T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHEELER-DE WİTT DENKLEMİNİ ÇÖZEREK ERKEN EVRENİN DALGA FONKSİYONUNU BULMA ÇALIŞMASI

ABDÜLKADİR ARGON

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2013

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHEELER-DE WİTT DENKLEMİNİ ÇÖZEREK ERKEN EVRENİN DALGA FONKSİYONUNU BULMA ÇALIŞMASI

ABDÜLKADİR ARGON

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Yrd. Doç. Dr. YÜCEL ENGİNER

GEBZE

2013

YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28.12.2012 tarih ve 2012/47 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 17.01.2013 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Abdülkadir ARGON'nun tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER

ÜYE : Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. H. Gülay ALGÜL

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ………/………/20… tarih ve ……………/………… sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: WHEELER-DE WITT DENKLEMİNİ ÇÖZEREK ERKEN EVRENİN DALGA FONKSİYONUNU BULMA ÇALIŞMASI

YAZAR ADI: ABDÜLKADİR ARGON

Bu çalışmada inflaton adı verilen skalar alanın hem ikinci hemde dördüncü kuvvetlerine sahip olan bir potansiyel fonksiyonunu içinde barındıran Wheeler- De Witt denklemini çözdük. Wheeler- De Witt denklemi içinde bulunduğumuz evrenin dalga fonksiyonu ile evrenin yarıçap fonksiyonu ve inflaton arasında bağıntı kuran kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Yaptığımız analiz potansiyel fonksiyonunun ya ikinci dereceden yada dördüncü dereceden kuvvetinin baskın olması ile birbirinden ayrılan iki durumdan oluşur. Biz [12] nolu kaynakta anlatılan çalışmayı yapan arkadaşımız Eyüp Yılmaz ile birlikte evrenin dalga fonksiyonunun evrenin yarıçap fonksiyonuna bağımlılığını bulduk. Biz kendi tezimizde ikinci dereceden kuvvetin baskın olması durumunu analiz ettik ve dördüncü dereceden kuvveti potansiyele eklenmiş küçük bir katkı olarak kabul ettik. Bu şartlar altında erken evrenin dalga fonksiyonunu bulduk. Arkadaşımız [12] nolu kaynakta dördüncü dereceden kuvvetin baskın olduğu durumu incelemiştir. İki çalışmanın birleşimi profesyonel bir dergiye sunulacaktır. Çalışmamızda pertürbasyon adı verilen yaklaşık diferansiyel denklem çözme tekniğinde faydalandık.

Anahtar kelimeler: Wheeler- De Witt Denklemi, Evrenin Dalga Fonksiyonu, Pertürbasyon Yöntemi

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS: THE STUDY OF CALCULATING THE WAVEFUNCTION OF THE UNIVERSE VIA SOLVING WHEELER-DE WITT EQUATION

AUTHOUR'S NAME: ABDÜLKADİR ARGON

In this work we have solved Wheeler-De Witt Equation with a potential Which has both the second and the fourth powers of the scalar field which is called the inflaton. Wheeler-De Witt Equation is the partial differential equation which establishes the dependence between the wave function the universe and the radius function of the universe and the inflaton. Our analysis can be divided to two subsections of either the second or the fourth power of the potential function is dominant. We have analysed the two options by collobration with our dear friend Eyüp Yılmaz who has presented the work of reference [12] and we have together calculated the wave function of the universe as a function of the radius function of the universe. We, in our thesis, have analysed the situation that the second power is dominant and we have taken the fourth power as a small contribution to the potential. Under these circumstances we have computed the wave function of the early universe. Our friend has analysed the situation that the fourth power had the dominance [12]. The combination of these two works will been presented to a journal. In our thesis we have used the approximate differential equation solving echnique called the perturbation.

Keywords: . Wheeler-De Witt Equation, the wave function of the universe, perturbation method

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli ve hayatım boyunca unutmayacağım hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER'e, Sevgili arkadaşım Eyüp Yılmaz'a ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen ve sorularımla her zaman başını çok ağırttığım çok değerli arkadaşım Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e çok teşekkür ederim.

Bu tez çalışmamın oluşmasında, eğitim-öğretim hayatımda bugünlere gelmemi sağlayarak en büyük katkıyı sunan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
I. BÖLÜM	1
1. GİRİŞ	1
II.BÖLÜM	4
2. GELİŞME	4
3. SONUÇ	11
4. EKLER	12
KAYNAKLAR	17
ÖZGEÇMİŞ	18

I. BÖLÜM

1. GİRİŞ

Kozmolojinin standart modeli Big-Bang teorisidir [1]. Big-Bang'in fenomenolojik bir teori olduğu bilinir. Big-Bang evrenin hali hazırdaki durumunu iyi derecede türetir ama evrenin orijinini açıklayamaz. Evrenin orijinini ancak kuantum mekaniği ve özelde de kuantum kozmoloji ile açıklanır[2].

Evrenin orijinine teorik yaklaşım Hawking ve çalışma arkadaşlarının makalelerinde görülebilir[3]ve[4]. Hawking ve arkadaşları kuantum mekaniğinin vakum enerjisi dalgalanmaları kavramını evrenin doğumu ile ilişkilendirmişlerdir. Bu bağlantı meşhur Wheeler-De Witt denklemi aracılığı ile kurulmuştur [5]ve[6]. Bu denklemde çözülen bağımlı değişken evrenin dalga fonksiyonu Ψ 'dır.

Bu sonuç kuantum fiziğinin iyi bilinen prensibine göre evrenin oluşmasının matematik olasılığını tespit etmek için kullanılabilir. Bu denklem 2 bağımsız değişkeni olan bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu değişkenler Robertson-Walker metriğinin [1]. Kozmolojik ölçüm faktörü olan a ve şişme teorisindeki inflaton adı verilen skalar alan olarak yorumlanabilecek olan ϕ' dir.

Şişme teorisi [7] ve [9] Big-Bang teorisine bir tamamlayıcı olarak ortaya atılmıştır. Bu teori evrendeki inhomojenlikleri açıklamak için geliştirilmiştir. Galaksiler uzayda birbirinden çok ayrık olduklarından dolayı, bu birbirinden ayrık kütle yoğunlaşmaları temel varsayımı homojen bir evren olan Big-Bang teorisi ile uyuşmaz.

Şişme teorisi bu noktayı açıklamak için inflaton adı verilen bir skalar alana bağlı bir Potansiyel Enerjiyi kullanarak evrenin geçirdiği faz geçişlerini açıklar. Bu alan şu sıralar çok aranan meşhur Higgs alanı ile ilişkili olmakla birlikte bire bir onunla aynı değildir $[9]$.

Bu referansta bu potansiyel enerjinin temelde skalar alan ϕ'nin ikinci ve dördüncü kuvvetlerinin bir kombinasyonu olduğu görülebilir. Biz sadelik için en basit formları seçmeye çalışacağız. Hangi formun en yararlı ve aynı zamanda evrenin faz geçişini açıklamaya uygun olduğu Zhang'ın çalışmasında incelenmiştir$[10]$. Zhang ϕ^2 potansiyelini en basit ve anlamlı form olarak önerir.

Fakat ayrıca belirtir ki ϕ^4 ifadesi de bazı zorlukları olmakla birlikte kullanılabilir. ϕ^2 durumu Zhang $[10]$ ve Huang ve Weng $[11]$ tarafından a'yı ϕ'ye $a\alpha\frac{1}{V(\phi)}$ ilişkisi ile incelenerek çözülmüştür. Burada $V(\phi)$ potansiyel fonksiyonu olup yukarıda bahsedilen referanslarda $V(\phi)=\lambda_0\phi^2$ olarak alınmıştır. λ_0 burada bir parametredir. $[9]$,$[10]$ ve $[11]$ nolu kaynaklardan ilham alarak biz potansiyeli $V(\phi)=\lambda_0\phi^2+\mu_0\phi^4$ olarak aldık.

μ_0 burada aynı λ_0 gibi bir parametredir. Çalışmamız referans $[11]$'e dayandığından dolayı biz mümkün olduğu kadar notasyonumuzu bu çalışma ile benzer tutmaya çalıştık. İki durum analiz edilmiştir.

$i-)$ $\lambda_0 \gg \mu_0$ durumu ki bu $[11]$'de yapılan analizin üstüne ufak bir katkı eklemek anlamına gelir.

Biz bu tezde a'nın küçük değerleri için yani $0<a<1$ durumu için inceledik.

$ii-)$ $\mu_0 \gg \lambda_0$ olup bu durum $[12]$ nolu refeansta çalışılmış olup bizim tezimizde EK' 1 de anlatılmıştır. Bu durum a'nın büyük değerleri için yani $1\langle a\langle L$ durumu için incelenmiştir.

Bizim çalışmamız $[12]$ ile birbirini tamamlamaktadır. Bu iki çalışma beraberce evrenin kuantum doğuşunun teorisinde evrenin erken evren safhalarını incelemek için kullanabileceğini ümit ediyoruz.

Son olarak çalışmamız $\hbar = G = c = 1$ birim sisteminde olup bu birim sisteminde bütün değişkenlerimiz birimsizdir. $\hbar$ Plank sabitini, G Newton'un evrensel gravitosyonel sabitini ve c ışık hızını göstermektedir.

II. BÖLÜM

2. GELİŞME

Bu çalışmada, biz evrenin yarıçap fonksiyonu ile 'İnflaton' denilen skalar alan arasındaki ilişkiyi incelemek amacındayız. Evrenin yarıçap fonksiyonu a Potansiyel fonksiyonu olan $V(\phi)$ ile $[10]$ ve $[11]$ de verilen

$$a = \frac{\alpha}{V(\phi)} \tag{2.1}$$

bağıntısına sahip olduğu kabul edilir. Burada α bir parametre ve ϕ de inflaton adı verilen skalar alandır. $[10]$ ve $[11]$ de $V(\phi)$ skalar alan olan ϕ nin sadece ikinci dereceden kuvvetine sahiptir. Biz bu çalışmada $V(\phi)$ yi hem ikinci hem de dördüncü dereceden kuvvetlere sahip olarak kabul ediyoruz. O zaman potansiyel fonksiyonu

$$V(\phi) = \lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4 \tag{2.2}$$

şeklinde tasarlanabilir. Burada λ_0 ve μ_0 açılım parametreleridir. Bu durumda (2.1) ve (2.2) denklemlerini birleştirirsek

$$a = \frac{\alpha}{\lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4} \tag{2.3}$$

ifadesini elde ederiz.

Şimdi burada Zhang'ın kullanmış olduğu λ parametresine ilaveten bizim ileri sürdüğümüz μ parametresi arasında şöyle bir ilişki kuralım:

$\lambda_0 \gg \mu_0$ seçtik. $\frac{\mu_0}{\lambda_0} \equiv \varepsilon$ çok küçük pertürbasyon parametresi olarak alınırsa ve $\alpha = \alpha_0 \lambda_0$ eşitliğini (2.3) denkleminde yerine yazarız. (2.3) denklemini $a = \frac{\alpha_0}{\phi^2}(1 + \frac{\mu_0}{\lambda_0}\phi^2)^{-1}$ şeklinde yazarak ve Binom açılımını kullanarak

$$a \approx \frac{\alpha_0}{\phi^2}(1-\frac{\mu_0}{\lambda_0}\phi^2) \tag{2.4}$$

elde edilir.

Buradan $a \approx \frac{\alpha_0}{\phi^2} - \frac{\alpha_0 \mu_0}{\lambda_0}$ olarak açılırsa ve buradaki $\frac{\mu_0}{\lambda_0} \equiv \varepsilon$ çok küçük pertürbasyon parametresini (2.4) denkleminde yerine yazarsak

$$a = \alpha_0 \left[\phi^{-2} - \varepsilon\right]$$

$$\phi = \left[\frac{a}{\alpha_0} + \varepsilon\right]^{\frac{-1}{2}} \tag{2.5}$$

ifadelerini elde ederiz.

$[5]$ ve $[6]$ dan Wheeler-DeWitt denklemi

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} - \frac{6}{k^2 a^2} . \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} - \frac{144\pi^4}{k^4}\left(k_c a^2 - \frac{k^2}{3} a^4 V(\phi)\right)\Psi = 0 \tag{2.6}$$

(2.6) daki ifadede (2.5) ifadesinde bulduğumuz a ve ϕ değerlerini yazarsak (2.7) ifadesini elde ederiz.

$$\begin{aligned}(1-\frac{24a}{\alpha_0 k^2})\frac{d^2\Psi}{da^2} = \frac{144\pi^4}{k^4}\left(k_c a^2 + \frac{k^2}{3}\lambda_0 \alpha_0 a^3 - \frac{k^2}{3}\lambda_0 \alpha_0{}^2 \varepsilon a^2\right)\Psi \\ + \frac{144\pi^4}{k^4}\left(\frac{k^2}{3}\mu_0 \alpha_0{}^2 a^2 - \frac{k^2}{3} 2\mu_0 \alpha_0{}^3 \varepsilon a\right)\Psi\end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.7) denklemini (2.8) ifadesindeki şekliyle yazarsak

$$f(a)y'' - g_1(a)y + \varepsilon g_2(a)y = 0 \tag{2.8}$$

(2.8) denklemindeki ifadeyi aşağıdaki şekliyle ifade edersek

$$f(a) = 1 - \frac{24a}{\alpha_0 k^2}$$

$$g_1(a) = \frac{144\pi^4}{k^4}(k_c a^2 + \frac{k^2}{3}\lambda_0 \alpha_0 a^3 + \frac{k^2}{3}\mu_0 \alpha_0{}^2 a^2)$$

$$g_2(a) = \frac{144\pi^4}{k^4}\left(\frac{k^2}{3}\lambda_0\alpha_0^{\,2}a^2 + \frac{2k^2}{3}\mu_0\alpha_0^{\,3}a\right)$$

olur.

(2.8) ifadesindeki denklemi yukarıda verilen $f(a)$, $g_1(a), g_2(a)$ ifadesi şeklinde gösteririz. $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1$ pertürbasyon ifadesini (2.7) denkleminde yerine yazarsak:

$$f(a)\left[\Psi_0'' + \varepsilon\Psi_1''\right] - g_1(a)\left[\Psi_0 + \varepsilon\Psi_1\right] + \varepsilon g_2(a)\left[\Psi_0 + \varepsilon\Psi_1\right] = 0$$

ifadesini elde ederiz. Yukarıda ifade ettiğimiz $f(a)$, $g_1(a)$ *ve* $g_2(a)$ eşitliklerini bu denklemde yerine yazıp düzenlediğimizde sonuç itibariyle (2.9) denklemi elde edilir.

$$f(a)\Psi_0'' + \varepsilon f(a)\Psi_1'' - g_1(a)\Psi_0 - \varepsilon g_1(a)\Psi_1 + \varepsilon g_2(a)\Psi_0 + \varepsilon^2 g_2(a)\psi_1 = 0 \qquad (2.9)$$

Burada $\frac{\mu_0}{\lambda_0} \equiv \varepsilon$ olduğu için ve burada $\lambda_0 \gg \mu_0$ seçtiğimizden dolayı $\varepsilon^2 \cong 0$ olur ve ε^2 çok küçük olduğundan ihmal edilebilir. (2.8) denklemindeki ε'nun 0.(sıfırıncı) kuvvetlerinden doğan denklemi

$$f(a)\Psi_0'' - g_1(a)\Psi_0 = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Ψ_0 Huang ve Weng'in [10] sonucudur. Bu denklem sonucu bizim Ψ_0 'ımıza özdeştir. (2.8) denklemindeki ε'nun 1. kuvvetlerinden doğan denklemi

$$f(a)\Psi_1'' - g_1(a)\Psi_1 + g_2(a)\Psi_0 = 0$$

şeklinde ifade edilir. Burada $g_2(a)\Psi_0$ ifadesini eşitliğin diğer tarafına aldığımızda $f(a)\Psi_1'' - g_1(a)\Psi_1 = -g_2(a)\Psi_0$ ifadesini elde ederiz. $f(a)\Psi_1'' - g_1(a)\Psi_1 = h(a)$ buradan $h(a) = -g_2(a)\Psi_0$ olur. Bu denklem Green fonksiyonu tekniği yardımıyla çözülebilir. Huang'ın [11] numaralı kaynak çalışmasının (20) nolu denklemindeki ifadesi çok karmaşık olduğundan onu kullanmak zordur. Bu yüzden

Huang'ın (20) ifadesini daha anlaşılabilir bir hale getirmek için denklemi doğrusallaştırarak daha basit bir görünüme dönüştüreceğiz.

Ψ_0'ı doğrusallaştırdığımız için $a\langle 1$ kabul etmemiz gerekir. Böylece $\Psi_0 \cong d.1+l.a$ şeklinde lineer terimlerini kullanarak doğrusallaştırılmış Ψ_0 elde edilir. Burada d ve l integrasyon sabitleridir.

$w=\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ şeklinde Wronskian determinantının sıfırdan farklı yani matematiksel olarak doğru olduğu görülür. Bu yüzden doğrusallaştırılmış çözüm matematiksel amaçlar için yeterlidir.

Şimdi Green fonksiyonunu göz önüne alırsak:

$$G(a,a')=\begin{cases} G_{\langle}(a,a') & m(a')1+n(a')a; \qquad a\langle a' \\ G_{\rangle}(a,a') & d(a')1+l(a')a; \qquad a\rangle a' \end{cases}$$

$0\langle a\langle 1$, $G(0)=0$ ve $G(1)=0$ homojen sınır şartlarını kullanırsak:

$$l(a')=\frac{d(a')}{1},\quad m(a')=0$$

Süreklilik koşulu $G_{>}=G_{<}$, $a=a'$ de $d(a')=\dfrac{n(a')a'}{1-\dfrac{a'}{1}}$ sonucunu verir.

Sıçrama Süreksizliği

$$\left(\frac{dG_{\rangle}}{da}\right)_{a=a'}-\left(\frac{dG_{\langle}}{da}\right)_{a=a'}=\frac{1}{p(a')}$$

şeklindedir.

Burada $p(a)$, ilgili diferansiyel denklemin $\dfrac{d}{da}\left(p(a)\dfrac{d\Psi}{da}\right)$ şeklindeki self-adjoint (hermitik) formunda Sturm-Liouville teorisi tarafından tanımlanmış fonksiyondur.

Bu fonksiyonu yukarıda ifade edilen $f(a)\Psi_1''-g_1(a)\Psi_1=h(a)$ Denklemini göz önüne aldığımızda ve her iki tarafı $f(a)$'ya böldüğümüzde

$$\frac{d^2\Psi_1}{da^2} - \frac{g_1(a)}{f(a)}\Psi_1 = \frac{h(a)}{f(a)}$$

formu elde edilir ve $p = 1$ değeri olur ve sıçrama süreksizliği bize $n(a') = \dfrac{a'-1}{1}$

ifadesini verir. O zaman Green fonksiyonu şu hale gelir.

$$Ga, a') = \begin{cases} -a' + aa', & a \rangle a' \\ a'a - a, & a \langle a' \end{cases}$$

(2.7) denklemindeki ifade $f(a) = 1 - \chi_1 a$, $g_1(a) = \chi_2 a^2 + \chi_3 a^3$,

$h(a) = \left[\chi_4 a + \chi_5 a^2\right]\left[d + la\right]$ şeklinde tanımlabilir. Burada kullanılan sabitler aşağıda gösterilmiştir.

$$\chi_1 = \frac{24}{\alpha_0 k^2} \quad , \quad \chi_2 = \frac{144\pi^4}{k^4}\left(k_c + \frac{k^2}{3}\mu_0\alpha_0^{\,2}\right) \quad , \quad \chi_3 = \frac{144\pi^4\lambda_0\alpha_0}{3k^2}$$

$$\chi_4 = -\frac{144\pi^4}{k^2}\frac{2}{3}\mu_0\alpha_0^{\,3} \quad , \quad \chi_5 = \frac{-144\pi^4}{k^2}\frac{\lambda_0\alpha_0^{\,2}}{3}$$

Aşağıdaki formülün açık tanımına ihtiyaç duyarız.

$$\frac{h(a)}{f(a)} = \frac{\chi_4 da + \chi_4 la^2 \chi_5 da^2 + \chi_5 la^3}{1 - \chi_1 a}$$

şeklinde bir polinomsal bölme bize doğrusallaştırılmış bir yaklaşık ifadeyi verir.

$$\frac{h(a)}{f(a)} \cong \chi_4 da$$

Şimdi Green fonksiyonuna dönersek $\Psi_1 = \int_0^1 (\chi_4 da')G(a,a')da'$, $\chi_4 da' = \dfrac{h(a')}{f(a')}$

ifadesini Ψ_1 de yerine yazarsak (Heaviside birim adım fonksiyonu)

$$H(a - a') = \begin{Bmatrix} 1, & a \rangle a' \\ 0, & a \langle a' \end{Bmatrix}$$

olmak üzere Green fonksiyonunda kullanırsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\Psi_{1\ddot{O}} = \int_0^1 (\chi_4 da')\left[H(a-a')\left\{-a'+aa'\right\} + H(a'-a)\left\{a'a-a\right\}\right]da'$$

Bu denklemin özel çözümü $\Psi_{1\ddot{O}} = -\dfrac{\chi_4 d}{6} a$ dir.

$$\Psi_1 = \Psi_0 - \frac{\chi_4 d}{6} a \qquad , \qquad \Psi_0 = d + l.a$$

olduğuna göre, $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1$ eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$\Psi = d + la + \varepsilon\left[d + la - \frac{\chi_4 d}{6} a\right] \tag{2.10}$$

denklemi elde edilmiş olur. İntegrasyon sabitlerinin bulunması için aşağıdaki sınır koşulları sonuca empoze edilebilir.

$$\alpha\Psi(0) + \beta\left(\frac{d\Psi}{da}\right)_{a=0} = A \quad ,$$

$$\gamma\Psi(1) + \delta\left(\frac{d\Psi}{da}\right)_{a=1} = B \tag{2.11}$$

(2.11) de verilen eşitlikler Robin (Karma) sınır koşullarıdır ve buradaki A *ve* B değerleri sabit reel sayılardır.

$$\Psi = d + la + \varepsilon\left[d + la - \frac{\chi_4 d}{6} a\right]$$

sonucuna Robin (Karma) sınır koşulları uygulanırsa l integrasyon sabiti şu şekilde bulunur.

$$l = \frac{\omega_1}{\omega_3} + \varepsilon\left[\frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{\omega_1\omega_4}{\omega_3^{\,2}}\right] \tag{2.12}$$

Burada

$$\omega_1 = B - \frac{A\gamma}{\alpha}$$

$$\omega_2 = \frac{-A}{\alpha}\left(\gamma - \frac{\gamma\chi_4}{6} - \frac{\delta\chi_4}{6}\right) + \frac{\gamma}{\alpha} A\left(1 - \frac{\beta\chi_4}{6\alpha}\right)$$

$$\omega_3 = \frac{-\beta\gamma}{\alpha} + \gamma + \delta$$

$$\omega_4 = \frac{-\beta}{\alpha}\left(\gamma - \frac{\gamma\chi_4}{6} - \frac{\delta\chi_4}{6}\right) - \frac{\gamma\beta^2\chi_4}{6\alpha^2} + (\gamma + \delta)$$

şeklinde tanımlanmıştır. d integral sabitide yaklaşık olarak aşağıdaki (2.13) ifadesiyle gösterilebilir.

$$d \approx \frac{1}{\alpha}\left[\left(A - \frac{\omega_1}{\omega_3}\beta\right) + \varepsilon\left[-A + \frac{\beta A\chi_4}{6\alpha} - \frac{\omega_1}{\omega_3}\frac{\beta^2\chi_4}{6\alpha} - \beta\left(\frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{\omega_1\omega_4}{\omega_3{}^2}\right)\right]\right] \tag{2.13}$$

(2.12) ve (2.13) de bulduğumuz d ve l integral sabitlerini (2.10) denkleminde yerine yazarsak dalga fonksiyonumuz aşağıdaki (2.14) ifadesiyle gösterilmiş olur.

$$\Psi \approx \left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1\beta}{\omega_3\alpha}\right) + \frac{\omega_1}{\omega_3}a + \left[\left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1\beta}{\omega_3\alpha}\right) + \frac{\omega_1}{\omega_3}a - \frac{\chi_4 ad}{6}\right]$$

$$\equiv \left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1\beta}{\omega_3\alpha}\right) + \frac{\omega_1}{\omega_3}a + \varepsilon\left[\left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1\beta}{\omega_3\alpha}\right) + \frac{\omega_1}{\omega_3}a - \frac{\chi_4 a}{6\alpha}\left(A - \frac{\omega_1}{\omega_3}\beta\right)\right] \tag{2.14}$$

3.SONUÇ

Bu çalışmada evrenin erken evren safhasını sicim ve M teorilerine dayanan bir formalizmle inceledik. Sicim teorisi parçacıkların ve evrenin orijinini ve doğumunu kuantum fiziğinin en temel önermelerinden biri olan Heisenberg belirsizlik ilkesi çerçevesinde açıklamak iddiasında bulunan birbirinin tamamlayıcısı iki teoridir.

Sicim teorisi tek tek parçacıkların orijinini M teorisi ise evrenin doğumunu açıklamaya çalışır. Temel fikir en düşük enerji seviyesi olarak açıklanabilecek olan boşluk (Vakum) durumunda meydana gelen dalgalanmaların evrenin ve temel taneciklerin oluşumuna sebebiyet verdiği önermesidir. Evrenin, boşluk durumundan ortaya çıkma olasılığı teorisi diyebileceğimiz bu düşünce evrenin ilk oluştuğu andaki kuantum dalga fonksiyonunu bulmak amacıyla çözülmesi gereken Wheeler-De Witt denkleminde matematiksel şeklini bulmuştur.

Biz bu tezde bu denklemin fiziksel olarak mümkün bazı hallerini analiz etmeye çalıştık. Yaptığımız çalışmanın kuantum kozmolojiye ilgi duyan öğrenci arkadaşlara bilgi verici ve yol gösterici olmasını diliyoruz. Yaptığımız analizleri $[12]$ deki çalışma ile birleştirerek profesyonel bir teorik fizik dergisine sunacağız.

Bu sunduğumuz eserin kabul edilip basılması halinde skalar alana bağlı potansiyelin 4. kuvvette dahil olmak üzere yazılabileceği ve bu halinde en azından yaklaşık olarak çözülebildiği anlaşılmış olacaktır.

Bu çalışma bahsettiğimiz potansiyel daha büyük kuvvetlere yükseltilerek geliştirilebilir veya eldeki dördüncü dereceden kuvvete haiz potansiyel ile Wheeler-De Witt denkleminin daha kesin ve hassas çözümleri aranabilir.

4. EKLER

Kaynak $\left[12\right]$ **deki çalışmanın kısa özeti:**

Eyüp Yılmaz $\left[12\right]$ nolu kaynakta bizim yaptığımız çalışmayı farklı açıdan incelemiştir. Bu tezde $\mu_0 \gg \lambda_0$ seçilmiştir. Bizim yaptığımız çalışmaya benzer şekilde bu araştırmada $\frac{\mu_0}{\lambda_0} = -\frac{1}{\varepsilon}$ alınmıştır.

$$a = \frac{\alpha}{\lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4} \tag{4.1}$$

ifadesinde $\alpha = \alpha_0 \lambda_0$ kullanarak

$$a = \frac{\alpha}{\lambda_0 \phi^2 \left[1 - \frac{\phi^2}{\varepsilon}\right]} \tag{4.2}$$

buradan $a^{-1} = \frac{\lambda_0}{\alpha}\phi^2 - \frac{\lambda_0}{\alpha\varepsilon}\phi^4$ gösterilmiştir.

$$\frac{\lambda_0}{\alpha\varepsilon}\phi^4 - \frac{\lambda_0}{\alpha}\phi^2 + a^{-1} = 0 \quad , \quad \alpha < 0$$

$$\phi^2 = \frac{\varepsilon}{2} \pm \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\alpha\varepsilon}{a\lambda_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \alpha = |\alpha|$$

olduğuna göre demekki $\alpha = -\alpha$ alınmıştır.

$$\phi^2 \approx \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\alpha}\,4}$$

(4.1) denklemindeki $\alpha = -\alpha$ yazılarak

$$a = \frac{-\alpha\phi^{-2}}{\lambda_0}\left(1 - \frac{\phi^2}{\varepsilon}\right)^{-1} \tag{4.3}$$

elde edilmiştir.

$$\phi \approx \pm\left[\frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\alpha}\,4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Yukarıdaki yaklaşık skalar alan ifadesi, ona bağlı türevler ve çeşitli kuvvetleri Wheeler- De Witt denkleminde yerine konulmuştur. Bu ifadelerin çeşitli örnekleri aşağıda verilmiştir:

$$\phi^2 \approx \frac{\varepsilon\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}} + \frac{\varepsilon^2}{16}\frac{\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2} \qquad ,$$

$$\phi^4 \approx \frac{\varepsilon^2\alpha}{a\lambda_0} + \frac{\varepsilon^4 a\lambda_0}{256\alpha} + \frac{3\varepsilon^3}{8} + \frac{\varepsilon^{\frac{5}{2}}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}} + \frac{\varepsilon^{\frac{7}{2}}\sqrt{a}\sqrt{\lambda_0}}{16\sqrt{\alpha}}$$

$$\phi^{-3} \approx \pm\left[\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}\alpha^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}\lambda_0^{\frac{1}{4}}}\right)^{-3} - 3\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}\alpha^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}\lambda_0^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}\frac{\varepsilon}{4}\frac{a^{\frac{1}{4}}\lambda_0^{\frac{1}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{4}}}\right] \equiv \pm\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}\lambda_0^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}\alpha^{\frac{3}{4}}} - \frac{3}{4}\frac{a^{\frac{5}{4}}\lambda_0^{\frac{5}{4}}}{\alpha^{\frac{5}{4}}\varepsilon}\right]$$

$$\frac{\partial a}{\partial\phi} \cong \frac{2\beta}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\left[\pm\frac{a^{\frac{3}{4}}}{\left(1-\frac{\beta^2}{\sqrt{a}}\right)} \pm \frac{a^{\frac{1}{4}}\beta^2}{\left(1-\frac{\beta^2}{\sqrt{a}}\right)^2}\right]$$

Yukardaki $\beta = \left(\frac{\alpha}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{4}} \equiv \alpha_0^{\frac{1}{4}},\ \alpha = \alpha_0\lambda_0$ yazıldığında yandaki eşitlik bulunmuştur.

$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = \frac{\partial a}{\partial\phi}\left\{\frac{\partial l(a)}{\partial a}\frac{\partial\Psi}{\partial a} + l(a)\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^2}\right\}$ olarak yazılabilir ve hatırlatmamız gerekirki buradaki $\frac{\partial l(a)}{\partial a}\frac{\partial\Psi}{\partial a}$ birinci mertebeden türev ifadesi değerlendirmeye alınmak için çok küçük olduğundan ihmal edilmiştir. O zaman

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \approx l^2(a)\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^2}$$

ifadesi orijinal denklemde yerine yazılarak

$$\left(1-\frac{6}{k^2a^2}l^2(a)\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^2}-\frac{144\pi^4}{k^4}\left(k_c a^2-\frac{k^2}{3}a^4\left[\lambda_0\phi^2+\mu_0\phi^4\right]\right)\Psi=0 \qquad (4.4)$$

denklemi elde edilmiştir. Burada

$$l^2(a)\equiv\left(\frac{\partial a}{\partial\phi}\right)^2\approx\frac{4\beta^2}{\varepsilon^3}\left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{\beta^2}{\sqrt{a}})^2}+\frac{\sqrt{a}\beta^4}{(1-\beta^2a^{\frac{-1}{2}})^4}-\frac{2a\beta^2}{(1-a^{\frac{-1}{2}}\beta^2)^3}\right]$$

şeklinde tanımlandığını hatırlatırız.

$\frac{-\lambda_0}{\mu_0}=\varepsilon$ 'un olduğunu hatırlıyoruz. Eğer bütün sonuçları denklemde birleştirirsek :

$$\frac{d^2\Psi}{da^2}-\frac{\frac{144\pi^4}{k^4}\left(k_c a^2-\frac{k^2}{3}a^4\left[\lambda_0\phi^2+\mu_0\phi^4\right]\right)\Psi}{\left(1-\frac{6}{k^2a^2}l^2(a)\right)}=0$$

formu elde edilmiştir. Bu formül aşağıdaki gibi özetlenmiştir :

$$\frac{d^2\Psi}{da^2}-f(a)\Psi=0 \qquad (4.5)$$

$f(a)$ 'daki ε 'nun en küçük üssü ε^3 olur bu ε^3 aşağıdaki formülde açık olarak yazılmıştır :

$$f(a)\approx\frac{-6\pi^4k_c\varepsilon^3a^4}{k^2\sqrt{\alpha_0}\left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(1-\sqrt{\frac{\alpha_0}{a}})^2}+\frac{\sqrt{a}\alpha_0}{(1-\sqrt{\frac{\alpha_0}{a}})^4}-\frac{2a\sqrt{\alpha_0}}{(1-\sqrt{\frac{\alpha_0}{a}})^3}\right]}$$

$f(a)$ üsteki denklemde yerine yazılırsa:

$$\frac{d^2\psi}{da^2}+\frac{6\pi^4 k_c\varepsilon^3 a^4\psi}{k^2\sqrt{\alpha_0}\left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\sqrt{\frac{\alpha_0}{a}}\right)^2}+\frac{\sqrt{a}\alpha_0}{\left(1-\sqrt{\frac{\alpha_0}{a}}\right)^4}-\frac{2a\sqrt{\alpha_0}}{\left(1-\sqrt{\frac{\alpha_0}{a}}\right)^3}\right]}=0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem ancak büyük a değerleri için incelenirse anlamlı olur. Yani $a\rangle 1$ için aksi halde ε^3 ikinci terimi anlamsız hale getirir. Bu $f(a)$'yı basitleştirme imkanı sunmuştur.

$f(a)\approx\frac{6\pi^4 k_c\varepsilon^3 a^{\frac{5}{2}}}{k^2\sqrt{\alpha_0}}$ şeklinde basitleştirilmiştir. Büyük a değerleri a'nın $a>1$ yani $a\in(1,L)$ aralığında incelenmesini gerektirir. Denklem

$$\frac{d^2\psi}{da^2}+\frac{6\pi^4 k_c\varepsilon^3 a^{\frac{5}{2}}}{k^2\sqrt{\alpha_0}}\psi=0$$

şeklindedir ve bizim tezde anlattığımız yönteme benzer şekilde $\Psi=\Psi_0+\varepsilon^3\Psi_1$ önermesi ile çözülmüştür.

$$\Psi_0=c_1 a+c_2$$

olarak bulunmuştur. Denklemin Green fonksiyonu aşağıdaki gibi tasarlanmıştır.

$$G(a,a')=\begin{cases} c_3 a+c_4, & a\rangle a' \\ c_5 a+c_6, & a\langle a' \end{cases} \tag{4.6}$$

Green fonksiyonu açık formda aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$G(a,a')=\begin{cases} \dfrac{(L-a)(1-a')}{(L-1)}, & a\rangle a' \\ \dfrac{(1-a)(L-a')}{(L-1)}, & a\langle a' \end{cases} \tag{4.7}$$

Bu ifadeler denklemin özel çözümünü bulmak için kullanılmış ve

$$\psi_p = \frac{-6\pi^4 k_c}{k^2\sqrt{\alpha_0}\left(L-1\right)}\left\{\left(L-a\right)\int_1^a da'\left(1-a'\right)a'^{\frac{7}{2}}c_1 + \left(L-a\right)\int_1^a da'\left(1-a'\right)a'^{\frac{5}{2}}c_2\right.$$
$$\left. +\left(1-a\right)\int_a^L\left(L-a'\right)a'^{\frac{7}{2}}c_1da' + \left(1-a\right)\int_a^L\left(L-a'\right)a'^{\frac{5}{2}}c_2da'\right\}$$

elde edilmiştir. Dolayısıyla

$$\Psi = c_1a + c_2 + \varepsilon^3\left[c_1a + c_2 + \Psi_p\right]$$

şeklinde karşımıza çıkar.

Bu sonuca Karma(Robin) sınır koşulları aşağıdaki şekilde :

$$\alpha\left\{c_1 + c_2 + \varepsilon^3(c_1 + c_2)\right\} + \beta\left\{c_1 + \varepsilon^3\left(c_1 + (\frac{d\psi_p}{da})_{a=1}\right)\right\} = \xi \tag{4.8}$$

$$\gamma\left\{c_1L + c_2 + \varepsilon^3(c_1L + c_2)\right\} + \delta\left\{c_1 + \varepsilon^3\left(c_1 + (\frac{d\psi_p}{da})_{a=L}\right)\right\} = \eta \tag{4.9}$$

uygulanmıştır. Genel sonuç aşağıdaki gibi yazılmış olup

$$\Psi = c_1a + c_2 + \varepsilon^3\left[c_1a + c_2 + \Psi_p\right] \tag{4.10}$$

bu ifadede yeralan Ψ_p fonksiyonu aşağıda verilmiştir :

$$\psi_p = \frac{-12\pi^4 k_c}{k^2\sqrt{\alpha_0}(L-1)}\left\{c_1(L-a)\left[\frac{11a^{\frac{9}{2}} - 9a^{\frac{11}{2}} - 2}{99}\right]\right.$$

$$+c_2(L-a)\left[\frac{9a^{\frac{7}{2}} - 7a^{\frac{9}{2}} - 2}{63}\right] + c_1(1-a)\left[\frac{2L^{\frac{11}{2}} - 11La^{\frac{9}{2}} + 9a^{\frac{11}{2}}}{99}\right]$$

$$\left. +c_2(1-a)\left[\frac{2L^{\frac{9}{2}} - 9La^{\frac{7}{2}} + 7a^{\frac{9}{2}}}{63}\right]\right\}$$

Bu denklemlerin içindeki integrasyon sabitlerinin açık ifadeleri ve bu çalışmanın ayrıntıları için $\left[12\right]$ nolu kaynaktaki Eyüp Yılmaz'ın daha önce bahsettiğimiz tezine başvurulabilir.

KAYNAKLAR

[1] P. J. E. Peebles, “Physical Cosmology”, Princeton University Pres,Princeton (1993).

[2]D. L. Wiltshire, “An İntroduction to Quantum Cosmology”, ArXiv:gr-qc/0101003

[3] S. W. Hawking, “Nucl. Phys.”, B **239** (1984) 257.

[4] S. W. Hawking and Z. C. Wu, “Phys. Lett.”, B **151** (1985) 15.

[5] B.S. De Witt, “Phys. Rev.”, **160** (1967) 1113.

[6] J. A. Wheeler and C. M. De Witt, “in: Relativity, Groups and Topology”, Benjamin,New York,1968

[7] A. H. Guth, “Physical Review”, D **23** (1981) 347.

[8] A. Linde, “Physics Letters”, B **108** (1982) 389.

[9] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, “Physical Review Letters”, **48** (1982) 1220.

[10] D. H. Zhang, “Commun. Theor. Phys.”, Beijing, China, **35** (2001) 635. arXiv:gr-qc/0003079v1

[11] Y-C Huang and G. Weng, “Commun. Theor. Phys.” Beijing, China, 44 (2005) 757.

[12] E. Yılmaz “ Wheeler- De Witt Denklemini Kullanarak Evrenin Erken Safhasındaki Oluşum Sürecinin İncelenmesi”, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur. (2013)

ÖZGEÇMİŞ

Abdülkadir ARGON, 25.06.1974 yılında Gebze'de doğdu. Lisans eğitimini 1997 yılında Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümün'de tamamladı. Yüksek lisans eğitimini Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'nde devam etmektedir. 1999'dan bu yana Milli Eğitim'de Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.