

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER VE H_∞ PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Feyza ERGÜN

Balıkesir, Temmuz-2006

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ DOĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER VE H_n PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Feyza ERGÜN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

Sınav Tarihi : 13/07/2006

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (Danışman, BAÜ)

Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR (BAÜ)

Doç. Dr. Ramazan YAMAN (BAÜ)

Balıkesir, Temmuz – 2006

ÖZET

KESİRLİ DOĞRUSAL (LİNEER) DÖNÜŞÜMLER VE H_∞ PROBLEMİ

Feyza ERGÜN

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR)

Balıkesir, 2006

Kesirli doğrusal dönüşümler (LFT) lineer sistem teorisinde önemli bir yere sahiptirler. Bir çok lineer sistem LFT yapısı şeklinde oluşturulabilir. Bu nedenle LFT, çoklu sistemlerin gösterimi için kolay ve basit bir yapıya sahiptir.

Bu çalışmada kesirli doğrusal dönüşümler tanımlanmış, belirsiz sistemler kesirli doğrusal dönüşüm yapısıyla temsil edilmiştir. Bu belirsizlik yapı bilgisiyle kesirli doğrusal dönüşümlerin μ kararlılığı ele alınmıştır. Ayrıca, kesirli doğrusal dönüşüm sistemlerinde sağlam kararlılık ve sağlam çalışma koşulları H_∞ normu altında incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde kontrol teorisinin temel öğeleri verilmiş, kontrol teorisinin temelini oluşturan klasik ve modern kontrol sistemlerinin çalışmasından kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde kesirli doğrusal dönüşüm sistemleri tanımlanarak, belirsizlik yapısı kesirli doğrusal dönüşüm sistemleriyle temsil edilmiş ve kesirli doğrusal dönüşüm sistemlerinin özellikleri ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde belirsizlik yapısı tanımlanmış, bu belirsizlik yapısıyla kesirli doğrusal dönüşümlerin μ kararlılık koşulları incelenerek bu koşul altında kesirli doğrusal dönüşümler için iyi tanımlılık özelliği ve ana dönüşüm teoremi verilmiştir.

Dördüncü bölümde H_2 ve H_∞ sistem normları tanımlanmış, amacımıza uygun olarak kesirli doğrusal dönüşüm sistemlerinin H_∞ çalışması verilerek, sağlam kararlılığa temel oluşturan küçük kazanç teoremi incelenmiştir. Ayrıca sağlam kararlılık ve sağlam çalışma koşulları H_∞ normu altında ele alınmıştır. Son olarak da φ kararlılık kavramından kısaca bahsedilmiştir.

Son bölümde bütün bölümlerde ele alınan sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli doğrusal dönüşümler, μ kararlılık, H_∞ normu.

ABSTRACT

LINEAR FRACTIONAL TRANSFORMATIONS AND H_∞ PROBLEM

Feyza ERGÜN
Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(MSc. Thesis / Supervisor: Asist. Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR)
Balıkesir, Turkey-2006

The linear fractional transformations (LFT) take an important place in linear system theory. Many of linear systems can be defined by the LFT systems. So, the LFT has a simple and easy structure for representation of multiple systems.

In this work, linear fractional transformations have been defined. Uncertain systems have been determined by linear fractional transformations. μ stability of the LFT has been dealt with uncertain structures. Also, robust stability and robust performance conditions have been searched by using H_∞ norm under the LFT.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, basic elements of the control theory have been given. Classic and modern control systems which are fundamental for control theory have been summarized.

In the second chapter, by defining LFT, uncertainty has been represented by LFT systems and the property of LFT has been given.

In the third chapter, uncertainty structures have been defined. The LFT's μ stability condition has been searched under the uncertainty structure. Well defined property and main loop theory for LFT have been given.

In the fourth chapter, H_2 and H_∞ norm systems have been searched and H_∞ performance of the LFT have been studied. Hence, small gain theorem has been investigated. Also, robust stability and robust performance of the LFT have been dealt by using H_∞ norm. Finally, φ stability has been shortly defined.

In the final chapter, the results obtained in each chapter have been presented.

Key Words: Linear fractional transformations, μ stability, H_∞ norm.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	viii
TABLO LİSTESİ	ix
KISALTMALAR	x
ÖNSÖZ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Kontrol Teori	1
1.1.1 Klasik Kontrol Sistemleri	2
1.1.2 Modern Kontrol Sistemleri	3
2. KESİRLİ DOĞRUSAL (LINEER) DÖNÜŞÜMLER	7
2.1 Kesirli Doğrusal Dönüşümler	7
2.2 Kesirli Doğrusal Dönüşümlerin Özellikleri	11
2.3 Lineer Durum Uzayı Bilinmeyi	24
2.4 Modellenemeyen Dinamikler	26
2.4.1 Modellenemeyen Dinamiklerin Çarpım Modeli	26
2.4.1.1 Çarpım Modelindeki Bilinmeyen	27
2.4.1.2 Kesirli Doğrusal Dönüşüm Olarak Çarpım Modeli	29
2.4.2 Modellenemeyen Dinamiklerin Toplama Modeli	29
2.5 Karışık Bilinmeyen İçeren Sistemleri Kesirli Doğrusal Dönüşüm Olarak Modelleme	30
3. KESİRLİ DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM SİSTEMLERİNİN SAĞLAM KARARLILIĞI (ROBUST STABILITY)	32
3.1 Belirsizliğin Yapısı	32
3.2 μ Analizi	34
3.3 Sınırlar	42
3.4 μ Kararlılık Testi	44
3.4.1 μ Kararlılık Testleri, Üst ve Alt Sınırlar	45
3.5 Kesirli Doğrusal Dönüşüm Sistemleri İçin İyi Tanımlılık	46

4. KESİRLİ DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM SİSTEMLERİNİN SAĞLAM ÇALIŞMASI (ROBUST PERFORMANCE)	49
4.1 Sistem Normları	49
4.1.1 H_2 Normu	50
4.1.2 H_∞ Normu	50
4.1.3 H_2 ve H_∞ Normları Arasındaki İlişki	53
4.2 H_∞ Normunun Kontrol Sistemindeki Yeri	55
4.3 Belirsiz Sistemlerin Sağlam Çalışması	57
4.4 Kesirli Doğrusal Dönüşüm Sistemlerinin H_∞ Çalışması	58
4.5 Geri Beslemeli Bir Sistemde İyi Yerleşme (Well-Posed) ve İçsel Kararlılık (Internal Stability)	59
4.6 Kesirli Doğrusal Dönüşüm Sistemlerinde Sağlam Kararlılık Koşulları	61
4.7 Küçük Kazanç Teoremi (Small Gain Theorem)	62
4.8 Kesirli Doğrusal Dönüşüm Sistemlerinde Sağlam Çalışma Koşulları	65
4.9 φ Kararlılık Kavramı	67
5. SONUÇ	70
KAYNAKLAR	71

SEMBOL LİSTESİ

\mathbb{C} ve \mathfrak{R}	Kompleks ve Reel Sayılar
F	\mathbb{C} veya \mathfrak{R} Sayılar Kümesi
\mathbb{C}_+ ve $\overline{\mathbb{C}_+}$	Açık ve Kapalı Sağ Yarı Düzlem
A^*	A Matrisinin Eşleniği
$\lambda(A)$	A Matrisinin Özdeğeri
$\rho(A)$	A Matrisinin Spectral Yarıçapı
$\overline{\sigma}(A)$ and $\underline{\sigma}(A)$	A Matrisinin En Büyük ve En Küçük Singular Değeri
$\sigma_i(A)$	A Matrisinin i . Singular Değeri
\wp	Polinomların Bir Kümesi
S	Uygun, Rasyonel Fonksiyonların Kümesi
\mathbb{R}	Uygun, Kararlı, Reel Rasyonel Fonksiyonların Kümesi
\approx	Yaklaşık Değer
\angle	Açı
H_2	Açık Sağ Yarı Düzlemde Analitik Fonksiyonların Hilbert Uzayı
H_∞	Açık Sağ Yarı Düzlemde Analitik Fonksiyonların Banach Uzayı
$\mathbb{R}H_2$	Açık Sağ Yarı Düzlemle Sınırlandırılmış Kesinlikle Uygun, Kararlı Transfer Matris Fonksiyonlarının Uzayı
$\mathbb{R}H_\infty$	Açık Sağ Yarı Düzlemle Sınırlandırılmış Uygun, Kararlı Transfer Matris Fonksiyonlarının Uzayı
\mathbf{B} ve \mathbf{B}°	Kapalı ve Açık Birim Disk
$F_l(M, \Delta)$	Alt Kesirli Doğrusal Dönüşüm
$F_u(M, \Delta)$	Üst Kesirli Doğrusal Dönüşüm
Q^*M	Redheffer Star Üretimi
Δ	Bozucu Matrislerin Kümesi
$M(G, W_u)$	Modellenemeyen Dinamiklerin Çarpım Kümesi
$A(G, W_u)$	Modellenemeyen Dinamiklerin Toplama Kümesi
$\mu_\Delta(M)$	M Matrisinin Δ 'ya Göre Yapılandırılmış Singular Değeri

∂	Bir Polinom ya da Fonksiyonun Derecesi
$M(\Delta)$	Δ Gibi Blok Yapısına Sahip Kararlı Rasyonel Transfer Fonksiyonları İçin Bütün Blok Diyagonallerin Kümesi
#	Bulunduğu Kümenin Sayısını Belirtir
$U(s)$	Transfer Fonksiyonun Laplace Dönüşümlü Girişi
$Y(s)$	Transfer Fonksiyonun Laplace Dönüşümlü Çıkışı

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil Numarası</u>	<u>Şekil Adı</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1	Kontrol Sistemi ve Öğeleri	1
Şekil 1.2	Geri Beslemeli Kontrol Sistemi	1
Şekil 1.3	TGTÇ Geri Beslemeli Kontrol Sistemi	2
Şekil 1.4	$P(s)$ 'nin Durum Uzayı Formu	4
Şekil 1.5	$P(s)$ 'nin Durum Geri Beslemeli Kontrol Sistemi	4
Şekil 2.1	Alt Dönüşüm LFT Blok Diyagramı	8
Şekil 2.2	Üst Dönüşüm LFT Blok Diyagramı	9
Şekil 2.3	Redheffer Star Üretimi Blok Diyagramı	22
Şekil 3.1	μ Analiz Diyagramı	34
Şekil 4.1	w girişli z çıkışlı Bir P Sistemi	50
Şekil 4.2	M Sistemi İçin Blok Diyagram	57
Şekil 4.3	Gürültü ve Bozucu Etkisindeki Geri Beslemeli Sistem	59
Şekil 4.4	İçsel Kararlılık ve Analiz Diyagramı	60
Şekil 4.5	Kararlılık analizi için $M - \Delta$ dönüşümü	62

TABLO LİSTESİ

		<u>Sayfa</u>
Tablo 1-1	Klasik ve Modern Kontrol'ün Avantaj ve Dezavantajları	6

KISALTMALAR

TGTÇ	Tek Giriş Tek Çıkışlı Sistem
ÇGÇÇ	Çok Giriş Çok Çıkışlı Sistem
LFT	Kesirli Doğrusal Dönüşümler
SVD	Singular Value Decomposition (Singular Değer Ayırması)
tr	Trace
LQG	Lineer Quadratik Gaussian
RHP	Sağ Yarı Düzlem

ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlamakta olduğum süre içinde benden ilgisini ve bilgisini esirgemeyen, sonsuz anlayış ve sabrından dolayı öncelikle değerli danışmanım ve hocam Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmem de, bana göstermiş oldukları sevgi, sonsuz güven ve emeklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Feyza ERGÜN

Balıkesir, 2006

1. GİRİŞ

Bu bölümde kontrol sistemlerinin temelini oluşturan klasik ve modern kontrol sistemlerinden kısaca bahsedilecektir.

1.1 Kontrol Teori

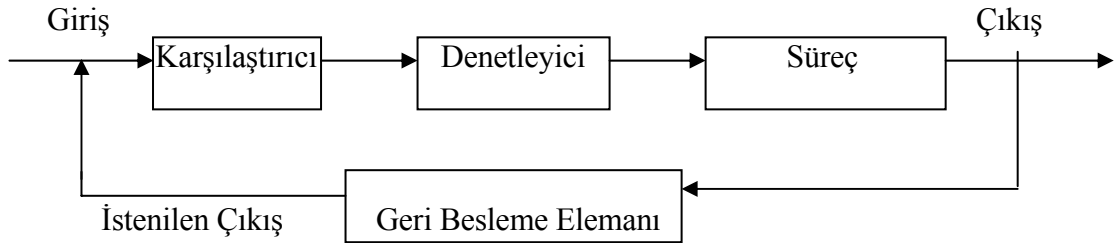
Girişler ve çıkışlar aracılığıyla süreçlerin kontrolü ile ilgilenir. Şekil 1.1’de kontrol teorisinin temelini oluşturan kontrol sistemi ve temel elemanları verilmiştir.



Şekil 1.1 Kontrol Sistemi ve Öğeleri

Burada u girişi kontrol değişkeni, y çıkışı da kontrol edilen değişkeni temsil eder. Kontrol sistemleri denetlenen süreçlerin değerini sabit tutar veya değerlerin önceden belirlenmiş biçimde değişimini sağlar.

Sistem zamanla değişir, ya da performansı düzeltilmek istenirse şekil 1.2’deki gibi bir geri beslemeli kontrol sistemi oluşturulur.



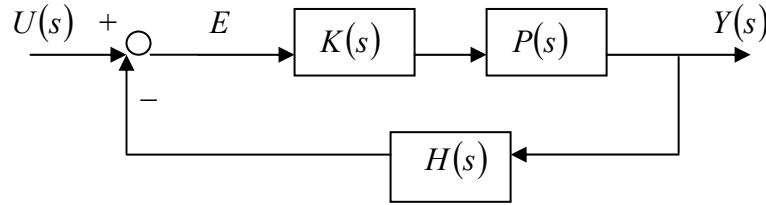
Şekil 1.2 Geri Beslemeli Kontrol Sistemi

Bu yapı sistemin arzu edilen sonuca ulaşip ulaşamayacağı sorusunun cevabını verir. Ayrıca önemli bir noktada sistemin kararlı olup olmadığının araştırılmasıdır. Bu sonuç da sistem modelinin özelliğidir. İyi bir model sistemin sağlamlığını verir.

Kontrol sistemlerini, klasik ve modern kontrol sistemleri olarak ele alabiliriz.

1.1.1 Klasik Kontrol Sistemleri

Tek giriş tek çıkış (TGTC) lineer zamanla değişen sistemlerin tasarımı için uygundur. Şekil 1.3'te *TGTC* bir sistemin blok diyagramı verilmiştir.



Şekil 1.3 *TGTC* Geri Beslemeli Kontrol Sistemi

Bu sistemde bozucu ve gürültü etkisi ihmal edilmiştir. Burada U giriş sinyali, E hata sinyali, Y çıkış sinyali, s değişkeni ise zaman düzleminin bir fonksiyonudur.

$P(s)$ kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonunu gösterirken, $K(s)$ tasarımı yapılacak denetleyiciyi, $H(s)$ ise geri besleme elemanıdır. Geri beslemeli sistemin transfer fonksiyonu, çıkış fonksiyonunun Laplace dönüşümünün giriş fonksiyonunun Laplace dönüşümüne oranıdır.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)H(s)} \quad (1.1)$$

dir. İstenen performansı sağlayacak şekilde bir $K(s)$ denetleyicisinin tasarımı için çeşitli metodlar geliştirilmiştir [2].

Zaman düzleminde sistemin hareketini transfer fonksiyonu ile anlayabiliriz. Bazen sistemin hareketini anlamak çok zordur. Bu durumda frekans düzlemi devreye girer. Frekans düzlemi sistemin cevaplarını grafiksel yolla sunmaktadır. Bunun için Bode/Nyquist haritaları vardır. Bunlar daha çok kompleks sistemlerin tasarımı için kullanılmıştır.

1940'lı yıllarda frekans cevabı yöntemi (Bode/Nyquist) ve kök-yer eğrileri yöntemi (Root Locus) de 1950'li yıllarda gelişmelerini tamamlamış olup lineer geri beslemeli sistemlerin tasarımı ve kararlılık çözümlerinde yaygın olarak kullanılmışlardır.

Şekil 1.3'te görüldüğü gibi klasik kontrol teknikleri sisteme ek bir dinamik (K denetleyicisi) eklerler ve kapalı çevrimli sistemin derecesini artırır. Bu nedenle sisteme ek bir dinamik ilave etmeyecek türden bir kontrolöre gereksinim vardır. Bu amaçla *Modern Kontrol Sistemleri* geliştirilmiştir.

1.1.2 Modern Kontrol Sistemleri

Modern kontrol sistemleri tasarımı “durum uzayı” kavramına dayanır. 1960'larda yapılan tüm kuramsal gelişmelerde bu yaklaşım kullanılmıştır.

Durum uzayı analizinin önemi fiziksel sistemlerin zaman davranışını matematiksel olarak ifade edebilmesidir. Sistem *çok giriş çok çıkışlı (ÇGÇÇ)* bir sistem olduğundan dinamik sistemler modellenirken durum değişkenleri ve durum denklemlerini matematiksel olarak tanımlamak kolaylık sağlar. Ayrıca kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramları modern kontrol sistemlerinin temelini oluştururlar. Kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik koşulları özellikle bir optimal kontrol problemine ilişkin çözümün varlığını belirtir [8]. *Kontrol edilebilirlik*; doğrusal bir sistemin her bir durum değişkeni $x(t)$, kontrol değişkeni $u(t)$ ile belli bir zamanda belli bir hedefe ulaştırılabiliyorsa sistem kontrol edilebilirdir denir. *Gözlenebilirlik*; her durum değişkeninin bazı çıkışlara etki etmesidir. Diğer bir deyişle genellikle çıkış ve giriş ölçümlerinden durum değişkeni hakkında bilgi edinilebilmesi kavramıdır. Eğer çıkış ölçümlerinden bir durum gözlenemiyorsa sistem gözlenemezdir denir. Kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik klasik kontrol sistemleri ile modern kontrol sistemleri arasındaki en temel farktır.

Durum uzayı modeli:

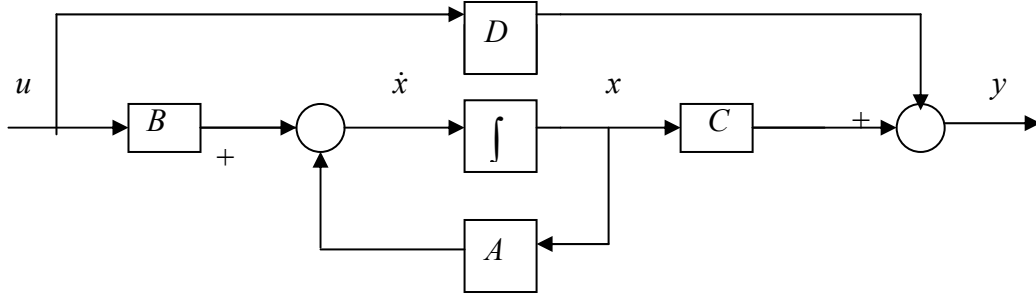
- Çok girişli çok çıkışlı sistemlere doğrudan doğruya uygulanabilir.
- Optimum denetleyici tasarım yöntemidir.

Durum uzayı modeli *TGTÇ* sistemler için uygun değildir. Çünkü matris denklemlerinden sistem dinamiğinin iç yapısını görmek mümkün değildir.

Şimdi şekil 1.3'teki $P(s)$ için durum uzayı formu ve blok diyagramını verelim.

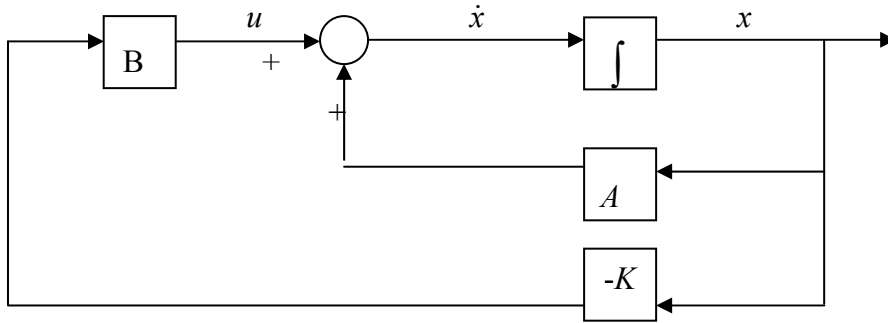
$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (1.2)$$

x : durum vektörü (n elemanlı sütun vektörü),
 u : kontrol vektörü (r elemanlı sütun vektörü),
 y : çıkış vektörü (m elemanlı satır vektörü),
 A : $n \times n$ elemanlı sistem matrisi,
 B : $n \times r$ elemanlı giriş matrisi,
 C : $m \times n$ elemanlı çıkış matrisi,
 D : $m \times r$ elemanlı matristir.



Şekil 1.4 $P(s)$ 'nin Durum Uzayı Modeli

Burada amaç hedeflenen zaman cevabı performans özelliklerini sağlayan bir geri beslemeli kontrol sistemi tasarlamaktır. Bunun için de çeşitli teknikler geliştirilmiştir. Bu tekniklerden biri durum geri beslemeli kontrol sistemidir.



Şekil 1.5 Durum Geri Beslemeli Kontrol Sistemi

Şekil 1.5'te verilen K denetleyici öyle tasarlanmalıdır ki geri beslemeli sistem hedeflenen performans özelliklerini sağlasın. Bu da denklem (1.2)'de verilen sistemde kontrolörün,

$$u = -Kx$$

olması ile sağlanır. Geri beslemeli sistem,

$$\dot{x} = A_1 x$$

olur. Burada,

$$A_1 = (A - BK)$$

dır ve K herhangi bir metotla tasarlanarak istenen sağlanır [1], [2].

Tablo 1.1’de klasik ve modern kontrol’ün avantaj ve dezavantajları özet olarak verilmiştir.

Dördüncü bölümde hem klasik hem de modern kontrol sistemlerinin avantajlarını kullanabilen H_∞ kontrol’den bahsedeceğiz. Ama önce H_∞ kontrolü kullanan *LFT (Kesirli doğrusal dönüşümler)* sistemlerini tanıyalım.

	Klasik Kontrol (1950'den önce)	Modern Kontrol (1950-...)
Avantajları	<ul style="list-style-type: none"> • TGTC sistemlerin kontrol tasarımına uygundur. • Tasarım için Root Locus(s-düzlemi) ve Bode/Nyquist (frekans düzlemi) metotlarını kullanır. • Tasarım, sistemin geçici cevap ve frekans cevabı kriterini ele alır. • Sistemin kararlı olup olmadığı Bode/Nyquist haritalarından incelenir. • Parametrelerin cebirsel hesaplaması önceden verilen nümerik değerler ile yapılabilir. • Ayrıca sistemin başlangıç koşullarının verilmesine gerek yoktur. 	<ul style="list-style-type: none"> • ÇGÇÇ sistemlerin kontrol tasarımında kullanılır. • Tasarım için durum uzayı kavramı kullanılır. • Tasarım girişlerin bir sınıfı için yapılır. • Sistemin dinamikleri vektör matris eşitlikleri ile temsil edilir. • Vektör matris eşitlikleri ile analitik çözüm kolaylıkla görülür. • Sistemin kararlılığı Routh-Hurwitz kriteri ile incelenir. • Kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramları sistemin temelini oluştururlar. • Sistemin geçmişteki, şimdiki ve gelecekteki konumu rahatlıkla belirlenir.
Dezavantajları	<ul style="list-style-type: none"> ○ ÇGÇÇ sistemlerin tasarımı için uygun değildir. ○ Tasarım deneme yanılma yöntemiyle yapıldığından başlangıçta verilecek bir tasarım koşulu için çözümün var olup olmadığı bilinemez. ○ Sistemin dinamikleri vektör matris eşitlikleri ile gösterilemez. ○ Kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik koşulları yoktur. 	<ul style="list-style-type: none"> ○ TGTC sistemler için tasarlanamaz. Çünkü matris denkleminde sistemin içyapısını görmek mümkün değildir. ○ Frekans cevabı metodunu doğrudan kullanamaz. ○ Nümerik çözüm için dijital hesaplayıcılara ihtiyaç vardır. ○ Sistem tasarımında ilk baştaki şartların dahil edilmesi gerekir. ○ Tüm durum değişkenlerinin ölçülebilir olması en büyük dezavantajdır.

Tablo-1.1 Klasik ve Modern Kontrol'ün avantaj ve dezavantajları

2. KESİRLİ DOĞRUSAL (LİNEER) DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde kontrol sistem tasarımında önemli bir rol oynayan kesirli doğrusal dönüşümlerini tanımlayacağız. Kesirli doğrusal dönüşümler yeni bir matris fonksiyonudur. Birçok kontrol problemi bir kesirli doğrusal dönüşüm yapısı şeklinde oluşturulabilir ve hareket ettirilebilir. Bu gerçekleştirme lineer sistemlerin işletilmesi (manipulation) ve hesaplanmasında büyük kolaylıklar sağlamıştır. Kesirli doğrusal dönüşümleri aynı kolaylığı belirsiz sistemler için de sağlar. Bilinmeyenli belirsiz sistemleri güçlü ve esnek bir yaklaşımla temsil eder [4]. Burada lineer kesirli bilinmeyenli sistemlerin mekanizması, dönüşüm değişkenleri ve belirsizlik bloklarını içeren bir blok yapısı üzerinde bir sabit matrisin kesirli doğrusal dönüşümü olarak tanımlanır. Bu yaklaşım durum uzayı gerçekleştirilmesinin doğrudan bir genellemesidir. Burada dinamik sistem,

- bir sabit matris $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ve
- bir diyagonal matrisi tamamlayan dinamik elemanlarla oluşan yapının geri besleme bağıntısı olarak yazılmasından meydana gelir.

2.1 Kesirli Doğrusal Dönüşümler

2.1.1 Tanım: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü tek değişkenli kompleks fonksiyonlar teorisinde,

$$F(s) = \frac{a + bs}{c + ds}$$

$ad - bc \neq 0$ ile bir kesirli doğrusal dönüşüm olarak adlandırılır. Özellikle de eğer $c \neq 0$ ise bazı α, β ve $\gamma \in \mathbb{C}$ için ayrıca

$$F(s) = \alpha + \beta s(1 - \gamma s)^{-1}$$

olarak yazılabilir [19]. Bir kesirli doğrusal dönüşüm matris formunda

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right]$$

olarak yazılır.

Sadelik açısından kesirli doğrusal dönüşümleri LFT olarak göstereceğiz.

2.1.2 Tanım: M matrisi bir kompleks matris bölünmesi olarak

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)},$$

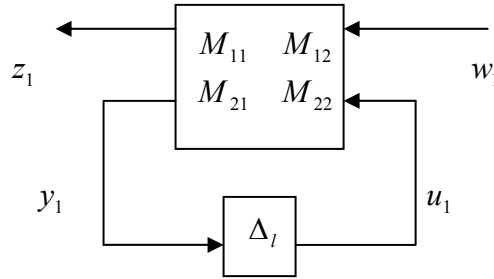
ve $D_1 \subset \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$, $D_2 \subset \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$ iki kompleks matrisler olsunlar. Buradan Δ_l ye göre bir alt LFT dönüşümü,

$$F_l(M, \bullet): D_2 \rightarrow \mathbb{C}^{p_1 \times q_1}$$

olarak tanımlıdır.

$$F_l(M, \Delta_l) = M_{11} + M_{12} \Delta_l (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21}$$

eşitliği $(I - M_{22} \Delta_l)^{-1}$ tersinin mevcut olmasıyla sağlanır.



Şekil 2.1 LFT'nin Alt Dönüşüm Blok Diyagramı

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \Delta_l y_1.$$

Yukarıda verilen eşitliklerden LFT'nin alt dönüşümü $F_l(M, \Delta_l)$ elde edelim.

$$\begin{aligned} z_1 &= M_{11} w_1 + M_{12} u_1 \\ y_1 &= M_{21} w_1 + M_{22} u_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

(2.1)'de $u_1 = \Delta_l y_1$ yerine yazalım,

$$\begin{aligned} z_1 &= M_{11}w_1 + M_{12}\Delta_l y_1 \\ y_1 &= M_{21}w_1 + M_{22}\Delta_l y_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ve y_1 'i eşitliğin ikinci kısmından çekelim,

$$\begin{aligned} y_1 - M_{22}\Delta_l y_1 &= M_{21}w_1 \\ y_1(I - M_{22}\Delta_l) &= M_{21}w_1 \\ y_1 &= M_{21}w_1(I - M_{22}\Delta_l)^{-1} \end{aligned}$$

y_1 'i (2.2) eşitliğinin ilk kısmında yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} z_1 &= M_{11}w_1 + M_{12}\Delta_l y_1 \\ z_1 &= M_{11}w_1 + M_{12}\Delta_l M_{21}w_1(I - M_{22}\Delta_l)^{-1} \\ z_1 &= \underbrace{\left[M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21} \right]}_{F_l(M, \Delta_l)} w_1 \\ z_1 &= F_l(M, \Delta_l)w_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

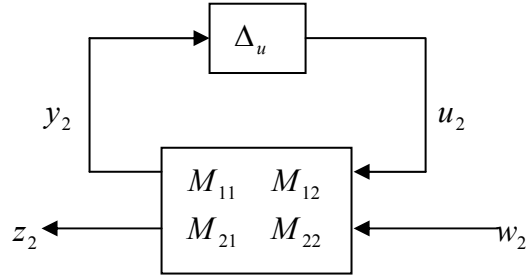
Aynı şekilde Δ_u 'ya göre bir üst LFT dönüşümü,

$$F_u(M, \bullet): D_1 \rightarrow \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}$$

şeklinde tanımlanır. Yine,

$$F_u(M, \Delta_u) = M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}$$

eşitliği $(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}$ tersinin mevcut olmasıyla sağlanır.



Şekil 2.2 LFT'nin Üst Dönüşüm Blok Diyagramı

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = \Delta_u y_2.$$

eşitlikleri yazılır. Yine benzer cebirsel işlemlerle, $z_2 = F_u(M, \Delta_u)w_2$ elde edilebilir.

LFT sistemlerindeki M matrisi katsayı matrisi olarak adlandırılır. Çoğu durumlarda genel LFT devresini alt ve üst LFT devrelerine benzetebiliriz. Gerçekten $N = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{bmatrix}$ ile $F_u(N, \Delta) = F_l(M, \Delta)$ olduğu açıktır. Ancak bu kullanım N matrisi tanımlandığı zaman geçerlidir. Ayrıca uygun boyutlarda belirtilen Δ için $F_l(M, \Delta)$ yerine $F_u(M, \Delta)$ yazılabilir [19].

LFT'nin (yani $F_l(M, \Delta)$) faydalı özelliklerinden biri de Δ ile bozulan M_{11} sözde dönüşümüne sahip olmasıdır. Benzer açıklama $F_u(M, \Delta)$ için de yapılabilir (M_{22} sözde dönüşümüne sahiptir). LFT, bozucuların çalışmasında özellikle yararlıdır [19].

LFT'nin kontrol biliminde fiziksel anlamı ise uygun bir transfer matris olmasıdır. Bu durumda şekil 2.1 ve şekil 2.2'de $w_1 \rightarrow z_1$ ve $w_2 \rightarrow z_2$ 'ye tanımlanan LFT'ler kapalı çevrim transfer matrisleridir. Yani,

$$T_{zw1} = F_l(M, \Delta_l) \quad \text{ve} \quad T_{zw2} = F_u(M, \Delta_u)$$

dir. Burada M kontrol edilen plant olabilir, Δ ise sistem model belirsizlikleri veya kontrolör olabilir.

2.1.3 Tanım [19]: Bir alt dönüşüm $F_l(M, \Delta)$ için $(I - M_{22}\Delta)^{-1}$ varsa alt dönüşüm LFT **iyi tanımlıdır(well-defined)**. Benzer şekilde üst dönüşüm $F_u(M, \Delta)$ için $(I - M_{11}\Delta)^{-1}$ varsa üst dönüşüm LFT **iyi tanımlıdır(well-defined)**.

O halde bu tanım, \mathbb{R} 'de tersi olan uygun transfer matrisleri gerektirir (dördüncü bölümde tanımlanacaktır). Bu taktirde geri beslemeli sistem iyi yerleştirme (well-posedness) tanımını sağlar. Burada LFT sisteminin çalışmasını iyi tanımlı kabul edeceğiz. Ayrıca tanımdan, herhangi bir M için $F_l(M, 0)$ iyi tanımlı olduğunu söyleyebiliriz. Bununla birlikte herhangi bir fonksiyon değişkenleri bakımından ifade edilebiliyor fakat bu fonksiyon orijinde tanımlı değilse iyi tanımlı değildir. Örneğin;

$$f(\delta) = \frac{1}{\delta}, \quad \delta \text{ 'nin bir LFT değildir.}$$

2.2 LFT'nin Özellikleri

i) Kesirli doğrusal dönüşümlerin tersleri yine bir kesirli doğrusal dönüşümdür. Verilen bir H matrisi için bütün Δ ve Ω ile H_{ll} ve H_{ul} matrisleri vardır. Bu matrisleri;

$$[F_l(H, \Delta)]^{-1} = F_l(H_{ll}, \Delta) \quad [F_u(H, \Omega)]^{-1} = F_u(H_{ul}, \Omega)$$

olarak yazabiliriz. Burada verilen $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ matrisiyle, H_{ll} ve H_{ul} matrisleri

$$H_{ll} = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & -H_{11}^{-1}H_{12} \\ H_{21}H_{11}^{-1} & H_{22} - H_{21}H_{11}^{-1}H_{12} \end{bmatrix}$$

$$H_{ul} = \begin{bmatrix} H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{21} & H_{12}H_{22}^{-1} \\ -H_{22}^{-1}H_{21} & H_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2.1 Yardımcı Teorem [19, Lemma 9.3]: LFT'nin tersleri yine bir LFT'dir.

$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ matrisi verilsin ve M_{22} singular olmasın. Buradan,

$N = \begin{bmatrix} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & -M_{12}M_{22}^{-1} \\ M_{22}^{-1}M_{21} & M_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ olmasıyla

$$(F_u(M, \Delta))^{-1} = F_u(N, \Delta)$$

dir.

$F_l(M, \Delta)$, bütün arzu edilen Δ 'lar için iyi tanımlı ve kare matris şeklinde olsun.

Ayrıca M_{11} singular olmasın. Buradan

$$(F_l(M, \Delta))^{-1} = F_l(\bar{M}, \Delta)$$

dir. Burada $\bar{M} = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1}M_{12} \\ M_{21}M_{11}^{-1} & M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} \end{bmatrix}$ dir.

2.2.1 Örnek: II. Mertebeden Bilinmeyenli mck (kütle/sönümleyici/yay) Sistemi (mass/damper/spring)

Bilinmeyen elemanlarla birinci dereceden kütle/sönümleyici/yay sistemi yapısı

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u$$

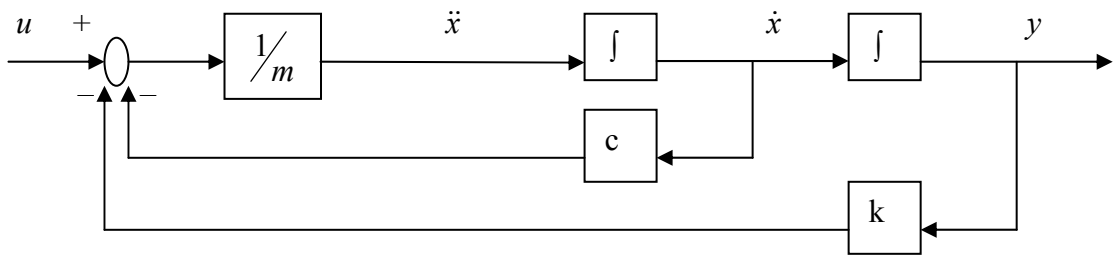
şeklinde dir.

Bilinmeyen parametreler $-1 \leq \delta_m, \delta_c, \delta_k \leq 1$ sabit değer aralığı ile

$$m = \bar{m}(1 + 0,5\delta_m), \quad c = \bar{c}(1 + 0,3\delta_c), \quad k = \bar{k}(1 + 0,4\delta_k)$$

olarak verilsin. Bu yazım m'deki bilinmeyen %50'yi, c'deki bilinmeyen %30'u ve k'deki bilinmeyen %40'ı temsil eder.

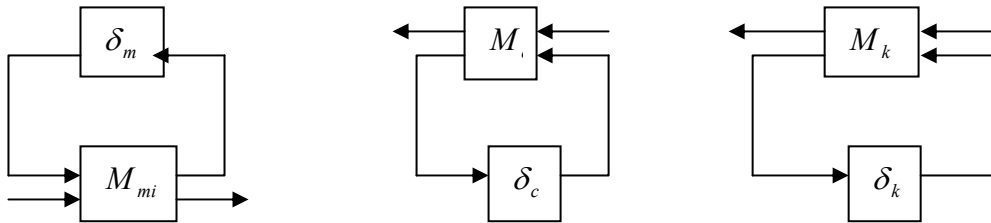
Bu sistemin blok diyagramı;



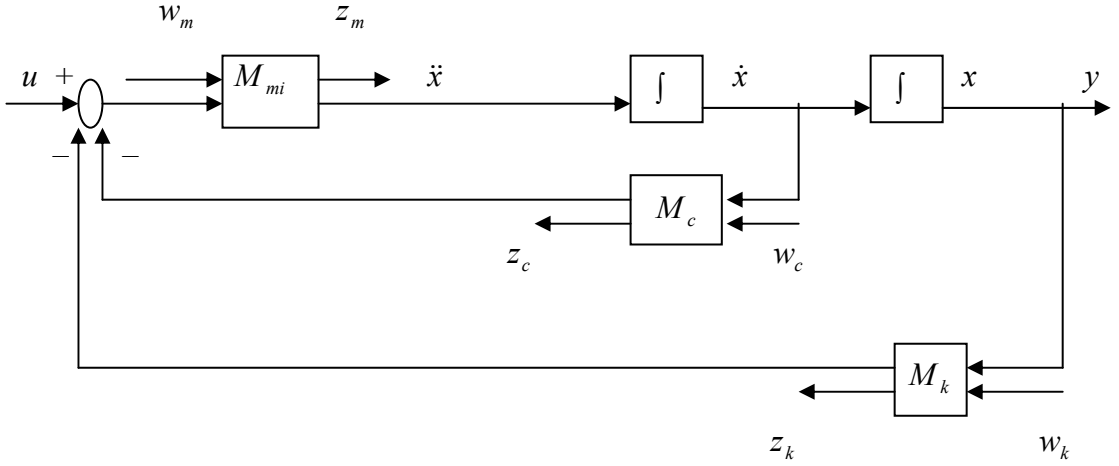
şeklinde dir. Burada tanımlı matrisleri yazalım.

$$M_{mi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}} & -0,5 \\ \frac{1}{\bar{m}} & -0,5 \end{bmatrix}, M_c = \begin{bmatrix} \bar{c} & 0,3\bar{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_k = \begin{bmatrix} \bar{k} & 0,4\bar{k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradaki “mi” anlamı ters matris olduğunu göstermektedir. Şimdi bu matrisleri sırayla lineer kesir dönüşüm blok diyagramı şeklinde yazalım.

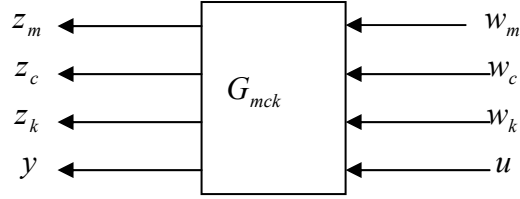


Sonunda $(\delta_m, \delta_c, \delta_k)$ bilinmeyenlerinden (M_{mi}, M_c, M_k) matrisleri ve tamamlayıcı bilinenlere ayrılmıştır. Böylece δ 'lar çekilir, δ 'dan geçen sinyaller belirtilirse sistem blok diyagramı,



şeklinde olur.

Kabul edelim ki yukarıdaki sistem 4 girişli (w_m, w_c, w_k, u), 4 çıkışlı (z_m, z_c, z_k, y), 2-
durumlu G_{mck} sistemi olsun ve aşağıdaki gibi gösterilsin.



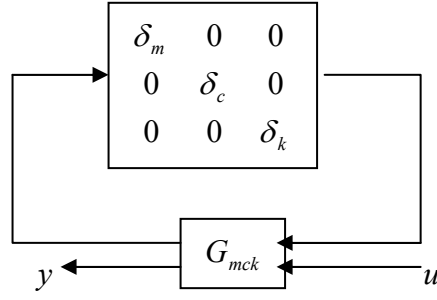
O halde G_{mck} sistemi yalnızca;

- $\bar{m}, \bar{c}, \bar{k}$ parametreleri ve 0.5, 0.4, 0.3 ondalıklı sayılarına,
- u'dan y'ye oluşturulan orijinal diferansiyel denkleme

bağlıdır. Buradan G_{mck} sistemi bilinir.

Orijinal sistemin bilinmeyen hareketi, G_{mck} sisteminin diyagonal bilinmeyen matrisinin üst LFT'si ile tanımlanabilir.

$$y = F_U \left(G_{mck}, \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix}}_{\Delta} \right) u$$



ii) LFT'nin birbirleri ile içsel bağlantıları yine bir LFT'dir [4]. Bu LFT'nin lineer sistem teorisinde önemli özelliklerinden birisidir. Bu bağlantılar tipik cebirsel işlemlerle LFT yapısını sağlam tutarlar. Bu sebeple LFT, bilinmeyen çoklu gösterimi için mükemmel bir seçimdir. Bu bağlantılar; kademeli bağlantı, paralel ve geri beslemeli bağlantılardır.

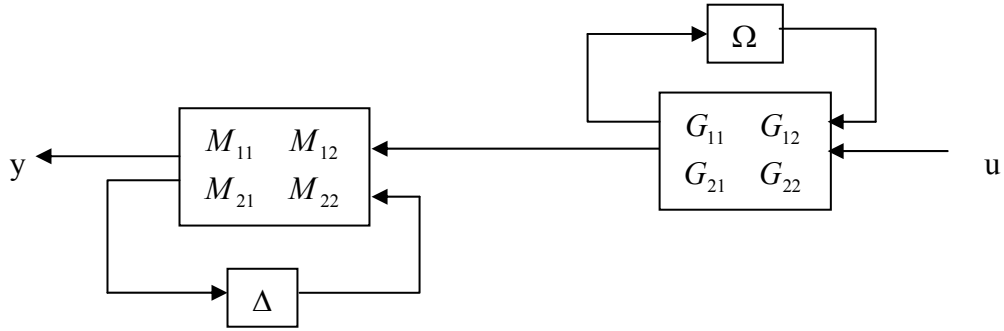
Şimdi bu bağlantıları örneklerle görelim.

2.2.2 Örnek: (Kesirli Doğrusal Dönüşümün Kademeli Bağlantısı)

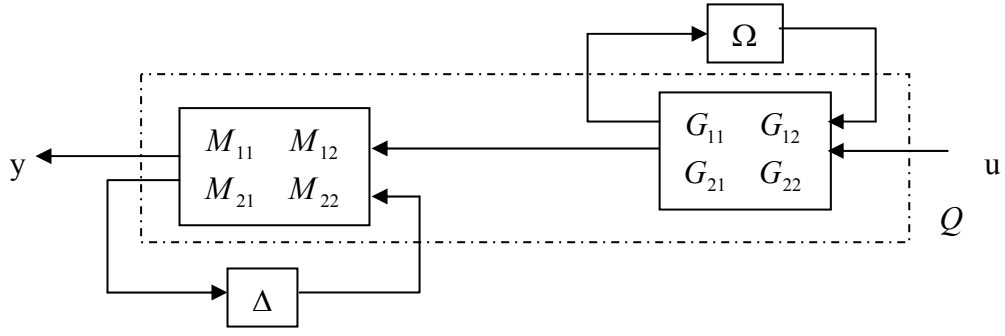
$F_U(G, \Omega)$ ile $F_L(M, \Delta)$ 'nin kademeli bağlantısı;

$$y = F_L(M, \Delta)F_U(G, \Omega)u$$

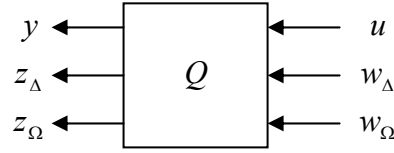
şeklinde, blok diyagramı;



biçimindedir. M ve G matrisleri Δ ve Ω 'dan ayrılır ve çerçeve içine alınıp bu çerçeveye Q adı verilirse;



Q , M ve G matrislerinin elemanlarından oluşur ve (u, w_Δ, w_Ω) 'den (y, z_Δ, z_Ω) 'ye değişkenleriyle ilişkilendirilirse,



diyagramı oluşur. Diyagramdan Q kolaylıkla hesaplanabilir [18].

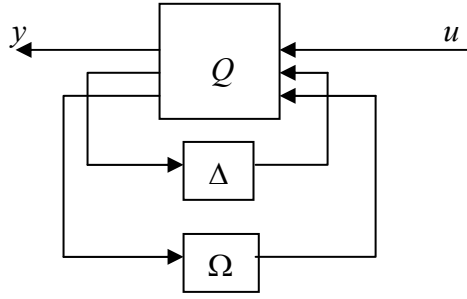
$$\begin{bmatrix} y \\ z_\Delta \\ z_\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}G_{22} & M_{12} & M_{11}G_{21} \\ M_{21}G_{22} & M_{22} & M_{21}G_{21} \\ \underbrace{G_{12} & 0 & G_{11}}_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w_\Delta \\ w_\Omega \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z_\Omega \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w_\Omega \end{bmatrix}$ matrisi ilişkisinden dolayı $\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$ matrisi vardır.

Böylece $F_L(M, \Delta)$ ve $F_U(G, \Omega)$ 'nin kademeli bağlantısı yine bir LFT'dir. Yani;

$$F_L(M, \Delta)F_U(G, \Omega) = F_L\left(Q, \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}\right)$$

dir. Blok diyagramı

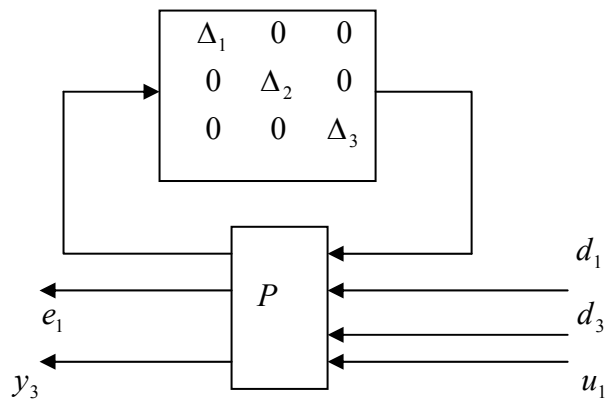
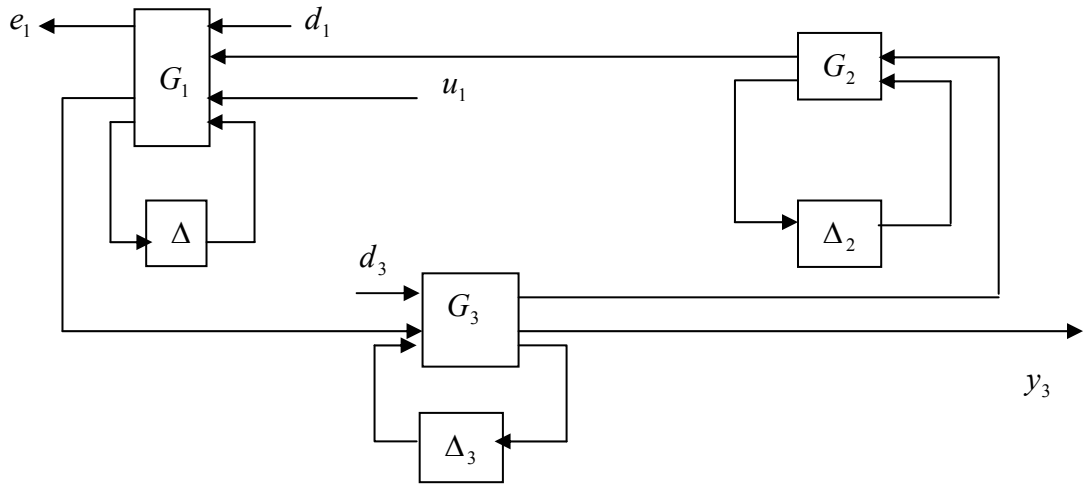


şeklindedir.

Benzer işlemler paralel bağlantılar için de yapılabilir. Ayrıca geri besleme bağlantıları ve bunların keyfi bağlantıları oluşturulabilir. Aşağıda LFT'nin geri besleme bağlantısına örnek verilmiştir.

2.2.3 Örnek: (Üç LFT'li Karmaşık Geri Besleme Bağlantısı)

Burada üç'lü LFT'yi tek bir LFT olarak (diyagonal matris içeren kendine özgü üç bozucunun özelliğini taşımak üzere) yazabiliriz.



Burada P, G_1, G_2, G_3 'ler ile birbirine bağlantılı diyagramlardan oluşur. Bu birbiriyle bağlantılı diyagramlar *sysic programı* ile kolaylıkla hesaplanabilir [18].

Not: Bilinmeyen matrisin etkilediği P bir blok diyagonal yapısıyla oluşturuldu. Bu son derece önemli bir gözlemdir.

iii) LFT'nin özelliklerinden biri de transfer fonksiyonlarını durum uzayı gerçekleştirmesine çok benzer biçimde kullanabilmesidir. Bunu gerçekleştirirken toplamsal, kademeli ve ters çevirme gibi işlemlerden yararlanır [4].

G_1 ve G_2 sistemleri verilsin. Verilen bu iki sistemde gerçekleştirmeler,

$$G_1(\Delta_1) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] = F_u \left(\left[\begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{array} \right], \Delta_1 \right) = D_1 + C_1 \Delta_1 (I - A_1 \Delta_1)^{-1} B_1$$

$$G_2(\Delta_2) = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] = F_u \left(\left[\begin{array}{cc} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{array} \right], \Delta_2 \right) = D_2 + C_2 \Delta_2 (I - A_2 \Delta_2)^{-1} B_2$$

biçimindedir. Burada $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}$ 'dir.

Buradan kademeli sistemi,

$$(G_1 G_2)(\Delta) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ \hline 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right]$$

gerçekleştirmesine sahiptir.

G_1 ve G_2 'nin toplamsal sistemi,

$$(G_1 + G_2)(\Delta) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ \hline 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

gerçekleştirmesine sahiptir.

Ters çevirme işleminde ise, kabul edelim ki kare matris şeklinde ve singular olmayan bir P matrisi, P_{12} ve P_{21} matrisleriyle $G = F_l(P, K)$ olarak verilsin. Buradan $K = F_u(P^{-1}, G)$ 'dir. Bu formülü aşağıdaki eşitlikleri yazmak suretiyle LFT için kolaylıkla açıklayabiliriz.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad u = Ky$$

$$z = F_l(P, K)w = Gw$$

K 'yı elde etmek için ifade düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}, \quad z = Gw$$

$$u = F_u(P^{-1}, G)y$$

$$K = F_u(P^{-1}, G)$$

olur.

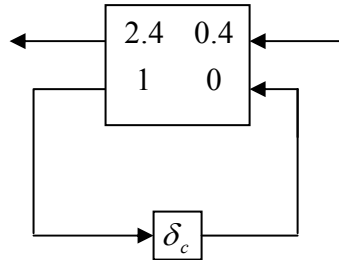
Şimdi bilinmeyen parametrelerin LFT olarak nasıl gösterileceğine bakalım.

2.2.4 Örnek: Kabul edelim ki bilinen bir değer üzerinde $2.0 \leq F(\delta_c) \leq 2.8$ olarak alınsın.

$\delta_c \in [-1, 1]$ için $F(\delta_c) = \frac{2.4 + 0.4\delta_c}{1 + 0.4\delta_c}$, olarak yazılır. Bu yazım bir kesirli doğrusal dönüşümdür.

$$F(\delta_c) = F_l \left(\begin{bmatrix} 2.4 & 0.4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \delta_c \right) = F_l(M, \delta_c)$$

Öyleyse blok diyagramı,



şeklinde gösterilir.

2.2.5 Örnek: Transfer fonksiyonu içinde bulunan parametrik bilinmeyenleri LFT ile gösterelim.

TGTÇ sistemlerde

- bilinmeyen kazanç (gain),
- birinci mertebe erteleme ile bilinmeyen zaman sabiti (lag) ve
- bilinmeyen gecikme (modelled with a Pade approximation)

bilinmeyenleri mevcut olabilir [8].

Sürecin transfer fonksiyonu;

$$y(s) = \underbrace{K}_{\text{gain}} \underbrace{\left(\frac{1}{\tau s + 1} \right)}_{\text{lag}} \underbrace{\left(\frac{-\gamma s + 1}{\gamma s + 1} \right)}_{\text{pade}} u(s)$$

şeklindedir.

Kabul edelim ki:

- Her bir bilinmeyen
 - $K \in [1 \ 3]$
 - $\gamma \in [0.05 \ 0.15]$
 - $\tau \in [1 \ 2]$

tanımlı ve

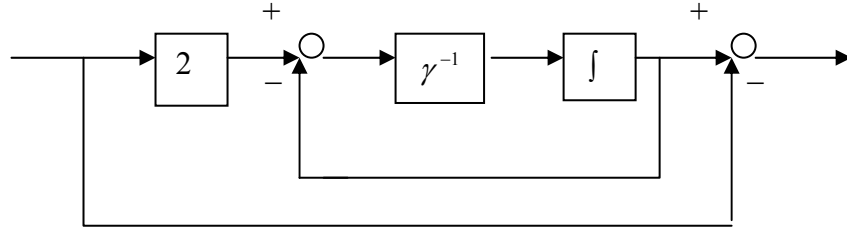
- K ve γ lineer bağımlı olsun. Yani K , $1 \rightarrow 3$ değer alırken γ benzer şekilde $0.05 \rightarrow 0.15$ değerlerini alsın.

Buradaki δ_1 ve δ_2 belirsizlikleri $-1 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$ tanımlı olmak üzere,

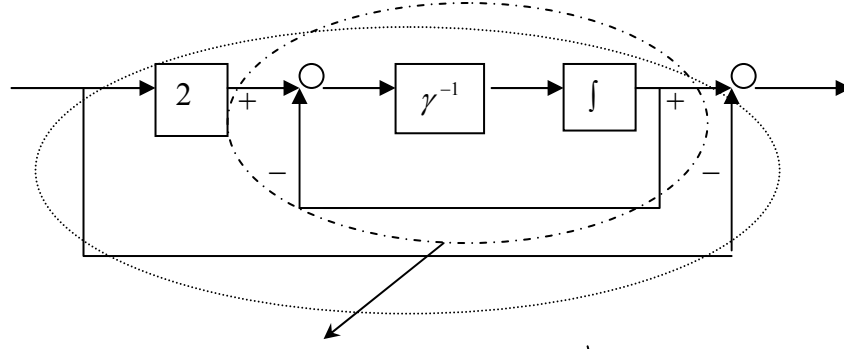
$$K = 2 + \delta_1, \quad \gamma = 0.1 + 0.05\delta_1, \quad \tau = 1.5 + 0.5\delta_2$$

eşitlikleri verilsin.

$\frac{-\gamma s + 1}{\gamma s + 1}$ için blok diyagramı,



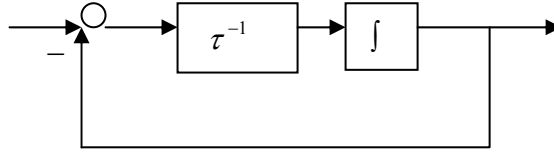
şeklindedir. Bu blok diyagramdan $\frac{-\gamma s + 1}{\gamma s + 1}$, nın elde edilmesini görelim.



$$\frac{1}{\gamma s}$$

$$2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma s}} - 1 = \frac{-\gamma s + 1}{\gamma s + 1}$$

Benzer şekilde $\frac{1}{s+1}$ blok diyagramı,



olur. K, γ^{-1} ve τ^{-1} modellerine üst dönüşüm LFT kullanılarak,

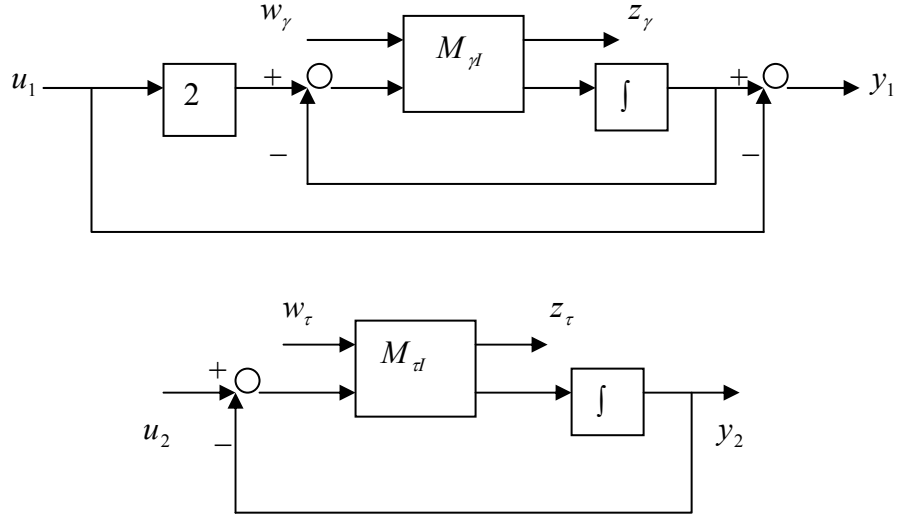
$$M_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_{\gamma^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 10 \\ -\frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix}, \quad M_d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

matrisleri $K = F_U(M_K, \delta_1)$, $\gamma^{-1} = F_U(M_{\gamma^{-1}}, \delta_1)$, $\tau^{-1} = F_U(M_d, \delta_2)$ olarak tanımlanırlar. Burada M_K matrisi alt dönüşüm matrisi üst dönüşüm matrisine uygun matris yapısıyla eşit kabul edilerek, $M_{\gamma^{-1}}$ ve M_d matrisleri ise 2.2.1 yardımcı teoremi ile elde edilmişlerdir.

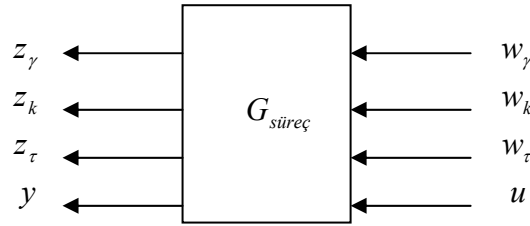
Birinci mertbe gecikme sistemi $F_U(G_p, \delta_1)$, birinci mertbe erteleme sistemi $F_U(G_L, \delta_2)$ şeklindedir. Burada G_p ve G_L , 2-girişli 2-çıkışlı 1-durumlu bilinen sistemlerdir.



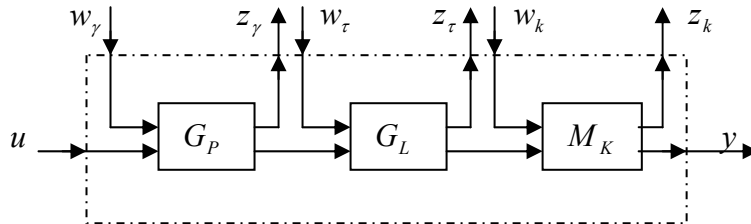
G_P ve G_L yapılarını blok diyagramda kolaylıkla gösterebiliriz.



Bilinmeyen K doğrudan $F_U(M_K, \delta_1)$ kullanılarak gösterilir. En sonunda 4-girişli 4-çıkışlı 2-durumlu $G_{süreç}$ sistemi oluşur.



Bu sürecin içyapısı,



biçimdedir. Belirsiz sistemin hareketi $y = F_U \left(G_{\text{süreç}}, \begin{bmatrix} \delta_1 I_2 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} \right) u$ üst dönüşüm

LFT'dir.

O halde δ_1 bozucusu, K ve γ çiftinden dolayı iki kez tekrar eder.

2.2.1 Tanım (Redheffer Star Üretimleri (Star Product)) : M ve Q

bölümlenmiş kompleks matrisleri,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

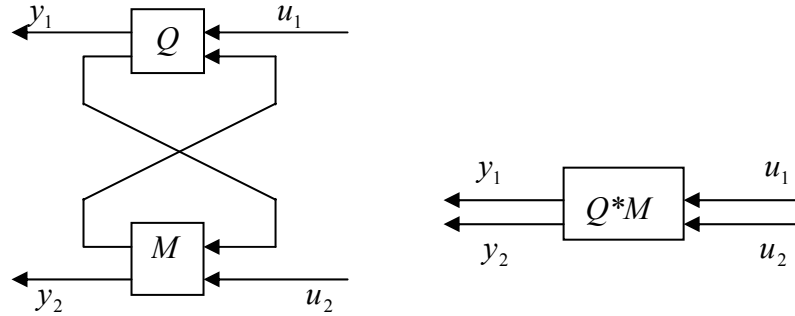
verilsin. $Q_{22}M_{11}$ matrisi iyi tanımlı kare matris şeklinde ve $(I - Q_{22}M_{11})^{-1}$ mevcuttur.

Bu verilere göre Q ve M 'nin star üretimleri aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$Q^*M = \begin{bmatrix} F_l(Q, M_{11}) & Q_{12}(I - M_{11}Q_{22})^{-1}M_{12} \\ M_{21}(I - Q_{22}M_{11})^{-1}Q_{21} & F_u(M, Q_{22}) \end{bmatrix}$$

O halde bu tanım yukarıdaki Q ve M matrislerinin bölümlenmesine bağlıdır.

Gerçekte bu tanım bir bölümlenme için iyi tanımlı olabilir başka bir bölümlenme için olmayabilir. Bu star üretiminin blok diyagramı aşağıdaki şekildedir.



Şekil 2.3 Redheffer Star Üretimleri

LFT'nin tanımı hatırlanırsa uygun boyutlu bir Δ matrisi için eğer gerekli matrislerin tümünün tersleri elde edilirse,

$$F_l((Q^*M), \Delta) = F_l(Q, F_l(M, \Delta))$$

eşitliği yazılabilir [4].

Alt ve üst LFT'leri tanımlamak için star üretim sembolleri

$$F_u(M, \Delta_u) = \Delta_u^*M \text{ ve } F_l(M, \Delta_l) = M^*\Delta_l$$

olarak genişletilebilir [7].

Bazı literatürlerde LFT aşağıda tanımlı matris fonksiyonlarını kullanır [5].

$$(A + BQ)(C + DQ)^{-1} \quad \text{veya} \quad (C + QD)^{-1}(A + QB)$$

Burada C genellikle pratiklikten dolayı tersi mevcut olarak kabul edilir. Buna göre aşağıdaki yardımcı teoremleri verebiliriz.

2.2.2 Yardımcı Teorem [19, Lemma 9.1]: Kabul edelim ki C tersi mevcut olan bir matris olsun. Buradan

$$M = \begin{bmatrix} AC^{-1} & B - AC^{-1}D \\ C^{-1} & -C^{-1}D \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} C^{-1}A & C^{-1} \\ B - DC^{-1}A & -DC^{-1} \end{bmatrix}$$

ile

$$(A + BQ)(C + DQ)^{-1} = F_l(M, Q)$$

$$(C + QD)^{-1}(A + QB) = F_l(N, Q)$$

olarak tanımlıdır. Eğer M belli koşulları sağlarsa tersi de geçerlidir.

2.2.3 Yardımcı Teorem [19, Lemma 9.2]: $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ matrisi ile

verilen bir LFT, $F_l(M, Q)$ olsun.

a) Eğer M_{12} tersi varsa

$$F_l(M, Q) = (C + QD)^{-1}(A + QB)$$

eşitliği $A = M_{12}^{-1}M_{11}$, $B = M_{21} - M_{22}M_{12}^{-1}M_{11}$, $C = M_{12}^{-1}$, $D = -M_{22}M_{12}^{-1}$ ve

herhangi bir singular olmayan E matrisi için,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = F_l \left(\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -I \\ M_{21} & 0 & M_{22} \\ \hline M_{11} & I & 0 \end{array} \right], -M_{12}^{-1} \right)$$

$$= F_l \left(\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -I \\ M_{21} & 0 & M_{22} \\ \hline M_{11} & I & M_{12} + E \end{array} \right], E^{-1} \right)$$

şeklindedir.

b) Eğer M_{21} tersi varsa

$$F_l(M, Q) = (A + BQ)(C + DQ)^{-1}$$

eşitliği $A = M_{11}M_{21}^{-1}$, $B = M_{12} - M_{11}M_{21}^{-1}M_{22}$, $C = M_{21}^{-1}$, $D = -M_{21}^{-1}M_{22}$ ve herhangi bir singular olmayan E matrisi için,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= F_l \left(\left[\begin{array}{cc|c} 0 & M_{12} & M_{11} \\ 0 & 0 & I \\ \hline -I & M_{22} & 0 \end{array} \right], -M_{21}^{-1} \right) \\ &= F_l \left(\left[\begin{array}{cc|c} 0 & M_{12} & M_{11} \\ 0 & 0 & I \\ \hline -I & M_{22} & M_{21} + E \end{array} \right], E^{-1} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bununla birlikte keyfi bir LFT, $F_l(M, Q)$ için M_{21} ve M_{12} matrisleri kare matris şeklinde ve tersleri mevcut değilse alternatif kesir formülü daha sınırlayıcıdır.

Görünüşte bazı basit fonksiyonlar LFT gösterimine sahip değildirler. Örneğin;

$$(A + QB)(I + QD)^{-1}$$

bazı M 'ler için $F_l(M, Q)$ şeklinde yazılamayabilir. Bununla birlikte,

$$N = \left[\begin{array}{c|cc} A & I & A \\ \hline -B & 0 & -B \\ D & 0 & D \end{array} \right], \quad \Delta = \begin{bmatrix} Q & \\ & Q \end{bmatrix}$$

ile

$$(A + QB)(I + QD)^{-1} = F_l(N, \Delta)$$

olarak yazılabilir.

O halde Δ 'nın boyutu Q 'nun iki kez yazımıdır.

2.3 Linear Durum Uzayı Bilinmeyi

Bir lineer durum uzayı modelinde bilinmeyen özel hali, bilinmeyen tanımlaması yapılarak kolaylıkla oluşturulabilir.

Bilinmeyenli durum uzayı modelini her bir, $i=1,2,3,\dots$ ve $\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$

için düşünelim.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i A_i & B_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i B_i \\ C_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i C_i & D_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^m \delta_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

$r_i = \text{rank} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}$ olsun ve her bir matris çarpanı olarak,

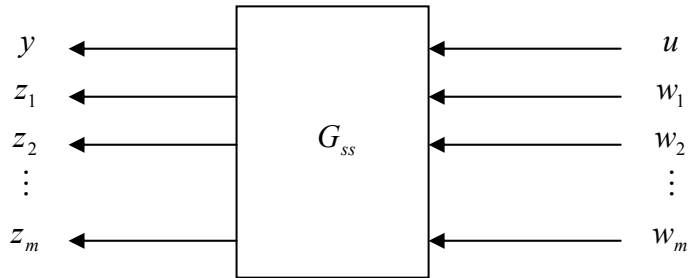
$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i \\ F_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i & H_i \end{bmatrix}$$

kabul edelim. Burada $\begin{bmatrix} E_i \\ F_i \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+n_y) \times r_i}$, $\begin{bmatrix} G_i & H_i \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{r_i \times (n+n_u)}$ dir.

Şimdi G_{ss} lineer sistemini ek girdi ve çıktılarla tanımlarsak, durum denklemleri

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & E_1 & \cdots & E_m \\ C_0 & D_0 & F_1 & \cdots & F_m \\ G_1 & H_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_m & H_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı, sistemin blok yapısı ise



biçimde olur.

Belirsiz sistem, G_{ss} çevresinde $y = F_L(G_{ss}, \Delta)u$ olacak şekilde bir LFT olarak temsil edilir. Burada Δ dönüşümleri $z \rightarrow w$ tanımlı ve

$$\Delta = \{diag[\delta_1 I_{r_1}, \delta_2 I_{r_2}, \dots, \delta_m I_{r_m}] : \delta_i \in \mathfrak{R}\}$$

yapısına sahiptir [18].

2.4 Modellenemeyen Dinamikler

Şimdiye kadar bilinmeyen içeren sistemler, parametrik bilinmeyen tanımlanarak LFT sistemi şeklinde temsil edildi. Bilinmeyen modelleri parametrik bilinmeyen için sınırlandırılmaz [18]. Çoğu kez;

- düşük mertebeli sözde model, plantın düşük-orta frekans sıralı hareketi bulunarak uygun tanımlanabilir,
- yüksek-frekansta ise plantın hareketi bilinmez ve asıl plantın dinamik mertebesi bile bilinmez.

Bu durumlarda parametrik bilinmeyenden daha zengin bir şeye bu bilinmeyi temsil etmek için ihtiyaç duyulur.

2.4.1 Modellenemeyen Dinamiklerin Çarpma Modeli

Bu kullanım gerçek sistemin hareketi sırasında frekansa bağlı bilinmeyen yüzdesini belirtir. Bilinmeyen kümeyi belirtmek için iki şey seçilir;

- bir sözde model $G(s)$,
- bir çarpım bilinmeyenli ağırlık fonksiyonu $W_u(s)$.

Bu verilenlerle, bir çarpma bilinmeyen kümesi;

$$M(G, W_u) = \left\{ \tilde{G} : \left| \frac{\tilde{G}(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \leq |W_u(j\omega)| \right\}$$

olarak tanımlanır. Eklenen sınırlamayla \tilde{G} 'nin sağ yarı düzlemdeki kutuplarının sayısı (RHP) G 'nin sağ yarı düzlemdeki kutuplarının sayısına eşitlenmiş olur.

Açıklamalar:

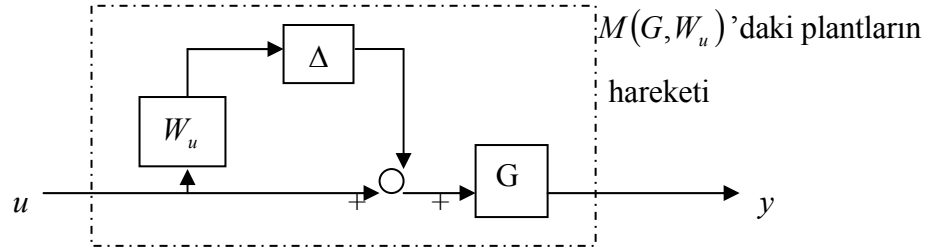
- Sözde model G plantı ve $M(G, W_u)$ ile gösterilen bütün plantlar arasındaki her bir frekans da maksimum potansiyel yüzdelik-devir farklılığını $|W_u(j\omega)|$ temsil

eder.

- Buradan anlaşılır ki $M(G, W_u)$, G de merkezleştirilen olası plantların bir yığındır.
- Nyquist haritası üzerinde $G(jw)$ de merkezleştirilen bir diskin yarıçapı $|W_u(jw)G(jw)|$ olmak üzere bilinmeyen tanımından olası değerler kümesi $\tilde{G}(jw)$ olarak ele alınabilir.

2.4.1.1 Çarpım Modelindeki Bilinmeyen

Şimdi $\Delta = \frac{\tilde{G} - G}{GW_u}$ tanımlamak suretiyle her bir \tilde{G} ,



olarak yazılabilir. $\tilde{G} \in M(G, W_u)$ olması şartına göre

$$\max_w |\Delta(jw)| \leq 1 \quad \text{ve} \quad \#RHP \text{ kutuplar}[G(1 + W_u \Delta)] = \#RHP \text{ kutuplar}[G]$$

koşullarını sağlayan bir transfer fonksiyonu olmalıdır.

O halde Δ 'nın kendisi kararsız olabilir. Gerçekten bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

2.4.1 Örnek : Çarpım şeklinde olmayan sözde model G 'ye benzeyen

modellerin bir kümesini düşünelim. Mesela $G = \frac{1}{s-1}$ ve ağırlık fonksiyonunu

$$W_u = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} s + 1 \right)}{\frac{1}{32} s + 1} \quad \text{alalım.}$$

$\bar{\gamma} > 0$ sabiti için plantların bir kümesini $\left\{ \frac{1+\gamma}{s-1-\gamma} : |\gamma| \leq \bar{\gamma} \right\}$ şeklinde düşünelim.

Acaba $\bar{\gamma}$ 'nin alacağı hangi değer için bu tanımlanan küme $M(G, W_u)$ çarpma modeli kümesinde bulunur?

En büyük plantların kümesini $\left\{ \frac{1+\gamma}{s-1-\gamma} : |\gamma| \leq \bar{\gamma} \right\} \subset M(G, W_u)$ olarak tanımlayalım.

Burada \tilde{G} 'nin kararsız kutupları G 'ninkilerden farklıdır. Bozucu olarak

$$\Delta = \frac{\left(\frac{1}{32} s + 1 \right) \gamma^s}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} s + 1 \right) (s - 1 - \gamma)}$$

alınır ve basit cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} G(1 + W_u \Delta) &= \frac{1}{s-1} \left(1 + \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} s + 1 \right) \Delta}{\frac{1}{32} s + 1} \right) \\ &= \frac{(s-1)(1+\gamma)}{(s-1)(s-1-\gamma)} \\ &= \frac{1+\gamma}{s-1-\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bizim istediğimiz sonuçtur. Ayrıca $G(1 + W_u \Delta) \in M(G, W_u)$ olması Δ 'nın

$$\max_{s=jw, w \in \mathbb{R}} \left| \frac{\left(\frac{1}{32} s + 1 \right) \gamma^s}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} s + 1 \right) (s - 1 - \gamma)} \right| \leq 1$$

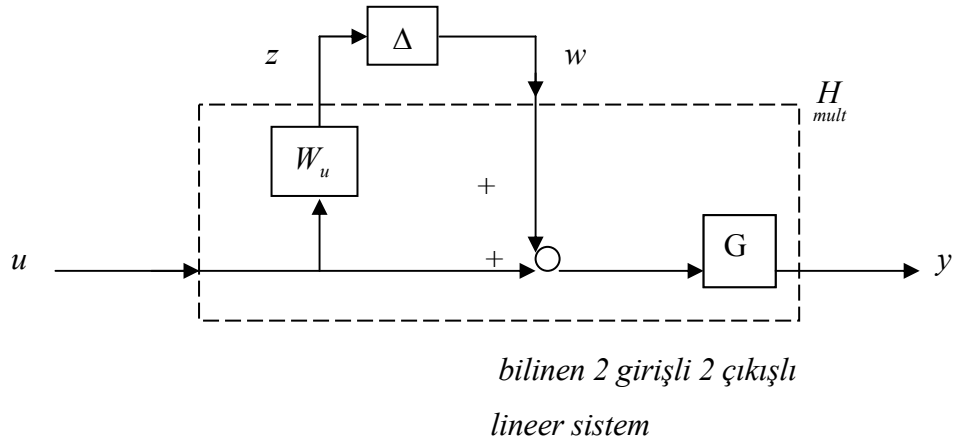
olması koşulu altında sağlanır. Bu durum $\gamma \leq 0.425$ geçerlidir. μ Tools kullanımı burada en kolay yaklaşımdır ve hesaplama için en uygun olanıdır [4]. γ 'nın değişik değerleri için haritası çıkarılır, haritanın 1 ile ilişkili büyüklüğü (magnitüde) karşılaştırılarak limit $\bar{\gamma}$ belirtilirse

$$\left| \frac{\tilde{G}(jw) - G(jw)}{G(jw)W_u(jw)} \right| \leq 1$$

olduğu görülür ($\bar{\gamma} \approx 0.425$). Buradan \tilde{G} içindeki içsel bağlantılar (Δ, G, W_u) üç ayrı fiziksel eleman olarak incelenmez. Bunun yerine G 'ye benzer plantların bir kümesinin bir parametrizasyonu $(M(G, W_u))$ tanımından) olarak birleştirilirler.

2.4.1.2 LFT Olarak Çarpım Modeli

Genel olarak, Δ bilinmeyen elemanlarını G ve W_u bilinenlerinden ayırmak suretiyle $M(G, W_u)$ bilinmeyen plant kümesini bir LFT olarak gösterelim.



Bilinmeyen parça H_{mult} mevcut olan değeriyle,

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & W_u \\ G & G \end{bmatrix}}_{H_{mult}} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad w = z\Delta$$

tanımlanarak LFT olarak $y = F_u(H_{mult}, \Delta)u$ şeklinde yazılır.

H_{mult} , *sysic programı* kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilir [18].

Özetle modellenemeyen dinamiklerde çarpım bilinmeyen modeli:

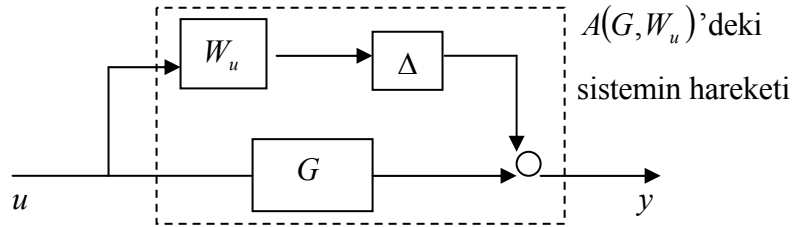
- Plant değişkenlerinin geniş bir çeşitliliğini yakalar.
- Hem parametrik değişimleri hem de modellenemeyen dinamikleri gösterir.
- Nyquist haritasında her bir frekans da bilinmeyen diski gösterir.
- Modellere bilinmeyi yerleştirme yaklaşımı için kolay ve basittir.

2.4.2 Modellenemeyen Dinamikler İçin Toplama Modeli

Modellenemeyen dinamikler için ayrıca toplama bilinmeyen modeli kullanılabilir. Verilen sözde model G ile toplama bilinmeyen ağırlık fonksiyonu W_u , toplamalı bilinmeyen kümeyi;

$$A(G, W_u) = \{ \tilde{G} : |\tilde{G}(j\omega) - G(j\omega)| \leq |W_u(j\omega)| \}$$

olarak tanımlar. Eklenen sınırla \tilde{G} 'nin sağ yarı düzlemdeki kutuplarının sayısı G 'nin sağ yarı düzlemdeki kutuplarının sayısına eşitlenmiş olur. Blok diyagramı,



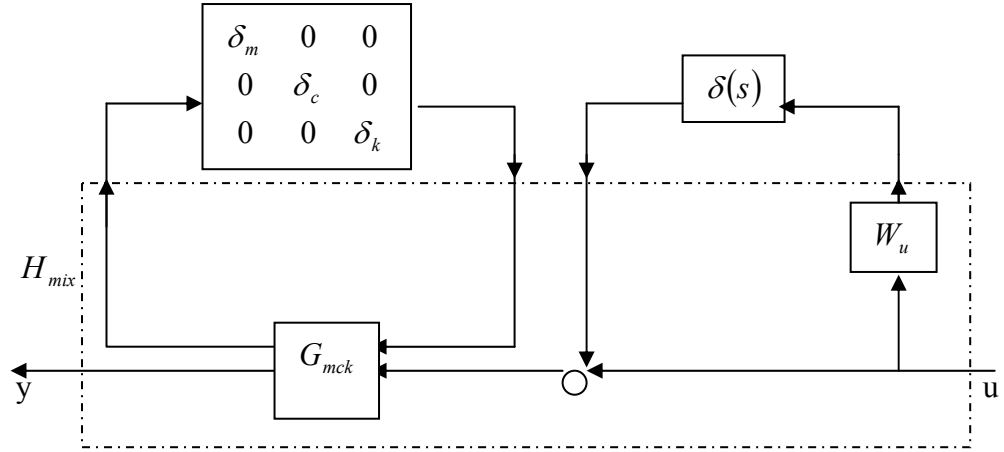
şeklindedir.

Çarpmadaki gibi $A(G, W_u)$ 'deki sistemin hareketi bir LFT olarak yazılabilir.

2.5 Karışık Bilinmeyen İçeren Sistemleri LFT Olarak Modelleme

Belirsizlik, parametrik belirsizlik ve modellenemeyen dinamiklerin her ikisini de içerecek biçimde karışık bilinmeyenli olabilir. Örneğin; parametrik belirsizlik için *2. mertebe m,c,k belirsiz sistemi* ve modellenemeyen dinamiklerin yüksek frekanslı *çarpım belirsizlik modeli* gibi [18].

Bu modelin blok diyagramı,



şeklindedir. Olası hareketi bir LFT olarak $y = F_u(H_{mix}, \Delta)u$ biçimde gösterilir. Burada Δ bozucu matris yapısı $\Delta = \text{diag}\{\delta_m, \delta_c, \delta_k, \delta(s)\}$ formunda ve H_{mix} 5-girişli 5-çıkışlı bilinen sistemdir.

Şuana kadar belirsiz sistemlerin LFT olarak gösterilmelerini inceledik. Bölüm 3'te sistemlerin çalışmalarını kararlı hala getirmek için ne yapılması gerektiğini inceleyelim.

3. LFT SİSTEMLERİNİN SAĞLAM KARARLILIĞI (ROBUST STABILITY)

Bu bölümde LFT mekanizmasındaki belirsizlik yapısını tanımlayacağız. Ayrıca bu belirsiz yapı bilgisiyle LFT sistemlerinin kararlılığını inceleyeceğiz. O halde acaba belirsiz LFT sistemlerinin kararlılık analizi nasıl yapılır? Bu sorunun cevabını μ kararlılık (stability) kavramı ile açıklayacağız. Ama öncelikle belirsiz matrislerin yapısını verelim.

3.1 Belirsizliğin Yapısı

Belirsiz sistemlerdeki bilinmeyen yapı bilgisi matris yapısına sahiptir. Bilinmeyen yapıyı burada bozucu (perturbation) olarak ele alacağız. Bozucu matrislerin yapısı “*mu comandına*” geçirilerek görülebilir [18]. Her bir belirsizlik bloğu hemen hemen üç özelliği belirtmelidir:

1. Bozucunun tipi (gerçek parametrelili, modellenemeyen dinamik gibi),
2. Bozucunun boyutu,
3. Bağımsız yerleşmelerin sayısı, belirli bilinmeyen oluşturur (2.2.5 örnek).

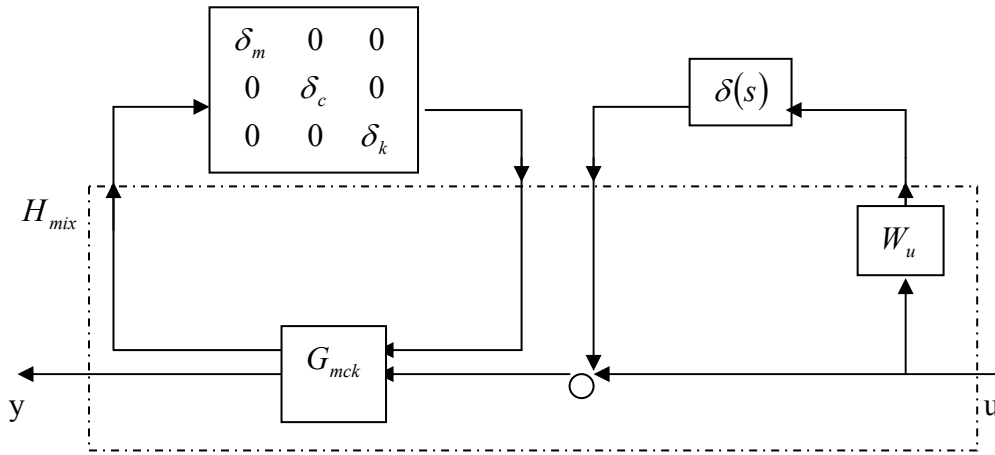
Belirsizlik yapı bilgisi $n \times 2$ görünümü olarak saklanır. Bu *blok yapısı görünümü* olarak adlandırılır. Burada

- n belirsiz matris içindeki farklı bozucu elemanların sayısı,
- i 'nci kök geleneksel kullanımlarla i 'nci belirsiz bloğu tanımlar.
 - Bir skaler gerçek parametre $[-1 \ 1]$ veya $[-1 \ 0]$ ile nitelendirilir.
 - f kez tekrar eden bir gerçek parametre $[-f \ 0]$ ile nitelendirilir.

- Bir 1×1 'lik (örneğin skaler) modellenemeyen dinamikler bozucusu (daha sonra kompleks olarak ele alacağız) $[1 \ 1]$ ile nitelendirilir.
- Bir $r \times c$ 'lik (örneğin tam dikdörtgen şeklinde) modellenemeyen dinamikler bloğu $[r \ c]$ ile nitelendirilir.

Belirsiz elemanların sıralanması bilinen sistemlerin giriş-çıkış kanallarının düzenleriyle oluşmalıdır. Ayrıca Δ notasyonunu kullanmak bütün bozucu matrislerin kümesiyle uygun yapıyı göstermek içindir.

Bozucu matris yapısını, karışık bilinmeyenli LFT sisteminde görelim.



Buradaki Δ yapısı,

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix} : \delta_1 \in \mathfrak{R}, \delta_2 \in \mathfrak{R}, \delta_3 \in \mathfrak{R}, \delta_4(s) \right\}$$

`>>deltaset = [-1 1;-1 1;-1 1;1 1]; % m/c/k/unmodeled`

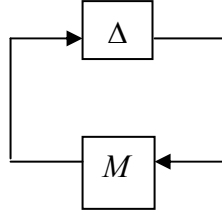
olarak gösterilir.

Şimdi belirsiz yapı bilgisiyle LFT sisteminin kararlılığına bakalım. Bunu yaparken μ analizi dediğimiz kavramdan yararlanacağız. Burada amaç sistem için kararlılık duyarlılığını belirtmektir.

3.2 μ Analizi

Her bir μ analizi aşağıdaki adımlardan oluşur.

1. Aşağıdaki gibi geri beslemeli diyagram içindeki problem analiz diyagramı olarak adlandırılır.



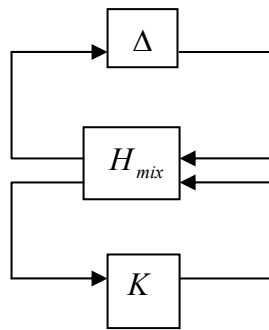
Şekil 3.1 μ Analiz diyagramı

Burada:

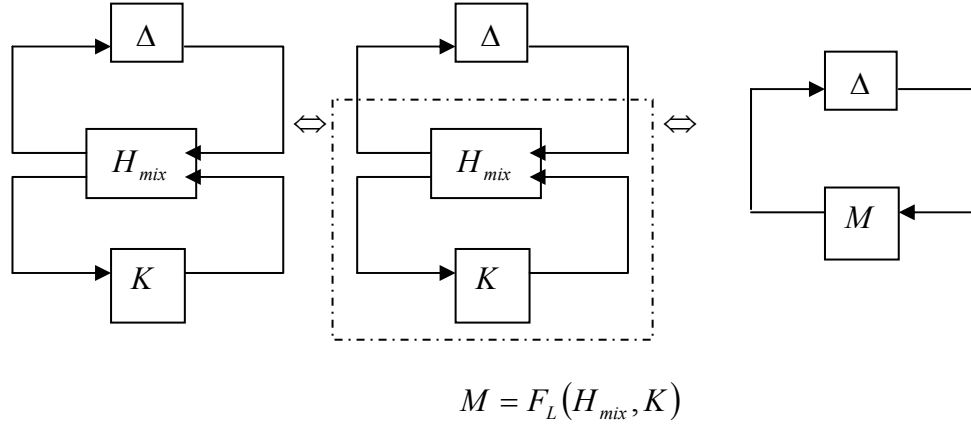
- M bilinen bir sistem
 - Δ bozucu bir yapılandırma.
2. M 'nin bir frekans cevabı hesaplanır.
 3. Frekans cevabı üzerinde “*mu komutu*” çalışır (comand run).
 4. Δ bozucularının yapısı tanımlanır.
 5. μ hesaplamasından harita sınırları bulunur.

3.2.1 Örnek: Karışık bilinmeyenli LFT sisteminin blok diyagramından analiz diyagramını oluşturalım.

mck parametrik belirsizlik sistemi ve modellenemeyen dinamiklerle oluşturulan H_{mix} 'i K denetleyicili geri besleme boyunca düşünelim. Burada $u = Ky$ 'dir.



H_{mix} , K ile birlikte $M = F_L(H_{mix}, K)$ olarak adlandırılırsa,



elde edilir.

3.2.2 Tanım: Singular Değer Ayrışması (Singular Value Decomposition)

Singular değer ayrışması (SVD) matris analizinde çok kullanışlı bir araçtır. Bir matrisin singular değerleri matris boyutunun ölçüsüdür.

$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ olsun.

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in \mathbb{F}^{m \times m}$$

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

olacak şekilde matrisleri tektir (unitary). Öyle ki

$$A = U \Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Burada

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix}$$

ve $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$, $p = \min\{m, n\}$ dir.

σ_i , A 'nın i . singular değeridir ve u_i ve v_j vektörleri sırasıyla i . sol singular vektörler ve j . sağ singular vektörleridir.

$$Av_i = \sigma_i u_i$$

$$A^* u_i = \sigma_i v_i$$

dir ve yukarıda verilen eşitlikler

$$A^* Av_i = \sigma_i^2 v_i$$

$$AA^* u_i = \sigma_i^2 u_i$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle σ_i^2 , AA^* ya da A^*A 'nın öz değeridir. u_i , AA^* 'nın öz vektörü, v_i ise A^*A 'nın öz vektörüdür.

Singular değerler için aşağıda verilenler kabul edilir.

- $\bar{\sigma}(A) = \sigma_{\max}(A) = \sigma_1 = A$ 'nın en büyük singular değeridir.
- $\underline{\sigma}(A) = \sigma_{\min}(A) = \sigma_p = A$ 'nın en küçük singular değeridir.

A matrisinin en büyük öz değerine spectral yarıçap ve $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ ile gösterilir.

3.2.3 Tanım [19]: μ Yapılandırılmış Singular Değeri (Structured Singular Value)

Yapılandırılmış singular değeri tanımlamadan önce aşağıdaki soruyu cevaplayalım.

Verilen bir $M \in \mathbb{C}^{p \times q}$ matrisi için $\bar{\sigma}(\Delta)$ 'nın duyarlılığında en küçük bozucu $\Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}$ matrisi ne olmalıdır ki $\det(I - M\Delta) = 0$ olsun?

Bu sorunun cevabını $\alpha_{\min} = \inf\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0, \Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}\}$ kümesinde bulabiliriz. Gerçekten kolaylıkla görülebilir ki

$$\alpha_{\min} = \inf\{\alpha : \det(I - \alpha M\Delta) = 0, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1, \Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}\} = \frac{1}{\max_{\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1} \rho(M\Delta)}$$

ve

$$\max_{\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1} \rho(M\Delta) = \bar{\sigma}(M)$$

dir.

Sonuç olarak küçük bir sağlamaşamayan Δ :

$$\Delta_{sağ} = \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} v_1 u_1^*, \quad \det(I - M\Delta_{sağ}) = 0$$

ile sağlamaşamayan bozucu matrisin en küçük normu $\frac{1}{\bar{\sigma}(M)}$ 'dir. Burada

$M = \bar{\sigma}(M)u_1v_1^* + \sigma_2u_2v_2^* + \dots$ bir singular değer ayrışmasıdır.

Öyleyse bir matrisin en büyük singular değerinin karşılığı en küçük sağlamaşamayan bozucu matrisin ölçülmesiyle elde edilir. Buradan M 'nin en büyük singular değeri için

$$\bar{\sigma}(M) = \frac{1}{\inf\{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0, \Delta \in C^{q \times p}\}}$$

tanımını verebiliriz.

Şimdi benzer problemi sınırlanan Δ yapısıyla düşünelim. Özellikle blok diyagonal Δ matris yapısını düşüneceğiz. Blokların iki tipi olarak; *tekrar eden skaler bloklar* ve *tam blokları* ele alacağız. S ve F sırasıyla, tekrar eden skaler blokların sayısını ve tam blokların sayısını temsil etsinler. Blokların boyutlarını r_1, r_2, \dots, r_S ve m_1, m_2, \dots, m_F pozitif tam sayıları ile tanımlayalım. i . tekrar eden skaler blok $r_i \times r_i$ iken, j . tam blok $m_j \times m_j$ olsun. Bu tam sayılarla verilen $\Delta \in C^{n \times n}$ olarak

$$\Delta = \{ \text{diag} [\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in C^{m_j \times m_j} \} \quad (3.1)$$

tanımlayalım (burada tanımladığımız δ ve Δ bozuculardır). Bütün boyutlar arasındaki uygunluk için

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n$$

olmalıdır. Çoğunlukla Δ 'nın normla sınırlandırılan alt kümelerine ihtiyaç duyacağız.

$$\mathbf{B}\Delta = \{ \Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \}$$

$$\mathbf{B}^o\Delta = \{ \Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) < 1 \}$$

Burada “ \circ ” sembolü açık diski temsil eder. (3.1)'deki eşitliği mümkün basitlikte tutmak için, ilk olarak tekrar eden skaler blokların hepsini yerleştiririz; aslında herhangi bir sırada da gelebilirler. Ayrıca tam bloklar kare matris şeklinde değildirler, fakat ifade açısından onlar sınırlandırılarak uygun bir şekilde kaydedilir.

Şimdi benzer bir soru daha soralım.

Verilen bir $M \in \mathbb{C}^{p \times q}$ matrisi için $\bar{\sigma}(\Delta)$ 'nın duyarlılığında en küçük bozucu $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ matris ne olmalıdır ki $\det(I - M\Delta) = 0$ olsun?

Bu sorunun yanıtı için yine

$$\alpha_{\min} = \inf \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M\Delta) = 0, \Delta \in \mathbf{\Delta} \}$$

kümesiyle ilgileneceğiz. Yeniden

$$\alpha_{\min} = \inf \{ \alpha : \det(I - \alpha M\Delta) = 0, \Delta \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta} \} = \frac{1}{\max_{\Delta \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta}} \rho(M\Delta)}$$

olarak yazabiliriz.

Benzer şekilde yapılandırılmama (modellenemeyen belirsizlikler) durumu için $\frac{1}{\alpha_{\min}}$ yapılandırılmış singular değer olarak adlandıracağız. Ve $\mu_{\Delta}(M)$ ile göstereceğiz.

3.2.4 Tanım [19]: $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ için

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0 \}}$$

yapılandırılmış singular değer olarak adlandıracağız. $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ değilse $I - M\Delta$ singular olur, bu durumda $\mu_{\Delta}(M) = 0$ 'dır.

3.2.5 Uyarı [19, Remark 10.1]: Genelliği bozmaksızın, minimum norm $\mathbf{\Delta}$ 'daki tam blokların her biri rank=1 olacak şekilde seçilebilirler. Bunu görmek için $S=0$ olsun (yani bütün bloklar tam bloktur). Bazı $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ için $I - M\Delta$ singular olarak verilsin. Buradan bir $x \in \mathbb{C}^n$ vardır öyle ki $M\Delta x = x$ 'dir. Şimdi $\mathbf{\Delta}$ ile uyumlu x bölümlenmesi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_F \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{C}^{m_i}, \quad i = 1, \dots, F$$

$$\tilde{\Delta}_i = \begin{cases} \frac{\Delta_i x_i x_i^*}{\|x_i\|^2}, & x_i \neq 0 \\ 0, & x_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, F \text{ için}$$

olsun.

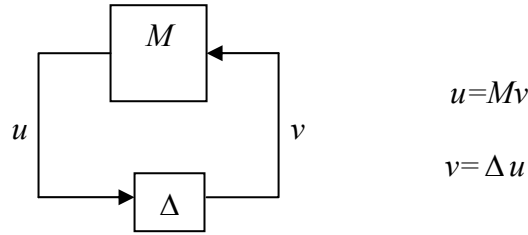
$$\tilde{\Delta} = \text{diag}\{\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \dots, \tilde{\Delta}_F\}$$

olarak tanımlanır. Buradan $\bar{\sigma}(\tilde{\Delta}) \leq \bar{\sigma}(\Delta)$ ve $\tilde{\Delta}x = \Delta x$ 'dir. Böylece

$$(I - M\tilde{\Delta})x = (I - M\Delta)x = 0 \text{ (yani } I - M\tilde{\Delta} \text{ ayrıca singulardır) dır.}$$

Sonuç olarak, genel Δ bozucusunu özel durumlu bir $\tilde{\Delta}$ bozucusu koşulu altında yeniden yerleştirebiliriz. Burada $\tilde{\Delta}$, $\bar{\sigma}(\cdot)$ duyarlılığındadır. Ve her bir blok için rank=1'dir (burada özel durumu sağlaması koşulu vardır).

$\mu_{\Delta}(M)$ geri beslemeli açıklamasını,



- Eğer $I - M\Delta$ singular değilse sadece bir çözüm vardır ve $u=v=0$ 'dir.
- Eğer $I - M\Delta$ singular ise sonsuz çözüm vardır ve çözümlerin $\|u\|, \|v\|$ normları keyfi büyüklükte olabilir.

Bu durumdaki sistemlere sırasıyla “kararlı” ve “kararsız” diyebiliriz. Buradan $\mu_{\Delta}(M)$ için kararsızlığa sebep olan en küçük Δ yapılandırmasının bir ölçümü olduğu söylenebilir [4].

3.2.6 Yardımcı Teorem [19, Lemma 10.1]: $\mu_{\Delta}(M) = \max_{\Delta \in \mathbf{B}\Delta} \rho(M\Delta)$ 'dir.

Burada ρ spectral yarıçap tanımlar.

Bu yardımcı teoreme bakıldığında $\mu : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$ sürekli bir fonksiyon olduğu görülür. Genelde $\mu : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$ fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlamadığından bir

norm da değildir. Bununla birlikte herhangi bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\mu(\alpha M) = |\alpha| \mu(M)$ 'dir. Öyleyse M 'nin ne kadar büyük olmasıyla ilgilidir.

$\mu_{\Delta}(M)$, bilinen lineer cebir nicelikleriyle ilişkili olduğu zaman Δ iki sınır kümesinden biridir.

- Eğer $\Delta = \{\delta I : \delta \in \mathbb{C}\}$ ise $\mu_{\Delta}(M) = \rho(M)$ 'dir [4].

İspat: Δ 'daki $\det(I - M\Delta) = 0$ koşulunu sağlayan Δ 'lar, M 'nin sıfır olmayan öz değerlerine karşılık gelen değerlerdir.

Bu en küçük değerlerden biri en büyük (magnitüde) öz değerle birleştirilendir. Böylece $\mu_{\Delta}(M) = \rho(M)$ olur.

- $\Delta = \mathbb{C}^{n \times n}$ ise $\mu_{\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M)$ [19].

En genel $\Delta = \{diag[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\}$ kümesi için,

$$\{\delta I_n : \delta \in \mathbb{C}\} \subset \Delta \subset \mathbb{C}^{n \times n}$$

yazabiliriz. μ tanımından doğrudan,

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (3.2)$$

sonucu çıkar. Bu sınırlar sadece keyfi genişlikte olabilen ρ ve $\bar{\sigma}$ arasındaki aralıktan dolayı isteğimiz için yeterli değildirler.

3.2.7 Örnek:

1) Kabul edelim ki $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$ olsun. Herhangi $\beta > 0$ için $M = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise

$\rho(M) = 0$ ve $\bar{\sigma}(M) = \beta$ 'dir. Fakat kabul edilebilir bir Δ için $\det(I - M\Delta) = 1$ olacağından $\mu(M) = 0$ 'dir.

2) Kabul edelim ki $\Delta = \mathbb{C}^{n \times n}$ olsun. Buradan

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ ise } \rho(M) = 0 \text{ ve } \bar{\sigma}(M) = 1 \text{ 'dir. } \det(I - M\Delta) = 1 + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} \text{ dolay\u0131,$$

$\min\left\{\max_i |\delta_i| : 1 + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = 0\right\} = 1$ oldu\u011fu kolaylıkla g\u00f6r\u00fclebilir. \u00d6yleyse $\mu(M) = 1$ 'dir.

Bu nedenle ρ ve $\bar{\sigma}$ basit durumlarda bile s\u0131n\u0131rlara yarar sa\u011flamazlar. S\u0131n\u0131rlara g\u00fcvenirlik sa\u011fladıkları zaman $\rho \approx \bar{\sigma}$ durumundadırlar. Bununla beraber, M \u00fczerindeki d\u00f6n\u00fc\u015fmeleri d\u00fc\u015f\u00fcnrsek s\u0131n\u0131rlar ρ ve $\bar{\sigma}$ 'yi etkilerken $\mu_\Delta(M)$ 'yi etkilemezler. Bunu yapmak i\u00e7in $\mathbb{C}^{n \times n}$ iki alt k\u00fcmesi,

$$\mathbf{Q} = \{Q \in \Delta : Q^*Q = I_n\}$$

$$\mathbf{D} = \{diag[D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i},$$

$$D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathfrak{R}, d_j > 0\}$$

olarak tanımlanır.

0 halde herhangi bir $\Delta \in \Delta$, $Q \in \mathbf{Q}$ ve $D \in \mathbf{D}$ i\u00e7in,

$$Q^* \in \mathbf{Q}, \quad Q\Delta \in \Delta, \quad \Delta Q \in \Delta, \quad \bar{\sigma}(Q\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta Q) = \bar{\sigma}(\Delta)$$

$$D\Delta = \Delta D \tag{3.3}$$

dır [19]. Buradaki \mathbf{Q} k\u00fcmesi $\mathbf{B}\Delta$ 'nın 's\u0131n\u0131rlarının k\u00fcmesi (boundary)' dir [14].

Bu sonu\u00e7larla a\u015fa\u011f\u0131daki teoremi verelim.

3.2.8 Teorem [19]: B\u00fct\u00fcn $Q \in \mathbf{Q}$ ve $D \in \mathbf{D}$ i\u00e7in,

$$\mu_\Delta(MQ) = \mu_\Delta(QM) = \mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1})$$

dir.

\u0130spat: B\u00fct\u00fcn $D \in \mathbf{D}$ ve $\Delta \in \Delta$ i\u00e7in, Δ ile D de\u011fi\u015fmeli oldu\u011fundan

$$\det(I - M\Delta) = \det(I - MD^{-1}\Delta D) = \det(I - DMD^{-1}\Delta).$$

Buradan $\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1})$ 'dir. Ayrıca her bir $Q \in \mathbf{Q}$ i\u00e7in $\det(I - M\Delta) = 0$ ise

$\det(I - MQQ^*\Delta) = 0$ 'dir. $Q^*\Delta \in \Delta$ ve $\bar{\sigma}(Q^*\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta)$ oldu\u011fundan dolay\u0131

$\mu_{\Lambda}(MQ) = \mu_{\Lambda}(M)$ olarak elde ederiz. Bu ispat aynı zamanda QM içinde geçerlidir. Buradan (3.2)'deki sınırlar 3.2.6 yardımcı teoremi ile

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \max_{\Delta \in \mathbf{BA}} \rho(\Delta M) = \mu_{\Lambda}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (3.4)$$

olarak yazılır. O halde D matrisi içindeki herhangi bir sıfır olamayan en son eleman skaler γ için 1'e doğru normalleştirilir. Yani $DMD^{-1} = (\gamma D)M(\gamma D)^{-1}$ dır.

3.2.9 Uyarı [19, Remark 10.2]: O halde teorem 3.2.8 ve (3.4) eşitsizliğinde ölçek D kümesi mutlaka Hermitian olarak sınırlanamaz. Gerçekte (3.3)'teki koşulu sağlayan singular olmayan matrislerin herhangi bir kümesiyle yeniden yerleştirilebilir. Bununla birlikte ölçek matrislerin kümesini genişletme, (3.4) eşitsizliğindeki üst sınır için gerçekleşemez. Bunu şu şekilde görebiliriz: Kabul edelim ki D herhangi bir singular olmayan matris olsun öyle ki $D\Delta = \Delta D$ 'dir. Buradan bir Hermitian matris $0 < R = R^* \in D$ ve bir tek (unitary) Q matrisi vardır öyle ki $D = QR$ ve

$$\inf_D \bar{\sigma}(DMD^{-1}) = \inf_D \bar{\sigma}(QRM R^{-1}Q^*) = \inf_{R \in D} \sigma(RMR^{-1})$$

dir. Bunun sonucu olarak, Hermitian D varsayımında genellik kaybedilmez.

3.3 Sınırlar

Sınırlar üzerinde

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \mu_{\Lambda}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$$

dir. Alt sınır her zaman bir eşitliktir [5].

3.3.1 Teorem: $\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(MQ) = \mu_{\Lambda}(M)$ 'dir [14].

3.3.2 Teorem: $\max_{\Delta \in \mathbf{BA}} \rho(MQ) = \mu_{\Lambda}(M)$ 'dir [5].

$\rho(QM)$ niceliği bölgesel maksimum (local maxima) çeşitliliğe sahip olabilir fakat küresel (global) değildir. Bundan dolayı local araştırma μ 'yü elde etmeyi garantileyebilir ama yalnızca alt sınırı verebilir. Üst sınır konveks optimizasyon

problemi olarak yeniden formüle edilebilir. Öyleyse global minimumluk prensipte bulunabilir. Üst sınır her zaman μ 'ye eşit değildir. Δ blok yapıları için $2S + F \leq 3$ koşulu altında üst sınır her zaman $\mu_{\Delta}(M)$ 'e eşittir. $2S + F > 3$ olduğu durumda blok yapıları için μ 'den daha az infimumlu matrisler vardır. Üst sınırın durumları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Burada üst sınırın μ 'ye eşit olduğu garantilenir [15].

3.3.3 Teorem [19, Theorem 10.4]: Eğer $2S + F \leq 3$ ise

$$\mu_{\Delta}(M) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$$

dir.

$F=$	0	1	2	3	4
$S=$					
0		evet	evet	evet	hayır
1	evet	evet	hayır	hayır	hayır
2	hayır	hayır	hayır	hayır	hayır

Kutular içinde bir kaç lineer cebirde standart sonuçtur. Bunlar;

- $S=0, F=1 : \mu_{\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M)$.
- $S=1, F=0 : \mu_{\Delta}(M) = \rho(M) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1})$

dir.

Gerçekten, lineer sistem teorisinde önemli teoremler kesirli doğrusal dönüşümün bazı sonuçlarından ve üst sınırlardan elde edilir. Alt sınıra maksimum modül teoreminin doğal bir genelleştirilmesi olarak bakılabilir [14].

Ayrıca üst sınırın çok önemli kullanımlarından biri alt sınırla birleştirildiği zaman tasarım hesaplaması olarak kullanılmasıdır. μ teorisinin güvenli kullanımı için üst ve alt sınırlara sahip olması gereklidir. Üst sınırın başka bir önemli özelliği de bir μ sentez metodu vermek için H_{∞} kontrolör sentez metotlarıyla birleşebilmesidir. O halde üst sınır transfer fonksiyona uygulandığı zaman basitçe ölçülen H_{∞} normudur.

Yapılandırılmış singular değerlerin üst ve alt sınırları ve ölçek matris D , MATLAB command kullanılarak hesaplanabilir [19].

>> **[bounds,rowd]=mu(M,blk)**

Burada Δ 'nin yapısı iki sütunlu matris olduğu **blk** ile belirtilmiştir. Örneğin;

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_6 \end{bmatrix}$$

$$\delta_1, \delta_2, \delta_5 \in \mathbb{C}, \Delta_3 \in \mathbb{C}^{2 \times 3}, \Delta_4 \in \mathbb{C}^{3 \times 3}, \Delta_6 \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$$

olarak

$$\mathbf{blk} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ile belirtilebilir.

O halde Δ_j 'nin kare matris olması gerekmez. Program çıktıları, ölçek D 'yi içeren **rowd** bir dizi vektör ve $\mu_\Delta(M)$ 'nin alt ve üst sınırlarını içeren **bounds** bir 2×1 vektörü kapsar. D matrisi,

>> **[D_l, D_r]=unwrapd(rowd,blk)**

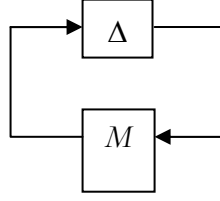
olarak yeniden elde edilebilir. Burada \mathbf{D}_l ve \mathbf{D}_r , bazı tam bloklar kare şeklinde olmadığı zaman üst sınır $\inf \bar{\sigma}(D_l M D_r^{-1})$ hesaplama da kullanılan sağ ve sol ölçek matrisleri tanımlarlar. Eğer bütün tam bloklar kare şeklinde ise \mathbf{D}_l ve \mathbf{D}_r eşittir.

3.4 μ Kararlılık Testi

Belirsiz Δ kümesine göre M 'nin singular değer yapılandırması $\mu_\Delta(M(j\omega))$ hesaplanır. Kabul edelim ki

$$\max_{\omega \in \mathfrak{R}} \mu_\Delta(M(j\omega)) = \beta$$

olsun.



1. Bütün bozucu Δ matrisleri için,

- Uygun herhangi bir $\Delta \in \Delta$ yapısı
- $\max_w \bar{\sigma}[\Delta(jw)] < \frac{1}{\beta}$ ile

bozulan sistem kararlıdır.

2. Ayrıca belirli bir bozucu matris vardır,

- $\Delta \in \Delta$ ve
- $\max_w \bar{\sigma}[\Delta(jw)] = \frac{1}{\beta}$ ile

sistem kararsızdır.

3.4.1 μ Kararlılık Testleri, Üst ve Alt Sınırlar

Software tamamen μ 'yü hesaplayamaz. Fakat uygun birkaç adımla aşağı yukarı hesabını yapar. Kabul edelim ki;

- β_u, μ için üst sınırların en tepesi (frekanslar içinden)
- β_l, μ için aşağı sınırların en tepesi

olsun.

O halde

- Bütün $\Delta \in \Delta$ bozucu matrisleri için,

$$\max_w \bar{\sigma}[\Delta(jw)] < \frac{1}{\beta_u}$$

koşulu altında bozulan sistem kararlıdır.

- Belirli bir $\Delta \in \Delta$ bozucu matrisi vardır,

$$\max_w \bar{\sigma}[\Delta(jw)] = \frac{1}{\beta_l}$$

koşulu altında sistemin kararsızlığına sebep olur.

Alt ve üst sınırlar arasındaki aralık ‘sağlam olmayan kararlılık’ olarak adlandırılır. Sağlamlaştırılmayan bozucu matris $(\frac{1}{\beta_1})$ “*command dyper*” kullanılarak μ hesabından yapılabilir.

3.5 LFT Sistemi İçin İyi Tanımlılık(Well-Defined)

Kabul edelim ki M kompleks matrisi,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

olarak ve Δ_1 , Δ_2 blok yapıları da sırasıyla M_{11} ve M_{22} ile uygun olacak şekilde tanımlansınlar. Üçüncü bir Δ yapısı olarak

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} : \Delta_1 \in \Delta_1, \Delta_2 \in \Delta_2 \right\}$$

tanımlayalım. Şimdi μ ’yü bu üç yapıya göre hesaplayabiliriz. Hesaplamaları yaparken şu notasyonları kullanacağız; Δ_1 ’e göre $\mu_1(\cdot)$, Δ_2 ’ye göre $\mu_2(\cdot)$ ve Δ ’a göre $\mu_\Delta(\cdot)$ ’yü alacağız. Bu notasyonların özünde $\mu_1(M_{11})$, $\mu_2(M_{22})$ ve $\mu_\Delta(M)$ duyarlı yapılmasına rağmen $\mu_1(M)$ duyarlı yapılamaz.

Buradan matris problemleri aşağıdakileri gerçekleştirir.

- $\bar{\sigma}(\Delta_2) \leq \beta (< \beta)$ ile her $\Delta_2 \in \Delta_2$ için $F_l(M, \Delta_2)$ LFT iyi tanımlı olup olmadığını belirtir.
- Eğer öyleyse bozucuların sınırlı kümesi içinde $F_l(M, \Delta_2)$ ne kadar “büyük” olabileceğinin belirtilmesini sağlar [19].

$\Delta_2 \in \Delta_2$ olsun. Hatırlayacak olursak $I - M_{22}\Delta_2$ tersi varsa $F_l(M, \Delta_2)$ iyi tanımlıydı. İlk ifadenin cevabı, μ tanımının başka bir şekli olduğu kolaylıkla görülebilir. İkinci problemin cevabını teoremlerle görelim.

3.5.1 Teorem [19, Theorem 10.5]: $F_l(M, \Delta_2)$ aşağıdaki şartlarla iyi tanımlıdır.

- a) Bütün $\Delta_2 \in \mathbf{B}\Delta_2$ için ancak ve ancak $\mu_2(M_{22}) < 1$ ise.
b) Bütün $\Delta_2 \in \mathbf{B}^\circ\Delta_2$ için ancak ve ancak $\mu_2(M_{22}) \leq 1$ ise.

Sıfırdan uzaklaşan Δ_2 bozucusu gibi, $F_l(M, \Delta_2)$ matrisi de M_{11} 'den uzaklaşır. $\mu_1(F_l(M, \Delta_2))$ ele alınan değerler $\mu_\Delta(M)$ ile ilişkilidir. Bunu ana dönüşüm teoremiyle görelim.

3.5.2 Teorem (Ana Dönüşüm Teoremi) [19, Theorem 10.6]:

$$\mu_\Delta(M) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_2(M_{22}) < 1 \\ \max_{\Delta_2 \in \mathbf{B}\Delta_2} \mu_1(F_l(M, \Delta_2)) < 1 \end{array} \right.$$

$$\mu_\Delta(M) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_2(M_{22}) \leq 1 \\ \sup_{\Delta_2 \in \mathbf{B}^\circ\Delta_2} \mu_1(F_l(M, \Delta_2)) \leq 1 \cdot \end{array} \right.$$

İspat: Burada ifadenin yalnızca ilk parçasının ispatı verilmiştir, ikinci kısım benzer şekilde yapılabilir.

(\Leftarrow) $\bar{\sigma}(\Delta_i) \leq 1$ ile $\Delta_i \in \Delta_i$ verilsin ve $\Delta = \text{diag}[\Delta_1, \Delta_2]$ tanımlansın. Buradan $\Delta \in \mathbf{A}$ 'dır. Buna göre

$$\det(I - M\Delta) = \det \begin{bmatrix} I - M_{11}\Delta_1 & -M_{12}\Delta_2 \\ -M_{21}\Delta_1 & I - M_{22}\Delta_2 \end{bmatrix}$$

olur. Hipotezden $I - M_{22}\Delta_2$ tersi vardır. Buradan $\det(I - M\Delta)$,

$$\det(I - M_{22}\Delta_2) \det(I - M_{11}\Delta_1 - M_{12}\Delta_2(I - M_{22}\Delta_2)^{-1}M_{21}\Delta_1)$$

olarak yazılır, Δ_1 terimleri bir araya getirilecek olursa

$$\det(I - M\Delta) = \det(I - M_{22}\Delta_2) \det(I - F_l(M, \Delta_2)\Delta_1) \quad (3.5)$$

elde edilir. Fakat $\Delta_1 \in \mathbf{B}\Delta_1$ ve $\mu_1(F_l(M, \Delta_2)) < 1$ olduğu için $I - F_l(M, \Delta_2)\Delta_1$ singular olmamalıdır. Bundan dolayı $I - M\Delta$ singular değildir ve tanımdan $\mu_\Delta(M) < 1$ 'dir.

(\Rightarrow) Aslında bu yönün ispatı yukarıdaki ispatın ters yönde hareketidir. Yine $\Delta_1 \in \mathbf{BA}_1$ ve $\Delta_2 \in \mathbf{BA}_2$ verilsin ve $\Delta = \text{diag}[\Delta_1, \Delta_2]$ tanımlansın. Buradan $\Delta \in \mathbf{BA}$ ve hipotezle $\det(I - M\Delta) \neq 0$ 'dır. μ tanımından her zaman

$$\mu(M) \geq \max\{\mu_1(M_{11}), \mu_2(M_{22})\}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $I - M_{22}\Delta_2$ singular değildir. Buradan $\mu_2(M_{22}) < 1$ olduğu görülür. Bu bize (3.5) eşitliğinin doğruluğunu verir. Buradan,

$$\det(I - M_{22}\Delta_2)\det(I - F_l(M, \Delta_2)\Delta_1) = \det(I - M\Delta) \neq 0$$

dır.

Sonuç olarak bütün $\Delta_i \in \mathbf{BA}_i$ için $I - F_l(M, \Delta_2)\Delta_1$ singular değildir. Bu da gösterir ki iddia edilen doğrudur.

Ana dönüşüm teoreminde Δ_2 blok yapısının rolü açıktır. Bu yapı bozuculardan gelen yapıdır. Bununla birlikte Δ_1 bozucu yapısının rolü genellikle yanlış anlaşılır. O halde $\mu_1(\cdot)$, teoremin sağ tarafından görülür, öyleyse Δ_1 kümesi $F_l(M, \Delta_2)$ 'nin belirli bir özelliğini tanımlayan olarak düşünülür.

3.5.3 Örnek: M, Δ_1, Δ_2 yukarıdaki gibi tanımlansınlar. Kabul edelim ki $\mu_2(M_{22}) < 1$ olsun. Bu durumda $\max_{\Delta_2 \in \mathbf{BA}_2} \mu_1(F_l(M, \Delta_2))$ değerini bulalım.

Aşağıdaki gibi tekrarlı olarak yapılabilir.

$$\begin{aligned} \max_{\Delta_2 \in \mathbf{BA}_2} \mu_1(F_l(M, \Delta_2)) = \alpha &\Leftrightarrow \max_{\Delta_2 \in \mathbf{BA}_2} \mu_1\left(F_l\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \alpha & \alpha \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \Delta_2\right)\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mu_\Delta\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \alpha & \alpha \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\right) = 1. \end{aligned}$$

Buradan,

$$\max_{\Delta_2 \in \mathbf{BA}_2} \mu_1(F_l(M, \Delta_2)) = \left\{ \alpha : \mu_\Delta\left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \alpha & \alpha \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\right) = 1 \right\}$$

olur.

4. LFT SİSTEMLERİNİN SAĞLAM ÇALIŞMASI (ROBUST PERFORMANCE)

3. bölümde LFT sistemlerinin μ kararlılığından bahsedildi. Bu bölümde kararlı bir LFT sisteminin kararlılığını devam ettirebilmesi için gerekli olan sağlam çalışma koşulu H_∞ kontrolden ve sağlam çalışmanın temeli sayılan küçük kazanç teoreminden (small gain theorem) bahsedilecektir.

4.1 Sistem Normları

Normlar genelde bir vektör, matris, sinyal ya da bir sistemin boyutunu veren sabit sayılardır. Bu amaçla norm adı verilen fonksiyonlar kullanılır. Biz burada amacımıza uygun olarak sistem normlarını ele alacağız. Sistem normları sırasıyla H_2, H_∞ normlarıdır. H_2 ve H_∞ genellikle **Hardy uzayı** olarak bilinirler.

4.1.1.1 Tanım: Reel katsayılarla polinomların bir kümesi \wp ile tanımlanır. Buna göre

$$S = \left\{ \frac{n}{d} : n \in \wp, d \in \wp, \partial(n) \leq \partial(d) \right\}$$

ile tanımlanan küme *uygun, rasyonel fonksiyonların* kümesini gösterirken,

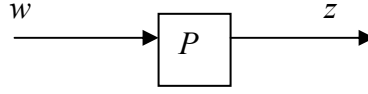
$$\mathbb{R} = \left\{ \frac{n}{d} : n, d \in \wp, \partial(n) \leq \partial(d), d(s) \neq 0, \forall s \in \overline{C}_+ \right\}$$

kümesi de *uygun, kararlı, rasyonel fonksiyonların* kümesini tanımlar. Buradaki “ ∂ ” polinomun derecesidir.

4.1.1 H_2 Normu

4.1.1.2 Tanım (H_2 Uzayı) [12]: Açık sağ yarı düzlemde ($\text{Re}(s) > 0$) analitik, kare matris şeklinde, imajiner eksen üzerinde integrallenebilir matris değerli fonksiyonların Hilbert uzayı anlamına gelir.

H_2 'nin bir alt uzayı, imajiner eksen üzerinde hiçbir kutba sahip olmayan tamamen uygun reel rasyonel, kararlı transfer matris fonksiyonlarıyla tanımlanır ve $\mathbb{R} H_2$ ile gösterilir.



Şekil 4.1 P Sistemi

Şekil 4.1'de verilen kararlı transfer matris fonksiyonu $P(s)$ için H_2 normu,

$$\|P\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[P^*(jw)P(jw)]dw} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{ij} |P_{ij}(jw)|^2 dw}$$

şeklinde tanımlıdır.

Uygun $P(s)$ sistemi incelenmelidir (durum-uzayı gerçekleştirilmesinde $D = 0$). Aksi takdirde H_2 normu sonsuz olur.

4.1.2 H_∞ Normu

4.1.1.3 Tanım (H_∞ Uzayı) [12,13]: Açık sağ yarı düzlemde sınırlandırılmış analitik, matris değerli fonksiyonların Banach uzayı anlamına gelir.

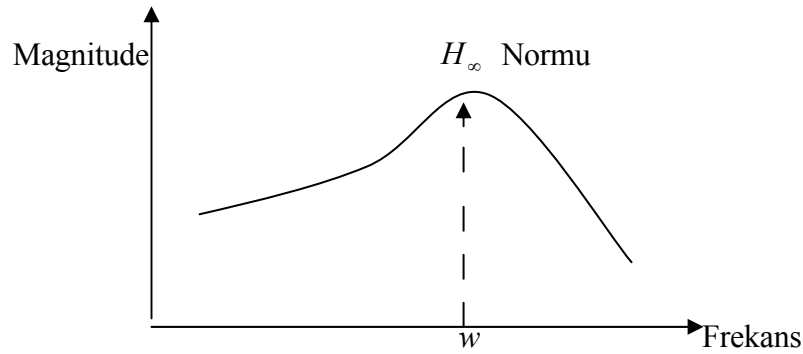
H_∞ 'un reel rasyonel alt uzayı, imajiner eksende hiçbir kutbu bulunmayan uygun, bütün reel rasyonel, kararlı transfer matrislerinden oluşur ve $\mathbb{R} H_\infty$ ile tanımlanır. Şekil 4.1'deki gibi uygun, kararlı bir lineer $P(s)$ sistemi (yani durum uzayında $D \neq 0$) için H_∞ normu,

$$\|P\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}[P(s)] = \sup_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[P(jw)]$$

olarak tanımlanır.

Bir skaler transfer fonksiyon olan P 'nin sonsuz normunun kontrol mühendisliğinde bir açıklaması vardır: Kompleks düzlemde orijinden P 'nin Nyquist haritasında bulunan en uzak mesafedeki noktaya olan uzaklığıdır. Ayrıca $|P(j\omega)|$ Bode magnitude haritasında tepe değeri olarak görülür. Buradan bir transfer fonksiyonunun ∞ normu, prensipte grafiksel olarak elde edilebilir.

Aşağıdaki şekilde bir Bode diyagramı üzerinde bir skaler transfer fonksiyonun frekans cevabına bakmak suretiyle H_∞ normunun fiziksel önemini anlamak kolay olur.



Frekans noktalarını tahmini olarak,

$$\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$$

şeklinde alırsak

$$\|P\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq N} \overline{\sigma}\{P(jw_k)\}$$

olur. Bu değer genellikle Bode singular değer haritasından doğrudan okunur.

H_∞ normu, skaler durumda frekans cevabı transfer fonksiyonunun maksimum genişliğine veya maksimum kazancına eşittir. Belli bir giriş-çıkış transferinin H_∞ normu sistemin kazancının bir ölçüsüdür. Sistemin kazancı belli bir frekansta giriş ve çıkış işaretleri oranının maksimum değeri ile temsil edilebilir. Bundan dolayı H_∞ normu çoğunlukla klasik kontrolde duyarlılık tepe noktalarını veya kapalı çevrimli transfer fonksiyonlarını ölçmek için önemli bir kazanç ölçümünü temsil eder [6].

Benzer sonuçlar çok değişkenli sistemlere de uygulanır. $\mathbb{R} H_\infty$ normu ayrıca durum uzayında da hesaplanır [19].

4.1.1.2 Yardımcı Teorem [19, Lemma 4.5]: $\gamma > 0$ ve

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = D + C(\Delta I - A)^{-1} B \in \mathbb{R} H_\infty$$

olsun. Buradan $\|G\|_\infty < \gamma$ 'dir, yani $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ ve Hamilton matrisi H, imajiner eksende öz değerlere (karakteristik değer) sahip değildir. Burada,

$$H = \left[\begin{array}{cc} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{array} \right] \text{ ve } R = \gamma^2 I - D^*D$$

dir.

$\mathbb{R} H_\infty$ normunu hesaplamak için aşağıda vereceğimiz algoritmalar bu yardımcı teoremi destekler:

- a) Bir üst sınır γ_u ve bir alt sınır γ_l seçelim. Öyleki $\gamma_l \leq \|G\|_\infty \leq \gamma_u$;
- b) Eğer $\frac{(\gamma_u - \gamma_l)}{\gamma_l} \leq$ belirtilirse, $\|G\|_\infty \approx \frac{(\gamma_u + \gamma_l)}{2}$ olduğunda durur. Aksi halde diğer adıma geçer;
- c) $\gamma = \frac{(\gamma_l + \gamma_u)}{2}$ olarak yerleştirilir;
- d) Eğer $\|G\|_\infty < \gamma$ ise verilen γ için Hamilton matrisinin öz değerleri hesaplanarak test edilir;
- e) Eğer H imajiner eksende bir öz değere sahipse, $\gamma_l = \gamma$ olarak alınır; aksi halde $\gamma_u = \gamma$ olur; bu durumda (b) adımına geri döner.

Söylenebilir ki $\|G\|_\infty < \gamma$ olursa $\|\gamma^{-1}G\|_\infty < 1$ 'dir. Buradan $\gamma = 1$ kabul edilmesi genelliği bozmaz.

Birkaç açıklama da kararlı transfer matris fonksiyonunun H_∞ 'u için verilebilir. $G(s)$ TGTC olduğu zaman H_∞ normu, sinusoidal hareketlenmeler için sistemin düzenli durum cevabının mümkün en büyük genişletme faktörü olarak açıklanabilir. Örneğin; $u(t) = U \sin(w_0 t + \phi)$ sinusoidal girişi için sistemin düzenli durum cevabı,

$$y(t) = U |G(jw_0)| \sin(w_0 t + \phi + \angle G(jw_0))$$

olsun.

Buradan olası maksimum genişletme faktörü $\sup_{w_0} |G(jw_0)|$ 'dır. Bu ise önceden belirtildiği gibi transfer fonksiyonun H_∞ normudur.

ÇGÇÇ sistem durumunda $G \in \mathbb{R} H_\infty$ transfer matrisinin H_∞ normu, sinusoidal hareketlenmeler için sistemin düzenli durum cevabının mümkün en büyük genişletme faktörü olduğu ayrıca söylenebilir. Kabul edelim ki sinusoidal girişler;

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \sin(w_0 t + \phi_1) \\ u_2 \sin(w_0 t + \phi_2) \\ \vdots \\ u_q \sin(w_0 t + \phi_q) \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_q \end{bmatrix}$$

olsun. Buradan sistemin düzenli durum cevabı,

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \sin(w_0 t + \theta_1) \\ y_2 \sin(w_0 t + \theta_2) \\ \vdots \\ y_p \sin(w_0 t + \theta_p) \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

bazı y_i , θ_i için $i = 1, 2, \dots, p$ olmak üzere yazılabilir. Ayrıca,

$$\|G\|_\infty = \sup_{\phi_i, w_0, \hat{u}} \frac{\|\hat{y}\|_2}{\|\hat{u}\|_2}$$

dır. Burada $\|\cdot\|$, bir Euclidian normudur [19].

4.1.3 H_2 ve H_∞ Normları Arasındaki İlişki

Şekil 4.1'deki sistemi inceleyelim. Kararlı transfer matris fonksiyonu $P(s)$ ve ani darbe cevap matrisi $p(t)$ olsun.

Çıkış sinyalinin 2-normu

$$\|z(t)\|_2 = \sqrt{\sum_i \int_{-\infty}^{\infty} |z_i(\tau)|^2 d\tau}$$

olarak tanımlansın. Girişler için

- $w(t)$ birim ani darbelerin bir serisi,
- $w(t)$, $\|w(t)\|_2 = 1$ 'i sağlayan herhangi bir sinyal,

- $w(t)$, $\|w(t)\|_2 = 1$ 'i sağlayan herhangi bir sinyal fakat her $t = 0$ için $w(t) = 0$ ve sadece $t \geq 0$ için $z(t)$ vardır.

Yukarıdaki üç durumu varsayalım. Bu durumda H_∞ normu zaman düzlemi çalışma yorumuna sahiptir. H_∞ normu herhangi bir frekansta sinüsoidal giriş için en kötü sürekli durum kazancıydı. Bununla birlikte H_∞ normu zaman düzleminde 2-normunu (en kötü durum) içerir. Ve

$$\|P(s)\|_\infty = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = \max_{\|w(t)\|_2=1} \|z(t)\|_2$$

dir. Eřitlikte en kötü giriş sinyali $w(t)$, w^* frekansına sahip bir sinüsoid giriş için elde edilmiştir ve maksimum kazanç gibi $\bar{\sigma}(P(jw^*))$ 'yı veren bir yapıya sahiptir. $P(s)$ 'nin H_2 normunu

$$\|P(s)\|_2 = \|p(t)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\text{tr}(p^*(\tau)p(\tau))d\tau}{\|p(\tau)\|_F^2 = \sum_{ij} |p_{ij}(\tau)|^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \sum_i \sigma_i^2 P(jw)dw}$$

ani darbe cevabının H_2 normuna eşit olduğunu görebiliriz. H_2 normu için

$$\|P(s)\|_2 = \max_{w(t)} \|z(t)\|_2 \quad (w(t) = \text{birim ani darbeler})$$

performans yorumuna sahip oluruz.

Buradan görülür ki H_∞ normunu minimize etmek en büyük singular değeri “en kötü durum, en kötü frekansta” minimize etmek demektir. Halbuki minimize edilen H_2 normu tüm frekanslardaki singular değerlerin “ortalama durum, ortalama frekans” tümünün karelerinin toplamını minimize etmek demektir. Özet olarak,

- H_∞ : “En büyük singular değerini azaltır”
- H_2 : “Tüm singular değerleri tüm frekanslarda azaltır”

diyebiliriz [1].

4.1.1.3 Örnek: Aşağıda verilen *TGTÇ* bir sistem için H_∞ ve H_2 normları

hesaplayalım. $P(s) = \frac{1}{s+a}$ verilen sistemimiz olsun. Buna göre

H_2 normu,

$$\|P(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|P(jw)|^2}_{\frac{1}{w^2+a^2}} dw \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi a} \left[\tan^{-1}\left(\frac{w}{a}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2a}}$$

dır.

H_∞ normu,

$$\|P(s)\|_\infty = \max_w |P(jw)| = \max_w \frac{1}{(w^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{1}{a}$$

olur. Yukarıdan da anlaşılacağı üzere H_2 ve H_∞ normları arasında genel olarak yazılabilecek bir ilişki yoktur.

4.2 H_∞ Normunun Kontrol Sistemindeki Yeri

Bir plant yapılandırılan veya yapılandırılmayan belirsizlik içerebilir. 1960'lı yıllarda bu probleme klasik yaklaşım şekli Lineer Quadratic Gaussian (LQG) teorisiydi [17],[18]. Bu yaklaşımda belirsizlik, sisteme ekstra giriş olarak eklenen Gaussian süreci ile bir beyaz gürültü olarak modellenirdi. Bu yaklaşımın en büyük problemi belirsizliğin her zaman beyaz gürültü olarak modellenememesiydi.

1970–1980 yılları arasında plant belirsizlik problemine bir cevap sağlayan H_∞ kontrol geliştirildi. Optimal kontrol sistem tasarımı için H_∞ yaklaşımı, yapılandırılmayan belirsizlikler içeren plantların sağlamlaştırılması için uygun belirli bir tasarım yapmaktır. Plant sağlamlık analizi olarak adlandırılan bu tasarım denetleyicilerle desteklenir.

H_∞ normu sistemlerin sağlam tasarımında önemli bir yere sahiptir. H_∞ yaklaşımının otomatik olarak sağlam tasarıma neden olup olmayacağı şüphelidir. Bununla beraber sağlamlık düşünüldüğü zaman çoğunlukla belirli frekans dizisinde kazancı sınırlama gereksinimi vardır. Bunu gerçekleştirmek için bazı transfer fonksiyonları (ağırlık) azaltılır. Ağırlık transfer fonksiyonlarını azaltma, uygun ağırlık filtresi ile ilgili dönüşümleri basitçe çoğaltmak süretiyle başarılabilir [6].

Yapılandırılmayan belirsizlik sistem içinde modelleme hatasını kapsar. Bu hata sebebiyle frekansın bir fonksiyonu olan magnitude üzerindeki en üst sınırın dışında sistem hakkında hiçbir bilgi bulunmaz. Çoğu sistem modelleri belirli yüksek frekanslarda normal olarak bazı modellenemeyen dinamiklerin varlığı olacağından dolayı yapılandırılmayan belirsizlik içerecektir. Yapılandırılmayan belirsizlik analizleri çok önemli olduğundan dolayı sağlam denetleyici tasarlamak için genel teknikler geliştirilebilir [19].

Söz konusu olan bir sistem için tasarlanmış denetleyiciyi kabul eden “nasıl bir H_∞ yaklaşımı bize yardım edebilir?” sorusunun cevabına bakalım.

Kabul edelim ki bu sistemin açık çevrimli transfer fonksiyonu $G(s)$ olsun. Gerçek sistem toplamsal belirsizlik durumu

$$G(jw) + \Delta G(jw)$$

modelleme hatası ile $G(s)$ 'den farklı olacaktır. Sorumuz buradan anlaşılır ki verilen belirsizlikle sistemin kararlı kalıp kalmayacağıdır. Bunu cevaplamadan önce belirsizlik, bu yaklaşımda kabul edilen magnitude üzerinde bir üst sınırı ölçmelidir. Yani

$$|\Delta G(jw)| < |\delta G(jw)|$$

olmalıdır. Burada $\delta G(jw)$ verilen sınırlama fonksiyonudur. Daha sonra sistemin bütün bozucular için kararlı kalması

$$\|\delta G(jw)S(jw)\|_\infty < 1$$

koşulu altında gerçekleşir. Burada $S(jw)$ duyarlılık fonksiyonudur ve $S(jw) = \frac{1}{1 + G(jw)}$ ile verilir. Denetleyici ağırlık duyarlılığının H_∞ normunu

$\|\delta G(jw)S(jw)\|_\infty$ küçük yapmak için seçilir. Açıkça eğer tolare edilebilen belirsizliğin miktarları en büyükse duyarlılık fonksiyonu küçüktür [17]. Belirsizliğin farklı tipleri

durumunda başka frekans cevabı $T(jw) = \frac{G(jw)}{1 + G(jw)}$ gibi fonksiyonlar

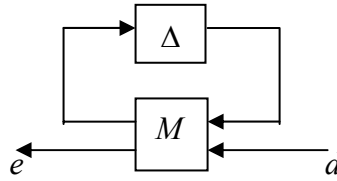
azaltılabilmelidir [1]. Buradaki $T(jw)$ fonksiyonu tamamlayıcı duyarlılıktır. Ayrıca sistemin performansı çoğunlukla belli frekans cevabı fonksiyonlarını azaltmak

süretiyle de en iyi olabilir. Belirsizlik durumunda bu sonuçlar hem tasarımı sağlamlaştırır hem de maksimum kararlılık sınırını başararak kontrol etme anlamına gelir.

H_∞ kontrol mekanizmasının zamana göre (time varying) işleyişi, azalttığı fonksiyonlar ve bu fonksiyonların nasıl seçildiği, hangi durumlarda kararlılık kriterlerini sağladıkları gibi konulara daha ayrıntılı olarak [1], [6], [17], [19] referanslarından ulaşılabilir.

Biz burada amacımıza uygun olarak LFT sisteminin H_∞ çalışmasını inceleyeceğiz.

4.3 Belirsiz Sistemlerin Sağlam Çalışması



Şekil 4.2 M sistemi için blok diyagramı

Şekil 4.2'deki gibi verilen geri besleme diyagramında

- M bilinen lineer sistem
- Δ , bir probleme bağlılığı izin verilen Δ belirsiz kümelerinden yapılandırılmış bozucu
- d ve e hedeflenen çalışmayı tanımlayan genelleştirilmiş karışıklık ve hatadır.

Belirsiz sistemin sağlam çalışması için T , $d \rightarrow e$ belirsiz sistemin transfer fonksiyonu olmak üzere $T = F_u(M, \Delta)$ 'dir. Burada $d \rightarrow e$ transfer fonksiyonu M 'nin elemanları arasından geçen Δ 'nın bir fonksiyonudur. LFT olarak F_u ile verilir.

Belirsiz sistemin sağlam çalışması için $\max_w \bar{\sigma}(T(jw)) \leq 1$ olmalıdır.

4.4 LFT Sisteminin H_∞ Çalışması

Kabul edelim ki şekil 4.2'deki sistem için iyi çalışma,

$$\|T\|_\infty = \max_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T(jw)) \leq 1$$

olsun. Burada T , belirsiz sistemin $d \rightarrow e$ 'ye transfer fonksiyon matrisi,

$$T = F_u(M, \Delta)$$

dır.

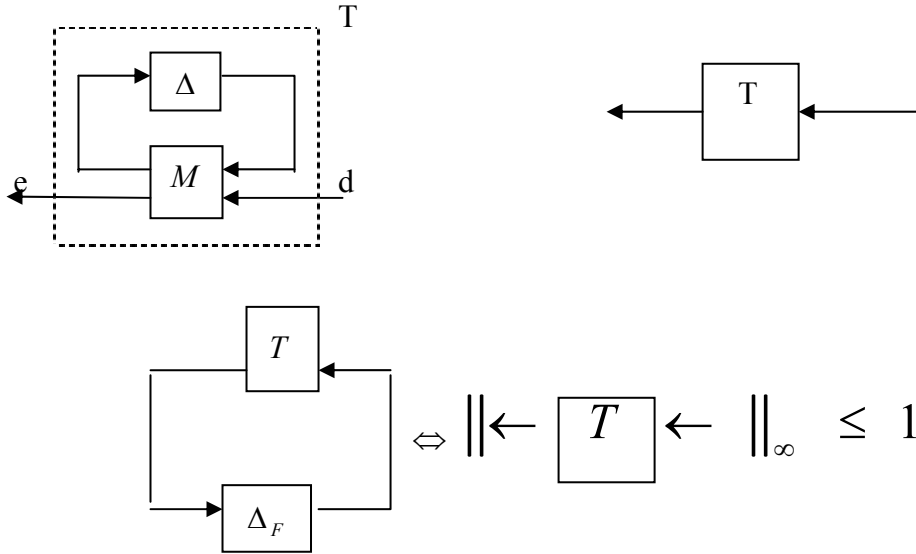
Şimdi burada aklımıza şöyle bir soru gelir. Acaba Δ 'nın aldığı değerlere göre F_u 'nun büyüklüğü nedir?

Verilen M ve Δ 'nın oluşturduğu LFT'nin sağlam çalışması için,

- bütün bozucu $\Delta \in \Delta$ ve
- $\max_w \bar{\sigma}[\Delta(jw)] < 1$

şartlarını sağlaması gerekir. Bu durumda LFT sistemi kararlıdır ve $\|F_u(M, \Delta)\|_\infty \leq 1$ dir.

Kabul edelim ki T , giriş boyutu n_d çıkış boyutu ve n_e ile verilen kararlı bir sistem olsun. $\|T\|_\infty \leq 1$ eşitsizliği ancak ve ancak diyagramda gösterilen geri besleme döngüsünün her bir kararlı $\Delta_F(s) \in \mathbb{C}^{n_d \times n_e}$ için $\|\Delta_F\|_\infty < 1$ koşulu altında, kararlıdır [18].



Sağlam çalışma problemleri için transfer fonksiyonu bir LFT'dir. Burada $T = F_u(M, \Delta)$ 'dir. Bu $\|F_u(M, \Delta)\|_\infty \leq 1$ ile gösterilen ve bütün $\Delta \in \Delta$ bozucuları için $\max_w \bar{\sigma}[\Delta(jw)] < 1$ şartını sağlayan bir LFT olarak verilir. Ve bütün $\Delta \in \Delta$ ve bütün kararlı Δ_F 'ler için

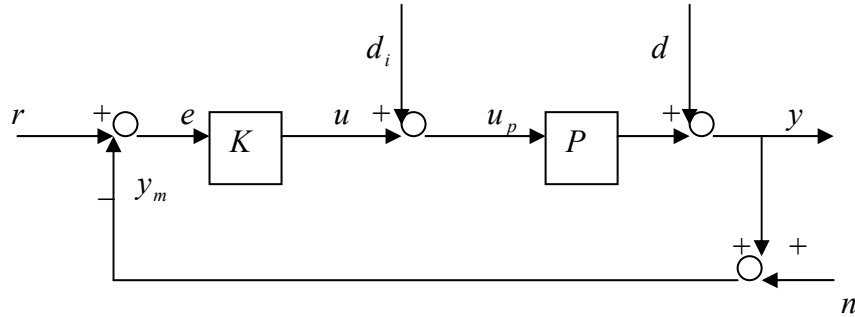
$$\max_w \bar{\sigma}[\Delta(jw)] < 1 \text{ ve } \max_w \bar{\sigma}[\Delta_F(jw)] < 1$$

koşulları altında LFT kararlılıkla sağlam çalışır. Burada Δ_F bir tam modellenemeyen dinamik bloğudur.

4.5 Geri Beslemeli Bir Sistemde İyi Yerleşme (Well-Posed) ve İçsel Kararlılık (Internal Stability)

Geri beslemeli bir sistemde, eğer bütün kapalı dönüşüm transfer matrisleri uygun ve iyi tanımlı ise bu sistem için *iyi yerleştirilmiş* olduğu söylenir [19].

1.bölüm şekil 1.3'teki geri beslemeli kontrol sistemine bozucu (d_i ve d) ve gürültü (n) uygulanır ve $H(s)$ geri besleme elemanı (aynı zamanda ölçme devresi) 1 olarak alınırsa o zaman sistem şekil 4.3'te verildiği gibi olur.

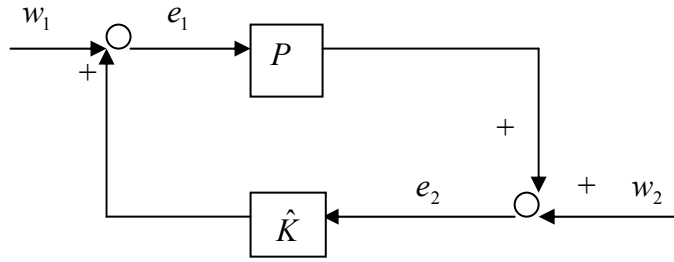


Şekil 4.3 Gürültü ve bozucu etkisindeki geri beslemeli sistem

Burada r referans, y_m sistemin durum değişkenlerinden oluşan y 'de ölçülen çıkış, e hata, u kontrol, d_i ve d sırasıyla plant giriş bozucusu ve plant çıkış bozucusu, en son olarak n ise gürültü sinyalidir.

Kabul edelim ki r , n , d , d_i dış sinyallerinin hepsi verilsin. Bu sinyalleri kapalı çevrimli transfer matrisleri, u 'ya sırasıyla uygun ve iyi tanımlasın. Öyleyse y ve diğer bütün sinyaller ayrıca iyi tanımlı ve ilgili transfer matrisler uygundur. Bundan başka d ve n 'den u 'ya tanımlı transfer matrisleri aynı, r 'den u 'ya tanımlı transfer matrisleri ise bir işaretle bu matrislerden farklıdır. Bu nedenle sistemin iyi yerleştirilmesi ancak ve ancak $\begin{bmatrix} d_i \\ d \end{bmatrix}$ 'den u 'ya transfer matrislerinin varlığı ve uygunluğu ile mümkündür.

Sistemin içsel kararlılığında ise; öncelikle kontrolörü $\hat{K} = -K$ olarak tanımlamalıyız. Bununla birlikte dış giriş işaretlerini geri beslemeli dönüşüm içine w_1 ve w_2 olarak, denetleyici ve plantın giriş işaretlerini ise e_1 ve e_2 olarak yeniden gruplayalım. Buradan plant ve denetleyicili geri besleme dönüşümü,



Şekil 4.4 İçsel Kararlılık Analiz Diyagramı

basitçe temsil edilebilir. Sistemin iyi yerleştirildiği $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ 'den e_1 'e uygun transfer matrisinin varlığı ile mümkündür.

Kabul edelim ki sistem iyi yerleştirilmiş olsun. Yukarıda tanımlı kapalı dönüşüm sistemi,

$$\begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - \hat{K}P)^{-1} & \hat{K}(I - P\hat{K})^{-1} \\ P(I - \hat{K}P)^{-1} & (I - P\hat{K})^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}H_\infty$$

koşulu altında içsel kararlıdır. Bunun anlamı, sistem içsel kararlıdır ancak ve ancak

$$(I - P\hat{K})^{-1} \in \mathbb{R}H_\infty$$

veya $\det(I - P(s)\hat{K}(s))$ kapalı sağ yarı düzlemde hiçbir sıfırlara sahip değildir. Burada

$$P \in \mathbb{R}H_\infty \text{ ve } \hat{K} \in \mathbb{R}H_\infty$$

dır.

4.6 LFT Sistemlerinde Sağlam Kararlılık Koşulları

Frekans düzleminde bir sağlamlık analizi olarak μ kullanımı çok iyi bir araçtır.

Kabul edelim ki $G(s)$, reel rasyonel, kararlı ÇGÇÇ bir lineer sistemin transfer fonksiyonu olsun. Ayrıca G , q_1 girişine ve p_1 çıkışına sahip olsun. Δ blok yapısı,

$$\Delta = \{ \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \}$$

şeklinde ve boyutları $\Delta = \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ olarak tanımlansın. Burada G için geri besleme bozucuları, Δ kümesinin blok diyagonal yapısıyla dinamik sistemin kendisidir.

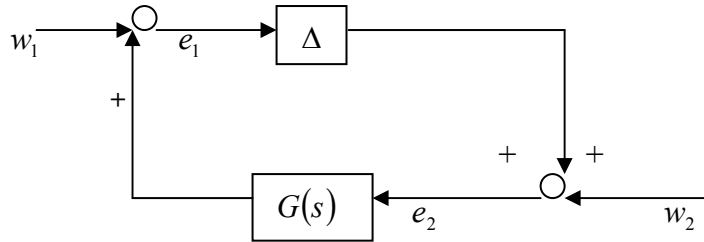
$M(\Delta)$, Δ gibi blok yapısına sahip kararlı rasyonel transfer fonksiyonları için bütün blok diyagonallerin kümesi olsun.

$$M(\Delta) = \{ \Delta(\cdot) \in \mathbb{R}H_\infty : \Delta(s_o) \in \Delta \text{ bütün } s_o \in \overline{C}_+ \}$$

4.6.1 Teorem [19, Theorem 10.7]: $\beta > 0$ olsun. Aşağıdaki dönüşüm bütün

$\Delta(\cdot) \in M(\Delta)$ için $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\beta}$ ile iyi yerleşmiş ve içsel kararlıdır ancak ve ancak

$\sup_{w \in \mathfrak{R}} \mu_\Delta(G(jw)) \leq \beta$ ise.



İspat: (\Leftarrow) Varsayalım ki $\sup_{s \in \overline{C}_+} \mu_\Delta(G(s)) \leq \beta$ olsun. Buradan her ne zaman

$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\beta}$ olursa bütün $s \in \overline{C}_+ \cup \{\infty\}$ için $\det(I - G(s)\Delta(s)) \neq 0$ 'dır (yani sistem

sağlam kararlı). Şimdi

$$\sup_{s \in \overline{C}_+} \mu_\Delta(G(s)) = \sup_{w \in \mathfrak{R}} \mu_\Delta(G(jw))$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\sup_{s \in \overline{C}_+} \mu_{\Delta}(G(s)) = \sup_{s \in C_+} \mu_{\Delta}(G(s)) \geq \sup_w \mu_{\Delta}(G(jw))$$

olduğu açıktır. Şimdi kabul edelim $\sup_{s \in C_+} \mu_{\Delta}(G(s)) > \beta$ olsun. Buradan μ tanımıyla,

bir $s_o \in \overline{C}_+ \cup \{\infty\}$ vardır ve bir kompleks Δ yapılandırması için $\overline{\sigma}(\Delta) < \frac{1}{\beta}$ ve

$\det(I - G(s_o)\Delta) = 0$ 'dır. Bu ifade bize bir $0 \leq \hat{w} \leq \infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$\det(I - G(j\hat{w})\alpha\Delta) = 0$ olduğunu verir. $\overline{\sigma}(\alpha\Delta) < \frac{1}{\beta}$ olacağından $\mu_{\Delta}(G(j\hat{w})) > \beta$ olur.

Başka bir deyişle $\sup_{s \in C_+} \mu_{\Delta}(G(s)) \leq \sup_w \mu_{\Delta}(G(jw))$ 'dir. Bu da ispatı tamamlar.

(\Rightarrow) Kabul edelim ki $\sup_{w \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(G(jw)) > \beta$ olsun. Buradan bir $0 < w_o < \infty$ vardır ve

$\mu_{\Delta}(G(jw_o)) > \beta$ 'dir. Kompleks bir $\Delta_c \in \Delta$ vardır ve her bir tam bloğun rank 1'dir.

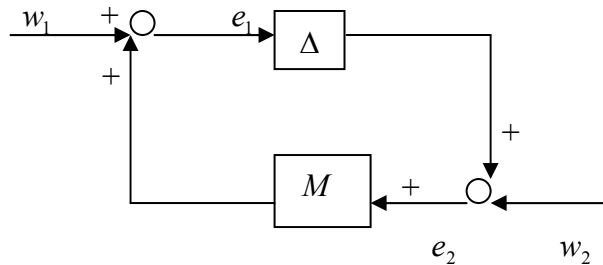
Ve $\overline{\sigma}(\Delta_c) < \frac{1}{\beta}$ için $I - G(jw_o)\Delta_c$ singulardır. Bir rasyonel $\Delta(s)$ bulunabilir öyleki

$\|\Delta(s)\|_{\infty} = \overline{\sigma}(\Delta_c) < \frac{1}{\beta}$, $\Delta(jw_o) = \Delta_c$ 'dir. $\Delta(s)$ sistemin kararsızlığına neden olur.

Bunun sonucunda frekans cevabının μ haritasında tepe değeri, dönüşümün sağlam kararlılığına rağmen bozucuların büyüklüğünü tanımlar.

4.7 Küçük Kazanç Teoremi (Small Gain Theorem) [19, Theorem 8.1]:

Bu teorem sağlam kararlılık kriterine temel oluşturmaktadır.



Şekil 4.5 Kararlılık analizi için $M - \Delta$ dönüşümü

Şekil 4.5'te birbirine bağlantılı sistemde $M(s)$ kararlı $p \times q$ boyutlu bir transfer matrisidir.

Kabul edelim ki $M \in \mathbb{R} H_\infty$ ve $\gamma > 0$ olsun. Buradan birbirine bağlantılı sistem bütün $\Delta(s) \in \mathbb{R} H_\infty$ ve aşağıda verilenlerle iyi yerleşmiş ve içsel kararlıdır.

- a) $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ ancak ve ancak $\|M(s)\|_\infty < \gamma$
- b) $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$ ancak ve ancak $\|M(s)\|_\infty \leq \gamma$.

İspat: Burada sadece (a)'yı göstereceğiz, (b) benzer şekilde yapılabilir.

Genelliği bozmadan $\gamma = 1$ olsun.

(Yeterlilik) $M(s)$ ve $\Delta(s)$ kararlı olduğundan dolayı $M(s)\Delta(s)$ kararlı olduğu açıktır.

(4.5)'dan kapalı dönüşüm sistemi için, $\Delta \in \mathbb{R} H_\infty$ ve $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ile $\det(I - M\Delta)$ kapalı sağ yarı düzlemde hiç sifıra sahip değilse kararlıdır diyebiliriz. Bu verilerle eğer bütün $\Delta \in \mathbb{R} H_\infty$ ve $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ için,

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) \neq 0$$

ise kapalı dönüşüm sistemi kararlıdır. Fakat bu yazımda,

$$\inf_{s \in \mathbb{C}_+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) \geq 1 - \sup_{s \in \mathbb{C}_+} \overline{\sigma}(M(s)\Delta(s)) = 1 - \|M(s)\Delta(s)\|_\infty \geq 1 - \|M(s)\|_\infty > 0$$

olduğu durumda kararlılık görülemez.

(Gereklilik) Çelişki ile göstereyim. Kabul edelim ki $\|M\|_\infty \geq 1$ olsun. $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ile bir

$\Delta \in \mathbb{R} H_\infty$ vardır bu durumda $\det(I - M(s)\Delta(s))$ imajiner ekseninde sifıra sahiptir.

Böylece sistem kararsızdır. Varsayalım ki $w_o \in \mathfrak{R}_+ \cup \{\infty\}$ olsun. Bu taktirde

$\overline{\sigma}(M(jw_o)) \geq 1$ 'dir. $M(jw_o) = U(jw_o)\Sigma(jw_o)V^*(jw_o)$ bir singular değer

ayrışmasıyla,

$$\begin{aligned} U(jw_o) &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_p \end{bmatrix} \\ V(jw_o) &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_q \end{bmatrix} \\ \Sigma(jw_o) &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak verilsin.

Çelişkiyi elde etmek için bir $\Delta \in \mathbb{R} H_\infty$ yapısı yeterlidir. Bu durumda

$\Delta(jw_o) = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^*$ ve $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ 'dir. Gerçekten öyle $\Delta(s)$ için,

$$\det(I - M(jw_o)\Delta(jw_o)) = \det(I - U \Sigma V^* v_1 u_1^* / \sigma_1) = 1 - u_1^* U \Sigma V^* v_1 / \sigma_1 = 0$$

dır. Buradan kapalı dönüşüm sistemi ne iyi yerleştirilememiş (eğer $w_o = \infty$ ise) ne de kararsızdır (eğer $w \in \mathfrak{R}$). Bu taktirde iki farklı durum vardır:

1) $w_o = 0$ veya ∞ ise U ve V reel matrislerdir. Bu durumda $\Delta(s)$,

$$\Delta = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^* \in \mathfrak{R}^{q \times p}$$

olarak seçilebilir.

2) $0 < w_o < \infty$ ise u_1 ve v_1 ,

$$u_1^* = [u_{11} e^{j\theta_1} \quad u_{12} e^{j\theta_2} \quad \dots \quad u_{1p} e^{j\theta_p}], \quad v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} e^{j\phi_1} \\ v_{12} e^{j\phi_2} \\ \vdots \\ v_{1q} e^{j\phi_q} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada $u_{1i} \in \mathfrak{R}$ ve $v_{1j} \in \mathfrak{R}$, ayrıca bütün i, j için $\theta_i, \phi_j \in [-\pi, 0)$ 'dir.

$i=1, 2, \dots, p$ ve $j=1, 2, \dots, q$ için $\beta_i \geq 0$ ve $\alpha_j \geq 0$

$$\angle \left(\frac{\beta_i - jw_o}{\beta_i + jw_o} \right) = \theta_i, \quad \angle \left(\frac{\alpha_j - jw_o}{\alpha_j + jw_o} \right) = \phi_j$$

olarak seçilir.

$$\Delta(s) = \frac{1}{\sigma_1} \begin{bmatrix} v_{11} \frac{\alpha_1 - s}{\alpha_1 + s} \\ \vdots \\ v_{1q} \frac{\alpha_q - s}{\alpha_q + s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \frac{\beta_1 - s}{\beta_1 + s} & \dots & u_{1p} \frac{\beta_p - s}{\beta_p + s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R} H_\infty \text{ olsun. Buradan,}$$

$$\|\Delta\|_\infty = \frac{1}{\sigma_1} \leq 1 \quad \text{ve} \quad \Delta(jw_o) = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^*$$

olur.

Bu teorem bize Δ ve M sonsuz boyutlu olsa bile sağlam kararlılığın gerçekleşeceğini verir. Bu durumu sonuçlarla özetleyebiliriz.

4.7.1 Sonuç [19, Corollary 8.2]: Aşağıdaki durumlar birbirine eşittir:

- i. Bütün $\Delta \in H_\infty$ için $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$ ile sistem iyi yerleştirilmiş ve içsel kararludur;
- ii. bütün $\Delta \in \mathbb{R} H_\infty$ için $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$ ile sistem iyi yerleştirilmiş ve içsel kararludur;
- iii. bütün $\Delta \in \mathbb{C}^{q \times p}$ için $\|\Delta\| < \frac{1}{\gamma}$ ile sistem iyi yerleştirilmiş ve içsel kararludur;
- iv. $\|M\|_\infty \leq \gamma$.

Küçük kazanç koşulları, aynı zamanda uygun tanımlanan kararlılık bilgisiyle lineer olmayan zamanla değişen kararlı operatör Δ 'ya rağmen sistemin içsel kararlılığını garantilemek için yeterlidir [3].

4.8 LFT Sistemlerinde Sağlam Çalışma Koşulları

Kapalı dönüşüm sistemi için yalnızca kararlılık özelliği yetmez. Sistemin aynı zamanda diğer bozuculara karşı sağlamlığının olması gerekir. Sisteme dışarıdan etki eden bozucular (gürültü ve diğer bozucular) sistemin düzeninin bozularak hata vermesine sebep olurlar. Çoğu durumlarda kararsızlığın başlamasından önceki sürede kapalı dönüşüm çalışması kabul edilemez bir noktaya doğru gerileyecektir.

Burada çalışmanın en kötü gerileme seviyesi ile birleşen bozucuların verilen seviyesi için bir sağlam çalışma testi belirtilecektir.

Kabul edelim ki G_p kararlı, reel rasyonel $q_1 + q_2$ girişleri ve $p_1 + p_2$ çıkışları ile verilen uygun transfer matris fonksiyonu olsun. G_p matrisi,

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

olarak ve G_{11} , q_1 girişi ve p_1 çıkışı ile tanımlansın. Diğer matrisler içinde benzer şeyler söyleyebiliriz.

$\Delta \subset \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ blok yapısı

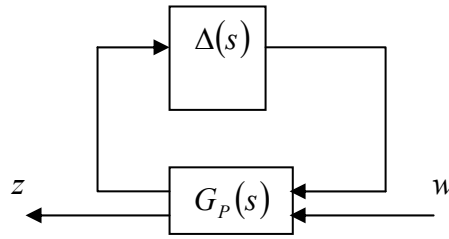
$$\Delta = \{ \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \}$$

olarak verilsin. Genişletilen blok yapısı,

$$\Delta_P = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_f \end{bmatrix} : \Delta \in \Delta, \Delta_f \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \right\}$$

olarak tanımlanır [19].

Sağlam çalışma sorusu için cevap sağlayacak dönüşüm:



şeklindedir. w 'den z 'ye transfer fonksiyonu $F_u(G_P, \Delta)$ ile tanımlanır.

4.8.1 Teorem [19, Theorem 10.8]: $\beta > 0$ olsun. Bütün $\Delta(s) \in M(\Delta)$ için

$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\beta}$ ile yukarıda tanımlı dönüşüm iyi tanımlı, içsel kararlıdır ve

$\|F_u(G_P, \Delta)\|_\infty \leq \beta$ 'dir ancak ve ancak

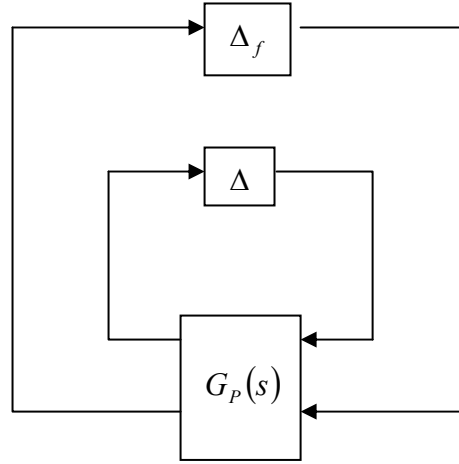
$$\sup_{w \in \mathfrak{R}} \mu_{\Delta_P}(G_P(jw)) \leq \beta$$

dır.

O halde $\sup_{w \in \mathfrak{R}} \mu_{\Delta}(G_{11}(jw)) \leq \beta$ için sistem içsel kararlı ise bu teoremin ispatı,

4.6.1 teoremi için verilen ispat ile aynıdır. Ayrıca ana dönüşüm teoremi yardımıyla da yapılabilir.

Söylenbilir ki sağlam çalışma problemi, Δ genişletilen bilinmeyenleriyle sağlam kararlılık problemine eşittir. Bu yapıyı aşağıdaki şekilde görebiliriz.



Sonuç olarak lineer bozucular için LFT sistemlerinin sağlam kararlılık ve sağlam çalışma koşullarını açıkladık. Lineer zamanla değişen bozucular için ise φ kararlılık kriteri vardır. Bu kriter tıpkı μ kararlılıkta izlenen yollar gibi incelenebilir.

4.9 φ Kararlılık Kavramı

Bir frekans/belirsizlik yapısı $\Delta \in \Lambda \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ ile LFT sistemini,

$$G(\Delta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = F_u \left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \Delta \right) = D + C\Delta(I - A\Delta)^{-1}B$$

olarak tanımlayalım. Burada $(A, B, C, D) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \times \mathfrak{R}^{n \times p} \times \mathfrak{R}^{q \times n} \times \mathfrak{R}^{q \times p}$ ve Λ blok diyagonal yapı kümesi de μ teorisine göre

$$\Lambda = \{diag[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_s, \Delta_1, \dots, \Delta_f] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$$

dir.

Λ 'nın değişmeli matris kümesi

$$\mathbf{D} = \{D \in \mathbb{C}^{n \times n} : D\Delta = \Delta D, \det[D] \neq 0, \Delta \in \Lambda\}$$

olarak tanımlanır. Buna göre eğer dönüşüm matrisi $D \in \mathbf{D}$ ise durum değişken dönüşümü *kabul edilebilirdir*.

4.9.1 Tanım [10]:

- i. Verilen sistem μ kararlıdır (Δ 'ya göre) ancak ve ancak $\mu_{\Delta}(A) < 1$ ise.
- ii. Verilen sistem φ kararlıdır (Δ 'ya göre) ancak ve ancak $\varphi_{\Delta}(A) = \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DAD^{-1}) < 1$ 'dir. Yani bir $D \in \mathbf{D}$ vardır öyle ki $\bar{\sigma}(DAD^{-1}) < 1$ 'dir.

O halde φ kararlılık μ kararlılığı sağlar [9]. Bu çoğu kez doğrudur. Çünkü φ kararlılık üst sınırı μ 'ye iyi yaklaşımdır. μ ve φ kararlılık problemleri zamanla değişmeyen ve değişen bozucular için sağlam kararlılık ve sağlam çalışma testlerine göre gereklilik ve yeterlilik olarak açıklanabilirler.

μ kararlılık ve φ kararlılık kabul edilebilir durum değişken dönüşümleri altında değişmezdir [11]. Ayrıca $\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$ 'nin $\begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}$ yapısına göre $\varphi(\mu)$ kararlı olduğu görülebilir. Bu durum Δ_1 ve Δ_2 yapılarına göre eğer $A_{12} = 0$ veya $A_{21} = 0$ ise A_1 ve A_2 'nin $\varphi(\mu)$ kararlı olduğu söylenebilir.

μ veya φ kararlılık, transfer fonksiyonunun standart H_{∞} normunun LFT sistemlerine iki mümkün genelleştirilmesidir. μ durumu için

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\Delta \in \mathbf{B}\Delta} \bar{\sigma}(G(\Delta))$$

dir. $\Delta_{\alpha} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_c \end{bmatrix} : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \Delta_c \in \mathbb{C}^{p \times p} \right\}$ olsun. Eğer A kararlı ise (yani $\mu_{\Delta}(A) < 1$)

ana dönüşüm teoremi ile H_{∞} çalışma, $\|G\|_{\infty} < 1$ ancak ve ancak $\mu_{\Delta_{\alpha}}(A_{\alpha}) < 1$ ise çalışma koşulunu yerine getirir. H_{∞} çalışmanın alternatif bir genelleştirmesi φ çalışmadır. Verilen sistem φ çalıştığını söylemek için $\varphi_{\Delta_{\alpha}}(A_{\alpha}) < 1$ koşulunu sağlaması gerekir.

φ çalışmanın, zamanla değişen bozucularla sağlam çalışmaya eşit olduğu [16] nolu referanstan ulaşılabilir.

4.9.2 Teorem [9]:

- i. Verilen G sistemi μ çalışır, $\|G\|_\infty < 1$ 'dir ancak ve ancak genişletilen sistem matrisi A_α , μ kararlı ise.
- ii. Verilen G sistemi φ çalışma koşullarını yerine getirir ancak ve ancak genişletilen sistem matrisi A_α , φ kararlı ise.

φ çalışma $\|G\|_\infty < 1$ koşulunu sağlar.

4.9.3 Sonuç [9]: Eğer $\mu_{\Delta_\alpha}(A_\alpha) = \varphi_{\Delta_\alpha}(A_\alpha)$ ise bu sistem φ çalışmayı sağlarken μ çalışmayı da sağlayabilmesi gereklidir. Bu durumun gerçekleşmesi,

- $\Delta = \{\delta I_n : \delta \in \mathbb{C}\}$ ise
- $\Delta = \mathbb{C}^{n \times n}$ veya
- $\Delta = \{diag[\Delta_1, \Delta_2] : \Delta_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$

olduğu zaman geçerlidir.

5. SONUÇ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerdeki sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. Bölümde kontrol sistemi kavramı ele alınmış, klasik ve modern kontrol sistemlerinin işleyişleri verilmiştir. Bu kontrol sistemlerinin kararlılık ve çalışmalarında yetersizlikleri açıklanmıştır. Son olarak da iki kontrol sisteminin avantaj ve dezavantajları tablo 1-1'de özet olarak verilmiştir.

2. Bölümde lineer sistem teorisinde önemli bir yere sahip olan kesirli doğrusal dönüşüm sistemleri (LFT) tanımlanmıştır. Lineer sistemlerin işletilmesi ve hesaplanmasında kolaylığı ele alınmıştır. LFT sisteminin bu özelliği, belirsiz sistemler için ayrıntılı olarak incelenmiştir.

3. Bölümde LFT sistemindeki belirsiz yapı bilgisi tanımlanmış, bu belirsiz yapıya göre μ kararlılık kriteri verilmiştir (3.4 kısım). μ kararlılık için sınır koşulları teoremlerle özetlenmiştir. LFT sistemleri için iyi tanımlılık koşulu 3.5.1 teoremiyle, μ kararlılık kriterinin bir genişlemesi olan ana dönüşüm teoremi de 3.5.2 teoremi ile incelenmiştir.

4. bölümde LFT sistemi için sağlam çalışma kriteri H_∞ tanımlanmış (4.4). Sağlam kararlılık koşuluna temel oluşturan küçük kazanç teoremi verilmiştir (4.7). Son olarak da μ kararlılık koşuluna eş değer olan φ kararlılıktan kısaca bahsedilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Akbey, T , Sürekli Zamanlı Sistemler İçin H_{∞} Kontrol Tekniği, Fırat Üniv., (2002).
- [2] Ceylan, M. A, Çok Değişkenli Sistemlerde İleri Kontrol Algoritmalarının İncelenmesi, Ankara Üniv., (2001).
- [3] Desoer, C. A and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York, (1975).
- [4] Doyle, J. , Packard, A. and Zhou, K. , Rewiew of LFTs, LMIs and μ , Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, December, (1991).
- [5] Doyle, J. C “Analysis of feedback systems with structured uncertainties,” *IEE Proceedings*, Part D, Vol. 133, pp. 45-46, (1982).
- [6] Grimble, Michael J, Robust Industrial Control, Optimal Design Approach For Polynomial Systems, Prentice Hall International (UK) Limited, (1994).
- [7] Helmersson, A , μ Synthesis and LFT Gain Scheduling with Real Uncertainties, International Journal of Robust and Nonlinear Control, *Int. J. Robust Nonlinear Control* 8, 631-642, (1998).
- [8] Kuo, B. , J. Otomatik Kontrol Sistemleri, *Türkçe Uyarlayan Bir*, A., İst.Teknik Üniv. (2001).
- [9] Lu, Wei-Min and Doyle, J.C , H_{∞} Control of LFT systems : An LMI Approach, Electrical Engineering 116-81, California Institute of Technology, Pasadena,
- [10] Lu, W.M. , K.Zhou and J.C. Doyle, Analysis, Stabilization and Stabilizing Controller Characterization of LFT Systems, *submitted*. (1992).
- [11] Lu, W. M. , K.Zhou and J.C. Doyle, Stabilization of LFT systems, *IEEE CDC*, England, (1991)
- [12] Özdemir, N., State-Space Approach to H_{∞} Control Theory, Dissertation Submitted for The Degree of Master of Science Mathematics Institute, Universty of Warwick, (1996).
- [13] Özdemir, N., State-Space Solutions To Standard H_{∞} Control Problemi, Commun. Fac.Sci Univ. Ank. Series A1 V.52. (No. 2) pp. 35-53, (2003).

- [14] Packard, A. , A Maximum Modulus Theorem for Linear Fractional Transformations, *Systems & Control Letters* 11,365-367, North-Holland, *Dept. Of Elec. Eng. 116-81, Caltech, Pasadena*, (1988).
- [15] Packard, A. and J.C. Doyle , “ The complex structured singular value,” *Automatica*, Vol.29, pp. 71-109, (1993).
- [16] Shamma, J.S.,Robust Stability with Time-Varing Structured Uncertainty, *1992 IEEE CDC*, Tucson, Arizona, (1992).
- [17] Stoorvogel, A. , The H_∞ Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, *British Library Document Supply Centre* (1993).
- [18] Zhou, K. , Doyle, J. C. and Glover, K. , Robust and Optimal Control, Prentice Hall, (1996).
- [19] Zhou, K. , with Doyle, John C. , Essentials of Robust Control, Prentice Hall, Upper Saddle River, (1998).