T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP VE MONOİD CEBİRSEL YAPISINDA KARAR VERME PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eylem GÜZEL

Balıkesir, Haziran - 2006

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP VE MONOİD CEBİRSEL YAPISINDA KARAR VERME PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eylem GÜZEL

Balıkesir, Haziran - 2006

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP VE MONOID CEBİRSEL YAPISINDA KARAR VERME PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Eylem GÜZEL

Tez Danışmanı: Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi : 22/06/ 2006
Jüri Üyeleri : Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK (Danışman, BAÜ)
Doç. Dr. Hayrullah AYIK (ÇÜ)
Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (BAÜ)

Balıkesir, Haziran - 2006

ÖZET

GRUP VE MONOİD CEBİRSEL YAPISINDA KARAR VERME PROBLEMLERİ

Eylem GÜZEL
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balıkesir, 2006

Bu çalışmada grup ve monoid sunuşları genel anlamlarıyla verilmiş ve bu sunuşlar üzerinde tezin temel konusu olan karar verme problemleri incelenmiştir. Ayrıca bazı grup ve monoid genişlemelerinin yapıları tanımlanarak bu yapılar üzerinde kelime problemi çalışılmıştır. Bunlara ek olarak da, sunuşun temsil ettiği cebirsel yapının kelime probleminin çözülebilirliğini araştıran metod ayrı bir bölüm olarak verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez çalışmasının sonraki bölümlerinde kullanılacak olan grup, monoid ve yarı grupların genel sunuşları verilmiştir. Ayrıca grup yapısı için karar verme problemleri tanımlanıp, bu problemler arasındaki ilişkiler incelenmiş ve grupların bazı cebirsel sınıflarının karar verme problemlerinin çözülebilir olup olmadığı şekillendirilmiştir.

İkinci bölümde grup genişlemelerinden olan serbest çarpım, direkt çarpım, birleştirilmiş serbest çarpım ve HNN genişlemeleri çalışılarak bu yapılar üzerindeki kelime problemi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde özellikle monoid ve yarı grup sunuşlarının temsil ettiği yapıların kelime probleminin çözülebilirliğini araştıran ve sunuştaki bağıntılar yardımıyla sonucu veren bir metod (yeniden yazma sistemi) çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde monoidler üzerinde tanımlanan wreath çarpım sunuşu verilerek buna bağlı sonuçlar tartışılmıştır.

Son bölümde ise her bir bölümden elde edilen sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Grup, monoid, sunuş, kelime problemi, eşlenik problemi, izomorfizma problemi, yeniden yazma sistemi, wreath çarpım.

ABSTRACT

DECISION PROBLEMS ON GROUPS AND MONOIDS

Eylem GÜZEL
Balikesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(MSc. Thesis / Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balikesir, Turkey-2006

In this work it has been given the presentations of groups and monoids with their general meanings and it has been investigated decision problem which is main subject of this thesis, on these presentations. Also, by defining structures of some group and monoid extensions, it has been studied decision problems on these extensions. Moreover it has been given a method examining solvability of the word problem of algebraic structures representing the presentation as a different chapter.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, it has been given the general presentations of group, monoid and semigroup which will be used for the remaining chapters of this thesis. Also, by defining the decision problems on groups, it has been investigated the relations among these problems and it has been formed whether or not decision problems of some algebraic classes of groups are solvable.

In the second chapter, by studying group extensions, it has been investigated the word problem on free product, direct product, amalgameted free product and HNN extensions.

In Chapter 3, it has been studied a method (rewriting system) which search thoroughly soluble of the word problem of, particularly, monoid and semigroup presentations and give the result by means of relations on presentation.

In the fourth chapter, by giving the wreath product presentation defined on monoids it has been discussed the related results of this construction.

In the final chapter, it has been given the results obtained in each chapters.

KEY WORDS: Group, monoid, presentation, word problem, conjugacy problem, isomorphism problem, rewriting system, wreath product.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
$\iota(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin bitiş harfi
1_w	boş kelime
l(w)	w kelimesinin uzunluğu
$l_x(w)$	w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu
$\approx$	serbest olarak iki kelimenin eşitliği
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$F(X)$	X kümesi üzerindeki serbest (free) grup
$\|X\|$	X kümesinin eleman sayısı
$\wp$	grup sunuşu
$w_1 \approx_{\wp} w_2$	w_1 ve w_2 kelimeleri $\wp$ sunuşuna bağlı olarak denktir
$[w]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı olarak w kelimesinin denklik sınıfları
$[1]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı grubun birimi
$G(\wp)$	$\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup
N	normal kapanış
$\wp_M$	M monoidin sunuşu
$\wp_S$	S yarı grubunun sunuşu
$WP(G)$	G grubunun kelime problemi
$CP(G)$	G grubunun eşlenik problemi
$IsoP$	izomorfizma problemi
$GWP(G)$	G grubunun genelleştirilmiş kelime problemi
+	karar verme problemi çözülebilir
−	karar verme problemi çözülemez
?	karar verme probleminin çözülüp çözülemediği belli değil
s.s	sonlu sunumlu grup
s.ü	sonlu üreteçli grup

Simge	**Adı**
$H * K$	serbest çarpım
$A \times B$	direkt çarpım
$A\mathrm{B}*_{\theta}B$	birleştirilmiş serbest çarpım
$G*$	G grubunun HNN genişlemesi
$Awr\mathrm{B}$	A nın B ile kısıtlanmış wreath çarpımı
□	ispatların sonuna eklenir

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Tezimi hazırlamakla geçirdiğim yoğun çalışma sürecinde, beni deneyim ve bilgileriyle yönlendiren, değerli zamanını ayırıp ilgisini esirgemeyen, maddi ve manevi her yönden destek sağlayan sevgili hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezimin her aşamasında ve yaptığımız çalışmalarda benimle bilgilerini paylaşan Araş. Gör. Fırat ATEŞ'e ve öğrenim hayatım boyunca emeği geçen tüm hocalarıma teşekkür ederim.

TÜBİTAK Konuk Bilim Adamı Programı dahilinde Balıkesir Üniversitesi'ni ziyareti sırasında, bana yardımlarını esirgemeyen ve "Yeniden Yazma Sistemi" nin temellerini anlatan Prof. Richard M. Thomas'a (Leicester Üniversitesi / England) sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yaşamımın her anında maddi ve manevi olarak beni destekleyen, beni bugünlere getiren sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimle…

Balıkesir, 2006 **Eylem GÜZEL**

1. GİRİŞ

Bu bölümde grup, monoid ve yarı grup sunuşları ile tezin genel amacı olan karar verme problemleri tanımlanıp, detaylandırılacaklardır. Tanımlanan bu materyaller [7, 8, 9, 12] gibi kaynaklarda da bulunabilir.

1.1 Serbest Gruplar

X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}$ $(x \in X)$ eşlemesinden yararlanarak X^{-1} kümesini tanımlayalım ve de $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına **harf** denir. Burada $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \tag{1.1}$$

ifadesine X üzerinde bir **kelime** denir ve w ile gösterilir. w kelimesinin başlangıç harfi $\iota(w)$ ile gösterilip, burada $\iota(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ dir. Benzer şekilde bitiş harfi $\tau(w)$ ile gösterlip, (1.1)'deki kelimenin bitiş harfi $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ dir. Özel olarak $n = 0$ ise **boş kelime** elde edilir ve 1_w ile gösterilir. (1.1)'deki gibi boş olmayan bir kelime ($n>0$) için her $\varepsilon_i = +1$ oluyorsa w kelimesine **pozitif kelime** denir. Ayrıca (1.1)'deki w kelimesinin tersi

$$x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots x_1^{-\varepsilon_1}$$

kelimesi olarak tanımlanır ve w^{-1} olarak gösterilir.

(1.1)'de verilen w kelimesinin uzunluğu, w içindeki harflerin sayısı olarak tanımlanır, ayrıca w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu da $\sum_{x_i = x} |\varepsilon_i|$ olarak hesaplanır ve bunlar sırasıyla $l(\mathrm{w})$, $l_x(w)$ ile gösterilir.

X kümesi üzerinde verilen iki kelime w ve u olsun. w ve u kelimelerinin çarpımını, w kelimesinin arkasına u kelimesini getirip yan yana yazarak elde ederiz ve bu çarpım wu ile ifade edilir.

1.1.1 Kelimeler Üzerindeki İşlemler

(1.1)'deki gibi alınacak herhangi bir w kelimesine aşağıdaki operasyonlar uygulanabilir.

(I) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime içinde $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ çiftleri varsa, bu çiftler silinir. Yapılan bu işleme *indirgeme işlemi* denir.

$(\mathrm{I})^{-1}$ $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenebilir. Bu işleme de kelime üzerinde *ekleme işlemi* denir.

X kümesi üzerindeki iki kelime w ve w' olsun. Eğer bu kelimelerden biri diğerine yukarıdaki (I) ve $(\mathrm{I})^{-1}$ işlemlerinin sonlu sayıdaki uygulamasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelimeye *serbest olarak eşit* denir ve bu $w \approx w'$ ile gösterilir. Aslında $\approx$ olarak gösterilen serbest olarak eşitlik, bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla herhangi bir w kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. Eğer X kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesini $F(X)$ ile gösterirsek, $F(X)$ üzerindeki çarpma işlemi

$$[w][u] = [wu] \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır ve bu çarpma işlemi iyi tanımlıdır.

1.1.2 Tanım: $F(X)$ kümesi üzerinde, (1.2) ile tanımlanan işleme göre oluşan gruba X üzerindeki **serbest (free) grup** denir.

Aşağıda verilen

$$X_0 = \{\, [x] : x \in X \,\}$$

kümesi, $F(X)$ serbest grubu için bir üreteç kümesidir. Açıkça görülür ki, X_0 kümesinin eleman sayısı X kümesinin eleman sayısı ile aynıdır.

X kümesi üzerinde alınacak herhangi bir kelime, $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}\,(x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1)$ harf çiftini içermiyorsa bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir. Buna ek olarak, (1.1) deki gibi bir kelime için $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye *devirsel indirgenmiş kelime* denir.

1.1.3 Teorem [3, 7] (Evrensel Dönüşüm Özelliği): G herhangi bir grup ve $\theta_0 : X_0 \to G$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\theta : F(X) \to G$$

biçiminde tanımlanan ve θ_0 dönüşümünün genişlemesi olan bir tek grup homomorfizması vardır.

1.1.4 Tanım: X kümesi üzerinde tanımlanan $F(X)$ serbest grubu için X kümesinin eleman sayısına $F(X)$ grubunun *rankı* denir ve bu $|X|$ ile gösterilir.

Verilen herhangi sonlu X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanan serbest gruplar $F(X)$ ile $F(Y)$ olmak üzere, bu serbest grupların üreteç kümeleri sırasıyla X_0, Y_0 ve rankları yine sırasıyla $|X|$ ile $|Y|$ olsun. Buna göre [14]'te aşağıdaki sonuç gösterilmiştir.

1.1.5 Teorem: X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanan serbest gruplar için,

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow F(X) \cong F(Y)$$

dir.

1.2 Grup Sunuşları

X bir küme (*üreteç sembollerinin kümesi*) ve R de X kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme (*bağıntı kelimelerinin kümesi*) olsun. Bu durumda,

$$\wp = < X \, ; R >$$

ikilisine bir **grup sunuşu** denir [7]. X ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp$ sunuşu *sonludur* denir.

X kümesindeki kelimeler üzerinde, yukarıdaki (I) ve $(I)^{-1}$ işlemlerine ek olarak aşağıdaki işlemleri kullanarak, $\wp$ sunuşu ile bir grup tanımlarız. Bunun için X kümesi üzerinde bir kelime w olsun.

(II) w kelimesi r^{ε} ($r \in R$, $\varepsilon = \pm 1$) şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelimeyi sileriz.

$(II)^{-1}$ w kelimesi içinde herhangi bir yere r^{ε} ($r \in R$, $\varepsilon = \pm 1$) alt kelimesini ekleriz.

X kümesi üzerinde iki kelime w_1 ve w_2 olsun. Eğer w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu sayıda $(I)^{\pm 1}$, $(II)^{\pm 1}$ işlemleri ile ulaşılabiliyorsa, w_1 ve w_2 kelimelerine $\wp$ sunuşuna bağlı olarak **denk kelimeler** denir ve bu denklik $w_1 \approx_{\wp} w_2$ ile gösterilir. Buradaki $\approx_{\wp}$ bağıntısı X üzerindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca w kelimesini içeren denklik sınıfını $[w]_{\wp}$ ile gösterirsek, bu denklik sınıfı üzerindeki çarpma işlemi

$$[w_1]_{\wp}[w_2]_{\wp} = [w_1 w_2]_{\wp}$$

şeklinde tanımlanır ve bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu çarpma işlemi altında, tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup olur. Bu grup $G(\wp)$ ile gösterilip, $G(\wp)$ grubunun birim elemanı $[1]_{\wp}$ ile ifade edilir.

Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu $\wp$ ile *sunuluyor* (ya da $\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup G dir) denir. Şimdi

$$N = \{[r] : r \in R\}$$

kümesini grubun normal kapanışı olarak tanımlarsak, aşağıdaki teorem elde edilir.

1.2.1 Teorem:

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

dir.

İspat: $\wp$ sunuşunun temsil ettiği $G(\wp)$ grubu ve X kümesi için,

$$\psi_0 : X \to G(\wp)$$
$$x \mapsto [x]_{\wp}$$

dönüşümünü tanımlayalım. 1.1.3 Teoremden, bu dönüşümün genişlemesi olan

$$\psi : F(X) \to G(\wp)$$
$$[w] \mapsto [w]_{\wp}$$

biçiminde bir tek homomorfizma vardır ve de $\psi_{\mid X} = \psi_0$ (ψ nin X üzerindeki kısıtlanışı) dır. Açıkça görülebilir ki, ψ homomorfizması örtendir. Ayrıca $Çek\psi = N$ dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoremi gereği

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

bulunur. □

1.2.2 Örnek: X kümesi üzerindeki serbest grubun sunuşu $\wp = < X \; ; \; \phi >$ şeklindedir. Burada dikkat edilirse bağıntı kelimelerinin kümesi $R = \phi$ dir.

1.3 Monoid ve Yarı Grup Sunuşları

Bu kısımda grup sunuşlarına ek olarak monoid ve yarı grup sunuşlarını tanıtacağız. İlerideki çalışmalarımızdan da anlaşılacağı üzere, grup sunuşları ile bu tür sunuşlar arasında yapısal faklılıklar vardır. Bununla beraber bu tip sunuşlar üzerinde bazı cebirsel konuların çalışılması daha güç olduğu için, bu alanda çalışan matematikçiler monoid ve yarı grup sunuşları üzerine daha çok yoğunlaşmıştır.

1.3.1 Monoid Sunuşu

M bir monoid ve A da bu monoidin üreteç kümesi olmak üzere, A^+ kümesi A üreteç kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az *bir* uzunluklu kelimelerin kümesi olarak tanımlanır. Bununla beraber monoidler için tanımlanan kelimeler ise $A^* = A^+ \cup \{1\}$ kümesinden alınır.

1.3.1 Tanım: A boştan farklı bir küme (üreteç kümesi) ve $U \subseteq A^* \times A^*$ olacak şekilde U alt kümesi, bağıntı kelimelerinin bir kümesi olsun. Bu durumda

$$\wp_M = [\, A \; ; \; U \,]$$

ikilisine bir *monoid sunuşu* denir. Gruplarda olduğu gibi A ve U kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_M$ sunuşu da sonludur.

Aşağıdaki verilecek teoremlerde önemli bir yer oluşturan "*kongruans*" terimini açıklayalım:

M bir monoid (S bir yarı grup) ve ρ, M üzerindeki (veya S) bir denklik bağıntısı olsun. Her $x, y, s \in M$ (veya S) için $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$ oluyor ise ρ bağıntısına bir *sağ kongruans* bağıntısı denir. Benzer olarak, her $x, y, s \in M$ için, $(x, y) \in \rho \Rightarrow (sx, sy) \in \rho$ oluyor ise bu ρ bağıntısına bir *sol kongruans* bağıntısı denir. Eğer ρ bağıntısı hem *sağ* hem de *sol kongruans* oluyor ise bu ρ bağıntısına *kongruans* bağıntısı denir. (Yada her $(x_i, y_i) \in \rho$ $(i = 1, 2)$ için, $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in \rho$ ise ρ bağıntısına *kongruans* bağıntısı denir.)

1.3.2 Teorem: M bir monoid, A da M için bir üreteç kümesi ve ρ, A^* kümesi üzerinde U yu içeren en küçük kongruans olsun. Bu durumda

$$M \cong A^* / \rho$$

dir.

İspat: $\wp_M$ sunuşunun temsil ettiği M monoidi ve A üreteç kümesi için,

$$\Phi_0 : A \to M,$$
$$x \mapsto [x]_{\wp} \qquad (x \in A)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm

$$\Phi : A^* \to M,$$
$$[w] \mapsto [w]_{\wp}$$

şeklinde tek bir örten homomorfizmaya genişletilebilir. Ayrıca ÇekΦ, U yu içeren en küçük kongruans bağıntısı olduğundan, ÇekΦ = ρ dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoreminden

$$M \cong A^* / \rho$$

sonucuna ulaşılır. □

1.3.2 Yarı Grup Sunuşu

Bu bölümde kullanılan S sembolü her zaman bir yarı grubu gösterecektir.

1.3.3 Tanım: A boştan farklı bir küme (üreteç kümesi) ve $R \subseteq A^+ \times A^+$,

$u, v \in A^+$ için $u = v$ biçimindeki elemanlardan oluşan bir bağıntı kümesi tanımlayalım. Bu durumda $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ve $R = \{u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n\}$ için,

$$\wp_S = [\ a_1, \ldots , a_m\ ;\ u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n\ ]$$

ikilisine bir *yarı grup sunuşu* denir. Burada A kümesi sonlu ise bu yarı gruba *sonlu üreteçli* (finitely generated) *yarı grup*, A ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise o zaman bu yarı gruba *sonlu sunumlu* veya *sonlu sunuşlu* (finitely presented) *yarı grup* denir.

Not: Her sonlu sunuşlu yarı grup sonlu üreteçlidir [15]. Ancak sonlu üreteçli olup, sonlu sunumlu olmayan yarı gruplar da vardır. Örneğin,

$$\wp = [\ a, b\ ;\ ab^i a = aba\ (i \in \mathbb{N})\ ]$$

yarı grup sunuşu sonlu sunuşlu değildir.

1.3.4 Teorem: S bir yarı grup, A da S için bir üreteç kümesi ve ρ , A^+ kümesi üzerinde R bağıntı kümesini içeren en küçük kongruans olsun. Bu durumda

$$S \cong A^+ / \rho$$

dur.

İspat: Bu teoremin ispatı 1.2.1 veya 1.3.2 Teoremlerin benzeridir. □

1.3.5 Örnek: $[\ a\ ;\ a^2 = a\ ]$ sunuşunun temsil ettiği yarı grup $\{a\}$ ile üretilen tekil yarı gruptur.

1.3.6 Örnek: $[\ a\ ;\ a^{n+r} = a^r\ ]$ sunuşunun temsil ettiği yarı gruba n+r-1 mertebeli *devirli* (monogenic) *yarı grup* denir.

Not: Her yarı grup sunuşu aynı zamanda bir monoid sunuşu haline getirilebilir. Örneğin, $<A\ ;\ R>$ sunuşunun temsil ettiği yarı grup S olsun. Bu yarı gruba birim eleman eklenerek $<A\ ;\ R>$ sunuşunun temsil ettiği bir monoid olur. Eğer S yarı grubu $e \in A^+$ ile temsil edilen bir birim eleman içeriyorsa o zaman da $<A\ ;\ R\ ,\ e = 1>$ sunuşu S için bir monoid sunuşudur.

Şimdi $< B ; Q >$ sunuşunun temsil ettiği monoidi M olarak alalım. O halde,

$$< B, e ; Q' , e^2 = e, eb = be = b \ (b \in B) >$$

sunuşu M için bir yarı grup sunuşudur. (Burada Q' bağıntı kümesi Q bağıntı kümesindeki $w = 1$ formundaki her bir bağıntının $w = e$ bağıntısıyla yer değiştirildiği bir kümedir.)

Bununla birlikte, $< A ; R >$ sunuşunun temsil ettiği grup G iken,

$$< A, A^{-1} ; R, aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \ (a \in A) >$$

sunuşu G için bir monoid sunuşudur. (Burada $A^{-1} = \{a^{-1}; a \in A\}$ kümesi A dan farklı ama A nın elemanları ile bire-bir eşlemeli yeni bir kümedir.)

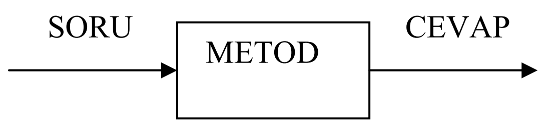
1.4 Karar Verme Problemi Nedir?

Bu problemi ve bu problem ile ilgili detayları, daha sık karşılaşılan yapılar oldukları için, grup ve grup sunuşları üzerinde tanımlayalım.

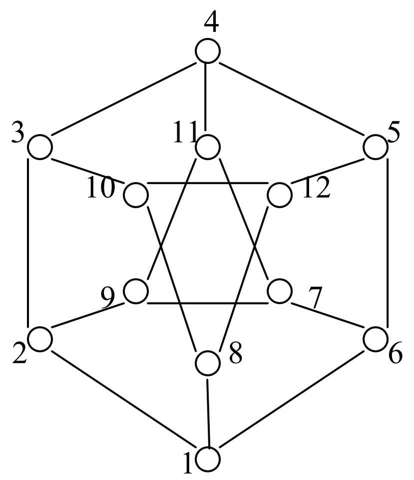
Gruplar için tanımlanan grup sunuşlarının kullanım amaçları, sadece ait oldukları grupların mertebelerini bulmak veya bu grupların genel bir karakterizasyonunu yapmak için değildir. Özellikle son çeyrek yüzyıl içerisinde, bu tip sunuşlar kullanılarak bu gruplar üzerinde tanımlanan bazı özel *problemlerin* çözümleri için de geniş bir kullanım alanına sahiptirler.

Problem nedir?

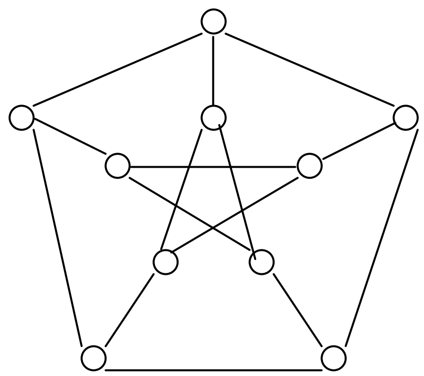
Problem, ele alınan bir soruya karşılık bu sorunun cevabını veren bir algoritmanın (veya metodun) bulunup bulunmamasıdır.



Cevabı "evet" veya "hayır" olan problemlere **karar verme problemleri** (decision problems) denir. Eğer verilen bir problemi çözmek için bir algoritma (veya metod) varsa bu karar verme problemine **çözülebilir** (solvable), böyle bir algoritma yoksa o zaman da bu karar verme problemine **çözülemez** (unsolvable) denir. Örneğin Hamiltonian devresi (her bir köşeden bir defa geçerek tüm köşeleri dolaşan bir devre) problemi çözülebilirdir. Bu, mümkün olan bütün devreler kontrol edilerek sağlanır.



Şekil 1.1

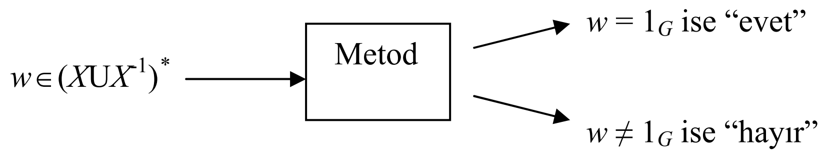


Şekil 1.2

Şekil 1.1 bir Hamiltonian devresidir. Çünkü, 1 ile numaralandırdığımız köşeden başlarsak 1-6-5-12-8-10-3-4-11-7-9-2 yollarını takip ettiğimizde tekrar başladığımız köşeye döneriz. Ancak Şekil 1.2, Hamiltonian devresi değildir.

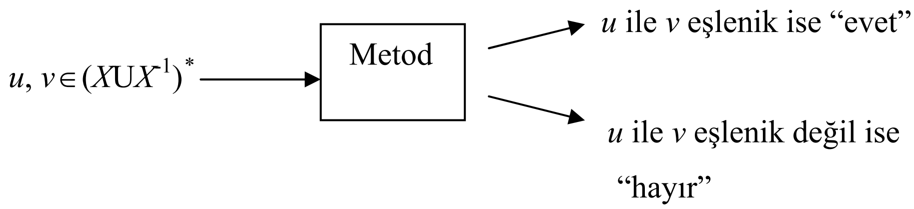
Aşağıdaki üç temel karar verme problemi 1911'de Max Dehn tarafından ortaya atılmıştır [9, 12].

- <u>**Kelime Problemi:**</u> *G* sonlu sunuşlu bir grup olsun. *G* nin üreteçleri ile oluşturulan keyfi bir *w* kelimesinin bu grubun birimine eşit olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığının araştırılması problemidir.

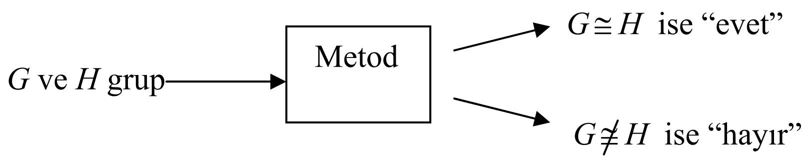


Burada w, X üreteç kümesindeki elemanlar ve bunların terslerinden de oluşan bir kelime olsun. Eğer w kelimesi grubun birimini veriyorsa cevabımız "evet", grubun birimini vermiyorsa cevabımız "hayır" dır. İşte bu şekilde bir metod veya algoritma bulabilirsek bu sonlu sunumlu G grubu için kelime problemi çözülebilirdir deriz. Bu problem, $WP(G)$ sembolü ile gösterilir.

- **<u>Eşlenik Problemi</u>:** G sonlu sunuşlu bir grup olsun. G nin üreteçleri ile oluşturulan keyfi u ve v kelimelerinin G nin eşlenik elemanları olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığının araştırılması problemidir ve $CP(G)$ sembolü ile gösterilir.

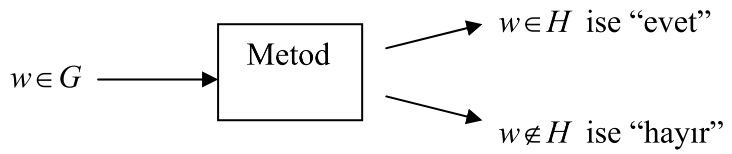


- **<u>İzomorfizma Problemi</u>:** Sonlu sunuşa sahip herhangi iki grubun birbirine izomorf olup olmadığına karar veren bir algoritmanın var olup olmaması problemidir ve *IsoP* ile gösterilir.



Birleştirilmiş grup ve yarı grup teorisi konusunda çalışan birçok matematikçi, bu problemlerin her birisiyle ayrı ayrı ilgilenip bazılarının yeni uzantılarını (genelleştirilmiş kelime (generalized word) problemi veya üyelik (membership) problemi) elde etmişlerdir [12]. Ayrıca, gruplar üzerideki *kuvvet* (power) ve *mertebe* (order) problemleri de son yıllarda önem kazanan yapılar arasındadır. Bu problemlerin özellikle kelime ve eşlenik problemleriyle olan ilişkileri çalışılmıştır [13]. Bu problemleri aşağıdaki gibi kısaca açıklayabiliriz.

<u>Genelleştirilmiş Kelime Problemi (veya Üyelik Problemi)</u>: G grubunun sonlu üreteçli bir alt grubu H olsun. G içindeki H alt grubu için *genelleştirilmiş kelime problemi* G içindeki herhangi bir w kelimesinin H alt grubunda da olup olmamasına karar veren bir algoritmanın araştırılması problemidir ve $GWP(G)$ sembolü ile gösterilir [12].



H alt grubunun tekil alt grup olarak alınması durumunda, kelime probleminin genelleştirilmiş kelime probleminin özel bir tipi olduğu anlaşılır.

1.4.1 Teorem [3]: G bir grup ve $K \subseteq H \subseteq G$ olsun. G içindeki H alt grubu ve H içindeki K alt grubu için üyelik problemi çözülebilirse G içindeki K alt grubu için de üyelik problemi çözülebilirdir.

1.4.2 Teorem [3]: G_1 ve G_2 grupları için kelime problemi, G_1 ve G_2 nin sırasıyla H_1 ve H_2 alt grupları için de üyelik problemi çözülebilir olsun. O halde, $G_1 * G_2$ içindeki $H_1 * H_2$ serbest çarpımı için de üyelik problemi çözülebilirdir.

Şimdi, birçok kaynakta da karşılaşılan ve bazı algoritmik problemlerle de ilişkisi kurulan *tekrarlamalı sıralanan* (recursively enumerable) *küme* ve *tekrarlamalı sunum* (recursively presented) yapılarını tanımlayalım. Daha sonra karar verme problemi çeşitlerinden olan kuvvet ve mertebe problemlerinden bahsedeceğiz.

1.4.3 Tanım: Verilen elemanların bir kümeye üye (yani ait) olduğuna karar veren bir algoritma varsa, bu durumda bu kümeye *tekrarlamalıdır* (recursive) denir. Eğer bu kümedeki bütün elemanları listeleyen bir algoritma varsa o zaman bu kümeye *tekrarlamalı* (recursively) *sıralanan küme* denir.

1.4.3 Tanımdan da anlaşılacağı gibi tekrarlamalı (recursive) her küme aynı zamanda tekrarlamalı (recursively) sıralanan bir kümedir. Ayrıca da bir kümenin tekrarlamalı (recursive) olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin ve onun tamamlayıcısının tekrarlamalı (recursively) sıralanan olmasıdır. Yukarıdaki tanımlamalardan cevabı "evet" olan sorulardan oluşan bir kümenin tekrarlamalı (recursively) sıralanan olduğu sonucuna ulaşılır. Bu tekrarlamalı (recursively) sıralanan kümeye örnek olarak grubun birimini veren kelimelerden oluşan bir küme verilebilir. Çünkü kelimelerin kümesi, bağıntıların verilen sonlu kümesinin eşleniklerinin bir çarpımına eşittir. Böylece bir grubun kelime problemi tekrarlamalı (recursively) sıralanandır. Ayrıca bir G grubu için $\{w \in G : w = 1_G\}$ kümesi tekrarlamalı (recursive) olduğundan bu G grubu için kelime problemi tekrarlamalı çözülebilirdir (recursively solvable). Dolayısıyla bu grubun kelime probleminin tekrarlamalı (recursively) çözülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $\{w \in G : w \neq 1_G\}$ kümesinin tekrarlamalı (recursively) sıralanan olmasıdır. Benzer olarak, bu G grubunun bütün eşlenik eşitlikleri sistematik olarak listelenebileceğinden bu grubun eşlenik problemi de tekrarlamalı (recursively) sıralanandır. İzomorfizma problemi için de bu yapıyı düşünürsek, iki sunuşun temsil ettikleri gruplar izomorf ise bir sunuştan, sonlu sayıda Tietze dönüşümüyle, diğer sunuş elde edilebileceğinden izomorfizma problemi de tekrarlamalı (recursively) sıralanandır [12].

Tekrarlamalı bir sunum, R_1, R_2, … bağıntı elemanları kelimelerin *tekrarlamalı* sıralanan bir kümesi olmak üzere,

$$< x_1, \dots , x_n ; R_1 = 1, R_2 = 1, \dots >$$

biçimindedir. Sonlu üreteçli bir grup eğer *tekrarlamalı* bir sunuma sahipse o zaman bu gruba *tekrarlamalı* (*recursively*) *sunumlu* denir. *Sonlu sunumlu gruplar tekrarlamalı sunumludur. Ancak tersi doğru değildir* [12].

<u>Kuvvet (Power) Problemi</u>: G *tekrarlamalı* sunumlu (fakat sonlu üreteçli olmasına gerek olmayan) bir grup olsun. G den alınan iki u, v elemanları ve $n \neq 0$ için, $v = u^n$ oluyorsa bu grup için *kuvvet problemi* çözülebilirdir denir. Ayrıca grubun kuvvet ile kelime problemi karşılaştırıldığında, kuvvet probleminin çözülebilirliği (u =1 alınarak) kelime probleminin çözülebilirliğini verir. Ancak tersi durum sağlanmaz [13].

<u>Mertebe (Order) Problemi</u>: G yukarıda tanımlandığı gibi bir grup olmak üzere, bu gruptan alınan bir elemanın mertebesini bulan bir algoritmanın araştırılması problemidir. Yukarıda bahsettiğimiz tanımı da göz önüne alırsak, eğer bu grup için kuvvet problemi çözülebilir ise o zaman mertebe problemi de çözülebilirdir. Bu problem için, $u^n = 1$ ($n \neq 0$) olacak biçimde bir n varsa, bu grubun kelime problemini çözen algoritmayı kullanarak bu şekildeki en küçük n değerini bulabiliriz [13].

Ayrıca tanımladığımız bu kuvvet ve mertebe problemlerinin birçok özelliği ve birtakım grup genişlemelerindeki örnekleri [13]'te incelenmiştir.

Kelime problemi birçok grup sunuşu için çözülebilirdir. Örneğin en fazla bir bağıntısı olan sunuşlar için ve her bir a ve b üreteç elemanı için, $ab = ba$ bağıntısını içeren sunuşlar için kelime problemi çözülebilirdir. Ayrıca kelime problemi çözülebilen gruplara bir başka örnek olarak basit gruplar verilebilir. G birimden farklı bir grup olmak üzere bu grubun birimden ve kendinden başka normal alt grubu yoksa bu durumda G grubuna *basit grup* denir.

1.4.4 Teorem: G tekrarlamalı (recursively) sunumlu basit grup olmak üzere bu G grubu için kelime problemi çözülebilirdir.

İspat: Farzedelim ki $G = < x_1, \ldots, x_n ; r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots >$ olsun. Eğer $G = 1$ ise sonuç aşikardır. O halde $G \neq 1$ olduğunu kabul edelim ve bu gruptan $u \neq 1_G$ şeklinde bir kelime alalım. Ayrıca G nin üreteç elemanlarıyla oluşturulan keyfi bir w kelimesi için, bu kelimenin yeni bir bağıntı olarak eklenmesiyle G den elde edilen grubu G_w ile belirtelim. O halde bu grubun sunuşunu

$$G_w = < x_1, \ldots, x_n ; w = 1, r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots >$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer $w = 1_G$ ise bu durumda G_w grubu G grubuna izomorftur. Eğer $w \neq 1_G$ ise bu durumunda G basit grup olduğu için G_w tekil grup olur. Özellikle de $u = 1$ (G_w grubu içinde) olması için gerek ve yeter koşul $w \neq 1_G$ olmasıdır. Ayrıca G_w grubu da tekrarlamalı sunumludur.

G grubundan alınan keyfi bir w kelimesinin grubun birimine eşit olup olmadığına karar vermek için, kelimelerin tekrarlamalı sıralanan iki listesini alalım. İlk liste G grubu içinde 1 e eşit olan bütün kelimelerden, diğeri ise G_w içinde 1 e eşit olan bütün kelimelerden oluşsun. Eğer $w = 1_G$ ise, bu w kelimesi ilk listede olacaktır. Ancak $w \neq 1_G$ olması için gerek ve yeter koşul u kelimesinin ikinci listede olmasıdır. Bu durumlardan biri olana kadar listeleri araştırırsak w kelimesinin grubun birimine eşit olup olmadığını belirleyebiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Eşlenik problemi ise kelime probleminden daha zordur. Ayrıca, *eşlenik u ve v kelimelerinden biri boş kelime olarak seçilirse, eşlenik probleminin çözümü kelime probleminin çözümünü verir*. Dolayısıyla eşlenik problemi çözülen gruplar kelime problemi çözülen gruplar içerisindedir.

Sonlu sunuşlu herhangi bir G grubu için,

Eşlenik problemi çözülebilir $\Rightarrow$ Kelime problemi de çözülebilirdir.

Ancak tersi doğru değildir. Yani kelime problemi çözülebilen fakat eşlenik problemi çözülemeyen bir grup vardır.

Eşlenik problemi çözülen gruplara örnek olarak hiçbir bağıntı elemanı olmayan sunuşlar (serbest grup) ile, her bir a ve b üreteç elemanı için, $ab = ba$ bağıntısını içeren sunuşlar verilebilir.

İzomorfizma problemi ise Dehn'in bu üç karar verme problemleri arasındaki en zor olanıdır. Çünkü sonlu sunumlu bir grubun tekil olup olmadığına karar veren genel ve etkili bir metod yoktur [9]. Bununla birlikte G ve $G^{'}$ grupları için,

- Sunuşlarının bağıntı kümelerinde hiçbir eleman olmaması,
- Sunuşlarının sonlu olması ve bütün a ve b üreteç elemanları için, $ab = ba$ bağıntılarını içermesi ,
- Sunuşlardan birinin bağıntı kümesinde hiçbir elemanın olmaması ve diğerinin tek bir bağıntı içermesi,

durumlarında bu gruplar için izomorfizma problemi çözülebilirdir.

Bugüne kadar olan çalışmalarda, gruplardaki her bir cebirsel sınıfın kendi içindeki bir takım özelliklerini kullanarak karar verme problemlerinin çözümü araştırılmıştır. Biz ise bu tür sınıflardaki grupların Tanım 1.4.5'teki gibi sadece tanımlarını verip, bu sınıflar üzerindeki problemlere dair genel bir fikir oluşturmak için bir şekil çizeceğiz. Bu şekil yardımıyla (bkz. Şekil 1.3) grupların bu cebirsel sınıflarının karar verme problemlerinin çözülebilir olup olmadığını gruplandıracağız.

1.4.5 Tanım: G bir grup olsun. Buna göre,

I) G den G üzerine tanımlanan her homomorfizma bir izomorfizma olursa, bu G grubuna *Hopfian* denir.

II) G nin birimden farklı her g elemanı ve G den herhangi sonlu bir K grubu içine tanımlanan Φ homomorfizması için, $\Phi(g) \neq 1$ oluyorsa bu G grubuna *residual sonlu* (residually finite) denir. Örneğin, serbest gruplar residual sonludur.

III) $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$

şeklindeki normal serisi için, her bir G_{i+1}/G_i bölüm grubunun abelyan olması durumunda, bu G grubuna *çözülebilir* (solvable) denir. Buradan her abelyan grubun çözülebilir olduğu açıkca görülür. Bununla birlikte, abelyan olmayan çözülebilir gruba örnek olarak S_3 simetrik grubu verilebilir.

IV) G çözülebilir olmak üzere, G deki *en kısa* abelyan serinin uzunluğuna G nin *türemiş uzunluğu* (derived length) denir. En fazla 2 uzunlukla türemiş çözülebilir bir gruba *metabelyan* (metabelian) denir.

V) G grubunun, $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_i \lhd G_{i+1} \lhd \ldots \lhd G_n = G$ biçimindeki normal alt grupları için, herbir G_{i+1}/G_i bölüm grubu devirli ise bu şekildeki G grubuna *polycyclic* denir.

VI) G grubunun alt gruplarının,

$$\gamma_1(G) = G \quad \text{ve} \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$$

olacak şekilde bir zinciri $\gamma_i(G)$ olsun. Eğer $\gamma_{m+1}(G) = \{1_G\}$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ varsa, G grubuna *nilpotent* grup denir. Buradaki grup denir. Buradaki m tamsayısına G grubunun nilpotentlik sınıfı denir. Eğer G grubu 0. sınıftan nilpotent ise $G = \{1_G\}$, 1. sınıftan nilpotent ise $G \neq \{1_G\}$ ve değişmeli, 2. sınıftan nilpotent ise metabelyan olur.

VII) G sonlu üreteçli olmak üzere, G nin H normal alt grubu verilsin. H grubu abelyan ve G/H bölüm grubu da polycyclic ise, bu durumda G grubuna *abelyan-by-polycyclic* grup denir. Benzer durumda, G/H bölüm grubu nilpotent ise, bu durumda G grubuna *abelyan-by-nilpotent* grup denir.

Tanım VII) aşağıdaki gibi genellenebilir:

P ve *Q* grup özellikleri olsun. *G* grubunun *P-by-Q* olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul, *G* nin *H* gibi bir normal alt grubu için,

i) *H* normal alt grubunun *P* özelliğini,

ii) *G/H* bölüm grubunun *Q* özelliğini sağlamasıdır.

Ayrıca Şekil 1.3'te;

+ : verilen grubun incelendiği karar verme probleminin çözülebilir olduğu,

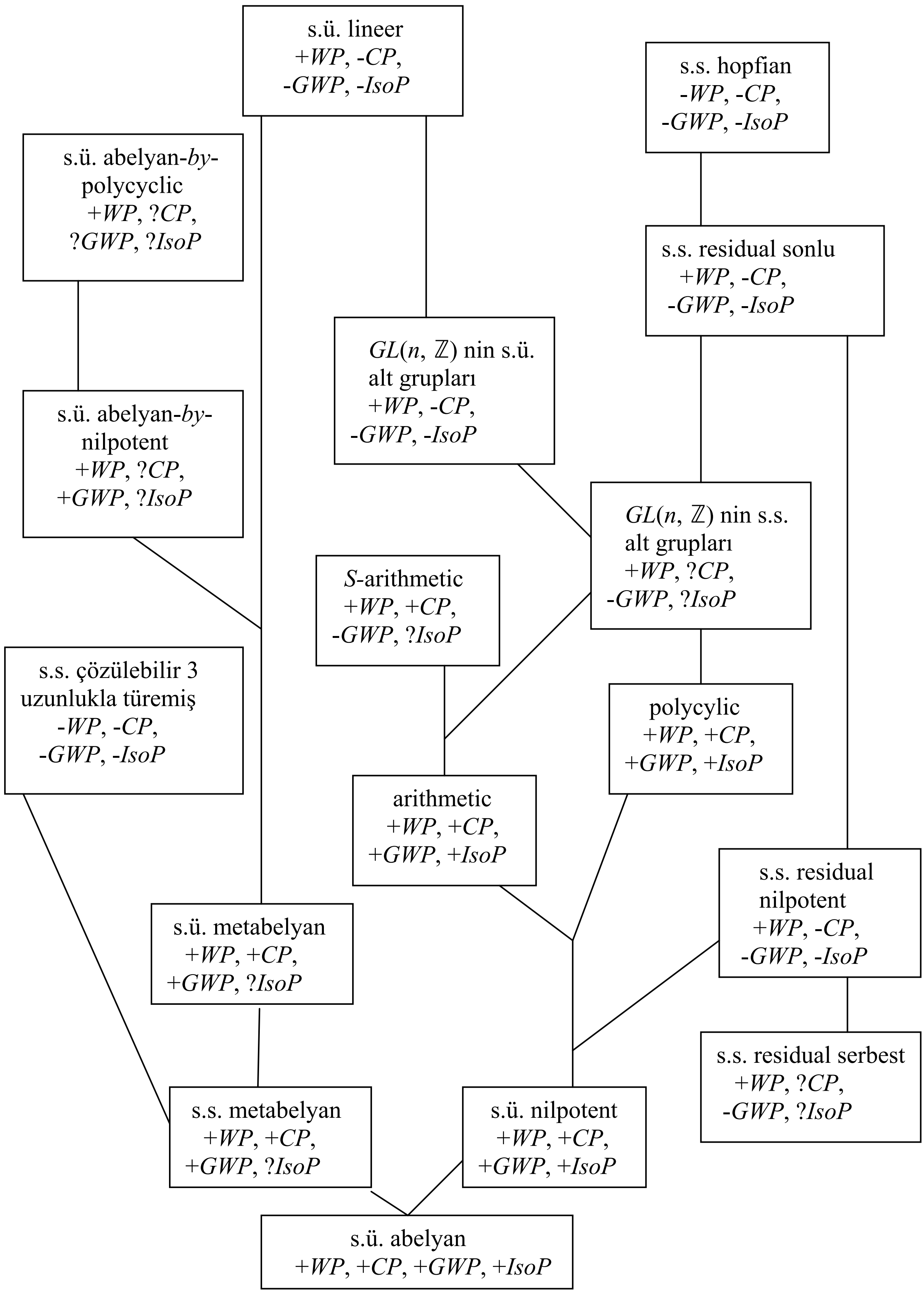
- : verilen grubun incelendiği karar verme probleminin çözülemez olduğu,

? : verilen problemin çözülüp çözülemediğinin belli olmadığı yani hala açık bir problem olduğu,

s.s. : sonlu sunumlu grup,

s.ü. : sonlu üreteçli grup,

gösterimleri uygulanmıştır.


s.ü. lineer
+WP, -CP,
-GWP, -IsoP
s.s. hopfian
-WP, -CP,
-GWP, -IsoP
s.ü. abelyan-by-polycyclic
+WP, ?CP,
?GWP, ?IsoP
s.s. residual sonlu
+WP, -CP,
-GWP, -IsoP
GL(n, ℤ) nin s.ü. alt grupları
+WP, -CP,
-GWP, -IsoP
s.ü. abelyan-by-nilpotent
+WP, ?CP,
+GWP, ?IsoP
GL(n, ℤ) nin s.s. alt grupları
+WP, ?CP,
-GWP, ?IsoP
S-arithmetic
+WP, +CP,
-GWP, ?IsoP
s.s. çözülebilir 3 uzunlukla türemiş
-WP, -CP,
-GWP, -IsoP
polycylic
+WP, +CP,
+GWP, +IsoP
arithmetic
+WP, +CP,
+GWP, +IsoP
s.s. residual nilpotent
+WP, -CP,
-GWP, -IsoP
s.ü. metabelyan
+WP, +CP,
+GWP, ?IsoP
s.s. residual serbest
+WP, ?CP,
-GWP, ?IsoP
s.s. metabelyan
+WP, +CP,
+GWP, ?IsoP
s.ü. nilpotent
+WP, +CP,
+GWP, +IsoP
s.ü. abelyan
+WP, +CP, +GWP, +IsoP

Şekil 1.3

2. GRUP VE GRUP GENİŞLEMELERİNDE KARAR VERME PROBLEMLERİ

Bu bölümde, 1.Bölümde tanımlanan gruplardaki karar verme problemlerinden kelime ve eşlenik problemleri daha detaylı olarak incelenecektir.

Sonlu sunumlu bir G grubunun kelime probleminin çözülebilmesi için G nin elemanlarının bir *kanonikal formunu* yapılandırmamız gerekir. Diğer bir deyişle kelimelerin her bir denklik sınıfından tek bir temsilci kümesi oluşturmalıyız. (Her bir denklik sınıfı tek bir indirgenmiş kelime içerdiğinden bu temsilci kümesindeki elemanların indirgenmiş kelimeler olduğuna dikkat edilmelidir.)

Bir G grubunun sunuşu

$$< a_1, a_2, \ldots, a_n ; R_1, R_2, \ldots, R_m > \quad (2.1)$$

olsun. G nin elemanlarının bir temsilci kümesini oluşturmamız için kelimelerin her bir denklik sınıfından en kısa kelimeyi seçmemiz gerekir. Bunun için kelimeler arasında " < " *sıralama bağıntısı* tanımlamalıyız. Kısaca bu bağıntı, w_1 ve w_2 kelimeleri için,

$$\boxed{l(w_1) < l(w_2) \;\Rightarrow\; w_1 < w_2}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$a_1 < a_1^{-1} < a_2 < a_2^{-1} < \ldots < a_n < a_n^{-1}$$

sıralamasını göz önüne alalım. Eğer $l(w_1) = l(w_2)$ ise ve w_1 ile w_2 kelimeleri ilk olarak, baştan k.cı harflerinde farklıysalar o zaman bu kelimelerin k.cı harflerine göre sıralama yapılır. Örneğin,

$$1 < a_1 < a_2\, a_n < a_2\, a_n^{-1} < a_1^3$$

dir.

Bir w kelimesi, sıralamada kendinden önce gelen kelimelerin uzunlukları daha kısa ve (2.1) sunuşundaki üreteç elemanlarının sayısı sonlu olduğu için, bu w kelimesi kendinden önce gelen sonlu sayıda birçok kelimeye sahiptir. Bu ise bize, kelimelerin boştan farklı herhangi bir kümesinin en küçük kelimeye sahip olacağı gerçeğini verecektir.

Herhangi sonlu sunuşlu bir grubun kelime problemi için oluşturacağımız K temsilci kümesi, (2.1) sunuşundaki üreteç elemanlarıyla oluşturulan kelimelerin her birine ait denklik sınıfındaki en küçük kelimelerden elde edilir. Eğer bu şekilde, gruptan alınan her kelimenin, bu temsilci küme içindeki bir kelimeye denk olduğu ve yine bu temsilci küme içinden alınan farklı iki kelimenin de birbirine denk olmadığı gösterilirse, o zaman (2.1) sunuşunun temsil ettiği grup için kelime problemi çözülebilirdir.

Benzer olarak, herhangi sonlu sunuşlu bir grubun eşlenik problemi için oluşturacağımız E temsilci kümesi de, (2.1) sunuşundaki üreteç elemanlarıyla elde edilen kelimelerin her birine ait denklik sınıfındaki en küçük kelimelerden meydana gelir. Eğer bu şekilde, gruptan alınan her kelimenin bu temsilci kümesi içindeki bir kelimeye eşlenik denk olduğu ve yine bu temsilci kümesi içinden alınan farklı iki kelimenin de birbirine denk olmayan eşleniklere sahip olduğu gösterilirse, o zaman (2.1) sunuşunun temsil ettiği grup için eşlenik problemi çözülebilirdir.

Aşağıdakine benzer örnekler [9]'da bulunabilir.

2.1 Örnek: Aşağıda verilen

$$\wp_G = < a, b, c \,;\, a^{-1}ba = c,\ a^{-1}ca = b,\ b^{-1}ab = c,\ b^{-1}cb = a,\ c^{-1}ac = b,\ c^{-1}bc = a > \tag{2.2}$$

sunuşun temsil ettiği G grubunun kelime problemi ve eşlenik problemi çözülebilirdir. İlk olarak bu $\wp_S$ sunuşundaki bağıntılara sırasıyla R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 ve R_6 diyelim. Şimdi bu bağıntıları kullanarak aşağıda verilenleri elde edebiliriz. R_1 bağıntısının her iki tarafını soldan a^{-1} ile ve sağdan a ile çarptığımızda

$$a^{-2}ba^2 = a^{-1}ca$$

elde edilir. R_2 den dolayı da $a^{-2}ba^2 = b$ dir. Buradan da a^2 nin b ile değişmeli olduğuna yani

$$ba^2 = a^2b \tag{2.3}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer olarak, R_2 bağıntısından hareketle,

$$a^{-1}ca = b \Rightarrow a^{-2}ca^2 = a^{-1}ba \Rightarrow a^{-2}ca^2 = c$$

dir. Buradan da

$$ca^2 = a^2c \tag{2.4}$$

elde edilir. Böylece R_2, R_5, (2.3) ve (2.4) den

$$b^2 = bb = (c^{-1}ac)(c^{-1}ac) = c^{-1}a^2c = a^2 \quad \text{ve de} \quad b^2 = bb = (a^{-1}ca)(a^{-1}ca) = a^{-1}c^2a = c^2$$

elde edilir. O halde

$$a^2 = b^2 = c^2$$

dir. R_1 ve R_4 bağıntılarından dolayı,

$$a^{-1}ba = c \Rightarrow ba = ac$$

$$b^{-1}cb = a \Rightarrow cb = ba$$

olur. Böylece,

$$ba = ac = cb$$

elde edilr. Benzer olarak R_2 ve R_3 bağıntılarından dolayı da

$$a^{-1}ca = b \Rightarrow ca = ab \quad \text{ve de} \quad b^{-1}ab = c \Rightarrow ab = bc$$

dir. O zaman,

$$ca = ab = bc$$

olur.

Şimdi bulduğumuz bu yeni bağıntılardan hareketle G grubuna ait her kelimenin, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$a^{2k},\ a^{2k}a,\ a^{2k}b,\ a^{2k}c,\ a^{2k}ab \quad \text{ve} \quad a^{2k}ba \tag{2.5}$$

biçimlerinden en az birine sonlu sayıda basamaklarla indirgenebileceğini gösterirsek, bu G grubu için kelime problemi çözülmüş olur. Bunun için kelimenin uzunluğu üzerinde tümevarım yapalım. İlk önce uzunluğu 0 veya 1 olan kelimeleri ele alalım. Bu durumda

$$1 = a^0,\ a = a^0a,\ b = a^0b,\ c = a^0c,\ a^{-1} = a^{-2}a,\ b^{-1} = b^{-2}b = a^{-2}b \text{ ve } c^{-1} = c^{-2}c = a^{-2}c$$

olduğundan bu kelimelerin hepsi (2.5)'teki temsilci elemanlardan birine indirgenir. Ayrıca (2.5)'teki kelimelerden herhangi birini, herhangi bir üreteç elemanı veya tersiyle çarptığımız zaman yine (2.5)'teki kelimelerden birini elde ederiz. Örnek olarak

$$(a^{2k}b)c^{-1} = a^{2k}bc^{-2}c = a^{2k}(ba^{-2})c = a^{2k}(a^{-2}b)c = a^{2(k-1)}bc = a^{2(k-1)}ab$$

bulunur. Şimdi n uzunluğuna sahip bir kelime (2.5)'teki kelimelerden birine eşit olsun. Bu durumda n+1 uzunluklu bir kelime de (2.5)'teki temsilci elemanlarından birine eşit olur. Çünkü n+1 uzunluklu kelimeyi oluşturmak için, n uzunluklu kelimeyi, üreteç kümesinin elemanlarından veya bu elemanların terslerinden herhangi biriyle çarpmak gerekir. n uzunluklu bir kelimenin (2.5)'teki temsilci elemanlarından birine eşit olduğunu kabul ettiğimizden ve bu temsilci elemanlardan herhangi birini, herhangi bir üreteç elemanı veya bu elemanın tersi ile çarptığımızda yine (2.5)'teki elemanlardan birini elde edeceğimizden, n+1 uzunluklu kelime de (2.5)'teki temsilci elemanlardan birine eşit olur. Sonuç olarak, üreteç kümesinin elemanlarından oluşan her kelime (2.5)'teki elemanlardan herhangi birine eşit olacağından G grubu için kelime problemi çözülebilirdir.

Verilen bu G grubunun eşlenik probleminin çözümü için, (2.5)'teki temsilci kümesinden

$$a^{2k},\ a^{2k}a,\ a^{2k}ab \qquad (2.6)$$

elemanlarını ele alalım. Açıkça görülürki (2.5)'teki her kelime (2.6)'daki bir kelimeye eşleniktir. Örneğin,

$$b^{-1}(a^{2k}c)b = b^{-1}a^{2k}b.b^{-1}cb = a^{2k}a$$

dir. Böylece, (2.2)'deki üreteç kümesinin elemanlarından oluşan her kelime (2.5)'teki temsilci elemanlardan herhangi birine eşit ve (2.5)'teki her elemanın da (2.6)'daki kelimelerden birine eşleniktir. Ayrıca (2.6)'daki farklı kelimelerin hiç birisi de birbiriyle eşlenik değildir. Dolayısıyla bu da, G grubu için eşlenik probleminin çözülebilir olduğunu verecektir.

2.2 Örnek: Bir grup

$$< a, b\ ;\ a^5, b^2, ab = ba^{-1} >$$

sunuşu ile verilsin. Bu tipteki sunuşları genel olarak

$$< a, b\ ;\ a^r, b^s, ab = ba^t >$$

şeklinde gösterelim. Buradaki r sayısının t^s-1 sayısını bölmesi durumunda, bu sunuşun temsil ettiği grubun temsilci elemanları, $0 \leq \alpha < r$ ve $0 \leq \beta < s$ olmak üzere, $b^\beta a^\alpha$ formundadır [9]. Verilen sunuş için bu bölme şartı sağlandığından, bu sunuşun temsil ettiği grubun temsilci kümesini

$$1, a, a^2, a^3, a^4, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4 \qquad (2.7)$$

şeklinde oluşturabiliriz. Dikkat edilirse bu kümedeki bütün kelimeler indirgenmiştir ve herhangi iki kelime de birbirine denk değildir. Grubun her elemanı da sunuştaki bağıntı elemanlarını kullanarak bu temsilci kümesindeki bir kelimeye indirgendiği için bu grup için kelime problemi çözülebilirdir.

Grubun eşlenik problemi için, (2.7)'deki kümeden

$$1, a, a^2, b, ba, ba^3 \qquad (2.8)$$

kelimelerini alarak bir temsilci kümesi oluşturalım. Gruptan alınan her kelime (2.8) deki bir kelimeye eşleniktir. Örneğin, ba^2 kelimesi $b(ba^2)b^{-1} = a^2b^{-1} = a^2b = aba^4 = ba^3$ olduğundan ba^3 kelimesine, a^4 kelimesi de $b(a^4)b^{-1} = (ab)b^{-1} = a$ olduğundan a kelimesine eşleniktir. Ayrıca bu kümedeki herhangi iki kelime de birbiriyle eşlenik değildir. Dolayısıyla da $< a, b\ ;\ a^5, b^2, ab = ba^{-1} >$ sunuşunun temsil ettiği grup için eşlenik problemi çözülebilirdir.

2.3 Örnek: Aşağıda verilen

$$< a, b\ ;\ a^5, b^4, ab = ba^{-1} >$$

sunuşun temsil ettiği grubun kelime ve eşlenik probleminin çözülebilirliği yukarıdaki örneğe benzer olarak gösterilebilir.

2.4 Örnek: Mertebeli $2n$ olan D_n dihedral grubunun sunuşu

$$D_n = < a, b\ ;\ a^2, b^n, ba = ab^{-1} >$$

şeklindedir [14, 16]. Buna göre sunuşu

$$< a, b\ ;\ a^2, b^3, ba = ab^{-1} >$$

olan, 6 mertebeli D_3 dihedral grubu için kelime problemi çözülebilirdir. Şimdi, bu D_3 dihedral grubunun elemanlarından bir temsilci kümesi oluşturalım. Bu temsilci kümesinde 1, a, b, b^2 kelimelerinin olacağı açıktır. Daha sonra a ve b elemanlarıyla oluşturulan ab ve ab^2 kelimelerine bakalım. Bu kelimeler, D_3 dihedral grubunun sunuşundaki bağıntılarını kullanarak elde edilen kelimeler arasından indirgenmiş olan kelimelerdir. Dolayısıyla da oluşturulan bu temsilci kümenin elemanlarıdır. Sonuç olarak bu D_3 dihedral grubunun temsilci kümesi 1, a, b, b^2, ab ve ba kelimelerinden ibarettir. Alınan başka kelimeler de bu temsilci elemanlarından birine indirgenir. Örneğin $abab^2a^{-1}$ kelimesi sonlu sayıda adımla ab^2 kelimesine,

$bab^{-1}abab$ kelimesi de ab kelimesine indirgenir. Böylece D_3 dihedral grubu için kelime problemi çözülebilirdir.

Bu zamana kadar kelime problemi çözülebilen grup yapılarından bahsettik ve grup sunuşlarından yararlanarak bu sunuşların temsil ettikleri gruplar için kelime problemlerinin çözülebilir olduğu bazı örnekler verdik. Ancak, birçok kaynakta da bahsedildiği gibi sonlu sunumlu olup kelime problemi çözülemeyen gruplar da vardır. Onun için aşağıda verilen teoremin orijinal ispatı Turing Makinesi denilen farklı bir yapı ile ilgili olduğundan, bu konu ile ilgili bilgiler [1, 12, 14] kaynaklarında bulunabilir.

2.5 Teorem (Novikov-Boone Teoremi) [12]: Kelime problemi çözülemeyen sonlu sunumlu gruplar vardır.

Bu bölümün kalan kısımlarında bazı grup genişlemeleri üzerinde karar verme problemleri incelenecektir.

2.1 Serbest (Free) Gruplarda Kelime Problemi

F_n serbest grubu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ üreteç elemanlarından ve boş bağıntı kümesinden oluşan bir gruptur. Bu grubun sunuşu

$$F_n = < x_1, x_2, \ldots, x_n \, ; \, \phi >$$

şeklinde gösterilir. Bir serbest grubun kelime problemi ve eşlenik problemi *serbest indirgenmiş kelimeler* (freely reduced word) ve *devirli indirgenmiş kelimeler* (cyclically reduced word) kullanılarak çözülebilir. Serbest indirgenmiş kelimeler, üreteç kümesindeki elemanlarla oluşan ve $x_i^{\varepsilon}x_i^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon = \pm$; $i = 1, 2,\ldots, n$) şeklindeki kelimelerin bulunmadığı kelimelerdir. Örnek olarak, $x_1^2x_2^5$ veya $x_1x_2x_3^{-1}x_1^{-1}$ şeklindeki kelimeler verilebilir. Devirsel indirgenmiş kelimeler ise, x_i^{ε} ile başlayıp $x_i^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon = \pm$; $i = 1, 2,\ldots, n$) ile bitmeyen serbest indirgenmiş kelimelerdir. Örneğin, $x_1^2x_2^5x_3^{-1}$ kelimesi devirsel indirgenmiştir ama $x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}$ kelimesi devirsel indirgenmiş değildir. Ayrıca herhangi bir kelimenin devirsel indirgenmiş olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun bütün devirli permütasyonlarının serbest indirgenmiş olmasıdır [9]. (Örneğin, $x_1x_2x_3$ kelimesinin devirli permütasyonları $x_2x_3x_1$ ve $x_3x_1x_2$ şeklindedir.)

2.1.1 Teorem [14]: $F_n = < x_1, x_2, \ldots, x_n \; ; \; \phi >$ serbest grubu için kelime problemi çözülebilirdir.

İspat: F_n grubunda kelime probleminin çözülebilir olduğunu göstermek için, üreteç kümesinin elemanlarından oluşan herhangi bir w kelimesinin grubun birim elemanına eşit olup olmadığına karar veren bir algoritma oluşturmak gerekmektedir. Bu algoritma aşağıda verilimiştir:

1) Eğer w kelimesinin uzunluğu 0 veya 1 ise bu durumda üçüncü basamağa gidilir, 2 veya daha büyük olduğunda ise ilk iki harf çiftinin $x_ix_i^{-1}$ olması durumunda bu harf çiftinin altı çizilip ikinci basamağa gidilir. Eğer böyle çiftler yoksa son iki harf çiftinin altı çizilip ikinci basamağa gidilir.

2) Eğer altı çizili harf çiftleri $x_ix_i^{-1}$ veya $x_i^{-1}x_i$ biçimindeyse bu harf çiftleri silinir ve birinci basamağa gidilir. Diğer biçimde ise üçüncü basamağa gidilir.

3) Eğer kelime boş kelime ise $w = 1$ yazılır ve beklenir, boş kelime değil ise $w \neq 1$ yazılır ve beklenir. □

2.2 Serbest Çarpım Grubunda Kelime Problemi

Grup birleştirme teorilerinin temeli serbest grup teorilerine dayanır. Biçim ve özellik olarak da serbest gruplara en yakın gruplar, grupların serbest çarpımıdır. Çünkü bir serbest grup, sonsuz devirli grupların serbest çarpımıdır [14]. Onun için bu kısımda serbest çarpım grupları için karar verme problemlerini inceleyeceğiz.

2.2.1 Tanım: Sırasıyla $< h_1, \ldots, h_n \; ; R_1, \ldots, R_k >$ ve $< k_1, \ldots, k_m \; ; S_1, \ldots, S_t >$ sunuşlarının temsil ettiği H ve K grupları için,

$$\wp_{H*K} = < h_1, \ldots, h_n, k_1, \ldots, k_m \; ; R_1, \ldots, R_k, S_1, \ldots, S_t >$$

sunuşunun temsil ettiği $G = H * K$ grubuna, H ve K gruplarının *serbest çarpımı* denir. Buradaki H ve K gruplarına ise G grubunun *çarpanları* denir. Ayrıca G grubunun üreteçleri, H ve K nın üreteçlerinden, bağıntıları ise bu grupların bağıntılarının ayrık birleşiminden oluşur. Yukarıda iki grup için verilen bu tanım, grupların keyfi bir ailesine genişletilebilir [11].

2.2.2 Örnek: $< a, b \; ; a^3, b^2 >$ sunuşunun temsil ettiği grup, a ile üretilen ve mertebesi 3 olan devirli grup ile b ile üretilen ve mertebesi 2 olan devirli grubun serbest çarpımıdır.

2.2.3 Tanım: $G = H * K$ olmak üzere, $h_i \in H$ ve $k_i \in K$ ($i = 1, 2, \ldots , m$) için $h_1k_1 \ldots h_mk_m \in G$ formundaki elemana G grubunda bir kelime denir. Ayrıca bu şekildeki bir ifadede her bir $h_i \neq 1$ ve $k_i \neq 1$ oluyorsa, bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir.

Aşağıdaki teoremler sırasıyla, serbest çarpım grubundan alınan indirgenmiş bir kelimenin tek bir forma sahip olduğunu ve serbest çarpımların nasıl karakterize edildiğini verir.

2.2.4 Teorem [11] (Normal Form Teoremi): $H * K$ serbest çarpımın her elemanı $h_i \neq 1$ ve $k_i \neq 1$ olmak üzere, $h_1k_1 \ldots h_mk_m$ biçiminde *tek* bir forma sahiptir. Buradaki *teklik* ifadesiyle serbest çarpım grubundan alınan $h_1k_1 \ldots h_mk_m$ ve $h_1'k_1' \ldots h_n'k_n'$ biçimindeki herhangi iki kelime için,

$$h_1k_1 \ldots h_mk_m = h_1'k_1' \ldots h_n'k_n'$$

oluyorsa, $n = m$ ve her bir h_i , $h_i' \in H$, k_i, $k_i' \in K$ için $h_i = h_i'$ ve $k_i = k_i'$ olması kastedilmektedir.

2.2.5 Teorem [11] (Serbest Çarpımların Karakterizasyonu): G grubunun H ve K alt gruplarının serbest çarpımı olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki iki şartın sağlanmasıdır.

i) H ve K alt grupları G grubunu üretir, bu grubun her elemanı $h_1k_1 \ldots h_mk_m$ formundadır ve

ii) $w = h_1k_1 \ldots h_mk_m$ ve $w = 1_G$ ise ya $h_i = 1_H$ ya da $k_i = 1_K$ dır.

Örnek 2.1'de, verilen grubun elemanlarından bir temsilci kümesi oluşturulmuştu ve alınan her kelimenin bu temsilci kümesindeki herhangi bir elemana indirgendiği gösterilmişti. Dolayısıyla da alınan herhangi bir kelime bu temsilci kümesindeki 1 e indirgeniyorsa grubun birimine eşit olurdu, 1 e indirgenmiyorsa grubun birimine eşit olmazdı. Yani bu grup için kelime problemi çözülebilirdi. Ancak Tanım 2.2.1'de belirtildiği gibi bir serbest çarpım grubunun sunuşunun bağıntı kümesinde, bu serbest çarpım grubunun her iki çarpanının da üreteç elemanlarıyla oluşturulan bir eleman bulunmaz. Bu nedenle de bu gruptan alınan bir kelimedeki farklı üreteç elemanları yer değiştiremediğinden (dolayısıyla da grup sonsuz mertebeli olur) bu serbest çarpım grubunun elemanları için bir temsilci kümesi oluşturamayız.

2.2.6 Teorem: $X \cap Y = \phi$ olmak üzere,

$$\wp_A = < X ; \boldsymbol{s} > \text{ ve } \wp_B = < Y ; \boldsymbol{t} >$$

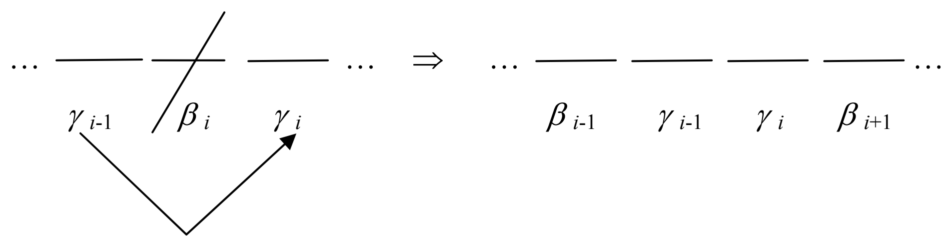
sonlu sunuşlarının temsil ettiği gruplar A ve B olsun. Bu gruplar için kelime problemi çözülebilir ise $G = A * B$ grubu için de kelime problemi çözülebilirdir. (Burada $\boldsymbol{s}$ kümesi ile $\wp_A$ sunuşunun, $\boldsymbol{t}$ kümesi ile de $\wp_B$ sunuşunun bağıntı kümeleri gösterilmektedir.)

İspat: $\wp_G = < X, Y ; \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} >$ sunuşu için bu gruptan alınan keyfi bir $\alpha \in (X \cup X^{-1} \cup Y \cup Y^{-1})^*$ kelimesi için acaba $\alpha = 1_G$ mi?

$\beta_i \in (X \cup X^{-1})^*$ ve $\gamma_i \in (Y \cup Y^{-1})^*$ olmak üzere $\alpha = \beta_1 \gamma_1 \ldots \beta_n \gamma_n$ (n>0) formundadır. $\beta_i = 1$ veya $\gamma_i = 1$ olacak şekilde en az bir tane i var mı?

- Bu şekilde en az bir tane kelime yoksa $\alpha \neq 1_G$ dir.
- $\beta_i = 1$ (veya $\gamma_i = 1$) ise $\alpha = \beta_1 \gamma_1 \ldots \beta_n \gamma_n$ kelimesinde β_i (veya γ_i)

kelimesi silinerek γ_{i-1} ve γ_i (veya β_i ve β_{i+1}) kelimeleri birleştirilir ve yeni $\beta_1' \gamma_1' \ldots \beta_{n-1}' \gamma_{n-1}'$ kelimesi elde edilir.



- Bu şekildeki silme işlemlerinin sonunda boş kelimeye ulaşılırsa o zaman $\alpha = 1_G$ dir. Aksi durumda ise $\alpha \neq 1_G$ dir.

Sonuç olarak $G = A * B$ grubu için kelime problemi çözülebilirdir. □

2.2.7 Örnek: $\wp_A = < a\ ;\ a^3 >$ ve $\wp_B = < b\ ;\ b^5 >$ grupları için kelime problemi çözülebilidir. $G = A * B$ grubundan herhangi bir $\alpha = ab^4a^6ba^{-1}b^{-5}$ kelimesini ele alalım.

$$\begin{array}{l} \alpha = ab^4a^6ba^{-1}b^{-5} \\ \quad\downarrow\ a^3 = 1 \\ ab^5a^{-1}b^{-5} \\ \quad\downarrow\ b^5 = 1 \\ aa^{-1}b^{-5} \\ \quad\downarrow\ b^5 = 1 \\ aa^{-1} \\ \quad\downarrow \\ 1 \end{array}$$

biçiminde sonlu adımda 1 elemanına ulaşıldığından, $G = A * B$ grubu için kelime problemi çözülebilirdir.

Serbest çarpım grubu için eşlenik problemi, [12]'de incelendiği gibi, serbest çarpım, üzerindeki eşleniklikle ilgili olarak çözülür. Ancak, Teorem 2.2.9'da bahsedilecek genelleştirilmiş kelime problemi, bu tür gruplar üzerindeki ispatı daha zor olan bir sonuçtır [10].

2.2.8 Teorem: A ve B, eşlenik problemleri çözülebilen sonlu sunuşlu gruplar olmak üzere, $A * B$ grubu için de eşlenik problemi çözülebilirdir.

2.2.9 Teorem: A ve B, genelleştirilmiş kelime problemleri çözülebilen sonlu sunuşlu gruplar olmak üzere, $A * B$ grubu için de genelleştirilmiş kelime problemi çözülebilirdir.

2.3 Direkt Çarpım Grubunda Kelime Problemi

Öncelikle direkt çarpım grubunun tanımını ve sunuşunu hatırlatalım.

A ve B gibi herhangi iki grup verilsin. A ve B grupları üzerindeki işlemler yardımıyla $G = A \times B$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde yeni bir işlem tanımlayarak, G kümesinin bu işlem altında bir grup olduğunu söyleyeceğiz ve bu grubun sunuşunu vereceğiz.

A ve B çarpma işlemi altında tanımlı iki grup olsun. (a, b), $(a', b') \in G$ herhangi iki eleman ise, bunların çarpımını

$$(a, b)\,(a', b') = (aa', bb') \tag{2.9}$$

(a, $a' \in A$, b, $b' \in B$) olarak tanımlayalım. Bu çarpımdaki aa' bileşeni A grubundaki işleme göre, bb' bileşeni B grubundaki işleme göre hesaplanmıştır.

2.3.1 Tanım: G kümesi (2.9) ile tanımlanan işleme göre bir gruptur. Bu gruba A ve B gruplarının *direkt çarpım grubu* denir ve $A \times B$ ile gösterilir. A ve B gruplarının her ikisinin de değişmeli olması halinde G grubunun da değişmeli olacağı açıktır. Sonuç olarak kartezyen çarpımdan dolayı

$$|G| = |A|\,|B|$$

dir.

2.3.2 Teorem [7]: A ve B grupları sırasıyla

$$\wp_A = < X\,;\, \boldsymbol{s} > \quad \text{ve} \quad \wp_B = < Y\,;\, \boldsymbol{t} >$$

sunuşlarıyla verilsin. $X \cap Y = \phi$ olmak üzere, A ve B gruplarının direkt çarpımı olan $G = A \times B$ grubunun sunuşu

$$\wp_G = < X, Y\,;\, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{r} >$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\boldsymbol{r}$ bağıntı kümesi $\{\ xyx^{-1}y^{-1}\ :\ x \in X,\ y \in Y\ \}$ olarak tanımlanır.

Sadece gruplarda değil, yarı grup ve monoidler üzerinde de çalışılan ve birçok yapının temelini oluşturan (örneğin Bölüm 4'te tanımlanacak wreath çarpım için) *direkt çarpım* üzerinde tanımlanacak kelime probleminin çözülebilir olması, daha sonraki bölümlerde bize yardımcı olacaktır.

2.3.3 Teorem: $X \cap Y = \phi$ olmak üzere,

$\wp_A = < X ; \mathbf{s} >$ ve $\wp_B = < Y ; \mathbf{t} >$

sonlu sunuşlarının temsil ettiği gruplar A ve B olsun. Bu gruplar için kelime problemi çözülebilir ise $G = A \times B$ grubu için de kelime problemi çözülebilirdir.

İspat: G grubunun üreteç elemanlarıyla oluşturulan herhangi bir w kelimesi bu grubun sunuşundaki bağıntı elemanları kullanılarak oluşturulan temsilci kümesindeki bir kelimeye indirgenir. İndirgenen bu kelime, grubun birimini veriyorsa $w = 1_G$, aksi halde $w \neq 1_G$ olacaktır. □

2.3.4 Örnek: $< x \; ; \; x^3 = 1 >$ ve $< y \; ; \; y^4 = 1 >$ sunuşlarının temsil ettikleri gruplar sırasıyla A ve B olsun. $G = A \times B$ grubunun $< x, y \; ; x^3 = 1, \; y^4 = 1, xy = yx >$ sunuşu için bu gruptan alınan keyfi bir kelime

$$1, x, x^2, y, y^2, y^3, xy, x^2y, xy^2, xy^3, x^2y^2, x^2y^3$$

kümesindeki bir kelimeye indirgenir.

2.3.5 Teorem [9, 12]: A ve B eşlenik problemleri çözülebilen sonlu sunuşlu gruplar olmak üzere, $A \times B$ grubu için de eşlenik problemi çözülebilirdir.

Bununla birlikte genelleştirilmiş kelime probleminin direkt çarpım altında korunmadığı bilinmektedir [10].

2.3.6 Not: Gruplarda önemli bir genişleme çeşidi ise *split* (ayrılabilir) genişlemedir. Bu genişlemeler aslında yarı direkt çarpım olarak bilinmektedir. Bu çarpımın bir türevi olan wreath çarpım ile ilgili tanım ve sonuçlar tezimizin 4. Bölüm'ünde monoidler üzerinde incelenecektir.

2.4 Birleştirilmiş Serbest Çarpım Grubunda Kelime Problemi

Bu kısımda, grup genişlemelerinden biri olan birleştirilmiş serbest çarpımları inceleyip, tezimizin genel amaçlarından biri olan kelime probleminin çözülebilirliğini bu tür grup genişlemeleri üzerinde açıklayacağız.

2.4.1 Tanım: A ve B grupları sırasıyla $< a_1, \ldots, a_n ; R_1, \ldots, R_k >$ ve $< b_1, \ldots, b_m ; S_1, \ldots, S_t >$ sunuşları ile verilsin. Buna göre $H \subset A$, $K \subset B$ öz alt gruplar ve $\theta : H \to K$ bir izomorfizma olmak üzere,

$$A *_\theta B = < a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m ; R_1, \ldots, R_k, S_1, \ldots, S_t, H = \theta(H) >$$

sunuşu ile verilen $G = A *_\theta B$ grubuna, A ve B gruplarının H grubunu K grubuna birleştirerek elde edilen *birleştirilmiş serbest çarpım grubu* denir. Özel olarak, $H = \{1_H\}$ alınırsa, sadece *serbest çarpım* grubu elde edilir. Dolayısıyla, serbest çarpımlar birleştirilmiş serbest çarpımların özel halleridir.

2.4.2 Örnek: $< a, b ; a^4, b^6, a^2 = b^3 >$ sunuşunun temsil ettiği bir G grubunun birleştirilmiş serbest çarpım grubu olduğunu gösterelim. Bunun için, $A = < a ; a^4 >$ ve $B = < b ; b^6 >$ olsun. Ayrıca H, A grubunun mertebesi 2 olan devirli alt grubu ve K da B grubunun mertebesi 2 olan devirli alt grubu olsun. H ve K alt grupları $a^2 \to b^3$ dönüşümü altında birleştirildiğinden, bu G grubu birleştirilmiş serbest çarpım grubu olur.

Birleştirilmiş serbest çarpım grubunun elemanlarının normal formunu oluşturabilmek için, A nın H alt grubunun sağ kosetleri için bir temsilci kümesi seçmeliyiz. Bu küme, H nin her bir Ha ($a \in A$) sağ kosetinden bir eleman içerir. Bu kümeye *transversal küme* denir. Bu kümeyi Y ile gösterelim. Benzer olarak, B nin K alt gubu için oluşturulan *transversal* kümesini de Z ile gösterelim. Böylece birleştirilmiş serbest çarpım grubunun elemanları için aşağıdaki *Normal Form Teoremi* elde edilir.

2.4.3 Teorem [11]: Tanım 2.4.1'de verilen birleştirilmiş serbest çarpım grubunun her elemanı, $1 \neq a_i \in Y$, $1 \neq b_i \in Z$ ve $h \in H$ için,

$$ha_1b_1 \ldots a_mb_m$$

biçiminde *tek* bir forma sahiptir. Buradaki *teklik* ifadesiyle, birleştirilmiş serbest çarpım grubundan alınan $ha_1b_1 \ldots a_mb_m$ ve $h'a_1'b_1' \ldots a_n'b_n'$ biçimindeki herhangi iki kelime için,

$$ha_1b_1 \ldots a_mb_m = h'a_1'b_1' \ldots a_n'b_n'$$

oluyorsa, $n = m$ ve her bir a_i , $a_i' \in A$, b_i, $b_i' \in B$ için $a_i = a_i'$, $b_i = b_i'$ ve $h = h'$ olması amaçlanmaktadır.

2.4.4 Teorem (Birleştirilmiş Serbest Çarpımların Karakterizasyonu) [11]: G grubunun, A ve B alt gruplarının $M = A \cap B$ birleştirilmiş alt grubu ile serbest çarpımı olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki iki şartın sağlanmasıdır.

i) A ve B alt grupları G grubunu üretip, bu grubun her elemanı $a_1b_1 \ldots a_mb_m$ formunda yazılabilirdir.

ii) $w = a_1b_1 \ldots a_mb_m$ ve $w = 1_G$ ise ya $a_i \in M$ ya da $b_i \in M$ dir.

2.5 Grupların HNN Genişlemelerinde Kelime Problemi

Grup teorisinde, alınacak bir grup için tanımlanan bazı yapılar bu grubun alt grupları için de tanımlanabilir. Örneğin, verilen bir sunuşun temsil ettiği grubun bir alt grubunun sunuşu çeşitli metodlarla oluşturulabilir. Peki bu grubu ve de alt gruplarını içeren daha büyük bir grup (yani bu grubun genişlemesi) için de bazı yapıları tanımlayabilir miyiz? Onun için biz de bu kısımda, grup genişlemelerinin başka bir modeli olan HNN (Higman-Neumann-Neumann) genişlemeler ile ilgili temel tanım ve teoremleri verip, kelime problemi çözülebilen bir grup için HNN genişlemesinin de kelime probleminin çözülebilir olduğunu göstereceğiz.

2.5.1 Tanım: G bir grup, A ve B bu grubun alt grupları olsun. $\theta : A \rightarrow G$ monomorfizma olmak üzere,

$$G^* = < \textit{ür } G, t \,;\, \textit{bağ } G, t^{-1}at = \theta(a), a \in A' > \qquad (2.10)$$

sunuşunun temsil ettiği gruba, G grubunun *HNN genişlemesi* denir. Burada G grubu *taban*, t *sabitleyici harf*, A ve B *birleştirilmiş gruplar* diye adlandırılırlar ((2.10) sunuşu içindeki *ür* G kümesi G nin üreteç kümesini, *bağ* G kümesi G grubunun bağıntı kümesini ve A' ise A alt grubunun üreteç kümesini göstermektedir). Görüldüğü gibi G^* grubu A, B ve θ ya bağlıdır [7, 11]. Bu (2.10) sunuşu

$$G^* = < G, t \,;\, t^{-1}At = B, \theta >$$

şeklinde de gösterilebilir.

2.5.1 Tanımı $\{A_i : i \in I\}$ ve $\{B_i : i \in I\}$ alt grup ailelerine genişletilebilir. Bu durumda, G grubunun HNN genişlemesi

$$G^* = < G, t_i\ (i \in I) \,;\, t_i^{-1}a_i t_i = \theta_i(a_i), a_i \in A_i >$$

(her bir $\theta_i : A_i \rightarrow B_i$ izomorfizma) şeklinde ifade edilir.

Yukarıda belirtilen G^* grubunun her bir elemanı

$$g = w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 \ldots t^{\varepsilon_n} w_n \,, \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\varepsilon_i = \pm 1$ olup, w_i elemanı da G grubunun üreteç kümesindeki elemanlardan oluşan bir kelimedir.

2.5.2 Teorem [11]: $G^* = < G, t \,;\, tAt^{-1} = B, \; \theta >$ olsun. Bu gruptan alınan bir g elemanı için,

$$g = w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 \ldots t^{\varepsilon_n} w_n$$

olmak üzere, eğer bu g elemanı G^* grubunun birim elemanı ise *ya*

a) $n = 0$ ve w_0 elemanı G grubunun birim elemanını temsil eder, *ya da*

b) g elemanı, $t^{-1} w_i \, t$ ($w_i \in A$) veya $t w_i t^{-1}$ ($w_i \in B$) formunda bir alt kelime içerir (bu tipteki kelimeler *pinch* diye adlandırılır).

2.5.3 Tanım : (2.11)'deki gibi bir kelime, eğer hiç *pinch* içermiyorsa, bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir. Ayrıca $g = w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 \ldots t^{\varepsilon_n}$ formundaki bir kelimenin bütün devirli permütasyonları indirgenmiş ise bu kelimeye *devirli indirgenmiş kelime* denir.

2.5.4 Önerme (Britton Önermesi) [11]: G^* grubundan alınan herhangi bir $g = w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 \ldots t^{\varepsilon_n} w_n$ kelimesi indirgenmiş ve $n \geq 1$ ise, o halde

$$g = w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 \ldots t^{\varepsilon_n} w_n \neq 1_{G^*}$$

dir.

G^* grubundaki her bir elemanının tek normal formunu oluşturabilmek için, A ve B alt gruplarının sağ kosetlerinin bir temsilci kümesini oluşturmalıyız. Bunun için, Y ve Z sırasıyla A ve B alt gruplarının sağ kosetleri için temsilci kümesi olsunlar. Buradan da G^* nin elemanlarının tek normal formu için aşağıdaki teorem elde edilir.

2.5.5 Teorem [11]: G^* grubundaki her eleman

$$w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 \ldots t^{\varepsilon_n} w_n$$

formunda tek türlü ifade edilir. Burada $\varepsilon_i = -1$ ise $1 \neq w_i \in Y$ ve $\varepsilon_i = +1$ ise $1 \neq w_i \in Z$ dir.

2.5.6 Örnek: $\{a\}$ ile üretilen sonsuz devirli $G = < a\ ;\ \ >$ grubunu ve bunun $A = < a >$ ve $B = < a^2 >$ şeklinde izomorf iki alt grubunu ele alalım. Dolayısıyla bu G grubunun HNN genişlemesinin sunuşu $G^* = < a,\ t\ ;\ t^{-1}at = a^2 >$ şeklindedir. Ayrıca bu G^* grubundan alınan bir $w = a^{-1}tat^{-1}$ kelimesi için $w \neq 1_{G^*}$ dir (dolayısıyla bu G^* grubu değişmeli değildir). Eğer $w = 1_{G^*}$ olsaydı, Britton Önermesi (2.5.4 Önerme) gereği bu kelime bir *pinch* içermek zorundadır. Ancak, bu kelimedeki tek *pinch*, tat^{-1} $(a \in B)$ alt kelimesidir. Görüldüğü gibi bu B grubu, a nın çift kuvvetlerinden oluştuğu için $a \notin B$ dir. Dolayısıyla bu w kelimesi hiç *pinch* içermediğinden, $w \neq 1_{G^*}$ olacaktır.

Aşağıda verilen iki teoremin ispatı ayrıntılı biçimde [8]'de incelenmiştir.

2.5.7 Teorem: G^* dan alınan $u = w_0 t^{\varepsilon_1} w_1 \ldots t^{\varepsilon_n} w_n$ ve $v = h_0 t^{\delta_1} h_1 \ldots t^{\delta_n} h_m$ indirgenmiş kelimeleri için eğer $u = v$ ise, bu durumda $m = n$ ve $\varepsilon_i = \delta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ dir.

2.5.8 Teorem: Tanım 2.5.1'de verilen bir G^* grubu için, bu gruptan alınan sonlu mertebeli her eleman G grubundaki sonlu mertebeli bir elemana eşleniktir. Böylece G grubu n mertebeli elemanlara sahipse, G^* grubu da n mertebeli elemanlara sahiptir.

Bir G grubunun HNN genişlemesinin kelime probleminin çözülebilirliğini veren aşağıdaki Teorem 2.5.9'un ispatı [3]'te bulunabilir.

2.5.9 Teorem: G bir grup ve A ile B bu grubun alt grupları olsun. $\theta : A \to B$ izomorfizma olmak üzere, G grubunun $G^* = < G,\ t\ ;\ t^{-1}At = B,\ \theta >$ sunuşunun temsil ettiği HNN genişlemesinin kelime probleminin çözülebilir olması için,

- G grubunun kelime problemi çözülebilirdir
- G içindeki A ve B alt grupları için üyelik problemi çözülebilirdir

şartlarının sağlanması gerekmektedir.

2.5.10 Örnek: İki ranklı serbest değişmeli grupların sunuşu $G^* = < a, b\ ;\ ab = ba >$ biçimindedir. Burada G grubu, A ve B alt grupları olarak $<b>$ sonsuz devirli grubunu alalım. Bu durumda, A ve B alt gruplarının elemanları arasında $\theta : b \to b$ izomorfizması kurulur ve $t = a$ alınırsa,

$$< b, t = a\ ;\ t^{-1}bt = \theta(b) > = < b, a\ ;\ a^{-1}ba = b > = < b, a\ ;\ ba = ab >$$

olduğundan, G^* grubu bir HNN genişlemesi olur. Ayrıca G grubu için kelime problemi ve A ile B alt grupları için de üyelik problemi çözülebilir olduğundan, G^* grubu için kelime problemi çözülebilirdir.

3. YENİDEN YAZMA (REWRITING) SİSTEMİ

Bu yapı, her ne kadar matematiğin cebirsel kısmında çalışılan bir konu olsada, anlamı aynı fakat dili farklı olan değişik başlıklar altında, birçok bilim dalında da bulunabilir. Biz ise genel bir tabirle, bu *yeniden yazma sistemi* ile verilen yapıyı (bizim için bu yapılar kelimelerdir) belli kurallar çerçevesinde başka yapılara dönüştüreceğiz (yani verilen yapıyı yeniden yazacağız).

3.1 Yeniden Yazma Sistemine Giriş

Yeniden yazma sistemi, özellikle monoid ve yarı gruplardaki kelime problemleri için temel bir metoddur. Çünkü bu tip yapılar gruplara göre biraz daha genel oldukları için (yani monoidler için bir elemanın tersinin ve yarı gruplar için de buna ek olarak birim elemanının bulunmaması) bu cebirsel yapılar üzerinde tanımlanacak kelime probleminin çözülebilirliği için gruplara göre başka özelliklerin de aranmasını gerektirmektedir. Örneğin, gruplarda elemanların temsilci kümesini oluşturarak verilen bir kelimenin bu kümedeki grubun birimine eşit olup olmadığını araştırıyorduk. Ancak monoidlerde, bu temsilci kümesini oluşturabilmek için verilen bir kelimenin indirgendiği tek bir kelime bulmamız gerekmektedir. Eğer indirgenen kelime tek değil ise temsilci kümesinden alınan iki eleman aynı kelimeyi temsil edeceğinden, ki bu da temsilci kümesinin özelliğine uymaz, bu durumda monoid için kelime problemi çözülemezdir. Bu durumu daha ayrıntılı incelemek için ilk olarak temel tanımları verelim.

Sonlu bir X alfabesi için, X^* bu alfabedeki harflerden oluşan bütün kelimelerin kümesi ve λ boş kelime olsun. X üzerindeki yeniden yazma kuralı aslında $(l, r) \in X^* \times X^*$ şeklindeki sıralı çiftlerdir. Bu kural $(l \to r)$ şeklinde gösterilir. Buradaki l kelimesi *sol yan* (left-hand side), r kelimesi ise *sağ yan* (right-hand side) diye adlandırılır. *Yeniden yazma sistemi X üzerindeki yeniden yazma kurallarının bir* *kümesidir* ve bu sistem R ile gösterilir. X^* kümesindeki kelimeler arasındaki bu bağıntı ($\rightarrow_R$) için aşağıdaki kural tanımlanır:

> X üzerindeki u ve v *pozitif kelimeler* (strings) olmak üzere, $u \rightarrow_R v$ olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in X^*$ ve $(l \rightarrow r) \in R$ için $u = xly$ ve $v = xry$ olmasıdır.

3.1.1 Tanım: Bir $u \in X^*$ kelimesi için $u \rightarrow_R v$ olacak şekilde bir $v \in X^*$ kelimesi varsa bu u kelimesine **indirgenir** (reducible) **kelime** denir. Aksi durumda ise (yani $u \rightarrow_R v$ olacak biçimde bir v kelimesi yoksa) bu u kelimesine **indirgenemez** (irreducible) **kelime** denir.

3.1.2 Önerme [2]: Tanımlanan bu $\rightarrow_R$ bağıntısının yansımalı (reflexive), geçişmeli (transitive) kapanışı olan $\rightarrow^*_R$ kuralı, aslında R tarafından üretilen bir indirgeme bağıntısıdır.

3.1.3 Tanım: $u, v \in X^*$ için eğer $u \rightarrow^*_R v$ bağıntısı varsa ve v kelimesi indirgenemez ise, bu v kelimesine u kelimesinin **normal formu** denir.

3.1.4 Tanım: Bu $\rightarrow_R$ bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli kapanışı, ki bunu $\leftrightarrow^*_R$ ile gösterelim, R tarafından üretilen bir *Thue kongruans*tır [2]. Bir $w \in X^*$ kelimesi için w nin kongruans sınıfı $\{u \in X^* \mid u \leftrightarrow^*_R w\}$ olup, bu denklik sınıfı $[w]_R$ ile gösterilir. Ayrıca $X^* / \leftrightarrow^*_R$ bütün kongruans sınıflarının kümesini gösterir. u ve v kelimelerinin kongruans sınıflarının çarpımı

$$[u]_R [v]_R = [uv]_R$$

şeklindedir. Bu çarpma işlemi birleşme özelliğini sağlar ve $[\lambda]_R$ birim elemandır. Böylece $X^* / \leftrightarrow^*_R$ bir monoiddir ve $[\, X\, ;\, R\,]$ çifti bir *monoid sunuşu*dur. Bu sunuştaki üreteç kümesi X sonlu ise bu monoide sonlu üreteçli monoid, hem X hem de R sonlu ise o zaman bu monoide *sonlu sunumlu monoid* denir.

Yeniden yazma sistemleri üzerinde aşağıdaki sonuç önemlidir:

3.1.5 Önerme: Aynı alfabe üzerindeki iki yeniden yazma sistemi eğer aynı Thue kongruansını üretirlerse bu iki yeniden yazma sistemine *denktir* denir.

Bir R yeniden yazma sistemi için kelime problemi, verilen iki u ve v kelimeleri için $u \leftrightarrow^{*}_{R} v$ nin sağlanıp-sağlanmamasıdır. Yani bu iki kelimenin, belli bir kural altında birbirine denk olup olmamasının incelenmesidir. Bunun için öncelikle bazı tanımları verelim.

R yeniden yazma sistemi olmak üzere,

3.1.6 Tanım:

I) R sistemi için kelimeler arasında

$$u_1 \rightarrow_R u_2 \rightarrow_R u_3 \rightarrow_R \ldots$$

şeklinde sonsuz bir zincir yoksa, bu yeniden yazma sistemine **Noetherian** ya da **sona ermiş** (terminating) denir.

II) R sisteminden alınacak bütün u, v, $w \in X^*$ kelimeleri için,

$$u \rightarrow^{*}_{R} v \text{ ve } u \rightarrow^{*}_{R} w \text{ iken } v \rightarrow^{*}_{R} z \text{ ve } w \rightarrow^{*}_{R} z$$

olacak şekilde bir $z \in X^*$ kelimesi varsa, bu yeniden yazma sistemine **elmas kuralı** (**confluent**) denir. Bu durum şekilsel olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dr, "{}^{*}_{R}"] & \\ u \arrow[ur, "{}^{*}_{R}"] \arrow[dr, "{}^{*}_{R}"'] & & z \\ & w \arrow[ur, "{}^{*}_{R}"'] & \end{tikzcd}$$

Tanım 3.1.6'ya ek olarak, verilen bir sistemden yeni özellikler de türetilebilir.

3.1.7 Tanım: Hem *Noetherian* hem de *confluent* özelliklerini sağlayan yeniden yazma sistemine **tam** (complete ya da convergent) denir.

Tam sistemler kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilir:

3.1.8 Teorem [2]: Eğer R yeniden yazma sistemi *tam* ise, bu sistem içindeki her bir kelime tek bir normal forma sahip olduğundan, bu R yeniden yazma sistemi *çözülebilir* (solvable) *kelime problemine* sahiptir.

Teorem 3.1.8'in ispatında düşünce tarzımız, verilen sistem tam olduğu için kelimelerin sonlu sayıda adımla başka kelimelere indirgendiği ve indirgenen bu kelimelerin de birbirine eşit olduğu şeklindedir. Eğer indirgenen bu kelimeler birbirine eşit olmasaydı, bu durumda bir kelime farklı iki şekilde ifade edilemeyeceğinden, bu sistem için kelime problemi çözülemez olurdu.

3.2 Bir [*X* ; *R*] Sunuşu İçin Yeniden Yazma Sisteminin Tam Olduğunun Gösterilmesi

Bir [X , R] sunuşunun yeniden yazma sisteminin tam olduğunu göstermek için iki adım uygulanır.

- **1. ADIM:** Öncelikle bu sistemin *sona ermiş* (terminating) olduğu gösterilir.

Bunun için X^* daki kelimeler arasında bir indirgeme sıralaması olması gerekir. Yani verilen sunuştaki her bir $u = v$ bağıntısı için eğer $u>v$ ise bu > sıralaması bu sunuş için uygundur. Diğer bir deyişle, bütün u ve v kelimeleri için $u \rightarrow v$ kuralı $u>v$ sıralamasını sağlar. Yeniden yazma sisteminde kullanılan birkaç tipte indirgeme sıralaması vardır. $u, v \in X^*$ olmak üzere, bu sıralamaları aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

1) Uzunluk Sıralaması (*L*): Harf sayısı fazla olan kelime daha büyüktür. Yani,

$$u >_L v \Leftrightarrow |u|>|v|$$

dir.

2) Ağırlık Sıralaması (*W*): X in her bir elemanı pozitif bir sayı ile belirtilir. Bir kelimenin ağırlığı ise bu kelimedeki harflerin belirttiği sayıların toplamıdır ve herhangi bir u kelimesi için bu kelimenin ağırlığı $W(v)$ ile gösterilir. Notasyonel olarak

$$u >_W v \Leftrightarrow W(u)>W(v)$$

dir.

3) Soldan Sözlük Sıralama (*LL*): Bu sıralama X içindeki harflerin kendi aralarında sıralanmasıyla uygulanır. Örneğin alfabedeki *abcd*… harflerinin $a<b<c<\ldots$ şeklinde sıralanması gibi. Herhangi iki kelimeyi sıralamak için ise soldan başlayarak her iki kelimenin harfleri karşılaştırılır. İlk farklı olan harflerden hangisinin harfi sıralamada daha büyükse, o kelime daha büyüktür. Örneğin, $X = \{a,b,c,\ldots\}$ ve sıralama $a<b<c<\ldots$ olsun. X^* dan $u = abbacb$ ve $v = abbabb$ şeklinde iki kelime alalım ve bu iki kelimeyi karşılaştırdığımızda ilk olarak beşinci harfleri farklıdır ve $b<c$ olduğu için de $u>_{LL} v$ olur. Benzer olarak kelimeler arasında *sağdan sözlük sıralama* (*LR*) da yapılabilir.

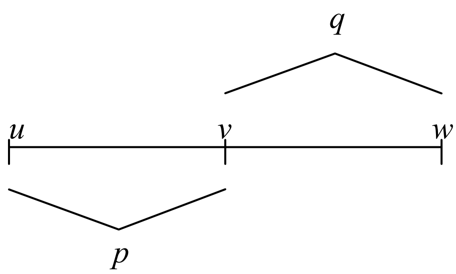
4) Uzunluk ve Soldan Sözlük Sıralama (*LLL*): Burada $u>_{LLL} v$ olması için gerek ve yeter koşul

ya $|u|>|v|$ olması *ya da* $|u| = |v|$ ise $u>_{LL}v$

olmasıdır. Örneğin iki kelime $u = abab$ ve $v = abaa$ ($a<b$) olsun. Bu iki kelimenin uzunlukları aynı olmasına rağmen $u>_{LLL} v$ dir. Benzer olarak kelimeler arasında *uzunluk ve sağdan sözlük sıralama* (*LLR*) da yapılabilir.

- **2. ADIM:** Bu yeniden yazma sisteminin confluent olduğu gösterilir.

Bunun için ise bütün **kritik çiftlerin** (critical pairs) çözülebilmesi gerekir. Buradaki *kritik çift* ile anlatılmak istenen; u, v, w, p ve q kelimeleri X^* da olmak üzere $uv = p$ ve $vw = q$ (v boş kelimeden farklı) bağıntılarından elde edilen $\{pw, uq\}$ kelime çiftleridir.



Bu $\{pw, uq\}$ *kritik çiftin çözülebilir olması* demek ise,

$$pw \rightarrow^*_R z \quad \text{ve} \quad uq \rightarrow^*_R z$$

olacak şekilde bir $z \in X^*$ kelimesinin elde edilebilir olması demektir.

3.2.1 Örnek: Aşağıda verilen dört yeniden yazma kuralının oluşturduğu yeniden yazma sisteminin confluent olduğunu gösterelim.

$a^5 \to \lambda,\ b^5 \to \lambda,\ b^4a^4 \to (ab)^4,\ (ba)^4 \to a^4b^4$

Bunun için bu dört yeniden yazma kuralının sol yanlarına bakalım ve çakışan bütün kelimeleri ele alalım.

Şimdi $\{(ab)^4a, b^4\}$, $\{a^4, b(ab)^4\}$, $\{a^4b^4a^4, (ba)^3b\}$ ve $\{a(ba)^3, b^4a^4b^4\}$ kritik çiftlerinin çözülebilir olduğunu yani herbirinin tek bir kelimeye indirgendiğini gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
 & b^4a^5 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(ab)^4a = a(ba)^4 \arrow[d] & & b^4 \\
a^5b^4 \arrow[r] & b^4 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & b^5a^4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a^4 & & b(ab)^4 = (ba)^4b \arrow[d] \\
 & a^4 & a^4b^5 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (ba)^4a^4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a^4b^4a^4 \arrow[d] & & (ba)^3b \\
a^4(ab)^4 \arrow[d] & & \\
(ba)^3b & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & b^4(ba)^4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a(ba)^3 & & b^4\,a^4b^4 \arrow[d] \\
 & & (ab)^4b^4 = a(ba)^3b^5 \arrow[d] \\
 & & a(ba)^3
\end{tikzcd}$$

Sonuç olarak verilen yeniden yazma sistemi confluenttir.

3.2.2 Örnek: *S* bir yarı grup ve sunuşu

$$\wp_S = [\, a, b, c \,;\, ba = ac,\ ca = ab,\ ab = bc,\ cb = ba,\ ac = cb,\ bc = ca \,]$$

biçiminde verilsin. Bu *S* yarı grubu için, kelime probleminin çözülebilirliği aşağıdaki şekilde gösterilir.

İlk olarak $ba \to ac$, $ca \to ab$, $ab \to bc$, $cb \to ba$, $ac \to cb$, $bc \to ca$ yeniden yazma kurallarındaki kelimeler arasında tek bir indirgeme söz konusu olduğundan ve aşağıda gösterdiğimiz gibi kelimelerin aynı indirgendiği kelimeleri sonlu sayıda adımla bulduğumuzdan, sistemin çözülebilir olması için gerekli olan ilk şart olan Noetherian (sistemin sona ermiş olması) sağlanmış olur. Daha sonra bu yeniden yazma kurallarının sol yanlarına bakalım ve çakışan bütün kelimeleri ele alalım. Elde edilen $\{acb, b^2c\}$, $\{ac^2, bcb\}$, $\{ab^2, cbc\}$, $\{abc, c^2b\}$, $\{bca, a^2c\}$, $\{bc^2, aca\}$, $\{ba^2, cac\}$, $\{bac, c^2a\}$, $\{cba, a^2b\}$, $\{cb^2, aba\}$, $\{ca^2, bab\}$, $\{cab, b^2a\}$ kritik çiftlerinin çözülebilir olduğunu yani herbirinin tek bir kelimeye indirgendiğini gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
& bab \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
acb \arrow[d] & & b^2c \arrow[d] \\
aba & & bca \arrow[d] \\
& & ca^2 \arrow[d] \\
& & aba
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& bac \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
ac^2 \arrow[d] & & bcb \arrow[d] \\
cbc \arrow[d] & & cab \\
c^2a \arrow[d] & & \\
cab & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& cab \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
ab^2 \arrow[d] & & cbc \arrow[d] \\
bcb & & cbc \arrow[d] \\
& & bac \arrow[d] \\
& & bcb
\end{tikzcd}$$

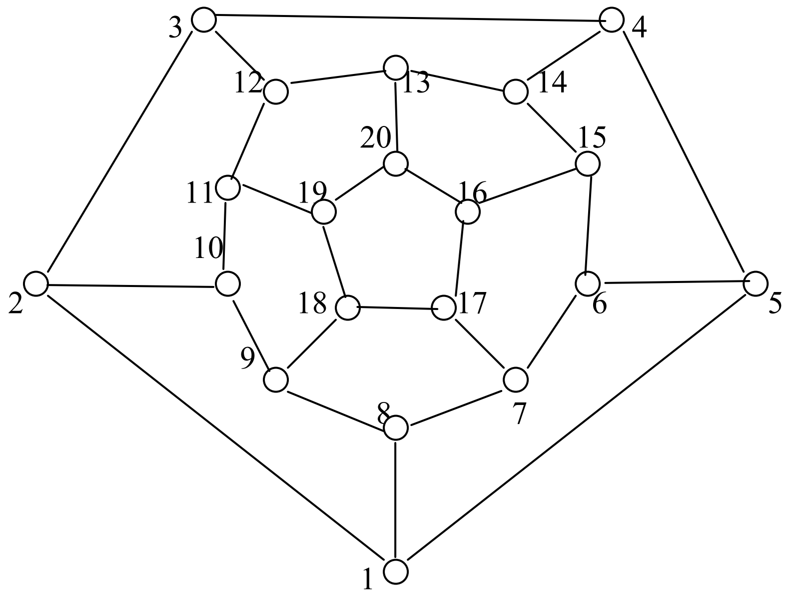
$$\begin{tikzcd}
& cac \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
abc \arrow[d] & & c^2b \arrow[d] \\
aca & & cba \arrow[d] \\
& & ba^2 \arrow[d] \\
& & aca
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& aba \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
bca \arrow[d] & & a^2c \arrow[d] \\
bab & & acb \arrow[d] \\
& & cb^2 \arrow[d] \\
& & bab
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& abc \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
bc^2 \arrow[d] & & aca \arrow[d] \\
cac & & cba \arrow[d] \\
& & cac
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& cba \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
ba^2 \arrow[d] & & cac \arrow[d] \\
aca & & abc \arrow[d] \\
& & aca
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& cbc \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
bac \arrow[d] & & c^2a \arrow[d] \\
bcb \arrow[d] & & cab \\
cab & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& aca \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
cba \arrow[d] & & a^2b \arrow[d] \\
cac & & abc \arrow[d] \\
& & bc^2 \arrow[d] \\
& & cac
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& acb \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
cb^2 \arrow[d] & & aba \arrow[d] \\
bab & & bca \arrow[d] \\
& & bab
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& bca \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
ca^2 \arrow[d] & & bab \arrow[d] \\
aba & & acb \arrow[d] \\
& & aba
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& bcb \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
cab \arrow[d] & & b^2a \arrow[d] \\
cbc & & bac \arrow[d] \\
& & acb \arrow[d] \\
& & cbc
\end{tikzcd}$$

Sonuç olarak S yarı grubu için kelime problemi, Teorem 3.1.8 ile çözülebilirdir.

3.2.3 Örnek: 1.4 Alt Bölüm'de incelediğimiz gibi bir Hamiltonian devresi her bir köşeden bir defa geçerek tüm köşeleri dolaşan ve tekrar başladığı köşeye dönen bir devredir. Aşağıdaki Hamiltonian devresini ele aldığımızda, L ile bulunan köşeden sola hareket ve R ile de sağa hareket kastedilmektedir. Bu Hamiltonian devresi için bir sunuş oluşturmak gerekirse bu sunuşun üreteç elemanları L ve R, bağıntı elemanları da $R^5 = L^5 = 1$, $RL^2R = LRL$, $LR^2L = RLR$, $RL^3L = L^2$ ve $LR^3L = R^2$ olarak düşünülebilir.



Şekil 3.1

İlk olarak, $R^5 = L^5 = 1$, $RL^2R = LRL$, $LR^2L = RLR$, $RL^3R = L^2$ ve $LR^3L = R^2$ bağıntılarını yeniden yazma kuralları olarak düşündüğümüzde bu yeniden yazma kurallarının sol yanlarına bakalım ve çakışan bütün elemanların indirgendiği elemanları inceleyelim. Burada indirgenen elemanların denk olması bunların başlangıç köşelerinin ve bitiş köşelerinin aynı olması anlamındadır.

$$L^2R \swarrow R^5L^2R \searrow R^4LRL$$

$$L^3R \swarrow R^5L^3R \searrow R^4L^2$$

$$RL^2 \swarrow RL^2R^5 \searrow LRLR^4$$

$$RL^3 \swarrow RL^3R^5 \searrow L^2R^4$$

$$LRL^4R \swarrow RL^2RL^3R \searrow RL^4$$

$$L^4R \swarrow RL^3RL^2R \searrow RL^4RL$$

$$RLR^4L \swarrow LR^2LR^3L \searrow LR^4$$

$$R^4L \swarrow LR^3LR^2L \searrow LR^4LR$$

Elde edilen R^5L^2R, R^5L^3R, RL^2R^5, RL^3R^5, RL^2RL^3R, RL^3RL^2R, LR^2LR^3L ve LR^3LR^2L elemanlarının indirgendiği elemanlar kendi aralarında birbirlerine denktir. Örneğin R^5L^2R elemanının indirgendiği L^2R ve R^4LRL elemanlarının başlangıç köşesi olarak Şekil 3.1'deki 1 numaralı köşeyi aldığımızda L^2R elemanı sırasıyla 8, 9 ve 18 numaralı köşelerden geçer. R^4LRL elemanı ise 5, 4, 3, 2, 10, 9 ve 18 numaralı köşelerden geçer. Yani bu iki elemanın başlangıç ve bitiş köşeleri aynıdır dolayısıyla da bu iki eleman denktir.

Sonuç olarak, Teorem 3.1.8 ile, verilen bu Hamiltonian devresi (Şekil 3.1) için kelime problemi çözülebilirdir diyebiliriz.

3.3 Knuth-Bendix Algoritması

Verilen bir sunuşun temsil ettiği grubun kelime problemi için, 2. Bölüm'de anlatıldığı gibi, bu grubun elemanlarından bir temsilci kümesi oluşturulur ve alınan her elemanın bu kümedeki bir elemana denk olduğu gösterilirdi. Ancak sonsuz mertebeli bir grup için temsilci kümesi oluşturamayacağımız için aşağıda vereceğemiz algoritma yardımıyla bu grubun kelime problemine çözüm arayacağız.

Knuth-Bendix algoritması, verilen bir sunuşun bağıntı kümesindeki eşitlikleri confluent yeniden yazma sistemine dönüştüren bir algoritmadır. Eğer bu algoritma başarı ile sonuçlanırsa (yani bağıntı kümesindeki eşitlikler confluent yeniden yazma sistemine dönüştürülürse), verilen sunuşun temsil ettiği grup için kelime problemi çözülebilirdir. Bu algoritmayı aşağıdaki örnek üzerinde inceleyelim.

3.3.1 Örnek:

$$< x, y \,;\, x^3 = y^3 = (xy)^3 = 1 >$$

sunuşu verilsin. Bu sunuştaki üreteç kümesi ve bağıntı kümesi sonlu olmasına (yani sunuşun sonlu sunumlu olması) rağmen bu sunuşun temsil ettiği grup sonsuzdur. (genel olarak bu tipteki yani

$$< x, y \,;\, x^k = y^l = (xy)^m = 1 >$$

biçimindeki sunuşlar için eğer $1/k + 1/l + 1/m > 1$ ise, sunuşun temsil ettiği grup sonludur [14].) O yüzden yukarıda da bahsettiğimiz gibi bu grubun elemanları için bir temsilci kümesi oluşturamayız. Ancak bu durum, grubun kelime probleminin çözülemez olduğu anlamına gelmez. Onun için bizde

$$\textbf{(1)}\ x^3 \to 1, \quad \textbf{(2)}\ y^3 \to 1, \quad \textbf{(3)}\ (xy)^3 \to 1,$$

yeniden yazma kurallarını kullanarak, çakışan bütün kelimelerden oluşan kritik çiftlerin çözülebilir olması için yeni yeniden yazma kuralları bulmalıyız. İlk olarak (1) ve (3) kurallarının sol yanlarındaki çakışan x elemanı için, x^3yxyxy kelimesini göz önüne alalım. Bu kelimeye (1) ve (3)'teki indirgeme işlemlerini uygulayarak $yxyxy = x^2$ eşitliği, buradan da

$$\textbf{(4)}\ yxyxy \to x^2,$$

kuralı elde edilir. (Knuth-Bendix algoritmasında $P_i = Q_i$ biçimindeki bir bağıntı için $Q_i < P_i$ sıralaması kabul edilir ve bu $P_i \to Q_i$ kuralı şeklinde gösterilir.) Benzer olarak, $xyxyxy^3$ kelimesi için de (2) ve (3) kullanılarak

$$\textbf{(5)}\ xyxyx \to y^2,$$

kuralı elde edilir. Bir sonraki adım olarak (3) kuralı kaldırılır ve (1) ile (5)'teki x elemanının çakışmasıyla oluşan x^3yxyx kelimesinden

$$\textbf{(6)}\ yxyx \to x^2y^2,$$

kuralı elde edelir. Daha sonra (4) ve (5) kuralları kaldırılır. Son olarak da $xyxyx^3$ kelimesine (5) ile (1) kuralları uygulanarak

$$\textbf{(7)}\ y^2x^2 \to xyxy,$$

kuralı oluşturulur. Sonuç olarak,

$$\textbf{(1)}\ x^3 \to 1, \quad \textbf{(2)}\ y^3 \to 1, \quad \textbf{(6)}\ yxyx \to x^2y^2, \quad \textbf{(7)}\ y^2x^2 \to xyxy,$$

yeniden yazma kurallarının oluşturduğu yeniden yazma sistemi confluent olduğundan (yani (1), (2), (6) ve (7) kurallarının sol yanlarındaki çakışan bütün kelimelerin oluşturduğu kritik çiftler tek bir kelimeye indirgendiğinden) algoritma başarıyla sonuçlanmıştır. Dolayısıyla da

$$< x, y \; ; x^3 = y^3 = (xy)^3 = 1 >$$

sunuşunun temsil ettiği sonsuz mertebeli grup için kelime problemi çözülebilirdir.

3.3.2 Uyarı: Bu bölümde, tam yeniden yazma sistenine sahip bir monoid için kelime probleminin çözülebilir olduğunu verdik. Ancak bu durumun tersinin olmadığı [17]'de bir örnekle açıklanmıştır. Bu örnekte *sonlu türemiş tip* (finite derivation type) kavramından bahsedilmiş ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoidin bütün sonlu sunuşlarının sonlu türemiş tipe sahip olduğu verilmiştir.

4. MONOİDLER ÜZERİNDEKİ WREATH ÇARPIM İÇİN KELİME PROBLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Gruplarda olduğu gibi monoidlerdeki kelime problemi de son zamanlarda üzerinde çalışılan önemli konulardan biridir. Bu yüzden tezimizin bu son bölümünde wreath çarpım sunuşu monoidler üzerinde verilecek ve bu sunuş devirli monoid yapısına uygulanarak bu tip monoidlerin wreath çarpımı için üyelik (membership) problemi incelenecektir.

4.1 MonoidlerÜzerinde Wreath Çarpım

Tezin bu alt bölümünde, cebirsel yapılar üzerinde önemli bir genişleme çeşidi olan wreath çarpım incelenecektir. Bu çarpıma ait sunuşun elde edilmesi yarı gruplar üzerinde kolay olmadığı için bu sunuş monoid yapısı üzerinde verilecektir. Ayrıca bu sonuç bazı özel monoid durumlarına da genişletilecektir. Ancak son zamanlarda yarı grupların wreath çarpımının sonlu üreteçli olması ve diğer sonluluk durumları için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir [16].

Oluşturacağımız bu wreath çarpımın sunuşunu öncelikle keyfi monoidler üzerinde verelim.

A ve B monoid olsun. A nın B nin mertebesi kadar kendisi ile kartezyen çarpımı $A^{\times B}$ ile, uygun direkt çarpım ise $A^{\oplus B}$ ile gösterilir. $A^{\times B}$ ile B den A monoidine tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi ve $A^{\oplus B}$ ile de bu şekildeki f fonksiyonlarından sonlu desteğe (support) sahip olanların kümesi ifade edilir. Bir f fonksiyonunun sonlu desteğe sahip olması $x \in B$ için $f(x) = 1_A$ şartının sağlanması demektir.

A nın B ile *kısıtlanmamış (unrestricted)* ve *kısıtlanmış (restricted) wreath çarpımları*

$$(f, b).(g, b') = (fg^b, bb') \tag{4.8}$$

çarpma işlemi altında tanımlı sırasıyla $A^{\times B}{\times}B$ ve $A^{\oplus B}{\times}B$ kümeleridir ve $AWrB$ ile $AwrB$ şeklinde gösterilirler. Eşitliğin ikinci tarafındaki g^b fonksiyonu

$$g^b : B \rightarrow A$$

$$g^b(x) = g(xb) \quad (x \in B)$$

şeklinde tanımlanır. $AWrB$ ve $AwrB$, birim elemanı $(\bar{1}, 1_B)$ ($\forall x \in B$ için $\bar{1}(x) = 1_A$) olan moniddirler. Ayrıca $AWrB = AwrB$ olması için gerek ve yeter koşul $|A| =1$ veya B nin sonlu olmasıdır.

$\{(f, 1_B) \mid f \in A^{\oplus B}\}$ ve $\{(\bar{1}, b) \mid b \in B\}$ kümeleri sırasıyla $A^{\oplus B}$ ve B ye izomorf olan $AwrB$ nin alt monoidleridir. Buradan

$$(f, 1_B)(\bar{1}, b) = (f, b)\,, \qquad f \in A^{\oplus B}, b \in B$$

dir. Şimdi $a \in A$ ve $b \in B$ için,

$$\overline{a_b} : B \rightarrow A$$

fonksiyonunu

$$\overline{a_b}(c) = \begin{cases} a; & c = b \text{ ise} \\ 1_A; & c \neq b \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca, eğer $f : B \rightarrow A$ fonksiyonu sonlu desteğe sahipse bu durumda

$$f = \prod_{b \in B} \overline{f(b)_b}$$

dir.

A monoidi X kümesi ile üretilsin. Bu durumda A nın her a elemanı X in elemanlarının $x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(n)}$ şeklinde bir çarpımıyla ifade edilir. Bu durumda ($\forall\, b \in B$ için)

$$\overline{a_b} = \overline{x_b}^{(1)}\, \overline{x_b}^{(2)} \ldots \overline{x_b}^{(n)}$$

şeklindedir. Böylece [5]'te bulunan aşağıdaki 4.1.1 Ön Teorem ve 4.1.2 Teorem elde edilir.

4.1.1 Ön Teorem: A ve B monoidleri sırasıyla X ve Y kümeleri ile üretilsin ve

$$\overline{X_b} = \{(\overline{x_b}, 1_B) \mid x \in X, b \in B\}$$
$$\overline{Y} = \{(\bar{1}, y) \mid y \in Y\}$$

olsun. Bu durumda $(\bigcup_{b \in B} \overline{X_b}) \cup \overline{Y}$ kümesi $AwrB$ yi üretir.

4.1.2 Teorem: A ve B monoidleri sırasıyla $[\,X\,;\,R_A\,]$ ve $[\,Y\,;\,R_B\,]$ sunuşlarıyla temsil edilsin. $b \in B$ için $X_b = \{x_b \mid x \in X\}$ kümesi X in bir kopyası ve $R_{A,\,b}$ kümesi de R_A bağıntı kümesinin uygun bir kopyası olsun. Bu durumda $AwrB$ nin üreteç kümesi $(\bigcup_{b \in B} \overline{X_b}) \cup \overline{Y}$ ve bağıntı kümesi

$$R_{A,\,b} \;;\; R_B\,; \tag{4.9}$$
$$x_b x'_c = x'_c\, x_b \;,\; x, x' \in X,\; b, c \in B,\; b \neq c\,; \tag{4.10}$$
$$y x_b = (\prod_{c \in by^{-1}} x_c)y \;,\; x \in X,\; y \in Y,\; b \in B\,; \tag{4.11}$$

şeklindedir.

İspat: $\Phi : ((\bigcup_{b \in B} X_b) \cup Y)^* \rightarrow AwrB$

dönüşümünü

$$\Phi(x_b) = (\overline{x_b}, 1_B) \;,\; x \in X,\; b \in B,$$

$$\Phi(y) = (\bar{1}, y) \;,\; y \in Y,$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşümün 4.1.1 Ön Teorem ile örten olduğu açıktır. Ayrıca, A monoidinin sunuşundaki bağıntıların B nin meretebesi kadar kopyalanacağı ve $A^{\oplus B}$ den dolayı da A nın elemanlarının kopyalarının çarpımlarının değişmeli olacağı (4.9) ve (4.10) bağıntılarında kolayca görülür. Şimdi (4.11) bağıntısını elde etmeye çalışalım. Bunun için ilk olarak

$$(\bar{1}, y)(\overline{x_b}, 1_B) = (\overline{x_b}^{\,y}, y) = (\overline{x_b}^{\,y}, 1_B)(\bar{1}, y)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Herbir $d \in B$ için

$$\overline{x_b}^{\,y}(d) = \overline{x_b}(dy) = \begin{cases} x; & dy = b \text{ ise} \\ 1_A; & dy \neq b \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x; & d \in by^{-1} \text{ ise} \\ 1_A; & d \notin by^{-1} \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \prod_{c \in by^{-1}} \overline{x_c}(d) = (\prod_{c \in by^{-1}} \overline{x_c})(d)$$

dir. Böylece

$$\overline{x_b}^{\,y} = \prod_{c \in by^{-1}} \overline{x_c}$$

elde edilir. Buradan da

$$(\bar{1}, y)(\overline{x_b}, 1_B) = (\prod_{c \in by^{-1}} (\overline{x_c}, 1_B))(\bar{1}, y)$$

dir. Böylece, Φ (4.9), (4.10) ve (4.11) bağıntıları ile tanımlanmış M monoidinden $AwrB$ üzerine olan bir epimorfizma olur.

Son olarak, Φ nin bir monomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için w kelimesi M nin bir elemanını temsil etsin. Buradan $w(b) \in X^*$ $(b \in B)$ ve $w' \in Y^*$ elemanları vardır öyleki

$$w = (\prod_{b \in \mathbf{B}} (\mathbf{w}(b))_b) w'$$

dir. (Burada, $z \in X^*$ için z_b kelimesi $X_b{}^*$ içindeki uygun bir kelimedir.) Şimdi herbir $w \in X^*$ ve $c \in B$ için

$$\overline{w_b}(c) = \begin{cases} w; & c = b \text{ ise} \\ 1_A; & c \neq b \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Böylece bütün $c \in B$ için

$$(\prod_{b \in B} \overline{(w(b))_b})(c) = \prod_{b \in B} \overline{(w(b))_b}(c) = w(c) \tag{4.12}$$

elde edilir.

Herhangi iki $u, v \in ((\bigcup_{b \in B} X_b) \cup Y)^*$ için

$$\begin{aligned}\Phi(u)=\Phi(v) &\Rightarrow \Phi((\prod_{b\in B}(u(b))_b)u') = \Phi((\prod_{b\in B}(v(b))_b)v') \\ &\Rightarrow \Phi(u')\,\Phi(\prod_{b\in B}(u(b))_b) = \Phi(v')\,\Phi(\prod_{b\in B}(v(b))_b) \\ &\Rightarrow (\prod_{b\in B}(\overline{u(b)})_b, 1_B)(\overline{1}, u') = (\prod_{b\in B}(\overline{v(b)})_b, 1_B)(\overline{1}, v') \\ &\Rightarrow (\prod_{b\in B}(\overline{u(b)})_b, u') = (\prod_{b\in B}(\overline{v(b)})_b, v')\end{aligned}$$

elde edilir. Birinci bileşenlerin eşitliğinden (4.12)'yi kullanarak her $c\in B$ için $u(c) = v(c)$ sonucuna ulaşılır. İkinci bileşenlerin eşitliğinden $u' = v'$ eşitliği elde edilir. Buradan da (4.9) bağıntısı M den alınan u ve v için $u = v$ eşitliğini verir. Böylece Φ birebir ve örtendir. □

Yukarıda verilen Teorem 4.1.2'yi sonlu devirli monoidler üzerinde uygulayalım.

4.1.3 Ön Teorem: A ve B monoidleri sırasıyla $\wp_A = [\, x\,;\, x^k = x^l\ (l<k)\,]$ ve $\wp_B = [\, y\,;\, y^m = y^n\ (n<m)]$ sunuşları ile temsil edilsin. Bu durumda $AwrB$ nin sunuşu

$$\begin{aligned}[\, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(m\text{-}1)}, y\,;\, y^m = y^n, (x^{(i)})^k = (x^{(i)})^l\ \ (0\le i\le m-1),& \\ x^{(i)}x^{(j)} = x^{(j)}x^{(i)}\ \ (0\le i<j\le m-1),& \\ yx^{(i)} = x^{(i\text{-}1)}y\ \ (1\le i\le m-1), yx^{(n)} = x^{(m\text{-}1)}y\,]& \qquad (4.13)\end{aligned}$$

şeklinde olur.

İspat: B devirli monoidinden alınan bir b elemanı için $X_b = \{x_b \mid b\in B\}$ kümesi, A devirli monoidin üreteci olan x elemanının kopyalarının kümesi olsun. Kolaylık olması açısından, herbir $b = y^p$ elemanı için x_b kopyalarını $x^{(p)}$ $(0\le p\le m-1)$ olarak ifade edelim. Böylece $AwrB$ nin üreteç kümesi $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(m\text{-}1)}, y\}$ şeklinde olur. Wreath çarpım içerisinde bu x elemanının m tane kopyası olduğu için $x^k = x^l$ bağıntısı $(x^{(i)})^k = (x^{(i)})^l$ $(0\le i\le m-1)$ şeklinde yazılmalıdır. Ayrıca $A\bigoplus B$ direkt çarpım olduğundan A nın üreteci olan x elemanı için, $x^{(i)}x^{(j)} = x^{(j)}x^{(i)}$ $(0\le i<j\le m-1)$ eşitliği de wreath çarpımın bağıntı kümesinde bulunmalıdır.

Şimdi Teorem 4.1.2'deki (4.11) bağıntısını devirli monoidlere uygulayalım. Verilen

$$yx_b = (\prod_{c \in by^{-1}} x_c)y$$

bağıntısındaki x_c elemanı ile x_b kopyasından sıralamada önde gelen kopya belirtilmektedir. Bu durumu belirttiğimiz kopyaların ifadesi ile

$$yx^{(i)} = x^{(i\text{-}1)}y \quad (1 \le i \le m-1)$$

şeklinde yazabiliriz.

Ayrıca B devirli monoidin $y^m = y^n$ bağıntısı için

$$c \in by^{-1} \Rightarrow cy = b$$

eşitliğini sağlarsak $y^{m-1}y = y^n$ elde edilir. Buradaki $y^{m-1} = c$ ve $y^n = b$ olarak alırsak

$$yx^{(n)} = x^{(m\text{-}1)}y$$

bağıntısı da $AwrB$ nin sunuşuna eklenir. □

Rankı 2 olan serbest abelyan monoidin sonlu devirli monoid ile wreath çarpımının sunuşu (4.13)'e benzer şekilde oluşturulabilir. Sadece wreath çarpımın bağıntı kümesinin, serbest abelyan monoidin üreteç elemanlarına göre değişeceğine dikkat edilmelidir.

4.1.4 Ön Teorem: A serbest abelyan monoidin ve B sonlu devirli monoidin sunuşları sırasıyla $\wp_A = [\, x_1, x_2 \,;\, x_1x_2 = x_2x_1 \,]$ ve $\wp_B = [\, y \,;\, y^m = y^n \; (n<m)]$ olmak üzere, $AwrB$ nin sunuşu

$$\begin{gathered}[\, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \; (0 \le i \le m-1), y \,;\, y^m = y^n, x_a^{(i)}x_b^{(j)} = x_b^{(j)}x_a^{(i)} \; (0 \le i, j \le m-1,\; a, b \in \{1, 2\} \\ yx_1^{(i)} = x_1^{(i\text{-}1)}y \; (1 \le i \le m-1), \\ yx_2^{(j)} = x_2^{(j\text{-}1)}y \; (1 \le j \le m-1), \\ yx_1^{(n)} = x_1^{(m\text{-}1)}y, yx_2^{(n)} = x_2^{(m\text{-}1)}y \,]\end{gathered}$$

şeklindedir.

Şimdi tezin genel konusu olan karar verme problemlerinden kelime probleminin çözülebilirliğini monoid yapısında incelediğimiz wreath çarpım üzerinde verelim.

4.1.5 Teorem: A ve B monoid olsun. $AwrB$ nin kelime probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul B monoidinin kelime probleminin çözülebilir olmasıdır.

İspat: B monoidinin kelime problemi çözülebilir olsun. $AwrB$ nin keyfi bir

$$w_1 = (f_1, d_1).(f_2, d_2). \ldots .(f_n, d_n) \tag{4.14}$$

kelimesini ele alalım. Bu w_1 kelimesindeki ilk bileşenler olan $f_1, f_2, \ldots, f_n$ elemanları $A^{\oplus B}$ nin elemanları (yani B den A ya olan dönüşümler), ikinci bileşenler olan $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ler B nin elemanlarıdır. (4.8)'deki çarpma işlemini kullanarak

$$w_1 = (f_1, d_1).(f_2, d_2). \ldots (f_n, d_n) = (f_1 f_2^{d_1} \ldots f_n^{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}}, d_1 d_2 \ldots d_n) \tag{4.15}$$

elde edilir. $AwrB$ nin kelime probleminin çözülebilirliği için $AwrB$ den

$$w_2 = (g_1, h_1).(g_2, h_2). \ldots (g_r, h_r) \tag{4.16}$$

gibi keyfi başka bir kelime alalım ve w_1 in w_2 ye eşit olup olmadığını inceleyelim. B nin kelime probleminin çözülebilirliği gereği

$$d_1 d_2 \ldots d_n = h_1 h_2 \ldots h_r$$

dir. Şimdi ise w_1 ve w_2 kelimelerinin birinci bileşenlerinin eşitliğini kontrol etmeliyiz. Bunun için (4.15) eşitliğindeki w_1 in birinci bileşeninin $w \in B$ deki görüntüsüne bakalım.

$$\begin{aligned} f_1 f_2^{d_1} \ldots f_n^{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}}(w) &= f_1(w) f_2^{d_1}(w) \ldots f_n^{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}}(w) \\ &= f_1(w) f_2(wd_1) \ldots f_n(wd_1 d_2 \ldots d_{n-1}) \\ &= s_1 s_2 \ldots s_n \end{aligned} \tag{4.17}$$

olur. Buradaki $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kelimeleri A nin elemanlarıdır ve $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nin sırasıyla $w, wd_1, \ldots, wd_1 d_2 \ldots d_{n-1}$ deki görüntüleridir. B nin kelime probleminin çözülebilirliği w kelimesinin herhangi bir w' kelimesine, wd_1 kelimesinin herhangi bir $w'd_1'$ kelimesine denkliğini verir. Bu durumu B den alınan bütün kelimeler için düşündüğümüzde $wd_1 d_2 \ldots d_{n-1}$ kelimesi de herhangi bir $w'd_1'd_2' \ldots d_{n-1}'$ kelimesine denktir. Böylece bütün $w', w'd_1', \ldots, w'd_1'd_2' \ldots d_{n-1}' \in B$ kelimeleri için $s_1', s_2', \ldots, s_n' \in S$ elde edilir. Buradan $s_1 s_2 \ldots s_n$ kelimesinin $s_1' s_2' \ldots s_n'$ kelimesine denk olduğu görülür. Burada da s_1', s_2', …, s_n' kelimeleri $g_1, g_2, \ldots, g_r$ dönüşümlerinin sırasıyla w', $w'd1'$, …, $w'd_1'd_2' \ldots d_{n-1}'$ deki görüntüleridir. B den alınan bu w kelimesi keyfi olduğundan

$$f_1 f_2^{\,d_1} \ldots f_n^{\,d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} = g_1 g_2^{\,h_1} \ldots g_r^{\,h_1 h_2 \ldots h_{r-1}}$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraf için $AwrB$ nin kelime problemi çözülebilir, w_1 ve w_2 kelimeleri de sırasıyla (4.14) ve (4.16)'daki tanımlananlar gibi olsun. Kelime probleminin çözülebilirliği gereği bu w_1 ve w_2 kelimeleri birbirine eşittir. İkililerin eşitliği gereği de birinci bileşenler için

$$f_1 f_2^{\,d_1} \ldots f_n^{\,d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} = g_1 g_2^{\,h_1} \ldots g_r^{\,h_1 h_2 \ldots h_{r-1}} \tag{4.18}$$

ve ikinci bileşenler için

$$d_1 d_2 \ldots d_n = h_1 h_2 \ldots h_r \tag{4.19}$$

dir. Buradan da (4.18) ve (4.19) eşitlikleri sırasıyla A nın ve B nin kelime probleminin çözülebilirliğini verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

4.2 Devirli Monoidlerin Wreath Çarpımı İçin Üyelik (Membership) Problemi

X ile üretilen keyfi bir M_1 monoidi ve bunun M_2 gibi alt monoidini ele alalım. M_1 içindeki M_2 monoidi için üyelik problemi,

> "*X üzerideki keyfi bir kelime*, M_2 *monoidin herhangi bir elemanını temsil eder mi?*"

sorusuna cevap veren bir algoritmanın araştırılması problemidir. Bazı özel yarı gruplar üzerinde de bu problem çalışılmıştır. Örnek olarak, k ve l negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $S_{k,\,l}$ yarı grubunun $[\ a,\ b\ ;\ ab^k = b^l a\ ]$ sunuşu için üyelik probleminin çözülebilirliği [6]'da ispatlanmıştır. (Bu tür yarı gruplara Baumslag-Solitar yarı gruplar denir).

4.2.1 Teorem: İki sonlu devirli monoidin wreath çarpımının üyelik problemi çözülebilirdir.

İspat: İlk olarak (4.13) sunuşunun temsil ettiği wreath çarpıma ait kelimelerin bir normal formunu yapılandırmalıyız. Bu kelimelerin, sunuşun üreteç elemanları olan $x^{(i)}$ $(0 \le i \le m\text{-}1)$ ve y ile oluşacağı aşikardır. Şimdi ise kelimelerin,

$$
\begin{aligned}
&1,\ (x^{(i)})^{a},\ y^{b}, \\
&(x^{(i)})^{a_1} y^{b_1}, \\
&(x^{(i)})^{a_1} y^{b_1} (x^{(i)})^{a_2} y^{b_2}, \\
&\ldots \\
&(x^{(i)})^{a_1} y^{b_1} (x^{(i)})^{a_2} y^{b_2} \ldots (x^{(i)})^{a_n} y^{b_n},
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

şeklinde *temel normal formunu* oluşturalım. Burada, $0 \leq i \leq m\text{-}1$, $1 \leq a, a_1, a_2,\ldots, a_n \leq k\text{-}1$, $1 \leq b, b_1, b_2, \ldots, b_n \leq m\text{-}1$ dir. Ayrıca $AwrB$ den alacağımız

$$(x^{(i+p)})^{c_1} y^{d_1} (x^{(i+q)})^{c_2} y^{d_2},$$

$p \neq q$, $0 \leq p, q \leq m\text{-}1$ ve $1 \leq c_1, c_2 \leq k\text{-}1$, $1 \leq d_1, d_2 \leq m\text{-}1$ biçimindeki kelimeler de (4.20) sunuşundaki

$$yx^{(i)} = x^{(i\text{-}1)}y \ \ (1 \leq i \leq m\text{-}1) \quad \text{ve} \quad yx^{(n)} = x^{(m\text{-}1)}y$$

bağıntıları kullanılarak, (4.20)'deki kelimelere dönüşür. Bu (4.20)'deki kelimeleri temel normal form adıyla adlandırmamızın nedeni de budur.

Şimdi ise, $\{x^{(i)}\ (0 \leq i \leq m\text{-}1),\ y\}$ kümesinin elemanlarıyla oluşmuş bir v kelimesini ele alalım ve bu kelime A nın B ile wreath çarpımının keyfi bir elemanını temsil etsin. Ayrıca, farzedelim ki $AwrB$ nin sonlu üreteçli alt monoidi

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \quad (m \in \mathbb{N}), \tag{4.21}$$

üreteç elemanlarla oluşturulan kelimelerin bir kümesi olsun. Daha sonra, $AwrB$ den alınan keyfi v kelimesinin, U kümesinin elemanlarının bazı çarpımına eşit olup olmadığına bakmalıyız. Bu durum da, (4.13) sunuşunun son iki bağıntısı kullanılarak araştırılır. Bu U kümesini

$$\{1, (x^{(i)})^{a}, y^{b}\},$$

$0 \leq i \leq m\text{-}1$, $1 \leq a \leq k\text{-}1$ ve $1 \leq b \leq m\text{-}1$ şeklinde genel bir formda yazabiliriz. (4.20) deki elemanlar, bu U kümesindeki elemanların sonlu sayıdaki çarpımıyla elde edilebileceğinden ve $AwrB$ den alınan keyfi kelimeler de (4.20)'de verilen formlara dönüştürülebileceğinden, $U = \{1,\ (x^{(i)})^{a},\ y^{b}\}$ kümesinde olmayan hiçbir kelime bulunmaz. Dolayısıyla da (4.13) sunuşu için üyelik problemi çözülebilirdir. □

4.1.4 Ön Teorem ve 4.2.1 Teorem kullanılarak aşağıdaki sonuç ispatlanabilir.

4.2.2 Sonuç: Serbest abelyan monoidin sonlu devirli monoid ile wreath çarpımının üyelik problemi çözülebilirdir.

Uyarı: 4.2.1 Teoremin ispatı, iki devirli monoidin wreath çarpımının üyelik probleminin çözülebilirliğinin aynı wreath çarpımın kelime probleminin çözülebilirliğini verdiğini gösterir. Çünkü, bu teoremin ispatında yaptığımız gibi, (4.21) kümesini

$$U = \{u_1 = 1,\ u_2 = (x^{(0)})^{a},\ u_3 = (x^{(1)})^{a},\ \ldots,\ u_{m+1} = (x^{(m-1)})^{a},\ u_{m+2} = y^{b}$$
$$(1 \le a \le k\text{-}1,\ \ 1 \le b \le m\text{-}1)\}$$

şeklinde özelleştirirsek, $AwrB$ den alınan keyfi w_1 kelimesi yukarıdaki U kümesinin kelimelerinin bazı çarpımına eşittir. Bu da bize $AwrB$ nin kelime probleminin çözülebilir olmasını verecektir. Buna örnek olarak, w_1 kelimesi U kümesindeki u_2, u_{m+2}, u_3 ve u_{m+2} kelimelerinin çarpımı olarak alınırsa, (4.13) sunuşundaki $yx^{(2)} = x^{(1)}y$ bağıntısı kullanılarak, bu w_1 kelimesi

$$\begin{aligned} w_1 = u_2\, u_{m+2}\, u_3\, u_{m+2} = (x^{(0)})^{a}\, y^{b}\, (x^{(1)})^{a}\, y^{b} &= (x^{(0)})^{a}\, y^{b-1}\, x^{(0)} y (x^{(1)})^{a-1}\, y^{b} \\ &= (x^{(0)})^{a}\, y^{b-1}\, (x^{(0)})^{2} y\, (x^{(1)})^{a-2}\, y^{b} \\ &= \ldots = (x^{(0)})^{a}\, y^{b-1}\, (x^{(0)})^{a}\, y^{b+1} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceği için, (4.20)'deki $w_2 = (x^{(i)})^{a_1} y^{b_1} (x^{(i)})^{a_2} y^{b_2}$ kelimesi olarak düşünülebilir. Bu durumu genelleştirmek gerekirse, eğer herhangi iki w_1 ve w_2 kelimeleri (4.20)'deki aynı temel normal forma dönüşürlerse o halde birbirlerine eşittirler. Bu da sonlu devirli monoidlerin wreath çarpımının kelime probleminin çözülebilir olduğunu verecektir.

Son bir not;

Bu tezi grup, yarı grup ve monoidler üzerinde incelenen karar verme problemlerinden olan ve birçok yapıya da genişlettiğimiz kelime problemi üzerinde yoğunlaştırdık. Ayrıca bu problemin tersi durumu olan *Co-word problem* son çıkan yayınlarda görülmektedir. Bu problem, bir grubun birim elemanına eşit olmayan kelimelerin araştırılması problemidir [4].

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez dört ana bölüm altında toplanmış olup, bu bölümlerde aşağıdaki sonuçlar elde edilip çalışılmıştır.

Tezin birinci bölümünde grup, monoid ve yarı grup sunuşları tanımlanmış, karar verme problemleri grup yapısı üzerinde incelenerek bu problemler arasındaki geçişlilikler verilmiş ve grupların cebirsel sınıfları gruplandırılarak bunların karar verme problemlerinin çözülebilir olup olmadığı veya hala açık bir problem olduğu Şekil 1.3'te incelenmiştir.

İkinci bölümde grup yapısının kelime problemi ayrıntılı bir şekilde verilerek örneklendirilmiştir. Ayrıca bu problemin çözülebilirliği serbest çarpım grubuna (Teorem 2.2.6), direkt çarpım grubuna (Teorem 2.3.3) genişletilmiş ve birleştirilmiş serbest çarpımın ve HNN genişlemelerinin sunuşları (Tanım 2.4.1 ve Tanım 2.5.1) verilerek bu yapıların karakterizasyonları (Teorem 2.4.4, Teorem 2.5.2, Önerme 2.5.4) incelenmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde özellikle monoid ve yarı grup sunuşlarının kelime probleminin çözülebilirliği için bir metod olan yeniden yazma sistemi kaynaklara bağlı olarak incelenmiş (örneğin, Tanım 3.1.1, Tanım 3.1.4, Tanım 3.1.6 ve Tanım 3.1.7) ve bu metodun bazı uygulamaları verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, ileriki çalışmalarımıza yön verecek olan monoid yapısı üzerindeki wreath çarpım çalışılarak, bu genişlemeler üzerindeki kelime probleminin çözülebilirliğini veren Teorem 4.1.5 ve devirli monoidlerin wreath çarpımının üyelik probleminin çözülebilirliğini veren Teorem 4.2.1 tarafımızdan ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Adian, S. I. and Durnev, V. G., "Decision Problems for Groups and Semigroups", *Russian Math. Surveys*, **55** (2), 207-296, *Uspekhi Math. Nauk* **55** (2), 3-94.

[2] Book, R. V., "Thue Systems as Rewriting Systems", *Symbolic Computation,* **3** (1987), 39-68.

[3] Cohen, E. D., Combinatorial Group Theory, A Topological Approach, Cambridge University Press, (1989).

[4] Holt, D. F., Rees, S., Röver, C. E. and Thomas, R. M., "Groups with Context-Free Co-Word Problem", *Journal of the London Math. Soc.*, **71** (2), (2005), 643-657.

[5] Howie, J. M. and Ruškuc, N., "Constructions and Presentations for Monoids", *Communications in Algebra*, **22** (15), (1994), 6209-6224.

[6] Jackson, D. A., Decision and Separability Problems for Baumslag-Solitar Semigroups, *Int. Journal of Algebra and Comp.*, **12** (1-2), (2002), 33-49.

[7] Johnson, D. L., Presentations of Groups, L. M. S. Lecture Note Series, **15**, Cambridge University Press, (1990).

[8] Lyndon, C. R. and Schupp, E. P., Combinatorial Group Theory, Springer-Verlag, Berlin Heildberg, New York, (1977).

[9] Magnus, N., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial Group Theory, Dover Publications, Inc, New York, (1976).

[10] Mihailova, K. A., "The Occurrence Problem for Free Products of Groups", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **127** (1959), 746-748.

[11] Miller III, F. C., Combinatorial Group Theory, URL: *http://www.ms.unimelb.edu.au/~cfm/notes/cgt-notes.pdf.*

[12] Miller III, F. C., Decision Problems For Groups-Survey and Reflections, URL:
http://www.ms.unimelb.edu.au/cfm/papers/paperpdfs/msri_survey.all.pdf.

[13] Olshanski, A. Y. and Sapir, M. V., “Subgroups of Finitely Presented Groups with Solvable Conjugacy Problem”, *Int. Journal of Algebra and Comp.*, **15** (5-6), (2005), 1075-1084.

[14] Rotman, J. J., Theory of Groups, Wm. C. Brown Publishers, Third Edition, Iowa, (1988).

[15] Ruškuc, N., Semigroup Presentations, Ph. D. Thesis, University of St. Andrews, (1996).

[16] Ruškuc, N., Robertson, E. F. and Thomson, M. R., “On Finite Generation and Other Finiteness Conditions for Wreath Product of Semigroups”, *Communications in Algebra*, **30** (8), (2002), 3851-3873.

[17] Squier, G. C., Otto, F. and Kobayashi, Y., “A Finiteness Condition for Rewriting Systems”, *Theoretical Computer Science*, **131** (1994), 271-294.