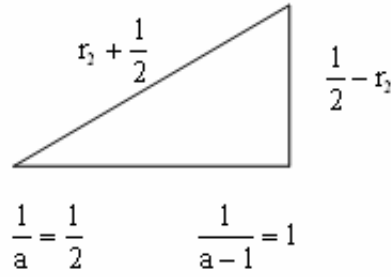
Şekil 2.3.4

Ford çemberlerini incelediğimizde çemberlerin x-eksenine değdiği noktalar ile yarıçapları arasında bir bağıntı olduğunu gördük. Şimdi Ford çemberleri için yarıçap teoremini verelim:

**2.3.1 Teorem (Ford çemberlerinin yarıçap hesabı):** x-eksenine  $\frac{1}{a}$  noktasında değen Ford çemberinin yarıçapı  $r_a = \frac{1}{2.a^2}$ 'dir.

**İspat:**

$a = 2 \Rightarrow$

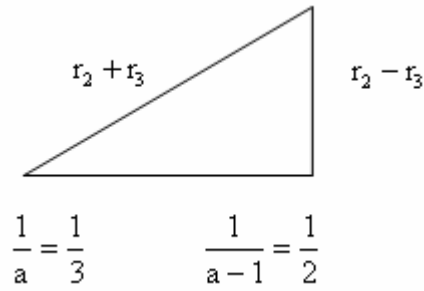


$$\left(\frac{1}{2} + r_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - r_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2r_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{8} \text{ bulunur ki}$$

$$r_2 = \frac{1}{2.2^2} \text{ yi doğrular.}$$

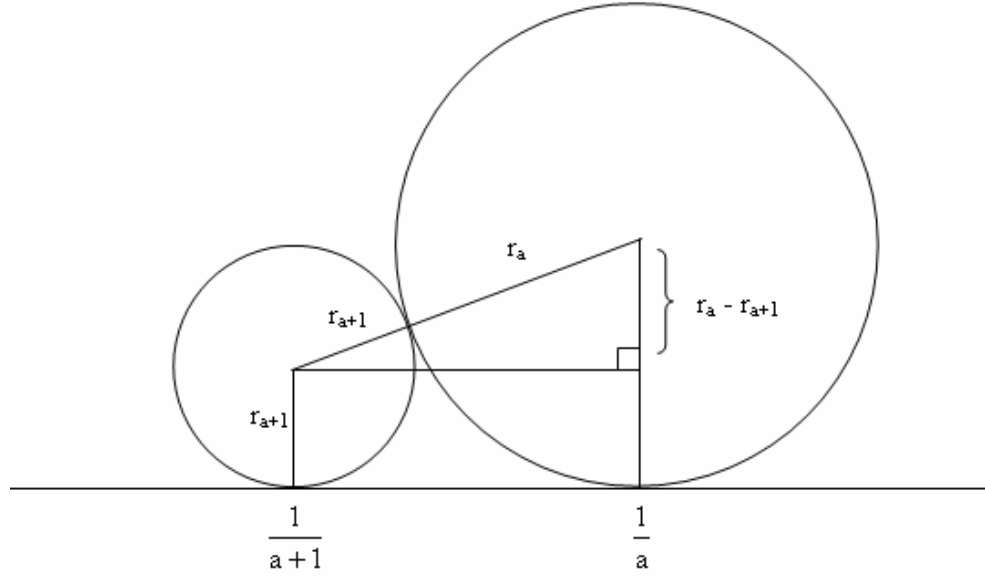
$a = 3 \Rightarrow$



$$(r_2 + r_3)^2 = (r_2 - r_3)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$2r_2 \cdot 2r_3 = \frac{1}{36} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2r_3 = \frac{1}{36}$$

$$r_3 = \frac{1}{18} \text{ olur ve } r_3 = \frac{1}{2.3^2} \text{ dir.}$$



**Şekil 2.3.5**

$\frac{1}{a}$ , Ford çemberlerinin x-eksenine değdiği nokta olmak üzere;  
 çemberin yarıçapı  $r_a = \frac{1}{2.a^2}$  olsun.

$\frac{1}{a+1}$  noktasında x-eksenine değen Ford çemberinin yarıçapını inceleyelim.

$$(r_a + r_{a+1})^2 = (r_a - r_{a+1})^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2$$

$$2.r_{a+1} \cdot 2.r_a = \frac{1}{a^2 \cdot (a+1)^2}$$

$r_a = \frac{1}{2.a^2}$  'yi yerine yazarsak;

$$2.r_{a+1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2.a^2} = \frac{1}{a^2 \cdot (a+1)^2}$$

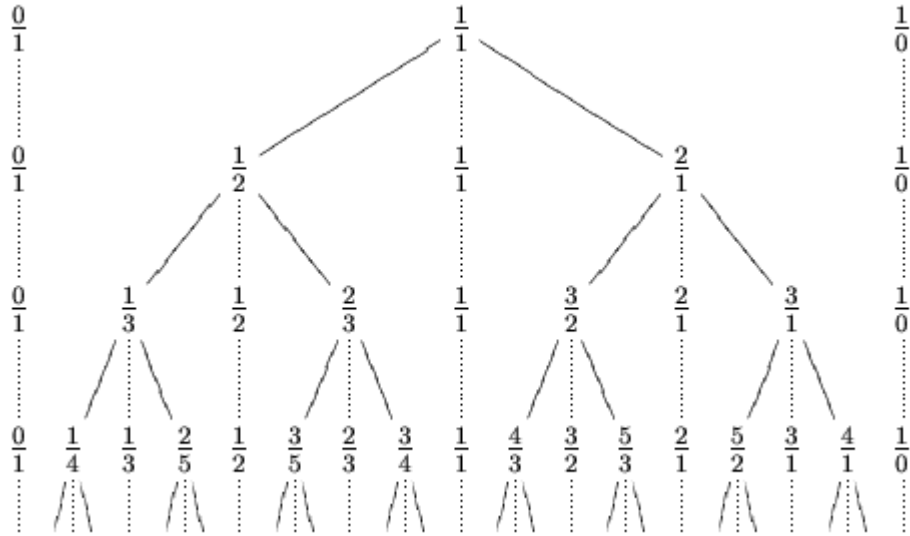
$$r_{a+1} = \frac{1}{2 \cdot (a+1)^2} \text{ 'dir.}$$

## 2.4 Stern-Brocot Ağacı

**2.4.1 Tanım:** Stern-Brocot ağacı, ilk elemanı  $\frac{0}{1}$ , son elemanı  $\frac{1}{0}$  olan bir sayı dizisidir. Sayılar teorisinde, negatif olmayan rasyonel sayıları listelemek için kullanılan bir metottur. İlk kez Alman matematikçi Moris Stern ve Fransız saatçi Achille Brocot tarafından çalışılmıştır.

Stern-Brocot ağacı oluşturulurken ilk sıraya  $\frac{0}{1}$  ve  $\frac{1}{0}$  yazılır. İkinci sıraya birinci sıradaki elemanlar aynen yazılır ve  $\frac{0}{1}$  ve  $\frac{1}{0}$  kesirleri arasında bunların medyanı olan  $\frac{1}{1}$  eklenir.

Stern-Brocot ağacının n-inci sıradaki elemanları bulunurken (n-1)-inci sıradaki elemanlar aynen yazılır, (n-1)-inci sıradaki her  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  ardışık kesirlerinin arasında n-inci sırada  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  kesirlerinin medyanı olan  $\frac{a+c}{b+d}$  kesiri eklenir.



Şekil 2.4.1 (Stern-Brocot ağacı)

$F_n$  Farey dizisi, Stern-Brocot ağacının ‘n-inci Farey dizisinin tüm elemanlarının paydası en fazla n’e eşittir.’ şartına uymayan elemanların elenmesi ile elde edilen bir yarı ağaçtır.

Farey dizisi ile Stern-Brocot ağacının yarısı arasındaki benzerlik ve farklılıkları n’in bazı değerleri için inceleyerek görelim:



SB: Stern-Brocot ağacının  $\frac{0}{1}$  ve  $\frac{1}{1}$  arasındaki elemanları olarak gösterilsin.

$$n = 1 \text{ için; SB} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$n = 2 \text{ için; SB} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$n = 3 \text{ için; SB} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \text{ olur ki } n = 1, 2, 3 \text{ için farklılık olmadığı}$$

açıktır.

$$n = 4 \text{ için; SB} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \text{ olur. Burada } F_4, \text{ SB'nin elemanlarının}$$

paydası 4 veya 4'ten küçük olanların kümesidir.

## 2.5 Rasyonel Yaklaşım

**2.5.1 Teorem:**  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  aralarında n. mertebeden Farey kesiri bulunmayacak şekilde n. mertebeden Farey kesirleri ise;

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} \right| = \frac{|a.(b+d) - b.(a+c)|}{b.(b+d)} = \frac{|a.b + a.d - b.a + b.c|}{b.(b+d)} = \frac{1}{b.(b+d)} \leq \frac{1}{b.(n+1)}$$

$$\left| \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \right| = \frac{|c.b + c.d - a.d - c.d|}{d.(b+d)} = \frac{1}{d.(b+d)} \leq \frac{1}{b.(n+1)}$$

dir. Teorem 2.2.14'den dolayı  $b + d \geq n + 1$  idi. O halde

**2.5.2 Teorem:** Eğer n pozitif tamsayı ve x reel sayı ise;  $0 < b \leq n$  olmak üzere;

$\left|x - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{b \cdot (n+1)}$  olacak şekilde  $\frac{a}{b}$  şeklinde rasyonel sayı vardır.

**İspat:** 2.5.1 Teorem'deki şekilde tanımlanan  $\frac{a+c}{b+d}$  şeklindeki tüm kesirleri ve n. mertebeden Farey kesirlerini göz önüne alalım. x sayısı, bazı  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  Farey kesirleri arasında veya üzerinde olacaktır. Gerekirse  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$ 'yi değiştirerek, x için  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  kapalı aralığında bulunur diyebiliriz.

Teorem 2.5.1 gereğince;

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d}\right| \leq \frac{1}{b \cdot (n+1)} \text{ yazılır.}$$

**2.5.3 Teorem:** Eğer  $\xi$  reel ve irrasyonel sayı ise;  $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{b^2}$  olacak şekilde  $\frac{a}{b}$  şeklinde sonsuz sayıda farklı rasyonel sayı vardır.

**İspat:** Her  $n = 1, 2, 3, \dots$  için bir  $a_n$  ve bir  $b_n$  sayısını Teorem 2.5.2 gereği  $0 < b_n \leq n$  ve  $\left|\xi - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{1}{b_n \cdot (n+1)} < \frac{1}{b_n^2}$  olacak şekilde bulabiliriz.  $\frac{a_n}{b_n}$ 'lerin çoğu birbirine eşit olabilir. Fakat sonsuz tanesi farklı olacaktır. Eğer sonsuz tanesi farklı olmazsa  $\left|\xi - \frac{a_n}{b_n}\right|$   $n = 1, 2, \dots$  ile farklı değerler alan yalnız sonlu tane sayı vardır. Bu değerler arasında en küçük bir tane olmalıdır ki bazı n'ler için bu değer  $\left|\xi - \frac{a_n}{b_n}\right|$ 'nin değeridir.  $n = k$  diyebiliriz.

$$\left|\xi - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \left|\xi - \frac{a_k}{b_k}\right| \quad n = 1, 2, \dots$$

$\xi$ , irrasyonel olduğundan  $\left|\xi - \frac{a_k}{b_k}\right| > 0$ 'dır ve  $\frac{1}{n+1} < \left|\xi - \frac{a_n}{b_n}\right|$  olacak şekilde yeterince büyük bir n bulabiliriz. Bu  $\left|\xi - \frac{a_k}{b_k}\right| \leq \left|\xi - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{1}{b_n \cdot (n+1)} \leq \frac{1}{n+1} < \left|\xi - \frac{a_k}{b_k}\right|$  olduğundan çelişkidir.

Bu teorem için  $\xi$  irrasyonel sayı olmalıdır. Eğer  $x$  rasyonel sayı ise  $x = \frac{r}{s}$ ,  $s > 0$ 'dır.  $\frac{a}{b}, \frac{a}{b} \neq \frac{r}{s}$  olacak şekilde bir kesir ise  $b > s$ 'dir.

$$\left| \frac{r}{s} - \frac{a}{b} \right| = \frac{|r.b - a.s|}{s.b} \geq \frac{1}{s.b} > \frac{1}{b^2}, \text{dir.}$$

Bundan dolayı  $\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}$  şartını sağlayan,  $b > 0$  olmak üzere tüm  $\frac{a}{b}$  kesirleri için paydası  $b \leq s$ 'dir. Yani bu şekilde sonlu tane kesir olabilir.

**2.5.4 Yardımcı Teorem:**  $x$  ve  $y$  pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \text{ ve } \frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \right)$$

eşitsizliklerinin ikisi de aynı anda sağlanmaz.

**İspat:** Bu iki eşitsizlikten;

$$\sqrt{5} xy \geq x^2 + y^2, \quad \sqrt{5} x(x+y) \geq x^2 + (x+y)^2$$

yazılır. Bu iki eşitsizliği toplarsak;

$$\sqrt{5} (x^2 + y^2) \geq 3x^2 + 2xy + 2y^2$$

$$2y^2 - 2(\sqrt{5} - 1)xy + (3 - \sqrt{5})x^2 \leq 0$$

Her iki tarafı 2 ile çarpalım.

$$4y^2 - 4(\sqrt{5} - 1)xy + (5 - 2\sqrt{5} + 1)x^2 \leq 0$$

ve böylece

$$\left( 2y - (\sqrt{5} - 1)x \right)^2 \leq 0 \text{ olur.}$$

Bu  $x$  ve  $y \in \mathbf{Z}^+$  iken imkânsızdır. Çünkü  $\sqrt{5}$  irrasyoneldir.

**2.5.5 Teorem (Hurwitz):**  $\xi$  herhangi bir irrasyonel sayı verildiğinde,

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot k^2} \quad (2.1)$$

şartını sağlayan sonlu sayıda farklı  $\frac{h}{k}$  rasyonel sayısı vardır.

**İspat:**  $n$ , pozitif tamsayı olsun.  $n$ -inci mertebeden Farey dizisinin  $\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$

şartını sağlayan  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  gibi iki ardışık kesiri vardır.

$\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ,  $\frac{a+c}{b+d}$  şeklindeki üç kesirden en az birinin (2.1)'deki  $\frac{h}{k}$  yerine geçeceğini ispatlayacağız.

Böyle olmadığını varsayalım.  $\xi < \frac{a+c}{b+d}$  ya da  $\xi > \frac{a+c}{b+d}$ , dir.

**1. Hal:**  $\xi < \frac{a+c}{b+d}$  ise;

$$\xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2}, \quad \frac{a+c}{b+d} - \xi \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (b+d)^2}, \quad \frac{c}{d} - \xi \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot d^2}$$

şeklinde dir. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{c}{d} - \xi + \xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot d^2} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2}$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot d^2} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2},$$

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (b+d)^2} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2}$$

$$\frac{1}{b \cdot d} = \frac{\overbrace{c \cdot b - a \cdot d}}{b \cdot d} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} \right)$$

ve

$$\frac{1}{b \cdot (b+d)} = \frac{(a+c) \cdot b - (b+d) \cdot a}{b \cdot (b+d)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(b+d)^2} \right)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik 2.5.4 Yardımcı Teorem ile çelişmektedir.

Dolayısıyla  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ,  $\frac{a+c}{b+d}$  kesirlerinden en az biri  $\frac{h}{k}$  yerine geçecektir.

**2. Hal:**  $\xi > \frac{a+c}{b+d}$  ise;

$$\xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2}, \quad \xi - \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (b+d)^2}, \quad \frac{c}{d} - \xi \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot d^2}$$

Bunları taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{c}{d} - \xi + \xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot d^2} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2}$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot d^2} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot b^2},$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot d^2} + \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (b+d)^2}$$

$$\frac{1}{b \cdot d} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2} \right),$$

$$\frac{1}{d \cdot (b+d)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{1}{(b+d)^2} + \frac{1}{d^2} \right)$$

Bu iki eşitsizlik 2.5.4 Yardımcı Teorem ile çelişmektedir. Dolayısıyla  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ,  $\frac{a+c}{b+d}$  kesirlerinden en az biri  $\frac{h}{k}$  yerine geçecektir.

(2.1)'i sağlayacak en az bir  $\frac{h}{k}$ , n'ın varlığını gösterdik. Bu  $\frac{h}{k}$ , n'in seçimine bağlı olarak değişir. Gerçekte  $\frac{h}{k}$ ,  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$  veya  $\frac{a+c}{b+d}$  dir.  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  n-inci mertebeden Farey dizisinin ardışık kesirleri ve  $\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$  dir.

$$\begin{aligned} \left| \xi - \frac{h}{k} \right| &< \left| \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} \right| + \left| \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{d \cdot (n+1)} + \frac{1}{b \cdot (n+1)} \\ &\leq \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

olduğunu görürüz.

(2.1)'i sağlayan sonsuz çoklukta  $\frac{h}{k}$  kesirinin varlığını göstereceğiz. (2.1)'i sağlayan  $\frac{h_1}{k_1}$  alalım.  $\left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right|$  pozitiftir ve  $n > \frac{2}{\left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right|}$  şeklinde seçilebilir. n-inci mertebeden Farey dizisi bize bir  $\frac{h}{k}$  değeri verir ve bu değer (2.1)'i ve

$$\left| \xi - \frac{h}{k} \right| \leq \frac{2}{n+1} < \left| \xi - \frac{h_1}{k_1} \right| \text{ eşitsizliğini sağlar.}$$

Bu gösterir ki (2.1)'yi sağlayan sonsuz çoklukta  $\frac{h}{k}$  kesiri vardır. Çünkü verilen herhangi bir rasyonel sayıya karşılık,  $\xi$ 'ya daha yakın bir başka sayı bulabiliriz.

**2.5.6 Teorem:** 2.5.5 Teorem için mümkün olan en iyi değer  $\sqrt{5}$ 'dir. Diğer bir deyişle  $\sqrt{5}$ , daha büyük herhangi bir değerle yer değiştirirse 2.5.5 Teorem sağlanmaz.

**İspat:**  $\sqrt{5}$ 'in daha büyük bir değerle yer değiştiremeyeceğini sadece bir  $\xi$  değeri için göstermek yeterlidir. Burada

$$\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ve

$$(x-\xi) \cdot \left( x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = x^2 - x - 1$$

şeklindedir.  $k > 0$  olmak üzere, h, k tamsayıları için;

$$\left| \frac{h}{k} - \xi \right| \cdot \left| \frac{h}{k} - \xi + \sqrt{5} \right| = \left| \left( \frac{h}{k} - \xi \right) \cdot \left( \frac{h}{k} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right| = \frac{1}{k^2} \cdot |h^2 - h.k - k^2| \quad (2.2)$$

(2.2)'nin sol kısmı 0 olamaz, çünkü  $\xi$  ve  $(\sqrt{5} - \xi)$  irrasyoneldir.

$|h^2 - h.k - k^2|$  negatif olmayan bir tamsayıdır.  $|h^2 - h.k - k^2| \geq 1$  ve

$$\left| \frac{h}{k} - \xi \right| \cdot \left| \frac{h}{k} - \xi + \sqrt{5} \right| \geq \frac{1}{k^2} \quad (2.3)$$

Şimdi  $k_j > 0$  olmak üzere;  $\frac{h_j}{k_j}$  rasyonel sayılarının sonsuz dizisini alalım.  $m$  pozitif reel sayı olmak üzere;

$$\left| \frac{h_j}{k_j} - \xi \right| < \frac{1}{m.k_j^2} \quad (2.4)$$

$k_j \cdot \xi - \frac{1}{m.k_j^2} < h_j < k_j \cdot \xi + \frac{1}{m.k_j^2}$ 'dir.  $k_j$ 'nin her değeri ile aynı olan  $h_j$ 'nin sonlu bir sayısı vardır.  $j \rightarrow \infty$  iken  $k_j \rightarrow \infty$  'dur. (2.3), (2.4) ve üçgen eşitsizliği ile

$$\frac{1}{k_j^2} \leq \left| \frac{h_j}{k_j} - \xi \right| \cdot \left| \frac{h_j}{k_j} - \xi + \sqrt{5} \right| < \frac{1}{m.k_j^2} \cdot \left( \frac{1}{m.k_j^2} + \sqrt{5} \right)$$

$$m < \frac{1}{m.k_j^2} + \sqrt{5} \text{ ve bundan dolayı } m \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{m.k_j^2} + \sqrt{5} \right) = \sqrt{5} \text{ 'dir.}$$

## 2.6 Modüler Grup ve Farey Matrisleri

**2.6.1 Tanım:**  $\Gamma$  modüler grubundan bir eleman  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  olsun. Eğer  $\frac{a}{c}$  ve  $\frac{b}{d}$  ardışık

Farey kesirleri ve  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  ise  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  matrisine bir **Farey matrisi** denir. Burada  $ad - bc = 1$ 'dir.

**2.6.2 Teorem:**  $n$ -inci satırda  $\sum_{k=1}^n \varphi(k)$  tane Farey matrisi bulunmaktadır.

**İspat:**  $n = 1$  için; 1-inci satırdaki Farey Matrisi

$$FM(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ olup } \sum_{k=1}^1 \varphi(k) = \varphi(1) = 1 \text{ tanedir.}$$

$n = 2$  için; 2-inci satırdaki Farey Matrisi

$$FM(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ olup } \sum_{k=1}^2 \varphi(k) = \varphi(1) + \varphi(2) = 2 \text{ tanedir.}$$

$n = m - 1$  için;  $(m - 1)$  -inci satırdaki Farey Matrisi sayısı  $\sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k)$  olsun.

$n = m$  için;  $m$ -inci satırdaki Farey Matrisi sayısı,  $(m-1)$ -inci satırdaki Farey Matrisi sayısından  $\varphi(m)$  kadar fazla olduğundan;  $m$ -inci satırdaki Farey Matrisi sayısı

$$\sum_{k=1}^{m-1} \varphi(k) + \varphi(m) = \sum_{k=1}^m \varphi(k) \text{ olur.}$$

**2.6.3 Teorem:**  $n$ -inci satırda  $2\varphi(n)$  yeni Farey Matrisi eklenir.

**İspat:**

1. satırda  $\varphi(1)$  Farey Matrisi

ilk iki satırda  $\varphi(1) + 2\varphi(2)$  Farey Matrisi

ilk üç satırda  $\varphi(1) + 2\varphi(2) + 2\varphi(3)$  Farey Matrisi

ilk  $n-1$  satırda  $\varphi(1) + 2\varphi(2) + \dots + 2\varphi(n-1)$  Farey Matrisi

ilk  $n$  tane satırda  $\varphi(1) + 2\varphi(2) + \dots + 2\varphi(n-1) + 2\varphi(n)$  Farey Matrisi

ve  $n$ -inci satırdaki yeni Farey Matrisi sayısı  $= 2\varphi(n)$  dir.

**2.6.4 Teorem:** İlk  $n$  satırda toplam  $\sum_{k=1}^n k\varphi(n+1-k)$  tane Farey Matrisi vardır.

**İspat:** 1. satırda  $\varphi(1)$  tane Farey Matrisi

2. satırda  $\varphi(1) + \varphi(2)$  tane Farey Matrisi

3. satırda  $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3)$  tane Farey Matrisi

·  
·  
·

$n$ -inci satırda  $\sum_{k=1}^n \varphi(k)$  tane Farey Matrisi var

+

---

İlk  $n$  satırda toplam  $n\varphi(1) + (n-1)\varphi(2) + \dots + 1\varphi(n) = \sum_{k=1}^n k\varphi(n+1-k)$  tane Farey Matrisi vardır.

Fakat bunların farklı olması gerekmez.

**2.6.5 Teorem:** İlk  $n$  satırdaki toplam farklı Farey Matrislerinin sayısı

$$2 \cdot \sum_{k=1}^n \varphi(k) - 1$$

dir.



**İspat:** İlk satırda 1 tane Farey Matrisi vardır. Sonraki her n-inci satırda  $2 \cdot \varphi(n)$  tane yeni Farey Matrisi ekleniyor. Dolayısıyla ilk n satırda toplam  $1 + \sum_{k=2}^n 2 \cdot \varphi(k)$  tane farklı Farey Matrisi oluyor. Bu da  $2 \cdot \sum_{k=1}^n \varphi(k) - 1$  'e eşittir.

**2.6.6 Uyarı:** n-inci satırda, (n-1)-inci satırdaki  $\varphi(n)$  tane matris yok olur.

Tablo 2.6.1'de  $n = 1, 2, \dots, 10$  değerleri için n-inci satırdaki Farey Kesir sayısı, yeni Farey Kesir sayısı ve Farey Matris sayısı ile ilk n satırdaki toplam matris sayısı ve toplam farklı matris sayısı incelenmiştir.

n	$\varphi(n)$	n-inci satırda ki Farey Kesir sayısı	n-inci satırda ki yeni Farey Kesir sayısı	n-inci satırda ki Farey Matris sayısı	n-inci satırda ki yeni Farey Matris sayısı	İlk n satırdaki toplam matris sayısı $\sum$	İlk n satırdaki toplam farklı matris sayısı $\sum$
1	1	2	2	1	1	1	1
2	1	3	1	2	2	3	3
3	2	5	2	4	4	7	7
4	2	7	2	6	4	13	11
5	4	11	4	10	8	23	19
6	2	13	2	12	4	35	23
7	6	19	6	18	12	53	35
8	4	23	4	22	8	75	43
9	6	28	6	27	12	102	55
10	4	31	4	30	8	132	63
		$\sum_{k=0}^n \varphi(k)$	$\varphi(n)$ ( $n > 1$ )	$\sum_{k=1}^n \varphi(k)$	$2 \varphi(n)$	$\sum_{k=1}^n k \varphi(n+1-k)$	$2 \cdot \sum_{k=1}^n \varphi(k) - 1$

**Tablo 2.6.1**

### 3. HECKE GRUPLARI, FAREY DİZİLERİ ve FAREY MATRİSLERİ

#### 3.1 Hecke Grupları ve Temel Denklik Altgrupları

**3.1.1 Tanım:**  $H(\lambda_q)$  Hecke Grubu,  $PSL(2, \mathbf{R})$ 'nin  $R(z) = -\frac{1}{z}$  ve  $T(z) = z + \lambda_q$ ,

$\lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$ ,  $q \in \mathbf{N}$ ,  $q \geq 3$  dönüşümleri ile üretilen ayrık alt grubudur.

$$q = 3 \Rightarrow 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1 \Rightarrow \lambda_3 \rightarrow \text{Modüler Grup}$$

$$q = 4 \Rightarrow 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} = \lambda_4 \rightarrow x^2 - 2 = 0$$

$$q = 6 \Rightarrow 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} = \lambda_6 \rightarrow x^2 - 3 = 0$$

#### 3.2 Hecke Gruplarına Karşılık Gelen Farey Dizileri

**3.2.1 Tanım:**  $\frac{a\sqrt{2}}{c} \in F_n \Leftrightarrow 0 \leq \frac{a\sqrt{2}}{c} \leq 1$ ,  $c \leq n$ ,  $(a\sqrt{2}, c) = 1$ 'dir.

1.3.1'de  $\sqrt{2}$ 'nin  $p = 7, 17, 23, 29, 31, \dots$ asalları için bir tam kare olduğunu göstermiştik.  $\sqrt{2} = q \pmod{N}$  olmak üzere n-inci satırdaki Farey dizisinin terimlerini  $F_{n,q}^N$  ile gösterelim.

Aşağıda mod 7, mod 17, mod 23 için  $H(\sqrt{2})$ 'ye karşılık gelen Farey dizileri hesaplanmıştır.

\* **mod 7 için**  $\sqrt{2} = \sqrt{9} = 3$  veya  $\sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ 'tür ve  $\sqrt{2}$  sayısını  $GF(7)$  cisminin bir elemanı olarak düşünebiliriz. Buradan

$$0 \leq \frac{a\sqrt{2}}{c} = \frac{3a}{c} \text{ veya } \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq n, (3a, c) = 1 \text{ veya } (4a, c) = 1$$

şartlarının sağlandığı açıktır.

Şimdi  $\sqrt{2} = q \pmod{7}$  için  $F_{n,q}^7$  kümesini belirlemeye çalışalım:

**n = 3 için;  $F_{3,q}^7 = ?$**

$$\sqrt{2} = 3 \text{ ise } 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 3, \quad (3a, c) = 1$$

şartları sağlanmalıdır. O halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1$  olmalıdır. Fakat  $(3,3) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{3,3}^7 = \{0,1\}$$

bulunur.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 3, \quad (4a, c) = 1$$

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$c = 3 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  olmalıdır. Fakat  $(4,4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün olamaz. Sonuç olarak

$$F_{3,4}^7 = \{0,1\}$$

bulunur.

**n = 4 için;  $F_{4,q}^7 = ?$**

$$\sqrt{2} = 3 \text{ ise } 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 4, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur.  $(3,3) \neq 1$  olduğundan bu mümkün olmaz.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4} \text{ olur. Sonuç olarak}$$

$$F_{4,3}^7 = \left\{0, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

bulunur.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 4, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (4, 4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{4,4}^7 = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 5 \text{ için; } F_{5,q}^7 = ?}$$

$$\sqrt{2} = 3 \text{ ise } 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 5, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat}$$

$(3, 3) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{5,3}^7 = \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 5, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(4,4) \neq 1$  olduğundan olamaz.

$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{5,4}^7 = \left\{ 0, \frac{4}{5}, 1 \right\}$$

elde edilir.

**n = 6 için;  $F_{6,q}^7 = ?$**

$\sqrt{2} = 3$  ise  $0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, c \leq 6, (3a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0$$
 ise  $\frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(3,3) \neq 1$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0$$
 ise  $\frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0$$
 ise  $\frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0$$
 ise  $\frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2$  ise

$(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{6,3}^7 = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$\sqrt{2} = 4$  ise  $0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 6, (4a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0$$
 ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(4,4) \neq 1$  olduğundan bu

mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{6,4}^7 = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 7 \text{ için; } F_{7,q}^7 = ?$$

$$\sqrt{2} = 3 \text{ ise } 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 7, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(6,6)≠1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{3a}{c} =$$

$\frac{6}{7}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{7,3}^7 = \left\{ 0, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 7, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4, 4) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{7,4}^7 = \left\{ 0, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 8 \text{ için; } F_{8,q}^7 = ?$$

$$\sqrt{2} = 3 \text{ ise } 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 8, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{3a}{c} =$$

$$\frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{3a}{c} =$$

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{8,3}^7 = \left\{ 0, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 8, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4,4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \Rightarrow$$

$(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{8,4}^7 = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 9 \text{ için; } F_{9,q}^7 = ?$$

$$\sqrt{2} = 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 9, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



$$c = 9 \Rightarrow 3a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \Rightarrow (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak}$$

$$F_{9,3}^7 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 9, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4,4) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \Rightarrow$$

$(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{9} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{9,4}^7 = \left\{ 0, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 10 \text{ için; } F_{10,q}^7 = ?}$$

$$\sqrt{2} = 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 3a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \Rightarrow (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{10} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \vee a = 3 \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{10,3}^7 = \left\{ 0, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4,4) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(8,8)≠1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{10,4}^7 = \left\{ 0, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 11 \text{ için; } F_{11,q}^7 = ?}$$

$$\sqrt{2} = 3 \text{ ise } 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(6,6)≠1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 3a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \Rightarrow (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{10} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \vee a = 3 \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 11 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{11} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{11,3}^7 = \left\{ 0, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4,4) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{11,4}^7 = \left\{ 0, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 12 \text{ için; } F_{12,q}^7 = ?$$

$$\sqrt{2} = 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(6,6)≠1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 3a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \Rightarrow (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{10} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \vee a = 3 \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 11 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{11}$$

$c = 12 \Rightarrow 3a \leq 12 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{3a}{c} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \vee a = 2$  ise  $\frac{3a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 3$  ise  $\frac{3a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \vee a = 4$  ise  $(12,12) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{12,3}^7 = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4,4) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2$   
ise  $\frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \vee a = 3$  ise  $(12,12) \neq 1$  olduğundan bu mümkün olamaz. Sonuç  
olarak

$$F_{12,4}^7 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 13 \text{ için; } F_{13,q}^7 = ?$$

$$\sqrt{2} = 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$  olduğundan bu mümkün  
değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 3a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \Rightarrow (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{10} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \vee a = 3 \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 11 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 3a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 13 \Rightarrow 3a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{13} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{12}{13} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{13,3}^7 = \left\{ 0, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4,4) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$



$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün olamaz.}$$

$$c = 13 \Rightarrow 4a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{13} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{13,4}^7 = \left\{ 0, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 14 \text{ için; } F_{14,q}^7 = ?}$$

$$\sqrt{2} = 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(6,6)≠1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 3a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \Rightarrow (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{10} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \vee a = 3 \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 11 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 3a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 13 \Rightarrow 3a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{13} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 3a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{14} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{3a}{c}$$

$$= \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{14} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{14,3}^7 = \left\{ 0, \frac{3}{14}, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4,4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(8,8)≠1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün olamaz.}$$

$$c = 13 \Rightarrow 4a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 4a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{14,4}^7 = \left\{ 0, \frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 15 \text{ için; } F_{15,q}^7 = ?}$$

$$\sqrt{2} = 3 \text{ ise } 0 \leq \frac{3a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (3a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1 \Rightarrow 3a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{3}$$

$$c = 2 \Rightarrow 3a \leq 2 \Rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$c = 3 \Rightarrow 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 4 \Rightarrow 3a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{4}$$

$$c = 5 \Rightarrow 3a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 3a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 3a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 3a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{8} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 3a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \Rightarrow (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{10} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \vee a = 3 \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 11 \Rightarrow 3a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 3a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 13 \Rightarrow 3a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{3a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{13} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned}
c = 14 &\Rightarrow 3a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{14} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{3a}{c} \\
&= \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{14} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \\
c = 15 &\Rightarrow 3a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{3a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \vee a = 2 \text{ ise } \\
\frac{3a}{c} &= \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{3a}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \text{ bulunur. Sonuç} \\
&\text{olarak}
\end{aligned}$$

$$F_{15,3}^7 = \left\{ 0, \frac{1}{5}, \frac{3}{14}, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 4 \text{ ise } 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 1$$

$$c = 2$$

$$c = 3$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (4, 4) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün}$$

değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(8, 8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün olamaz.}$$

$$c = 13 \Rightarrow 4a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{13} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c}$$

$$= \frac{8}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 4a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \vee a = 2$$

$$\Rightarrow \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \vee a = 3 \Rightarrow \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 4a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow \frac{4}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{15} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{15,4}^7 = \left\{ 0, \frac{4}{15}, \frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

mod 7'de  $H(\sqrt{2})$ 'ye karşılık gelen Farey dizileri tablo halinde EK 1'de verilmiştir.

Şimdi mod 17 için  $H(\sqrt{2})$ 'ye karşılık gelen Farey dizilerini hesaplayalım.

\* **mod 17** için  $\sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$  veya  $\sqrt{2} = \sqrt{121} = 11$ 'dir.  $\sqrt{2}$  sayısını GF(17) cisminin bir elemanı olarak düşünebiliriz. Buradan

$$0 \leq \frac{a\sqrt{2}}{c} = \frac{6a}{c} \text{ veya } \frac{11a}{c} \leq 1, c \leq n, (6a, c) = 1 \text{ veya } (11a, c) = 1$$

şartlarının sağlandığı açıktır.

Şimdi  $\sqrt{2} = q \pmod{17}$  için  $F_{n,q}^7$  kümesini belirlemeye çalışalım:

$$n = 6 \text{ için; } F_{6,q}^{17} = ?$$

$$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, c \leq 6, (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır.}$$

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün olmaz. Sonuç olarak

$$F_{6,6}^{17} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 6, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{6,11}^{17} = \{0,1\}$$

bulunur.

$$\mathbf{n = 7 \text{ için; } F_{7,q}^{17} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 7, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün olmaz.

$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$  olur ve sonuç olarak

$$F_{7,6}^{17} = \left\{0, \frac{6}{7}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 7, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{7,11}^{17} = \{0,1\}$$

bulunur.

$$\mathbf{n = 8 \text{ için; } F_{8,q}^{17} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 8, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün olmaz.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ elde edilir ve}$$

sonuç olarak

$$F_{8,6}^{17} = \left\{ 0, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 8, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{8,11}^{17} = \{0, 1\}$$

bulunur.

$$\mathbf{n = 9 \text{ için; } F_{9,c}^{17} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 9, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6, 6) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{9,6}^{17} = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 9, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartları sağlayan}$$

$$F_{9,11}^{17} = \{0, 1\}$$

bulunur.



**n = 10 için;  $F_{10,q}^{17} = ?$**

$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, (6a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{10,6}^{17} = \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1\right\}$$

elde edilir.

$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, (11a, c) = 1$  şartları sağlayan

$$F_{10,11}^{17} = \{0, 1\}$$

bulunur.

**n = 11 için;  $F_{11,q}^{17} = ?$**

$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, (6a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{11,6}^{17} = \left\{0, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1\right\}$$

elde edilir.

$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, (11a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 11 \Rightarrow 11a \leq 11 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(11, 11) \neq 1$  olduğundan olmaz. Sonuç olarak

$$F_{11,11}^{17} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

**n = 12 için;  $F_{12,g}^{17} = ?$**

$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, (6a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6, 6) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(12, 12) \neq 1$  olduğundan olmaz. Sonuç olarak

$$F_{12,6}^{17} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 11 \Rightarrow 11a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (11, 11) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

olmaz.

$$c = 12 \Rightarrow 11a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{12} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{12,11}^{17} = \left\{ 0, \frac{11}{12}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 13 \text{ için; } F_{13,a}^{17} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6, 6) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(12, 12) \neq 1$  olduğundan olmaz.

$$c = 13 \Rightarrow 6a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 2$$

ise  $\frac{6a}{c} = \frac{12}{13}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{13,6}^{17} = \left\{ 0, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 11 \Rightarrow 11a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (11, 11) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

olmaz.

$$c = 12 \Rightarrow 11a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 11a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{13} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{13,11}^{17} = \left\{ 0, \frac{11}{13}, \frac{11}{12}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 14 \text{ için; } F_{14,q}^{17} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6, 6) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(12, 12) \neq 1$  olduğundan olmaz.

$$c = 13 \Rightarrow 6a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{6a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 6a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{6a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{14,6}^{17} = \left\{ 0, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 11 \Rightarrow 11a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (11, 11) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

olmaz.

$$c = 12 \Rightarrow 11a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 11a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 11a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{14} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{14,11}^{17} = \left\{ 0, \frac{11}{14}, \frac{11}{13}, \frac{11}{12}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 15 \text{ için; } F_{15,q}^{17} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6, 6) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(12,12) ≠ 1 olduğundan olmaz.

$$c = 13 \Rightarrow 6a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{6a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 6a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{6a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 6a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{6a}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{15,6}^{17} = \left\{ 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 11 \Rightarrow 0 \leq \frac{11a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (11a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 11 \Rightarrow 11a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (11, 11) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

olmaz.

$$c = 12 \Rightarrow 11a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 11a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 11a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{14}$$

$$c = 15 \Rightarrow 11a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{11a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{11a}{c} = \frac{11}{15} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{15,11}^{17} = \left\{ 0, \frac{11}{15}, \frac{11}{14}, \frac{11}{13}, \frac{11}{12}, 1 \right\}$$

elde edilir.

mod 17'de  $H(\sqrt{2})$ 'ye karşılık gelen Farey dizileri tablo halinde EK 2'de verilmiştir.

Şimdi de mod 23 için  $H(\sqrt{2})$ 'ye karşılık gelen Farey dizilerini hesaplayalım.

\* **mod 23** için  $\sqrt{2} = 5$  veya  $\sqrt{2} = 18$ 'dir.  $\sqrt{2}$  sayısını GF(23) cisminin bir elemanı olarak düşünebiliriz. Buradan

$$0 \leq \frac{a\sqrt{2}}{c} = \frac{5a}{c} \text{ veya } \frac{18a}{c} \leq 1, c \leq n, (5a, c) = 1 \text{ veya } (18a, c) = 1 \text{ 'dir.}$$

şartlarının sağlandığı açıktır.

Şimdi  $\sqrt{2} = q \pmod{23}$  için  $F_{n,q}^{23}$  kümesini belirlemeye çalışalım:

$$\mathbf{n = 5 \text{ için; } F_{5,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, c \leq 5, (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır.}$$

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{5,5}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, c \leq 5, (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{5,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 6 \text{ için; } F_{6,q}^{23} = ?}$$

$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 6, \quad (5a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1, 1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{5,5}^{23} = \left\{0, \frac{5}{6}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 6, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{6,18}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

**n = 7 için;  $F_{7,q}^{23} = ?$**

$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 7, \quad (5a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1, 1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{7,5}^{23} = \left\{0, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 7, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$



$$F_{7,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 8 \text{ için; } F_{8,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 8, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{8,5}^{23} = \left\{0, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 8, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{8,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 9 \text{ için; } F_{9,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 9, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{9,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 9, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{9,18}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 10 \text{ için; } F_{10,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1, 1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10, 10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{10,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{10,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 11 \text{ için; } F_{11,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{11,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{11,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 12 \text{ için; } F_{12,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(10,10)  $\neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{12,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{12,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 13 \text{ için; } F_{13,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{13,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{13,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 14 \text{ için; } F_{14,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{14,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{14,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 15 \text{ için; } F_{15,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan olmaz. Sonuç olarak}$$

$$F_{15.5}^{23} = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{15,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$n = 16 \text{ için; } F_{16,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 16, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$



$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{16,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 16, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{16,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 17 \text{ için; } F_{17,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 17, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{17,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{1}{11}, \frac{5}{2}, \frac{10}{9}, \frac{5}{17}, \frac{2}{8}, \frac{5}{3}, \frac{10}{7}, \frac{5}{13}, \frac{15}{6}, \frac{10}{17}, \frac{15}{11}, \frac{15}{16}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 17, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{17,18}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 18 \text{ için; } F_{18,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 18, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$   
mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(10,10) ≠ 1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{18,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 18, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{18,18}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 19 \text{ için; } F_{19,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 19, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1, 1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10, 10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{19,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 19, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18,18) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{19,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 20 \text{ için; } F_{20,a}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 20, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(10,10) ≠ 1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$\begin{aligned}
c = 15 &\Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \\
\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.} \\
c = 16 &\Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16} \\
c = 17 &\Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17} \\
c = 18 &\Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \\
c = 19 &\Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19} \\
c = 20 &\Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \\
\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20,20) \neq 1 \text{ olduğundan bu} \\
\text{mümkün değildir. Sonuç olarak}
\end{aligned}$$

$$F_{20,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 20, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18,18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{20,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 21 \text{ için; } F_{21,g}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 21, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$



$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20,20) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{21,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{5}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 21, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18,18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{21,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 22 \text{ için; } F_{22,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 22, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20,20) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

$$\text{mümkün değildir.}$$

$$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{22,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 22, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$c = 22 \Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

bulur. Sonuç olarak

$$F_{22,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 23 \text{ için; } F_{23,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 23, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1, 1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10, 10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20,20) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21}$$

$$\begin{aligned}
c = 22 &\Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11} \\
c = 23 &\Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{23} \text{ bulunur. Sonuç olarak}
\end{aligned}$$

$$F_{23,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{17}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 23, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$c = 22 \Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{23,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 24 \text{ için; } F_{24,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 24, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3$  ise  $(15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20, 20) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 5a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{24} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{24,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{17}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{10}{17}, \frac{15}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 24, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$



$$\begin{aligned}
c = 20 &\Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \\
c = 21 &\Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7} \\
c = 22 &\Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11} \\
c = 23 &\Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23} \\
c = 24 &\Rightarrow 18a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{24,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 25 \text{ için; } F_{25,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 25, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20,20) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

$$\begin{aligned}
c = 23 &\Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{23} \\
c = 24 &\Rightarrow 5a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{24} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \\
c = 25 &\Rightarrow 5a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \vee a = 2 \\
\text{ise } \frac{5a}{c} &= \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \vee a = 5 \text{ ise} \\
(25, 25) &\neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak}
\end{aligned}$$

$$F_{25,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{5}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 25, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$c = 22 \Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 18a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$c = 25 \Rightarrow 18a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{25} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{25,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 26 \text{ için; } F_{26,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 26, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(1,1) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3$  ise  $(15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$\begin{aligned}
& c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16} \\
& c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17} \\
& c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \\
& c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19} \\
& c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \\
& \text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20, 20) \neq 1 \text{ olduğundan bu} \\
& \text{mümkün değildir.} \\
& c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21} \\
& c = 22 \Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11} \\
& c = 23 \Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{23} \\
& c = 24 \Rightarrow 5a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{24} \vee a = 2 \text{ ise} \\
& \frac{5a}{c} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \\
& c = 25 \Rightarrow 5a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \vee a = 2 \\
& \text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \vee a = 5 \text{ ise} \\
& (25, 25) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}
\end{aligned}$$

$$c = 26 \Rightarrow 5a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{26} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{26} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \vee a = 5 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{25}{26} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{26,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 26, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$c = 22 \Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 18a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$c = 25 \Rightarrow 18a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 18a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{26,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{9}{13}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

**n = 27 için;  $F_{27,q}^{23} = ?$**

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 27, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3$  ise  $(15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20, 20) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 5a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{24} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

$$c = 25 \Rightarrow 5a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \vee a = 5 \text{ ise } (25, 25) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 26 \Rightarrow 5a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{26} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{26} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \vee a = 5 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{25}{26}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{25}{26}$$



$c = 27 \Rightarrow 5a \leq 27 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{27} \vee a = 2$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{27} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{27} \vee a = 5$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{25}{27}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{27,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{10}{27}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 27, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$c = 22 \Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 18a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$c = 25 \Rightarrow 18a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 18a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

$$c = 27 \Rightarrow 18a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{27,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 28 \text{ için; } F_{28,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 28, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3$  ise  $(15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20,20) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 5a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{24} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

$$c = 25 \Rightarrow 5a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \vee a = 5 \text{ ise}$

$(25,25) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 26 \Rightarrow 5a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{26} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{26} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \vee a = 5 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{25}{26}$$

$$c = 27 \Rightarrow 5a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{27} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{27} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{27} \vee a = 5 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{25}{27}$$

$$c = 28 \Rightarrow 5a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{28} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{28} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7} \vee a = 5 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{25}{28} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{28,5}^{23} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \frac{5}{28}, \frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{10}{27}, \\ \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{15}{28}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{15}{8}, \frac{2}{23}, \frac{15}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \\ \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{25}{28}, \frac{10}{11}, \frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1 \end{array} \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 28, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$c = 22 \Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 18a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$c = 25 \Rightarrow 18a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 18a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

$$c = 27 \Rightarrow 18a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$c = 28 \Rightarrow 18a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{28,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 29 \text{ için; } F_{29,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 29, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

(10,10)  $\neq$  1 olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3$  ise  $(15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$

$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$

$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$

$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4$  ise  $(20,20) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 21 \Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{21} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{21}$

$c = 22 \Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$

$c = 23 \Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{23} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{23}$

$c = 24 \Rightarrow 5a \leq 24 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{24} \vee a = 2$  ise

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

$c = 25 \Rightarrow 5a \leq 25 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \vee a = 2$   
ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \vee a = 5$  ise  
 $(25, 25) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 26 \Rightarrow 5a \leq 26 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{26} \vee a = 2$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{26} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \vee a = 5$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{25}{26}$

$c = 27 \Rightarrow 5a \leq 27 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{27} \vee a = 2$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{10}{27} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{27} \vee a = 5$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{25}{27}$

$c = 28 \Rightarrow 5a \leq 28 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{28} \vee a = 2$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{28} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7} \vee a = 5$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{25}{28}$

$c = 29 \Rightarrow 5a \leq 29 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{29} \vee a = 2$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{10}{29} \vee a = 3$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{15}{29} \vee a = 4$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{20}{29} \vee a = 5$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{25}{29}$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{29,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{5}{29}, \frac{5}{28}, \frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{3}{29}, \frac{10}{14}, \frac{5}{27}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{10}, \frac{5}{10}, \frac{1}{2}, \frac{15}{29}, \frac{10}{19}, \frac{15}{28}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{15}{8}, \frac{2}{23}, \frac{15}{3}, \frac{15}{22}, \frac{20}{29}, \frac{5}{7}, \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{25}{29}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{25}{28}, \frac{10}{11}, \frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 29, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$\begin{aligned}
c = 19 &\Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19} \\
c = 20 &\Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \\
c = 21 &\Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7} \\
c = 22 &\Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11} \\
c = 23 &\Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23} \\
c = 24 &\Rightarrow 18a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \\
c = 25 &\Rightarrow 18a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{25} \\
c = 26 &\Rightarrow 18a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13} \\
c = 27 &\Rightarrow 18a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \\
c = 28 &\Rightarrow 18a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14} \\
c = 29 &\Rightarrow 18a \leq 29 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{29} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$F_{29,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{18}{29}, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 30 \text{ için; } F_{30,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{2} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 30, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (1,1) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$



$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$(10,10) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ ise } (15,15) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 16 \Rightarrow 5a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{16}$$

$$c = 17 \Rightarrow 5a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{17} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 5a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$c = 19 \Rightarrow 5a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{19} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 5a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \vee a = 4 \text{ ise } (20,20) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$\begin{aligned}
c = 21 &\Rightarrow 5a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{21} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{21} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{21} \\
c = 22 &\Rightarrow 5a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{22} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{22} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11} \\
c = 23 &\Rightarrow 5a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{23} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{23} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{23} \\
c = 24 &\Rightarrow 5a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{24} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \\
c = 25 &\Rightarrow 5a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \vee a = 2 \\
\text{ise } \frac{5a}{c} &= \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \vee a = 5 \text{ ise} \\
(25, 25) &\neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c = 26 &\Rightarrow 5a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{26} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{26} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13} \vee a = 5 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{25}{26} \\
c = 27 &\Rightarrow 5a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{27} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{27} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{27} \vee a = 5 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{25}{27} \\
c = 28 &\Rightarrow 5a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{28} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{28} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7} \vee a = 5 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{25}{28} \\
c = 29 &\Rightarrow 5a \leq 29 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{29} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{5a}{c} &= \frac{10}{29} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{29} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{29} \vee a = 5 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{25}{29}
\end{aligned}$$

$$c = 30 \Rightarrow 5a \leq 30 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{5a}{c} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \vee a = 5 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{30,5}^{23} = \left\{ 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{29}, \frac{5}{28}, \frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{1}{4}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{10}{29}, \frac{5}{14}, \frac{10}{27}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{15}{29}, \frac{10}{19}, \frac{15}{28}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{20}{29}, \frac{5}{7}, \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{25}{29}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{25}{28}, \frac{10}{11}, \frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{2} = 18 \Rightarrow 0 \leq \frac{18a}{c} \leq 1, \quad c \leq 30, \quad (18a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 18 \Rightarrow 18a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (18, 18) \neq 1 \text{ olduğundan}$$

bu mümkün değildir.

$$c = 19 \Rightarrow 18a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 18a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 18a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$$c = 22 \Rightarrow 18a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 18a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 18a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$c = 25 \Rightarrow 18a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 18a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

$$c = 27 \Rightarrow 18a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$c = 28 \Rightarrow 18a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

$$c = 29 \Rightarrow 18a \leq 29 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{29}$$

$$c = 30 \Rightarrow 18a \leq 30 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{18a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{18a}{c} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{30,18}^{23} = \left\{ 0, \frac{3}{5}, \frac{18}{29}, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

elde edilir.

mod 23'te  $H(\sqrt{2})$ 'ye karşılık gelen Farey dizileri tablo halinde EK 3'te verilmiştir.

**Tanım 3.2.2:**  $\frac{a\sqrt{3}}{c} \in F_n \Leftrightarrow 0 \leq \frac{a\sqrt{3}}{c} \leq 1, c \leq n, (a\sqrt{3}, c) = 1$ 'dir.

1.3.1 de  $\sqrt{3}$ 'ün  $p = 11, 13, 23, 37, 47, \dots$  asalları için bir tam kare olduğunu göstermiştik.

Aşağıda mod 11, mod 13, mod 23 için  $H(\sqrt{3})$ 'e karşılık gelen Farey dizileri hesaplanmıştır.

\* **mod 11** için;  $\sqrt{3} = \sqrt{25} = 5$  veya  $\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$ 'dır.  $\sqrt{3}$  sayısını GF(11) cisminin bir elemanı olarak düşünebiliriz. Buradan

$$0 \leq \frac{a\sqrt{3}}{c} = \frac{5a}{c} \text{ veya } \frac{6a}{c} \leq 1, c \leq n, (5a, c) = 1 \text{ veya } (6a, c) = 1$$

şartlarının sağlandığı açıktır.

$\sqrt{3} = q \pmod{11}$  için  $F_{n,q}^{11}$  kümesini belirlemeye çalışalım:

**n = 5 için;**  $F_{5,q}^{11} = ?$

$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, c \leq 5, (5a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(5,5) \neq 1$  olduğundan bu

mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{5,5}^{11} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, c \leq 5, (6a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{5,6}^{11} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$n = 6 \text{ için; } F_{6,q}^{11} = ?$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, c \leq 6, (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(5,5) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{6,5}^{11} = \left\{0, \frac{5}{6}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, c \leq 6, (6a, c) = 1$$

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{6,6}^{11} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$n = 7 \text{ için; } F_{7,q}^{11} = ?$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, c \leq 7, (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(5,5) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{7,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, c \leq 7, (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{7,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 8 \text{ için; } F_{8,a}^{11} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, c \leq 8, (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(5,5) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{8,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, c \leq 8, (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{8,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 9 \text{ için; } F_{9,7}^{11} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, c \leq 9, (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (5,5) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{9,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, c \leq 9, (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{9,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 10 \text{ için; } F_{10,7}^{11} = ?$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(5,5) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(10,10) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{10,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak



$$F_{10,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 11 \text{ için; } F_{11,q}^{11} = ?$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(5,5) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(10,10) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{11,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{11,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 12 \text{ için; } F_{12,7}^{11} = ?$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (5, 5) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(10, 10) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{5a}{c} =$$

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{12,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(12,12) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{12,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 13 \text{ için; } F_{13,q}^{11} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (5,5) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2$   
ise  $(10,10) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$

$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2$  ise  
 $\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{13,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(12,12) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 13 \Rightarrow 6a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{6a}{c} = \frac{12}{13} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{13,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 14 \text{ için; } F_{14,7}^{11} = ?$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } (5, 5) \neq 1 \text{ olduğundan bu}$$

mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(10, 10) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{14,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(12,12) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 13 \Rightarrow 6a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{6a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 6a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \vee a = 2$$

ise  $\frac{6a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{14,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 15 \text{ için; } F_{15,q}^{11} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 5 \Rightarrow 0 \leq \frac{5a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (5a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 5 \Rightarrow 5a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $(5,5) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 6 \Rightarrow 5a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{6}$$

$$c = 7 \Rightarrow 5a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 5a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 5a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 5a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(10,10) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 11 \Rightarrow 5a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 5a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{12} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$c = 13 \Rightarrow 5a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 5a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{14} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{5a}{c} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 5a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{5a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{5a}{c} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \vee a = 2$$

ise  $\frac{5a}{c} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \vee a = 3$  ise  $(15,15) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{15,5}^{11} = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{6a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (6a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 6 \Rightarrow 6a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \Rightarrow (6,6) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 7 \Rightarrow 6a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{7}$$

$$c = 8 \Rightarrow 6a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$c = 9 \Rightarrow 6a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$c = 10 \Rightarrow 6a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 6a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 6a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(12,12) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir.

$$c = 13 \Rightarrow 6a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{6a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 6a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{6a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 6a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{6a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{6a}{c} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \vee a = 2$$

$$\text{ise } \frac{6a}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{15,6}^{11} = \left\{ 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

mod 11'de  $H(\sqrt{3})$ 'e karşılık gelen Farey dizileri tablo halinde EK 4'te verilmiştir.

Şimdi mod 13 için  $H(\sqrt{3})$ 'e karşılık gelen Farey dizilerini hesaplayalım.

\* **mod 13** için;  $\sqrt{3} = \sqrt{16} = 4$  veya  $\sqrt{3} = \sqrt{81} = 9$ 'dur.  $\sqrt{3}$  sayısını GF(13) cisminin bir elemanı olarak düşünebiliriz. Buradan



$$0 \leq \frac{a\sqrt{3}}{c} = \frac{4a}{c} \text{ veya } \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq n, (4a, c) = 1 \text{ veya } (9a, c) = 1$$

şartlarının sağlandığı açıktır.

Şimdi  $\sqrt{3} = q \pmod{13}$  için  $F_{n,q}^{13}$  kümesini belirlemeye çalışalım:

$$\mathbf{n = 4 \text{ için; } F_{4,q}^{13} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 4, (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  olmalıdır. Fakat  $(4,4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{4,4}^{13} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq 4, (9a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{4,9}^{13} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 5 \text{ için; } F_{5,q}^{13} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 5, (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  olmalıdır. Fakat  $(4,4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{5,4}^{13} = \left\{0, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq 5, (9a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{5,9}^{13} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 6 \text{ için}; } F_{6,q}^{13} = ?$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 6, (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ olmalıdır. Fakat } (4,4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{6,4}^{13} = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq 6, (9a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{6,9}^{13} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 7 \text{ için}; } F_{7,q}^{13} = ?$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 7, (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ olmalıdır. Fakat } (4,4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$c = 7 \Rightarrow 4a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{7}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{7,4}^{13} = \left\{0, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq 7, (9a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{7,9}^{13} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 8 \text{ için; } F_{8,q}^{13} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 8, (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  olmalıdır. Fakat  $(4, 4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(8, 8) \neq 1$  olduğundan mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{8,4}^{13} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq 8, (9a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{8,9}^{13} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 9 \text{ için; } F_{9,q}^{13} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 9, (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  olmalıdır. Fakat  $(4, 4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(8, 8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{9}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{9,4}^{13} = \left\{ 0, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq 9, (9a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 9 \Rightarrow 9a \leq 9 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(9, 9) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{9,9}^{13} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 10 \text{ için; } F_{10,q}^{13} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 10, (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ olmalıdır. Fakat } (4, 4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} =$$

$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{10,4}^{13} = \left\{ 0, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, \quad c \leq 10, \quad (9a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 9 \Rightarrow 9a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (9,9) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 10 \Rightarrow 9a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{10} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{10,9}^{13} = \left\{ 0, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 11 \text{ için; } F_{11,q}^{13} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 11, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ olmalıdır. Fakat } (4,4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{8}{8} = 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{8}{9}$

$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2$  ise  $\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$

$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{11,4}^{13} = \left\{ 0, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, c \leq 11, (9a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 9 \Rightarrow 9a \leq 9 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(9, 9) \neq 1$

olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 10 \Rightarrow 9a \leq 10 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{9a}{c} = \frac{9}{10}$

$c = 11 \Rightarrow 9a \leq 11 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{9a}{c} = \frac{9}{11}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{11,9}^{13} = \left\{ 0, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

**n = 12 için;  $F_{12,q}^{13} = ?$**

$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, c \leq 12, (4a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O halde

$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1$  olmalıdır. Fakat  $(4,4) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ bulunur. Fakat } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

Sonuç olarak

$$F_{12,4}^{13} = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, \quad c \leq 12, \quad (9a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 9 \Rightarrow 9a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (9,9) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 10 \Rightarrow 9a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 9a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 9a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{12,9}^{13} = \left\{0, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$n = 13 \text{ için; } F_{13,q}^{13} = ?$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ olmalıdır. Fakat } (4,4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(8,8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ bulunur. Fakat } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 13 \Rightarrow 4a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{13} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{13,4}^{13} = \left\{0, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1\right\}$$

elde edilir.



$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, \quad c \leq 13, \quad (9a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 9 \Rightarrow 9a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (9, 9) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 10 \Rightarrow 9a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 9a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 9a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$c = 13 \Rightarrow 9a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{13} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{13,9}^{13} = \left\{ 0, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 14 \text{ için; } F_{14,g}^{13} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ olmalıdır. Fakat } (4, 4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(8, 8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ bulunur. Fakat } (12,12) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 13 \Rightarrow 4a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{13} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 4a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{14,4}^{13} = \left\{ 0, \frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, \quad c \leq 14, \quad (9a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 9 \Rightarrow 9a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (9,9) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 10 \Rightarrow 9a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 9a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 9a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$c = 13 \Rightarrow 9a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 9a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{14} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{14,9}^{13} = \left\{ 0, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 15 \text{ için; } F_{15,7}^{13} = ?$$

$$\sqrt{3} = 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{4a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (4a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 4 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ olmalıdır. Fakat } (4, 4) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 5 \Rightarrow 4a \leq 5 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{5}$$

$$c = 6 \Rightarrow 4a \leq 6 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$c = 8 \Rightarrow 4a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \vee a = 2$$

ise  $(8, 8) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 9 \Rightarrow 4a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{9} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{8}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 4a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$c = 11 \Rightarrow 4a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{11} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 4a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \vee a = 3 \text{ bulunur. Fakat } (12, 12) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 13 \Rightarrow 4a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{13} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 4a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$c = 15 \Rightarrow 4a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{4a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{4}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{4a}{c} = \frac{8}{15} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{4a}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{15,4}^{13} = \left\{ 0, \frac{4}{15}, \frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{9a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (9a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 9 \Rightarrow 9a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (9, 9) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 10 \Rightarrow 9a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 9a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 9a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$c = 13 \Rightarrow 9a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 9a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{14}$$

$$c = 15 \Rightarrow 9a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{9a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{9a}{c} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{15,9}^{13} = \left\{ 0, \frac{3}{5}, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1 \right\}$$

elde edilir.

mod 13'te  $H(\sqrt{3})$ 'e karşılık gelen Farey dizileri tablo halinde EK 5'te verilmiştir.

Şimdi de mod 23 için  $H(\sqrt{3})$ 'e karşılık gelen Farey dizilerini hesaplayalım.

\* **mod 23** için;  $\sqrt{3} = 7$  veya  $\sqrt{3} = 16$ 'dır.  $\sqrt{3}$  sayısını GF(23) cisminin bir elemanı olarak düşünebiliriz. Buradan

$$0 \leq \frac{a\sqrt{3}}{c} = \frac{7a}{c} \text{ veya } \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq n, \quad (7a, c) = 1 \text{ veya } (16a, c) = 1$$

şartlarının sağlandığı açıktır.

Şimdi  $\sqrt{3} = q \pmod{23}$  ise  $F_{n,q}^{23}$  kümesini belirlemeye çalışalım:

$$\mathbf{n = 7 \text{ için; } F_{7,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 7, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(7, 7) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{7,7}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 7, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{7,16}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 8 \text{ için; } F_{8,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 8, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(7, 7) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{8,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{8}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 8, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{8,16}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 9 \text{ için; } F_{9,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 9, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(7, 7) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{9,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 9, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{9,16}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 10 \text{ için; } F_{10,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 10, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak

$$F_{10,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 10, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{10,16}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$n = 11 \text{ için; } F_{11,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 11, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7,7) \neq 1$$

olduğundan bu m¼mk¼n değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11} \text{ bulunur. Sonu}ç$$

olarak

$$F_{11,7}^{23} = \left\{0, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 11, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{11,16}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$n = 12 \text{ için; } F_{12,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 12, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7,7) \neq 1$$

olduğundan bu m¼mk¼n değildir.

$$\begin{aligned}
c = 8 &\Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8} \\
c = 9 &\Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9} \\
c = 10 &\Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10} \\
c = 11 &\Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11} \\
c = 12 &\Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12} \text{ bulunur. Sonuç}
\end{aligned}$$

olarak

$$F_{12,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 12, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{12,16}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$n = 13 \text{ için; } F_{13,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 13, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13} \text{ bulunur. Sonuç}$$

olarak



$$F_{13,7}^{23} = \left\{0, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 13, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{13,16}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

$$n = 14 \text{ için; } F_{14,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 14, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu m¼mk¼n değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{14,7}^{23} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1\right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 14, (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{14,16}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$n = 15 \text{ için; } F_{15,7}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(7,7) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$  bulunur. Sonuç olarak

$$F_{15,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 15, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartlarını sağlayan}$$

$$F_{15,16}^{23} = \{0,1\}$$

elde edilir.

$$n = 16 \text{ için; } F_{16,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 16, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{16,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 16, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak

$$F_{16,16}^{23} = \{0, 1\}$$

elde edilir.

**n = 17 için;  $F_{17,q}^{23} = ?$**

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 17, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{17,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 17, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(16,16) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$  bulunur.

Sonuç olarak

$$F_{17,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

**n = 18 için;**  $F_{18,7}^{23} = ?$

$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 18, (7a, c) = 1$  şartları sağlanmalıdır. O

halde

$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  bulunur. Fakat  $(7,7) \neq 1$  olduğundan bu mümkün değildir.

$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$

$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$

$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$

$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$

$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$

$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$

$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2$  ise

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0$  ise  $\frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1$  ise  $\frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2$  ise

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{18,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 18, (16a, c) = 1$$

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{18,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 19 \text{ için; } F_{19,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, c \leq 19, (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{19,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 19, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{19,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 20 \text{ için; } F_{20,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 20, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$



$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{20,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 20, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{20,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 21 \text{ için; } F_{21,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 21, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7,7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{21,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 21, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{21,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 22 \text{ için; } F_{22,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 22, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O halde}$$

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$c = 22 \Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{22,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 22, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{22,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 23 \text{ için; } F_{23,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 23, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$c = 22 \Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22}$$

$$c = 23 \Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23} \text{ bulunur. Sonuçlar olarak}$$

$$F_{23,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{8}{23}, \frac{21}{15}, \frac{14}{22}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 23, (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{23,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 24 \text{ için; } F_{24,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 24, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$



$$\begin{aligned}
c = 20 &\Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \\
c = 21 &\Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \\
c = 22 &\Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22} \\
c = 23 &\Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23} \\
c = 24 &\Rightarrow 7a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{24} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \text{ bulunur. Sonuç olarak}
\end{aligned}$$

$$F_{24,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 24, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 16a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{24,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 25 \text{ için; } F_{25,7}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 25, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7,7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\begin{aligned}
c = 17 &\Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{17} \\
c = 18 &\Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \\
c = 19 &\Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{19} \\
c = 20 &\Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \\
c = 21 &\Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{21} = \frac{2}{3} \\
c = 22 &\Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22} \\
c = 23 &\Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23} \\
c = 24 &\Rightarrow 7a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{24} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \\
c = 25 &\Rightarrow 7a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{25} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{25} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{25} \text{ bulunur. Sonuç olarak}
\end{aligned}$$

$$F_{25,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 25, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 16a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$c = 25 \Rightarrow 16a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{25} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{25,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 26 \text{ için; } F_{26,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 26, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$c = 22 \Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22}$$

$$\begin{aligned}
c = 23 &\Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23} \\
c = 24 &\Rightarrow 7a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{24} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \\
c = 25 &\Rightarrow 7a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{25} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{25} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{25} \\
c = 26 &\Rightarrow 7a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{26} \vee a = 2 \text{ ise} \\
\frac{7a}{c} &= \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{26} \text{ bulunur. Sonuç olarak}
\end{aligned}$$

$$F_{26,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 26, (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 16a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$c = 25 \Rightarrow 16a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 16a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{26,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\mathbf{n = 27 \text{ için; } F_{27,q}^{23} = ?}$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 27, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7,7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$c = 22 \Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22}$$

$$c = 23 \Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 7a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{24} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$c = 25 \Rightarrow 7a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{25} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{25} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 7a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{26} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{26}$$



$$c = 27 \Rightarrow 7a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{27} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{27} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{27,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{14}{27}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 27, (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 16a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$c = 25 \Rightarrow 16a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 16a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

$$c = 27 \Rightarrow 16a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{27} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{27,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 28 \text{ için; } F_{28,7}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 28, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$c = 22 \Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22}$$

$$c = 23 \Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 7a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{24} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$c = 25 \Rightarrow 7a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{25} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{25} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 7a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{26} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{26}$$

$$c = 27 \Rightarrow 7a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{27} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{27} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

$$c = 28 \Rightarrow 7a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{28,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{14}{27}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, c \leq 28, (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 16a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$c = 25 \Rightarrow 16a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 16a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

$$c = 27 \Rightarrow 16a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{27}$$

$$c = 28 \Rightarrow 16a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{28,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{4}{7}, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 29 \text{ için; } F_{29,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 29, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$c = 22 \Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22}$$

$$c = 23 \Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 7a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{24} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$c = 25 \Rightarrow 7a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{25} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{25} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 7a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{26} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{26}$$

$$c = 27 \Rightarrow 7a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{27} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{27} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

$$c = 28 \Rightarrow 7a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

$$c = 29 \Rightarrow 7a \leq 29 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{29} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{29} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{29} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{28}{29} \text{ bulunur. Sonuç olarak}$$

$$F_{29,7}^{23} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \frac{7}{29}, \frac{1}{4}, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{14}{29}, \frac{1}{2}, \frac{14}{27}, \\ \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{21}{29}, \frac{14}{19}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{28}{29}, 1 \end{array} \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 29, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 16a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$c = 25 \Rightarrow 16a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 16a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

$$c = 27 \Rightarrow 16a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{27}$$

$$c = 28 \Rightarrow 16a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

$$c = 29 \Rightarrow 16a \leq 29 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{29} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{29,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{16}{29}, \frac{4}{7}, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$n = 30 \text{ için; } F_{30,q}^{23} = ?$$

$$\sqrt{3} = 7 \Rightarrow 0 \leq \frac{7a}{c} \leq 1, \quad c \leq 30, \quad (7a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 7 \Rightarrow 7a \leq 7 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (7, 7) \neq 1$$

olduğundan bu mümkün değildir.

$$c = 8 \Rightarrow 7a \leq 8 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{8}$$

$$c = 9 \Rightarrow 7a \leq 9 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{9}$$

$$c = 10 \Rightarrow 7a \leq 10 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{10}$$

$$c = 11 \Rightarrow 7a \leq 11 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{11}$$

$$c = 12 \Rightarrow 7a \leq 12 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{12}$$

$$c = 13 \Rightarrow 7a \leq 13 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{13}$$

$$c = 14 \Rightarrow 7a \leq 14 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$c = 15 \Rightarrow 7a \leq 15 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{15} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{15}$$

$$c = 16 \Rightarrow 7a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{16} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$c = 17 \Rightarrow 7a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{17} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 7a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{18} \vee a = 2 \text{ ise}$$

$$\frac{7a}{c} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$



$$c = 19 \Rightarrow 7a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{19} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 7a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{20} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$c = 21 \Rightarrow 7a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

$$c = 22 \Rightarrow 7a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{22} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{22}$$

$$c = 23 \Rightarrow 7a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{23} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{23} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 7a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{24} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$c = 25 \Rightarrow 7a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{25} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{25} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 7a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{26} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{26}$$

$$c = 27 \Rightarrow 7a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{27} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{27} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

$$c = 28 \Rightarrow 7a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

$$c = 29 \Rightarrow 7a \leq 29 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{29} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{29} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{29} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{28}{29}$$

$$c = 30 \Rightarrow 7a \leq 30 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{7a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{7}{30} \vee a = 2 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \vee a = 3 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10} \vee a = 4 \text{ ise } \frac{7a}{c} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15} \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak

$$F_{30,7}^{23} = \left\{ 0, \frac{7}{30}, \frac{7}{29}, \frac{1}{4}, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{14}{29}, \frac{1}{2}, \frac{14}{27}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{21}{29}, \frac{14}{19}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{28}{29}, 1 \right\}$$

elde edilir.

$$\sqrt{3} = 16 \Rightarrow 0 \leq \frac{16a}{c} \leq 1, \quad c \leq 30, \quad (16a, c) = 1 \text{ şartları sağlanmalıdır. O}$$

halde

$$c = 16 \Rightarrow 16a \leq 16 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ bulunur. Fakat } (16, 16) \neq 1 \text{ olduğundan bu mümkün değildir.}$$

$$c = 17 \Rightarrow 16a \leq 17 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{17}$$

$$c = 18 \Rightarrow 16a \leq 18 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$c = 19 \Rightarrow 16a \leq 19 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{19}$$

$$c = 20 \Rightarrow 16a \leq 20 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$c = 21 \Rightarrow 16a \leq 21 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{21}$$

$$c = 22 \Rightarrow 16a \leq 22 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise}$$

$$\frac{16a}{c} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

$$c = 23 \Rightarrow 16a \leq 23 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{23}$$

$$c = 24 \Rightarrow 16a \leq 24 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$c = 25 \Rightarrow 16a \leq 25 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{25}$$

$$c = 26 \Rightarrow 16a \leq 26 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

$$c = 27 \Rightarrow 16a \leq 27 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{27}$$

$$\begin{aligned}
c = 28 &\Rightarrow 16a \leq 28 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \\
c = 29 &\Rightarrow 16a \leq 29 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{29} \\
c = 30 &\Rightarrow 16a \leq 30 \Rightarrow a = 0 \text{ ise } \frac{16a}{c} = 0 \vee a = 1 \text{ ise } \frac{16a}{c} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$F_{30,16}^{23} = \left\{ 0, \frac{8}{15}, \frac{16}{29}, \frac{4}{7}, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1 \right\}$$

elde edilir.

mod 23'te  $H(\sqrt{3})$ 'e karşılık gelen Farey dizileri tablo halinde EK 6'da verilmiştir.

**3.2.3 Teorem:** Eğer  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  ardışık iki  $F_{n,q}$  Farey kesiri ve  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  ise;

$$bc - ad = (a, c)$$

dir.

İspatı yapmak için önce iki yardımcı teorem verelim:

**3.2.4 Yardımcı Teorem:**  $m, n \in \mathbf{Z}$  olmak üzere;  $k|m$  ve  $k|n$  ise  $k$ 'ya  $m$  ve  $n$ 'nin ortak böleni denir.  $m$  ve  $n$ 'yi bölen en büyük  $d$  pozitif tamsayısına “ $m$  ve  $n$ 'nin en büyük ortak böleni (e.b.o.b)” denir ve  $(m, n) = d$  ile gösterilir.  $d = 1$  olması halinde  $m$  ve  $n$ 'ye aralarında asaldır denir.

Bu tanıma göre  $d$ 'nin,  $m$  ve  $n$ 'nin en büyük ortak böleni olması için gerek ve yeter şart:

1)  $d|m$  ve  $d|n$

ve

$$k = 0 \Rightarrow \frac{5.k}{t} = 0,$$

$$k = 1 \Rightarrow 6 \leq t \leq 18 \text{ ve } \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \frac{5}{12}, \frac{5}{13}, \frac{5}{14}, \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \frac{5}{16}, \frac{5}{17}, \frac{5}{18},$$

$$k = 2 \Rightarrow 11 \leq t \leq 18 \text{ ve } \frac{10}{11}, \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \frac{10}{13}, \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \frac{10}{16} = \frac{5}{8}, \frac{10}{17}, \frac{10}{18} = \frac{5}{9},$$

$$k = 3 \Rightarrow 16 \leq t \leq 18 \text{ ve } \frac{15}{16}, \frac{15}{17}, \frac{15}{18} \text{ elde edilir. Sonuç olarak da}$$

$$F_{18,5} = \left\{ 0, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1 \right\}$$

elde edilir.

**3.3.3 Örnek:**  $n = 25$  ve  $q = 18$  için;

$$F_{25,18} = \left\{ \frac{18.k}{t}; 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{25}{18} \right\rfloor = \lfloor 1,3 \rfloor = 1 \text{ ve } 18.k + 1 \leq t \leq 25 \right\} \text{ olur buradan } k = 0,$$

1'dir.

$$k = 0 \Rightarrow \frac{5.k}{t} = 0$$

$$k = 1 \Rightarrow 19 \leq t \leq 25 \text{ ve } \frac{18}{19}, \frac{18}{20}, \dots, \frac{18}{25}$$

$$F_{25,18} = \left\{ 0, \frac{18}{25}, \frac{18}{24} = \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{18}{22} = \frac{9}{11}, \frac{18}{21} = \frac{6}{7}, \frac{18}{20} = \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1 \right\}$$

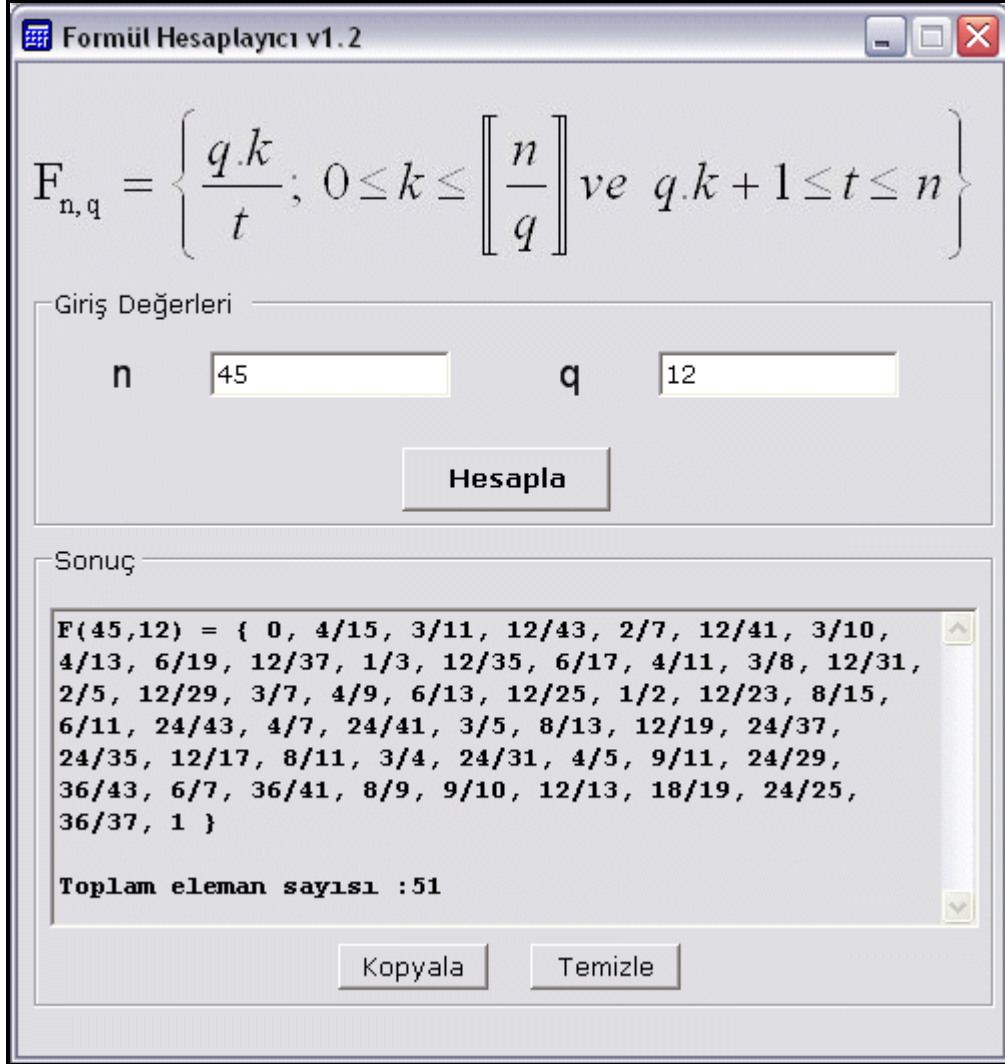
elde edilir.

### 3.4 Hesaplayıcı Programı

#### 3.4.1 Giriş:

Farey dizileri hesaplamak için 3.3.1 Teorem'de verdiğimiz bağıntıyı kullanarak şimdi vereceğimiz programı hazırladık. Program dizi elemanlarıyla birlikte eleman sayısını da göstermektedir.

Formül hesaplayıcı yazılım, yürütülebilir bir windows platformu uygulaması olarak sunulmaktadır. Uygulama dosyası çalıştırıldığında program ana ekranı (Şekil 3.4.1) kullanıcıya görüntülenir. Bu ekranda gerekli iki başlangıç değişkeni programa giriş yapıldıktan ve "Hesapla" tuşuna basıldıktan sonra, program, bu değişkenleri kullanarak, tanımlanmış formüle göre hesaplamalar yapar ve sonucu program ana ekranındaki ilgili bölüme yazar.



Şekil 3.4.1 - Program Ekranı

### 3.4.2 Altyapı:

Program, Microsoft. Net Framework 1.1 platformunda, C# programlama dili ile nesne temelli programlama teknikleri kullanılarak tasarlanmış, kodlanmış ve derlenmiştir. Tasarımda Microsoft Framework bileşenlerini kullandığından, programın çalıştırılabilmesi için yürütüldüğü makinada 'Framework 1.1' veya üstü versiyonlarından en az biri yüklü olmalıdır.

### 3.4.3 Tasarım Ayrıntıları:

Bu program genel olarak 2 adet sınıftan (class) oluşturulmuştur. Sınıflardan birincisi kullanıcıyla iletişim kuran ekranın özelliklerinin ve veri girişinin sağlandığı metodları, diğer sınıf ise gelen veriyi belirtilen formüle göre hesaplayıp, sonuçları geri döndüren metodları içermektedir.

Kullanıcı arabirimiyle ilgilenen sınıf, görüntülenen bileşenlerin düzeninden ve alınan veriyi formül hesaplayıcı sınıfa iletiminden sorumludur. Ayrıca yapısı içerisinde oluşabilecek hataları yakalayan, kullanıcı konuyla ilgili uyarı kod blokları bulunur.

Formül hesaplayıcı sınıfta ise girilen değişkenler kullanılarak, sırayla gerekli diğer değişkenleri hesaplayan metod, sonucu hesaplayan metod, sonucu istenen formata dönüştüren metod ve de sonuçları sıralayıp görüntülenmeye uygun hale getiren metod çalışmaktadır. Bu aşamadan sonra sonuçlar, kullanıcı arabirimini kontrol eden sınıfa gönderilir.

### 3.4.4 Sonuç:

Program, değerleri en hatasız ve en verimli şekilde hesaplamak üzere tasarlanmıştır. Ayrıca bu tasarımın en büyük avantajlarından biri de, bahsedilen formül hesaplayıcı sınıfın programın ana yapısından bağımsız çalışması ve herhangi başka bir uygulamaya dahil edilebilir durumda olmasıdır. Bu nesne temelli programlama yaklaşımı sayesinde formülü hesaplayan sınıf kullanılarak windows uygulamasından, web uygulamasına, konsol uygulamasından, mobil uygulamalara kadar birçok program gerçekleştirilebilir.

## 3.5 $H(\lambda_q)$ için Farey Matrisleri

$H(\sqrt{2})$ 'de iki tür eleman vardır:

$$\text{Tek elemanlar: } \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad 2ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Çift elemanlar: } \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d \end{pmatrix}, \quad ad - 2bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

şeklindedir.

$H(\sqrt{3})$ 'de iki tür eleman vardır:

$$\text{Tek elemanlar: } \begin{pmatrix} a\sqrt{3} & b \\ c & d\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad 3ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

$$\text{Çift elemanlar: } \begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ c\sqrt{3} & d \end{pmatrix}, \quad ad - 3bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

şeklindedir.

**EKLER**

<b>n</b>	<b>c</b>	$\sqrt{2} = 3$		$\sqrt{2} = 4$
1		01		0,1
2		0,1		0,1
3		0,1		0, 1
4	3	0,1		0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
<b>F<sub>4,3</sub><sup>7</sup></b>		<b><math>0, \frac{3}{4}, 1</math></b>	<b>F<sub>4,4</sub><sup>7</sup></b>	<b>0, 1</b>
5	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$	5	$0, \frac{4}{5}, 1$
<b>F<sub>5,3</sub><sup>7</sup></b>		<b><math>0, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1</math></b>	<b>F<sub>5,4</sub><sup>7</sup></b>	<b><math>0, \frac{4}{5}, 1</math></b>
6	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$	5	$0, \frac{4}{5}, 1$
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$	6	$0, \frac{2}{3}, 1$
<b>F<sub>6,3</sub><sup>7</sup></b>		<b><math>0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1</math></b>	<b>F<sub>6,4</sub><sup>7</sup></b>	<b><math>0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1</math></b>
7	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$	5	$0, \frac{4}{5}, 1$
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$	6	$0, \frac{2}{3}, 1$
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$	7	$0, \frac{4}{7}, 1$
<b>F<sub>7,3</sub><sup>7</sup></b>		<b><math>0, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1</math></b>	<b>F<sub>7,4</sub><sup>7</sup></b>	<b><math>0, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1</math></b>



8	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$		
$F_{8,3}^7$	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$		$F_{8,4}^7$	$0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1$
9	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
$F_{9,3}^7$	$0, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$		$F_{9,4}^7$	$0, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$
10	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		

	10	$0, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, 1$	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$
--	----	-------------------------------------------------	----	----------------------------------

$F_{10,3}^7$	$0, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{9}{10}, 1$		$F_{10,4}^7$	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$	
11	3	0,1	4	0, 1	
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$			
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$	5	$0, \frac{4}{5}, 1$	
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$	6	$0, \frac{2}{3}, 1$	
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	
	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$	8	$0, \frac{1}{2}, 1$	
	9	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$	
	10	$0, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, 1$	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$	
11	$0, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}, 1$	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$		
$F_{11,3}^7$	$0, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1$		$F_{11,4}^7$	$0, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$	
12	3	0,1	4	0, 1	
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$			
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$	5	$0, \frac{4}{5}, 1$	
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$	6	$0, \frac{2}{3}, 1$	
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	
	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$	8	$0, \frac{1}{2}, 1$	
	9	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$	
	10	$0, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, 1$	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$	

	11	$0, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}, 1$	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$
	12	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	12	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$
$F_{12,3}^7$		$0, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1$	$F_{12,4}^7$	$0, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$
13	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	10	$0, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$		
	13	$0, \frac{3}{13}, \frac{6}{13}, \frac{9}{13}, \frac{12}{13}, 1$		
$F_{13,3}^7$		$0, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, 1$	$F_{13,4}^7$	$0, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1$
14	3	0,1	4	0, 1
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$		

	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$	8	$0, \frac{1}{2}, 1$
	9	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$
	10	$0, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, 1$	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$
	11	$0, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}, 1$	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$
	12	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	12	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$
	13	$0, \frac{3}{13}, \frac{6}{13}, \frac{9}{13}, \frac{12}{13}, 1$	13	$0, \frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{12}{13}, 1$
	14	$0, \frac{3}{14}, \frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{6}{7}, 1$	14	$0, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, 1$
$F_{14,3}^7$		$0, \frac{3}{14}, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, 1$	$F_{14,4}^7$	$0, \frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1$
15	3	0,1		
	4	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	5	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	7	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	10	$0, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$		
	13	$0, \frac{3}{13}, \frac{6}{13}, \frac{9}{13}, \frac{12}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{3}{14}, \frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{6}{7}, 1$		

	15	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$	15	$0, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{5}, 1$
$F_{15,3}^7$		$0, \frac{1}{5}, \frac{3}{14}, \frac{3}{13}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7},$ $\frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7},$ $\frac{9}{11}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, 1$	$F_{15,4}^7$	$0, \frac{4}{15},$ $\frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{4}{7},$ $\frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1$

EK 1 - mod 7 de  $H(\sqrt{2})$

<b>n</b>	<b>c</b>	$\sqrt{2}=6$	<b>c</b>	$\sqrt{2}=11$
1		0,1		0,1
2		0,1		0,1
3		0,1		0,1
4		0,1		0,1
5		0,1		0,1
6		0,1		0,1
7	6	0,1		0,1
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
$F_{7,6}^{17}$		$0, \frac{6}{7}, 1$	$F_{7,11}^{17}$	<b>0,1</b>
8	6	0,1		0,1
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$		
$F_{8,6}^{17}$		$0, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$	$F_{8,11}^{17}$	<b>0,1</b>
9	6	0,1		0,1
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
$F_{9,6}^{17}$		$0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$	$F_{9,11}^{17}$	<b>0,1</b>
10	6	0,1		0,1
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	10	$0, \frac{3}{5}, 1$		
$F_{10,6}^{17}$		$0, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$	$F_{10,11}^{17}$	<b>0,1</b>
11	6	0,1	11	0,1
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{2}{3}, 1$		

	10	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	11	$0, \frac{6}{11}, 1$		
$F_{11,6}^{17}$		$0, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$	$F_{11,11}^{17}$	$0, 1$
12	6	$0, 1$	11	$0, 1$
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	10	$0, \frac{3}{5}, 1$	12	$0, \frac{11}{12}, 1$
	11	$0, \frac{6}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{1}{2}, 1$		
$F_{12,6}^{17}$		$0, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$	$F_{12,11}^{17}$	$0, \frac{11}{12}, 1$
13	6	$0, 1$	11	$0, 1$
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	10	$0, \frac{3}{5}, 1$	12	$0, \frac{11}{12}, 1$
	11	$0, \frac{6}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	13	$0, \frac{6}{13}, \frac{12}{13}, 1$		
$F_{13,6}^{17}$		$0, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$	$F_{13,11}^{17}$	$0, \frac{11}{13}, \frac{11}{12}, 1$
14	6	$0, 1$	11	$0, 1$
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$		
	9	$0, \frac{2}{3}, 1$	12	$0, \frac{11}{12}, 1$

	10	$0, \frac{3}{5}, 1$		
	11	$0, \frac{6}{11}, 1$	13	$0, \frac{11}{13}, 1$
	12	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	13	$0, \frac{6}{13}, \frac{12}{13}, 1$	14	$0, \frac{11}{14}, 1$
	14	$0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, 1$		
$F_{14,6}^{17}$		$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$	$F_{14,11}^{17}$	$0, \frac{11}{14}, \frac{11}{13}, \frac{11}{12}, 1$
15	6	$0, 1$	11	$0, 1$
	7	$0, \frac{6}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{3}{4}, 1$	12	$0, \frac{11}{12}, 1$
	9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	10	$0, \frac{3}{5}, 1$	13	$0, \frac{11}{13}, 1$
	11	$0, \frac{6}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{1}{2}, 1$	14	$0, \frac{11}{14}, 1$
	13	$0, \frac{6}{13}, \frac{12}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, 1$	15	$0, \frac{11}{15}, 1$
	15	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
$F_{15,6}^{17}$		$0, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$	$F_{15,11}^{17}$	$0, \frac{11}{15}, \frac{11}{14}, \frac{11}{13}, \frac{11}{12}, 1$

EK 2 - mod 17'de  $H(\sqrt{2})$



<b>n</b>	<b>c</b>	$\sqrt{2}=5$		$\sqrt{2}=18$
1		0,1		0,1
2		0,1		0,1
3		0,1		0,1
4		0,1		0,1
5	5	0,1		0,1
6	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
$F_{6,5}^{23}$		$0, \frac{5}{6}, 1$	$F_{6,18}^{23}$	<b>0,1</b>
7	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
$F_{7,5}^{23}$		$0, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1$	$F_{7,18}^{23}$	<b>0,1</b>
8	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
$F_{8,5}^{23}$		$0, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1$	$F_{8,18}^{23}$	<b>0,1</b>

9	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
$F_{9,5}^{23}$	$0, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1$		$F_{9,18}^{23}$	0,1
10	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
$F_{10,5}^{23}$	$0, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1$		$F_{10,18}^{23}$	0,1
11	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
$F_{11,5}^{23}$	$0, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$		$F_{11,18}^{23}$	0,1

12	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
$F_{12,5}^{23}$	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$		$F_{12,18}^{23}$	0,1
13	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
$F_{13,5}^{23}$	$0, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$		$F_{13,18}^{23}$	0,1
14	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		

	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
$F_{14,5}^{23}$		$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$	$F_{14,18}^{23}$	<b>0,1</b>
15	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
$F_{15,5}^{23}$		$0, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$	$F_{15,18}^{23}$	<b>0,1</b>
	5	0,1		
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		

16	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		0,1
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$		
$F_{16,5}^{23}$	$0,$ $\frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7},$ $\frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1$		$F_{16,18}^{23}$	0,1
17	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$			

	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$		
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$		
$F_{17,5}^{23}$		$0,$ $\frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8},$ $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1$	$F_{17,18}^{23}$	<b>0,1</b>
18	5	0,1		0.1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$		
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$		
18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$			
$F_{18,5}^{23}$		$0,$ $\frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17},$ $\frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1$	$F_{18,18}^{23}$	<b>0.1</b>
	5	0,1		

19	6	$0, \frac{5}{6}, 1$	18	0.1
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
19	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$		
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$		
$F_{19,5}^{23}$	$0,$ $\frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2},$ $\frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17},$ $\frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1$	$F_{19,18}^{23}$	$0, \frac{18}{19}, 1$	
20	5	0,1	18	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		

	10	$0, \frac{1}{2}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$				
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$				
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$				
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$				
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$				
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$				
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$			20	$0, \frac{9}{10}, 1$
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$				
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$				
20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$					
$F_{20,5}^{23}$	$0,$ $\frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2},$ $\frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17},$ $\frac{10}{11}, \frac{15}{16}, 1$		$F_{20,18}^{23}$	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$		
21	5	$0, 1$	18	$0, 1$		
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$				
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$				
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$				
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$				
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$				
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$				



	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$		
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$		
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$		
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$		
$F_{21,5}^{23}$		$0,$ $\frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11},$ $\frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6},$ $\frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1$	$F_{21,18}^{23}$	$0, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	5	$0, 1$		
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$	18	$0, 1$
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		

22	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$		
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$		
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$		
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$		
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$		
$F_{22,5}^{23}$	$0,$ $\frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12},$ $\frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7},$ $\frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1$		$F_{22,18}^{23}$	$0, \frac{6}{7}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
23	5	$0, 1$	18	$0, 1$
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		

	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$		
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$		
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$		
	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$		
$F_{23,5}^{23}$	$0,$ $\frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13},$ $\frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3},$ $\frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17},$ $\frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1$	$F_{23,18}^{23}$		
24	5	$0, 1$	18	$0, 1$
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		

	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$		
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$		
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$		
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$		
	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$	24	$0, \frac{3}{4}, 1$
	24	$0, \frac{5}{24}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, 1$		
$F_{24,5}^{23}$		$0,$ $\frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14},$ $\frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23},$ $\frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17},$ $\frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1$	$F_{24,18}^{23}$	$0, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
25	5	0,1	18	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$			

	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$		
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$		
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$		
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$	24	$0, \frac{3}{4}, 1$
	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$		
	24	$0, \frac{5}{24}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, 1$	25	$0, \frac{18}{25}, 1$
	25	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
$F_{25,5}^{23}$		$0,$ $\frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3},$ $\frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{10}{17}$ $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7},$ $\frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, 1$	$F_{25,18}^{23}$	$0, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
26	5	0,1	18	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		

	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	24	$0, \frac{3}{4}, 1$
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$		
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$	25	$0, \frac{18}{25}, 1$
	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$		
	24	$0, \frac{5}{24}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, 1$	26	$0, \frac{9}{13}, 1$
	25	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	26	$0, \frac{5}{26}, \frac{5}{13}, \frac{15}{26}, \frac{10}{13}, \frac{25}{26}, 1$		
$F_{26,5}^{23}$		$0,$ $\frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16},$ $\frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9},$ $\frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3}, \frac{15}{22}, \frac{5}{7},$ $\frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{20}{23}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26},$ $1$	$F_{26,18}^{23}$	$0, \frac{9}{13}, \frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	5	$0, 1$		

27	6	$0, \frac{5}{6}, 1$	18	0,1	
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$			
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$	
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$			
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$	
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$			
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$	
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$			
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$	
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$			
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$	
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, 1$			
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$	24	$0, \frac{3}{4}, 1$	
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$			
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	25	$0, \frac{18}{25}, 1$	
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$			
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$	26	$0, \frac{9}{13}, 1$	
	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$			
	24	$0, \frac{5}{24}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, 1$	27	$0, \frac{2}{3}, 1$	
	25	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$			
	26	$0, \frac{5}{26}, \frac{5}{13}, \frac{15}{26}, \frac{10}{13}, \frac{25}{26}, 1$	27	$0, \frac{2}{3}, 1$	
	27	$0, \frac{5}{27}, \frac{10}{27}, \frac{5}{9}, \frac{20}{27}, \frac{25}{27}, 1$			
			<b>0,</b>		

$F_{27,5}^{23}$	$\frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17},$ $\frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{10}{27}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}$ $\frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3},$ $\frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{20}{6}, \frac{15}{23}, \frac{10}{17}, \frac{10}{11},$ $\frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1$		$F_{27,18}^{23}$	$0, \frac{2}{3}, \frac{9}{13},$ $\frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
28	5	$0, 1$	18	$0, 1$
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$	24	$0, \frac{3}{4}, 1$
19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$			
20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	25	$0, \frac{18}{25}, 1$	
21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$			
22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$	26		



	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$		$0, \frac{9}{13}, 1$
	24	$0, \frac{5}{24}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, 1$	27	$0, \frac{2}{3}, 1$
	25	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	26	$0, \frac{5}{26}, \frac{5}{13}, \frac{15}{26}, \frac{10}{13}, \frac{25}{26}, 1$	28	$0, \frac{9}{14}, 1$
	27	$0, \frac{5}{27}, \frac{10}{27}, \frac{5}{9}, \frac{20}{27}, \frac{25}{27}, 1$		
	28	$0, \frac{5}{28}, \frac{5}{14}, \frac{15}{28}, \frac{5}{7}, \frac{25}{28}, 1$		
$F_{28,5}^{23}$		$0,$ $\frac{5}{28}, \frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19}, \frac{5}{18},$ $\frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{10}{27}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{23}, \frac{5}{11},$ $\frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{15}{28}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{15}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3},$ $\frac{15}{22}, \frac{5}{7}, \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{5}{6}, \frac{5}{23}, \frac{25}{28}, \frac{15}{17},$ $\frac{10}{11}, \frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1$	$F_{28,18}^{23}$	$0, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13},$ $\frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
29	5	$0, 1$	18	0, 1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$			

	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, 1$		
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$	24	$0, \frac{3}{4}, 1$
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	25	$0, \frac{18}{25}, 1$
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$		
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$	26	$0, \frac{9}{13}, 1$
	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$		
	24	$0, \frac{5}{24}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, 1$	27	$0, \frac{2}{3}, 1$
	25	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	26	$0, \frac{5}{26}, \frac{5}{13}, \frac{15}{26}, \frac{10}{13}, \frac{25}{26}, 1$	28	$0, \frac{9}{14}, 1$
	27	$0, \frac{5}{27}, \frac{10}{27}, \frac{5}{9}, \frac{20}{27}, \frac{25}{27}, 1$		
	28	$0, \frac{5}{28}, \frac{5}{14}, \frac{15}{28}, \frac{5}{7}, \frac{25}{28}, 1$	29	$0, \frac{18}{29}, 1$
	29	$0, \frac{5}{29}, \frac{10}{29}, \frac{15}{29}, \frac{20}{29}, \frac{25}{29}, 1$		
$F_{29,5}^{23}$		$0,$ $\frac{5}{29}, \frac{5}{28}, \frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21}, \frac{5}{19},$ $\frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{10}{29}, \frac{5}{14}, \frac{10}{27}, \frac{5}{13}, \frac{5}{5}, \frac{2}{12},$ $\frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{15}{29}, \frac{15}{28}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26}, \frac{10}{17},$ $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3},$ $\frac{15}{22}, \frac{20}{29}, \frac{5}{7}, \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{25}{29}, \frac{20}{23},$ $\frac{25}{28}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1$	$F_{29,18}^{23}$	$0, \frac{18}{29}, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13},$ $\frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	5	0,1	18	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		

30	7	$0, \frac{5}{7}, 1$	19	$0, \frac{18}{19}, 1$
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$	20	$0, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$	21	$0, \frac{6}{7}, 1$
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$	22	$0, \frac{9}{11}, 1$
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	23	$0, \frac{18}{23}, 1$
	16	$0, \frac{5}{16}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}, 1$		
	17	$0, \frac{5}{17}, \frac{10}{17}, \frac{15}{17}, 1$	24	$0, \frac{3}{4}, 1$
	18	$0, \frac{5}{18}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1$		
	19	$0, \frac{5}{19}, \frac{10}{19}, \frac{15}{19}, 1$	25	$0, \frac{18}{25}, 1$
	20	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$		
	21	$0, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, 1$	26	$0, \frac{9}{13}, 1$
	22	$0, \frac{5}{22}, \frac{5}{11}, \frac{15}{22}, \frac{10}{11}, 1$		
	23	$0, \frac{5}{23}, \frac{10}{23}, \frac{15}{23}, \frac{20}{23}, 1$	27	$0, \frac{2}{3}, 1$
	24	$0, \frac{5}{24}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}, 1$		
	25	$0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$	28	$0, \frac{9}{14}, 1$
	26	$0, \frac{5}{26}, \frac{5}{13}, \frac{15}{26}, \frac{10}{13}, \frac{25}{26}, 1$		
	27	$0, \frac{5}{27}, \frac{10}{27}, \frac{5}{9}, \frac{20}{27}, \frac{25}{27}, 1$	29	$0, \frac{18}{29}, 1$
	28	$0, \frac{5}{28}, \frac{5}{14}, \frac{15}{28}, \frac{5}{7}, \frac{25}{28}, 1$		

	29	$0, \frac{5}{29}, \frac{10}{29}, \frac{15}{29}, \frac{20}{29}, \frac{25}{29}, 1$		
	30	$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1$	30	$0, \frac{3}{5}, 1$
$F_{30,5}^{23}$		$0,$ $\frac{1}{6}, \frac{5}{29}, \frac{5}{28}, \frac{5}{27}, \frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{5}{24}, \frac{5}{23}, \frac{5}{22}, \frac{5}{21},$ $\frac{5}{19}, \frac{5}{18}, \frac{5}{17}, \frac{5}{16}, \frac{1}{3}, \frac{10}{29}, \frac{5}{14}, \frac{10}{27}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5},$ $\frac{5}{12}, \frac{10}{23}, \frac{5}{11}, \frac{10}{21}, \frac{1}{2}, \frac{15}{29}, \frac{15}{28}, \frac{10}{19}, \frac{5}{9}, \frac{15}{26},$ $\frac{10}{17}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{15}{23}, \frac{2}{3},$ $\frac{15}{22}, \frac{20}{29}, \frac{5}{7}, \frac{20}{27}, \frac{3}{4}, \frac{10}{13}, \frac{15}{19}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{25}{29}, \frac{20}{23},$ $\frac{25}{28}, \frac{15}{17}, \frac{10}{11}, \frac{25}{27}, \frac{15}{16}, \frac{20}{21}, \frac{25}{26}, 1$	$F_{30,18}^{23}$	$0, \frac{3}{5}, \frac{18}{29}, \frac{9}{14}, \frac{2}{3}, \frac{9}{13},$ $\frac{18}{25}, \frac{3}{4}, \frac{18}{23}, \frac{9}{11}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{18}{19}, 1$

EK 3 - mod 23'te  $H(\sqrt{2})$

<b>n</b>	<b>c</b>	$\sqrt{3} = 5$		$\sqrt{3} = 6$
1		0,1		0,1
2		0,1		0,1
3		0,1		0,1
4		0,1		0,1
5	5	0,1		0,1
6	5	0,1		0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
<b>F<sub>6,5</sub><sup>11</sup></b>		<b><math>0, \frac{5}{6}, 1</math></b>	<b>F<sub>6,6</sub><sup>11</sup></b>	<b>0,1</b>
7	5	0,1	6	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$	7	$0, \frac{6}{7}, 1$
<b>F<sub>7,5</sub><sup>11</sup></b>		<b><math>0, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1</math></b>	<b>F<sub>7,6</sub><sup>11</sup></b>	<b><math>0, \frac{6}{7}, 1</math></b>
8	5	0,1	6	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$	7	$0, \frac{6}{7}, 1$
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$	8	$0, \frac{3}{4}, 1$
<b>F<sub>8,5</sub><sup>11</sup></b>		<b><math>0, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1</math></b>	<b>F<sub>8,6</sub><sup>11</sup></b>	<b><math>0, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1</math></b>
9	5	0,1	6	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$	7	$0, \frac{6}{7}, 1$
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$	8	$0, \frac{3}{4}, 1$
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$	9	$0, \frac{2}{3}, 1$
<b>F<sub>9,5</sub><sup>11</sup></b>		<b><math>0, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1</math></b>	<b>F<sub>9,6</sub><sup>11</sup></b>	<b><math>0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1</math></b>

10	5	0,1	6	0,1					
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		7	$0, \frac{6}{7}, 1$				
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$			8	$0, \frac{3}{4}, 1$			
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$				9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$					10	$0, \frac{3}{5}, 1$	
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$							
$F_{10,5}^{11}$	$0, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, 1$		$F_{10,6}^{11}$					$0, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$	
11	5	0,1	6	0,1					
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		7	$0, \frac{6}{7}, 1$				
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$			8	$0, \frac{3}{4}, 1$			
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$				9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$					10	$0, \frac{3}{5}, 1$	
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$						11	$0, \frac{6}{11}, 1$
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$							
$F_{11,5}^{11}$	$0, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$		$F_{11,6}^{11}$	$0, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$					
12	5	0,1	6	0,1					
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		7	$0, \frac{6}{7}, 1$				
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$			8	$0, \frac{3}{4}, 1$			
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$				9	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$					10	$0, \frac{3}{5}, 1$	
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$						11	$0, \frac{6}{11}, 1$
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$							

	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$	12	$0, \frac{1}{2}, 1$
$F_{12,5}^{11}$		$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$	$F_{12,6}^{11}$	$0, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, 1$
13	5	0,1	6	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
$F_{13,5}^{11}$		$0, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$	$F_{13,6}^{11}$	$0, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$
14	5	0,1	6	0,1
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		

$F_{14,5}^{11}$	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$		$F_{14,6}^{11}$	$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$	
15	5	0,1	6	0,1	
	6	$0, \frac{5}{6}, 1$		$0, \frac{6}{7}, 1$	
	7	$0, \frac{5}{7}, 1$		$0, \frac{3}{4}, 1$	
	8	$0, \frac{5}{8}, 1$		$0, \frac{2}{3}, 1$	
	9	$0, \frac{5}{9}, 1$		$0, \frac{3}{5}, 1$	
	10	$0, \frac{1}{2}, 1$		$0, \frac{6}{11}, 1$	
	11	$0, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, 1$		$0, \frac{1}{2}, 1$	
	12	$0, \frac{5}{12}, \frac{5}{6}, 1$		$0, \frac{6}{13}, \frac{12}{13}, 1$	
	13	$0, \frac{5}{13}, \frac{10}{13}, 1$		$0, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, 1$	
	14	$0, \frac{5}{14}, \frac{5}{7}, 1$		$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$	
	15	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$			
$F_{15,5}^{11}$	$0, \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{13}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, 1$		$F_{15,6}^{11}$	$0, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{13}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$	

EK 4 - mod 11'de  $H(\sqrt{3})$



<b>n</b>	<b>c</b>	$\sqrt{3} = 4$		$\sqrt{3} = 9$
1		0,1		0,1
2		0,1		0,1
3		0,1		0,1
4		0,1		0,1
5	4	0,1		0,1
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
<b>F<sub>5,4</sub><sup>13</sup></b>		<b><math>0, \frac{4}{5}, 1</math></b>	<b>F<sub>5,9</sub><sup>13</sup></b>	<b>0,1</b>
6	4	0,1		0,1
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
<b>F<sub>6,4</sub><sup>13</sup></b>		<b><math>0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1</math></b>	<b>F<sub>6,9</sub><sup>13</sup></b>	<b>0,1</b>
7	4	0,1		0,1
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$		
<b>F<sub>7,4</sub><sup>13</sup></b>		<b><math>0, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1</math></b>	<b>F<sub>7,9</sub><sup>13</sup></b>	<b>0,1</b>
8	4	0,1		0,1
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
<b>F<sub>8,4</sub><sup>13</sup></b>		<b><math>0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 1</math></b>	<b>F<sub>8,9</sub><sup>13</sup></b>	<b>0,1</b>
9	4	0,1		0,1
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		

	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		0,1
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$		
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$		
$F_{9,4}^{13}$	$0, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$		$F_{9,9}^{13}$	<b>0,1</b>
10	4	0,1	9	0,1
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	10	$0, \frac{9}{10}, 1$
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
$F_{10,4}^{13}$	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$		$F_{10,9}^{13}$	<b><math>0, \frac{9}{10}, 1</math></b>
11	4	0,1	9	0,1
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	10	$0, \frac{9}{10}, 1$
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$	11	$0, \frac{9}{11}, 1$
$F_{11,4}^{13}$	$0, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$		$F_{11,9}^{13}$	<b><math>0, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1</math></b>

12	4	$0,1$	9	$0,1$
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	10	$0, \frac{9}{10}, 1$
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$	11	$0, \frac{9}{11}, 1$
	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$	12	$0, \frac{3}{4}, 1$
	12	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
$F_{12,4}^{13}$	$0, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1$		$F_{12,9}^{13}$	$0, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1$
13	4	$0,1$	9	$0,1$
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$		
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	10	$0, \frac{9}{10}, 1$
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$	11	$0, \frac{9}{11}, 1$
	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$	12	$0, \frac{3}{4}, 1$
	12	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
13	$0, \frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{12}{13}, 1$	13	$0, \frac{9}{13}, 1$	
$F_{13,4}^{13}$	$0, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{12}{13}, 1$		$F_{13,9}^{13}$	$0, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1$

14	4	$0,1$	9	$0,1$
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$	10	$0, \frac{9}{10}, 1$
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	11	$0, \frac{9}{11}, 1$
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$	12	$0, \frac{3}{4}, 1$
	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$	13	$0, \frac{9}{13}, 1$
	12	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	13	$0, \frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{12}{13}, 1$	14	$0, \frac{9}{14}, 1$
14	$0, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, 1$			
$F_{14,4}^{13}$	$0, \frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$		$F_{14,9}^{13}$	$0, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1$
15	4	$0,1$	9	$0,1$
	5	$0, \frac{4}{5}, 1$	10	$0, \frac{9}{10}, 1$
	6	$0, \frac{2}{3}, 1$		
	7	$0, \frac{4}{7}, 1$	11	$0, \frac{9}{11}, 1$
	8	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	9	$0, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, 1$	12	$0, \frac{3}{4}, 1$
	10	$0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1$		
	11	$0, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, 1$	13	$0, \frac{9}{13}, 1$
12	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$			

	13	$0, \frac{4}{13}, \frac{8}{13}, \frac{12}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, 1$	14	$0, \frac{9}{14}, 1$
	15	$0, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{5}, 1$	15	$0, \frac{3}{5}, 1$
$F_{15,4}^{13}$		$0, \frac{4}{15}, \frac{2}{7}, \frac{4}{13}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{8}{15}, \frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}, 1$	$F_{15,9}^{13}$	$0, \frac{3}{5}, \frac{9}{14}, \frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11}, \frac{9}{10}, 1$

**EK 5 - mod 13'te  $H(\sqrt{3})$**

<b>n</b>	<b>c</b>	$\sqrt{3} = 7$		$\sqrt{3} = 16$
1		0,1		0,1
2		0,1		0,1
3		0,1		0,1
4		0,1		0,1
5		0,1		0,1
6		0,1		0,1
7		0,1		0,1
8	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
<b>F<sub>8,7</sub><sup>23</sup></b>		$0, \frac{7}{8}, 1$	<b>F<sub>8,16</sub><sup>23</sup></b>	<b>0,1</b>
9	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
<b>F<sub>9,7</sub><sup>23</sup></b>		$0, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1$	<b>F<sub>9,16</sub><sup>23</sup></b>	<b>0,1</b>
10	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
<b>F<sub>10,7</sub><sup>23</sup></b>		$0, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1$	<b>F<sub>10,16</sub><sup>23</sup></b>	<b>0,1</b>
11	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		

$F_{11,7}^{23}$	$0, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1$		$F_{11,16}^{23}$	<b>0,1</b>
12	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
$F_{12,7}^{23}$	$0, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1$		$F_{12,16}^{23}$	<b>0,1</b>
13	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
$F_{13,7}^{23}$	$0, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1$		$F_{13,16}^{23}$	<b>0,1</b>
14	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		

	14	$0, \frac{1}{2}, 1$		
<b>F</b> <sub>14,7</sub> <sup>23</sup>		$0, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, 1$	<b>F</b> <sub>14,16</sub> <sup>23</sup>	<b>0,1</b>
15	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
<b>F</b> <sub>15,7</sub> <sup>23</sup>		$0, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1$	<b>F</b> <sub>15,16</sub> <sup>23</sup>	<b>0,1</b>
16	7	0,1		0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$			



$F_{16,7}^{23}$	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1$		$F_{16,16}^{23}$	$0,1$
17	7	$0,1$	16	$0,1$
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$		
17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$			
$F_{17,7}^{23}$	$0, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1$		$F_{17,16}^{23}$	$0, \frac{16}{17}, 1$
18	7	$0,1$	16	$0,1$
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		

	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$		
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$		
$F_{18,7}^{23}$		$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1$	$F_{18,16}^{23}$	$0, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$
19	7	0,1	16	0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$		
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$		
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
$F_{19,7}^{23}$		$0, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{19}, \frac{14}{9}, \frac{7}{17}, \frac{14}{15}, 1$	$F_{19,16}^{23}$	$0, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$
20	7	0,1	16	0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		

	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$		
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$		
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
$F_{20,7}^{23}$		$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1$	$F_{20,16}^{23}$	$0, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$
21	7	0,1		
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$	16	0,1
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		

	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$	21	$\frac{16}{21}$
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
$F_{21,7}^{23}$	$0, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{11}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10},$ $\frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{7}{8}, \frac{14}{15}, 1$		$F_{21,16}^{23}$	$0, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$
22	7	0,1	16	0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$		
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$		
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$
20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$			

	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$
$F_{22,7}^{23}$		$0, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{2}{2}, \frac{1}{13}, \frac{7}{12}, \frac{7}{3}, \frac{7}{11}, \frac{14}{10}, \frac{7}{9}, \frac{14}{8}, \frac{7}{7}, \frac{14}{6}, \frac{21}{5}, \frac{1}{4}, \frac{7}{3}, \frac{14}{2}, \frac{21}{1}, 1$	$F_{22,16}^{23}$	$0, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$
23	7	$0, 1$	16	$0, 1$
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$
23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$			

$F_{23,7}^{23}$	$0, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13},$ $\frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{8}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1$		$F_{23,16}^{23}$	$0, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19},$ $\frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$	
24	7	0,1	16	0,1	
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$			
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$	
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$			
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$	
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$			
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$	
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$			
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$	
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$			
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$	
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$			
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$	
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$			
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$	
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$			
	23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$	24	$0, \frac{2}{3}, 1$	
	24	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}, 1$			
	$F_{24,7}^{23}$	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13},$ $\frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{8}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1$		$F_{24,16}^{23}$	$0, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5},$ $\frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$

25	7	$0,1$	16	$0,1$	
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$			
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$	
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$			
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$	
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$			
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$	
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$			
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$	
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$			
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$	
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$			
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$	
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$			
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$	
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$			
	23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$	24	$0, \frac{2}{3}, 1$	
	24	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}, 1$			
	25	$0, \frac{7}{25}, \frac{14}{25}, \frac{21}{25}, 1$	25	$0, \frac{16}{25}, 1$	
	$F_{25,7}^{23}$	$0, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{7}{13},$ $\frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1$		$F_{25,16}^{23}$	$0, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5},$ $\frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$

26	7	$0,1$	16	$0,1$
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$		
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$		
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$		
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$		
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$		
	23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$	24	$0, \frac{2}{3}, 1$
	24	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}, 1$		
	25	$0, \frac{7}{25}, \frac{14}{25}, \frac{21}{25}, 1$	25	$0, \frac{16}{25}, 1$
	26	$0, \frac{7}{26}, \frac{7}{13}, \frac{21}{26}, 1$	26	$0, \frac{8}{13}, 1$



$F_{26,7}^{23}$	$0, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15},$ $\frac{1}{2}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{7}{19}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25},$ $\frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1$		$F_{26,16}^{23}$	$0, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11},$ $\frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{9}, \frac{16}{17}, 1$
27	7	0,1	16	0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$
23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$			
24	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}, 1$	24	$0, \frac{2}{3}, 1$	
25	$0, \frac{7}{25}, \frac{14}{25}, \frac{21}{25}, 1$			
			25	$0, \frac{16}{25}, 1$

	26	$0, \frac{7}{26}, \frac{7}{13}, \frac{21}{26}, 1$	26	$0, \frac{8}{13}, 1$
	27	$0, \frac{7}{27}, \frac{14}{27}, \frac{7}{9}, 1$	27	$0, \frac{16}{27}, 1$
$F_{27,7}^{23}$		$0, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16},$ $\frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{14}{27}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26},$ $\frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1$	$F_{27,16}^{23}$	$0, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11},$ $\frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, 1$
28	7	0,1	16	0,1
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$		
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$
21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$			
22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$	

	23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$	24	$0, \frac{2}{3}, 1$
	24	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}, 1$		
	25	$0, \frac{7}{25}, \frac{14}{25}, \frac{21}{25}, 1$	25	$0, \frac{16}{25}, 1$
	26	$0, \frac{7}{26}, \frac{7}{13}, \frac{21}{26}, 1$	26	$0, \frac{8}{13}, 1$
	27	$0, \frac{7}{27}, \frac{14}{27}, \frac{7}{9}, 1$	27	$0, \frac{16}{27}, 1$
	28	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	28	$0, \frac{4}{7}, 1$
$F_{28,7}^{23}$	$0, \frac{1}{4}, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17},$ $\frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{14}{27}, \frac{7}{13}, \frac{14}{25}, \frac{7}{12}, \frac{14}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{14}{19}, \frac{3}{4},$ $\frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, 1$		$F_{28,16}^{23}$	$0, \frac{4}{7}, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23},$ $\frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$
29	7	$0, 1$	16	$0, 1$
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$		
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$		
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$
	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$		
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$		
18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$	

	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$
	23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$		
	24	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}, 1$	24	$0, \frac{2}{3}, 1$
	25	$0, \frac{7}{25}, \frac{14}{25}, \frac{21}{25}, 1$	25	$0, \frac{16}{25}, 1$
	26	$0, \frac{7}{26}, \frac{7}{13}, \frac{21}{26}, 1$	26	$0, \frac{8}{13}, 1$
	27	$0, \frac{7}{27}, \frac{14}{27}, \frac{7}{9}, 1$	27	$0, \frac{16}{27}, 1$
	28	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	28	$0, \frac{4}{7}, 1$
	29	$0, \frac{7}{29}, \frac{14}{29}, \frac{21}{29}, 1$	29	$0, \frac{16}{29}, 1$
$F_{29,7}^{23}$		$0, \frac{7}{29}, \frac{1}{4}, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18}, \frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{14}{29}, \frac{1}{2}, \frac{7}{27}, \frac{14}{13}, \frac{7}{25}, \frac{14}{12}, \frac{7}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{21}{29}, \frac{14}{19}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{28}{29}, 1$	$F_{29,16}^{23}$	$0, \frac{16}{29}, \frac{4}{7}, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3}, \frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{4}, \frac{16}{8}, \frac{16}{9}, \frac{16}{17}, 1$
30	7	$0, 1$		
	8	$0, \frac{7}{8}, 1$	16	$0, 1$
	9	$0, \frac{7}{9}, 1$		
	10	$0, \frac{7}{10}, 1$	17	$0, \frac{16}{17}, 1$
	11	$0, \frac{7}{11}, 1$		
	12	$0, \frac{7}{12}, 1$	18	$0, \frac{8}{9}, 1$
	13	$0, \frac{7}{13}, 1$		
	14	$0, \frac{1}{2}, 1$	19	$0, \frac{16}{19}, 1$

	15	$0, \frac{7}{15}, \frac{14}{15}, 1$		
	16	$0, \frac{7}{16}, \frac{7}{8}, 1$	20	$0, \frac{4}{5}, 1$
	17	$0, \frac{7}{17}, \frac{14}{17}, 1$		
	18	$0, \frac{7}{18}, \frac{7}{9}, 1$	21	$0, \frac{16}{21}, 1$
	19	$0, \frac{7}{19}, \frac{14}{19}, 1$		
	20	$0, \frac{7}{20}, \frac{7}{10}, 1$	22	$0, \frac{8}{11}, 1$
	21	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$		
	22	$0, \frac{7}{22}, \frac{7}{11}, \frac{21}{22}, 1$	23	$0, \frac{16}{23}, 1$
	23	$0, \frac{7}{23}, \frac{14}{23}, \frac{21}{23}, 1$		
	24	$0, \frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}, 1$	24	$0, \frac{2}{3}, 1$
	25	$0, \frac{7}{25}, \frac{14}{25}, \frac{21}{25}, 1$	25	$0, \frac{16}{25}, 1$
	26	$0, \frac{7}{26}, \frac{7}{13}, \frac{21}{26}, 1$	26	$0, \frac{8}{13}, 1$
	27	$0, \frac{7}{27}, \frac{14}{27}, \frac{7}{9}, 1$	27	$0, \frac{16}{27}, 1$
	28	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	28	$0, \frac{4}{7}, 1$
	29	$0, \frac{7}{29}, \frac{14}{29}, \frac{21}{29}, 1$	29	$0, \frac{16}{29}, 1$
	30	$0, \frac{7}{30}, \frac{7}{15}, \frac{7}{10}, 1$	30	$0, \frac{8}{15}, 1$
$F_{30,7}^{23}$	$0, \frac{7}{30}, \frac{7}{29}, \frac{1}{4}, \frac{7}{27}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{7}{24}, \frac{7}{23}, \frac{7}{22}, \frac{1}{3}, \frac{7}{20}, \frac{7}{19}, \frac{7}{18},$ $\frac{7}{17}, \frac{7}{16}, \frac{7}{15}, \frac{14}{29}, \frac{1}{2}, \frac{14}{27}, \frac{14}{13}, \frac{14}{25}, \frac{14}{12}, \frac{14}{23}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \frac{7}{10}, \frac{21}{29}$ $\frac{14}{19}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{21}{26}, \frac{14}{17}, \frac{21}{25}, \frac{7}{8}, \frac{21}{23}, \frac{15}{15}, \frac{21}{22}, \frac{28}{29}, 1$		$F_{30,16}^{23}$	$0, \frac{8}{15}, \frac{16}{29}, \frac{4}{7}, \frac{16}{27}, \frac{8}{13}, \frac{16}{25}, \frac{2}{3},$ $\frac{16}{23}, \frac{8}{11}, \frac{16}{21}, \frac{4}{5}, \frac{16}{19}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, 1$

EK 6 - mod 23'te  $H(\sqrt{3})$

## SONUÇ

Bu tezde Farey dizilerinin Modüler grupla var olan bağlantısından hareketle Hecke gruplarının en önemli iki tanesi için benzer ilişki elde edildi. Buna ek olarak Hecke gruplarına karşılık Farey matrisleri tanımlandı.

Birinci bölümde, genel bilgiler verildi. Farey dizilerinin ve Hecke gruplarının kısa tarihçesi aktarıldıktan sonra teoremlerin ispatında kullanılan Bölme ve Öklid algoritmaları tanımlandı. İkinci dereceden kalanlar kavramı ve Gauss Yardımcı teoremi kullanılarak 2 ve 3'ün hangi asal modlarda bir tam kare olarak düşünülebileceğini belirledik.

İkinci bölümde, modüler grup ile Farey dizileri ve Farey matrisleri, Ford çemberleri, Stern-Brocot ağacı tanımlandı. Farey dizilerinin Ford çemberleri ile ilişkisi incelendi, Ford çemberlerinin yarıçapları ile ilgili orijinal bir bağıntı bulundu ve teoremi (2.3.1 Teorem), ispatıyla birlikte verildi. Farey dizilerinin, Stern-Brocot ağacı ile ortak ve farklı özellikleri ele alındı. Farey kesirlerinin ve Farey matrislerinin satırlar arası değişimi incelendi. Genelleştirilerek, n-inci satırdaki Farey kesir sayıları, yeni Farey kesir sayıları, Farey matris sayıları, yeni Farey matris sayıları, ilk n satırdaki toplam matris sayıları ve toplam farklı matris sayıları formülüne edilerek, orijinal teoremleri (2.6.2 Teorem, 2.6.3 Teorem, 2.6.4 Teorem, 2.6.5 Teorem, 2.6.6 Uyarı), ispatlarıyla birlikte verildi. İlk on satır tablo halinde gösterildi (Tablo 2.6.1).

Üçüncü bölümde ise, Hecke grupları ile birlikte Farey dizileri ve Farey matrisleri tanımlandı. Önemli iki Hecke grubu için Farey dizilerinin hesaplamaları yapıldı. Kesirler arasında orijinal bir bağıntı bulundu ve bununla ilgili sonuç (3.2.3 Teorem), ispatıyla birlikte verildi. Hecke gruplarına karşılık gelen Farey kesirlerini veren formül elde edildi ve hesaplayıcı program hazırlandı.

## KAYNAKLAR

- [1] Jones, G. A. ve Jones, J. M., Elementary Number Theory, Springer, (1998)
- [2] Stark, H. M., An Introduction to Number Theory, MIT Press, (1979)
- [3] Niven, I; Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, (1991)
- [4] Flath, D, Introduction to Number Theory, John Wiley & Sons, (1989)
- [5] Silverman, J. H., A Friendly Introduction to Number Theory, Prentice Hall, (2001)
- [6] Weil, A., Basic Number Theory, Springer-Verlag Berlin, (1973)
- [7] Stillwell, J., Numbers and Geometry, Springer, (1997)
- [8] Cangül, İ. N., Sayılar Teorisi Problemleri, Paradigma Akademi Yayınları, Bursa (2002)
- [9] Bayraktar, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Ankara, (1998)
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/Stern-BrocotTree.html>
- [11] <http://perso.orange.fr/jean-paul.davalan/arit/stern/index.html>
- [12] <http://www.ridgenet.net/~jebush/bcf/Farybin2.html>
- [13] <http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml>
- [14] Hecke, E., Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen, Math. Ann. 112 (1936), 664-699
- [15] <http://www.answers.com/topic/farey-sequence>

## İNDEKS

Farey dizisi, 9

Farey matrisi, 32

Hecke grubu, 35

Modüler grup, 4