T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHEELER-DE WITT DENKLEMİ KULLANILARAK EVRENİN OLUŞUMUNDAKİ KUANTUM DALGA FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

MURAT ÖZDERE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2014

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHEELER-DE WITT DENKLEMİ KULLANILARAK EVRENİN OLUŞUMUNDAKİ KUANTUM DALGA FONKSİYONUNUN İNCELENMESİ

MURAT ÖZDERE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. YÜCEL ENGİNER

GEBZE
2014

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİENSTİTÜSÜ	**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU**

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 20/01/2014 tarih ve 2014/04 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 12/02/2014 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Murat ÖZDERE'nin tez çalışması MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) :Yrd. Doç.Dr.YÜCEL ENGİNER

ÜYE :Doç.Dr. COŞKUN YAKAR

ÜYE :Yrd.Doç.DR. H.GÜLAY ALGÜL

ONAY

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve ..../........ sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmamızda Wheeler-De Witt denklemini kullanarak evrenin ilk oluşum anlarını açıklamaya çalıştık. Wheeler-De Witt denklemi kuantum kozmolojinin temel denklemi olup evrenin yarıçap fonksiyonunu ve evrenin erken safhasında hızla şiştiği enflasyon adı verilen sürece neden olan skalar alanı bağımsız değikenler olarak kbul eden bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü bize evrenin ilk anlarındaki kuantum dalga fonksiyonunu verir. Denklemin çözümündeki zorlukları aşmak için "twice loosing shoe" adlı bir teknik literatürde mevcuttur.

Bu metot, bağımsız değişkenlerden birini, skaler alanı sabit olarak kabul edip denklemi tek bir değişken cinsinden çözmeye dayalıdır. Biz bu çalışmada farklı olarak evrenin yarıçap fonksiyonuna bağlı ikinci türevi sıfır olarak kabul ettik ve denklemimizi skaler alanı değişken alarak çözdük.

Bu teknik ile fiziksel olarak önemli bazı durumları inceledik. Ayrıca her iki değişkeni de kullanarak denkleme en genel bir çözüm bulmaya da çalıştık.

Anahtar Kelimeler: Kuantum Kozmoloji, Wheeler-De Witt Denklemi, Twice Loosing Shoe Metodu.

SUMMARY

In this thesis we have tiried to explain the early universe era of the birth of the cosmos. Wheeler-De Witt equation is the fundamantal equation of the quantum equation of the quantum cosmology discipline. It has two independent variables which are namely the radius function of the oniverse and the scalar field which causes the inflationary period of the early universe. The solution of this equation gives the quantum wave function of the new born universe.

In order to step over the technical difficulties of solving the equationa technique which is called “twice loosing show” was created in the literatüre. This method is based upon the idea that one should accept one of the independent variables, namely scolar field as constant. As a result of this proposition one can solve the equation wiht only one variable. We have accepted the secont derivative with respect to the radius function of the universe.

This new approximation borought us the capability to solve the equation depending only on the scalar field. By this method we have analysed some important pysical situations and as a final idealistic effort, we tried to find a solution by using both variables.

Key Words: **Quantum Cosmology, Wheeler-De Witt Equation, Twice Loosing Shoe Technique.**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde ve bu tez çalışmamın meydana gelmesinde bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen ve zaman ayıran değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar		**Açıklamalar**
a	:	Kozmik Ölçüm Faktörü (Evrenin Yarıçap Fonksiyonu)
$\emptyset$	:	Skaler Alan (İnflaton)
Ψ	:	Evrenin Dalga Fonksiyonu
$V(\emptyset)$	:	Potansiyel Fonksiyonu
$J_n(x)$	:	1. Çeşit Bessel Fonksiyonu
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
$G(\emptyset,\emptyset')$	:	Green Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Evrenin doğumu ve oluşumunu inceleyen konuya Kozmoloji denir. Farklı kozmolojik modeller mevcut olmakla birlikte en çok bilinen ve artık hemen her kozmoloğun kabul ettiği model Big Bang (Büyük Patlama) teorisidir. [1],[2] Big Bang, evrenin günümüzdeki durumu incelenerek geliştirilmiş fenomonolojik bir teoridir. Evrenin günümüzde bulunduğu durumu bir ölçüye kadar açıklar ve geleceği ile ilgili tahminlerde bulunur. Bu teorinin temel postulası bütün evrenin başlangıçta bir noktaya sıkışmış olduğu ve bir Büyük Patlama ile evrenin doğumunun gerçekleşmiş olduğudur. Ancak Big Bang evrenin oluşumundaki mekanizmayı açıklayamaz. Çünkü Big Bang klasik yani kuantum olmayan bir teoridir. Halbuki evrenin doğumu kuantum fiziğinin kavramları ile açıklanabilecek bir vakadır. Kuantum fiziği "ground state" veya "vakum durumu" yani olası en düşük enerji seviyesinde "vakum dalgalanmaları" ile madde yaratımı olabileceğini ileri sürer. Bu durumu dalgalanan bir denizin yüzeyinden köpük balonlarının kopması ve bunların giderek şişip genişleyerek yükselmesi gibi anlayabiliriz. Sonsuz miktardaki vakum enerjisinde vakum dalgalanmaları ile evren oluşumları olabileceğini iddia eden ve bunu matematiksel olarak açıklamaya çalışan M- teorisi, onun kardeşi Sicim teorisi ve benzeri matematiksel modeller mevcuttur. Hawking ve arkadaşları Sicim ve M-teorileri ile Kozmolojiyi birleştiren ünlü çalışmalar yapmışlardır. [4],[5]. Bu yaklaşımda evrenin doğumunu vakum dalgalanmalarına bağlayan kuantum mekaniksel denklem Wheeler-De Witt denklemidir.[6],[7]. Bu denklem evrenin erken safhasındaki var olma olasılık yoğunluğunu veren dalga fonksiyonunu evrenin yarıçap fonksiyonu ile evrenin erken safhasındaki hızlı genişlemesine sebep olan ve İnflaton adı verilen skaler fonksiyon cinsinden çözer. Bu denklemde Ψ erken evrenin dalga fonksiyonunu a evrenin yarıçap fonksiyonunu ve $\varnothing$ de inflatonu temsil eder. Ψ bağımlı, a ve ($\varnothing$) bağımsız değişkenlerdir.

$\varnothing$ skaler alanı Şişme (Enflasyon) teorisi olarak isimlendirilen ve Big Bang teorisinin tamamlayıcısı olarak ortaya çıkmış olan bir yardımcı teoridir.[8],[10].

Big Bang teorisi evreni ilk oluşum anından itibaren homojen olarak kabul eder. Ama günümüzdeki evren homojen değildir. Galaksiler ve galaksi kümeleri arasında büyük boşluklar vardır. Bu boşluklar yani evrendeki inhomojenikler kısa bir süre için çok hızlı, bugünkünden çok daha hızlı genişlemiş olması ile açıklanır.

Böyle ani bir hacim artışı Termodinamik yasalarına göre çok hızlı bir sıcaklık düşüşüne dolayısıyla inhomojen yoğunlaşmalara sebep olmuştur. Galaksiler gibi çok yoğun ve opak cisimler oluşurken bunlar arasında çok büyük boşluklar kalmıştır. Enflasyon teorisi bu kısa süreli çok hızlı genişlemeye İnflaton adı verilen bir skaler alanın sebep olduğunu iddia eder. $\varnothing$ ile gösterilen bu alan son dönemde sık sık adı duyulmakta olan Higos bozonu ile ilişkilidir.[10]

Biz bu çalışmada Wheeler-De Witt denkleminin farklı çözümlerini inceledik. İncelememizde temel olarak Zhang'ın kaynakçada [11] ile gösterilen çalışmalarını temel aldık. Bu çalışmada Zhang Wheeler-De Witt denkelminin açık ve anlaşılır bir formunu vermiş olup aynı zamanda denklemi "twice loasing shoe" tekniği ile fiziksel olarak anlamlı bir durum için çözmüştür. "Twice loasing shoe" tekniği aslında 2 adet bağımsız değişkeni olan bir kısmi türevli diferensiyel denklemi değişkenlerden birini sabit kabul ederek basitleştirmeye dayanır. Wheeler-De Witt denklemi a ile gösterilen evren yarıçap fonksiyonunu ve $\varnothing$ ile gösterilen yukarda bahsettiğimiz inflaton adlı skaler alanı bağımsız değişkenler olarak kabul eder. Zhang inflatonu sabit kabul ederek Ψ ile gösterilen evrenin doğum anındaki kuantum dalga fonksiyonunu a cinsinden çözmüş ve dalga fonksiyonunu kullanarak evrenin vakum dalgalanmaları ve oluşma olasılığını $\varnothing$ in değişkeni olduğu $V(\varnothing)$ potansiyeline bağlı olarak bulmuştur. [11] nolu referanstaki çalışmayı geliştiren Zhang ve Weng [12] Ψ için daha kesin bir çözüm bulmaya çalışmışlardır. Biz kendi çalışmamızda [11] ve [12] nolu kaynaklardaki çalışmaları temel olarak aldık ve Wheeler-De Witt denklemi bu makalelerde verildiği formu ile kullandık.

Biz kendi çalışmamızda "twice loasing shoe" tekniğinden ilham aldık. Bu metod ile uyumlu olarak Ψ nin a ya göre 2.türevini 0 alarak varsaydık. Ancak "twice loasing shoe" dan farklı olarak a yı sabit kabul etmedik fakat Ψ nin a ya göre 1.türevinin sabit olduğunu önerdik. Bu durumda 1.türev keyfi şekilde ya da türevinin kısmi türev olduğu hatırlanarak keyfi bir fonksiyona eşit olur. Basitlik gayesiyle biz 1.türevin bir sabitte eşit olduğunu kabul ettik. Bu şekilde bütün denklemimiz sadece $\varnothing$ değişkeni cinsinden yazılabildi. Ψ nin sadece $\varnothing$ ye bağlı duruma indirgendiği bu metot ile aslında kısmi türevli bir diferansiyel denklem olan Wheeler-De Witt denklemi adi türevli bir diferansiyel denkleme dönüştü. Bu yolla denklemimiz çeşitli özel fonksiyonlar cinsinden çözülebilir hale gelmiş oldu.

2. WHEELER DE WITT DENKLEMİNİN İNCELENMESİ

2.1. Evrenin Dalga Fonksiyonu

Evrenin faz geçişini açıklamada Zhang'ın çalışması incelenmiştir. Burada Zhang $\varnothing^2$ potansiyelini en basit ve anlamlı form olarak önerir.

- a Kozmik Ölçüm Faktörü
- $\varnothing$ Skaler Alan (İnflaton) alan vektörü olmak üzere
- Wheeler - De Witt Denklemi

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^2}-\frac{6}{k^2a^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varnothing^2}-\frac{144\pi^4}{k^4}\left(k_c a^2-\frac{k^2}{3}a^4V(\varnothing)\right)\Psi=0 \qquad (2.1)$$

ifadesi elde edilmiştir.

Burada amacımız a ve $\varnothing$'nin (2.1) denklemine göre simetrikler olup olmadıklarını göstermek olacaktır.

Evrenin yarıçap fonksiyonu a, potansiyel fonksiyonu $V(\varnothing)$, α sabit parametre olmak üzere, aralarındaki ilişki $a=\dfrac{\alpha}{V(\varnothing)}$ olduğu kabul edilir.

Burada $\varnothing$ de inflaton adı verilen skaler alandır. $V(\varnothing)$ skaler alan olan $\varnothing$'nin sadece ikinci dereceden kuvvetine sahiptir.
c sabit olmak üzere;

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a}=c \qquad (2.2)$$

ifadesi

$$\psi = ca + f(\varnothing) \quad \text{olarak yazılır.} \qquad (2.3)$$

Burada $f(\varnothing)$ $\varnothing$'ye bağlı bir fonksiyon olarak kabul edilmiştir. İfadenin devamında (2.3) ifadesi

$$\psi = c\frac{\alpha}{V(\varnothing)} + f(\varnothing) \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir.

Bu ifadenin ∅'ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varnothing} = \frac{\partial F}{\partial \varnothing} \tag{2.5}$$

olarak yazılabilir.

Buna göre $k^2 = 8\pi$ olmak üzere (2.1) denklemi

$$0 - \frac{6}{8\pi a^2}\frac{d^2F}{d^2\varnothing^2} - \frac{144\pi^4}{64\pi^2}\left(kca^2 - \frac{k^2}{3}a^4V(\varnothing)\right)\Psi = 0 \tag{2.6}$$

biçimine dönüşür .

Bu ifadede kc diferansiyel geometride kullanılan Gauss eğriliğidir ve kainatın küresel, hiperbolik ya da düz olma biçimlerini gösterir.

kc ifadesinin;

- +1 olması evrenin küresel
- -1 olması evrenin hiperbolik
- 0 olması evrenin düz olduğunu gösterir.
- Çalışmamızda kc +1 seçilmiştir.

Bu bağlamda (2.6) ifadesi gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{V^5(\varnothing)}{\pi\alpha^2}f'' + 3\pi^2\left[\alpha^2V(\varnothing) - \frac{k^2}{3}\alpha^4\right]\left[c\frac{\alpha}{V(\varnothing)} + f(\varnothing)\right] = 0 \tag{2.7}$$

biçimine dönüşür.

Bu ifadede $V(\varnothing) = \frac{1}{2}m^2\varnothing^2$ biçiminde ifade edilen harmonik salınım fonksiyonu yerine konulursa ifade

$$\frac{m^{10}\varnothing^{10}}{32\pi\alpha^{2}}f'' + 3\pi^{2}\left[\alpha^{2}\frac{1}{2}m^{2}\varnothing^{2} - \frac{k^{2}}{3}\alpha^{4}\right]\left[\frac{c2\alpha}{m^{2}\varnothing^{2}} + f(\varnothing)\right] = 0 \tag{2.8}$$

biçimine dönüşür.

Bu ifadede $|\varnothing| < 1$ ve $\varnothing^{10} < 1$ olmak üzere $\varnothing^{10}f''$ ifadesi ihmal edilebilir. Buradan yola çıkarak (2.8) ifadesindeki $\alpha^{2}V(\varnothing) - \frac{k^{2}\alpha^{4}}{3}$ ifadesi sıfıra eşitlenirse

$\alpha^{2}\frac{1}{2}m^{2}\varnothing^{2} = \frac{k^{2}\alpha^{4}}{3}$ olur.

- Buradan $\varnothing \sim \alpha$ olur ve buradan istenilen sonuç elde edilemez.
- Peki (2.3) ifadesinin devamındaki $\left[c\frac{\alpha}{V(\varnothing)} + f(\varnothing)\right]$ sıfır olur mu?

Buradan yola çıkarsak

$$\frac{c\alpha}{V(\varnothing)} + f(\varnothing) = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{c\alpha}{V(\varnothing)} = -f(\varnothing) \tag{2.10}$$

$$-\frac{c\alpha}{\frac{1}{2}m^{2}\varnothing^{2}} = f(\varnothing) \tag{2.11}$$

elde edilir.

Buradan $f \approx \frac{1}{\varnothing^{2}}$ gibi bir sonuç elde edilir ki, bu bir olasılıktır. Buradan (2.11) ifadesi (2.3) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\psi = \frac{2c}{m^{2}}(1-\alpha)\frac{1}{\varnothing^{2}} \tag{2.1}$$

elde edilir. Bu ifade de bir olasılık olarak değerlendirilebilir.

$$a = \frac{\alpha}{V(\varnothing)} \tag{2.13}$$

ifadesine göre

$$a = \frac{\alpha}{\frac{1}{2}m^2\varnothing^2} \tag{2.14}$$

yazılırsa $\varnothing^2 = \dfrac{2\alpha}{m^2 a}$ olur. Bu ifade (2.12) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\psi = \frac{2c}{m^2}(1-\alpha)\frac{m^2 a}{2\alpha} \tag{2.15}$$

$$\psi = \frac{c(1-\alpha)}{\alpha}a \tag{2.16}$$

$$\psi = ca \quad \text{yazılabilir.} \tag{2.17}$$

Çalışmamızda a = $\alpha.V(\varnothing)$ alınırsa nasıl bir ifade elde edilebilir. Bu ifadeyi Wheeler - De Witt denkleminde yerine koyarsak

$$\frac{3}{\pi^2\alpha^2 m^4\varnothing^4}f'' + \frac{9}{4}\pi^2\left[\alpha^2\frac{1}{4}m^4\varnothing^4 - \frac{k^2\alpha^4 m^{10}\varnothing^{10}}{96}\right].\left[c\alpha\frac{1}{2}m^2\varnothing^2 + f(\varnothing)\right] = 0 \tag{2.18}$$

elde edilir.

Buradan ifade gerekli işlemler yapıldığında

$\dfrac{1}{\pi^2\alpha^2 m^4\varnothing^4}f'' + \dfrac{3}{16}\pi^2\alpha^2 m^4\varnothing^4 f = 0$ biçimine dönüşür. Bu ifadedeki $\pi^2\alpha^2 m^4\varnothing^4$ ifadesi X^4 olarak kabul edilirse

$$\frac{y''}{X^4} + X^4 y = 0 \tag{2.21}$$

$$y'' + X^8 y = 0 \tag{2.20}$$

Burada ifadenin Bessel denklemine göre çözümü

$$y=\frac{c_1\sqrt{X}\Gamma\left[\frac{9}{10}\right]J_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right)}{\sqrt[10]{10}}+y=\frac{c_2\sqrt{X}\Gamma\left[\frac{11}{10}\right]J_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right)}{\sqrt[10]{10}} \tag{2.21}$$

- $J_n(x)$: 1. çeşit Bessel Fonksiyonu
- Γ: Gamma Fonksiyonudur.

2.2. Wheeler De Wıtt Denkleminin Seri Açılımı İle Değerlendirilmesi

(2.1) denkleminde $\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^2}=0$ seçilirse;

- $\frac{\partial\Psi}{\partial a}=c \Rightarrow \psi = ca + f(\varnothing)$ olur
- $\frac{\partial\Psi}{\partial\varnothing}=\frac{df}{d\varnothing}$
- $\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2\varnothing}=\frac{\partial^2 f}{\partial^2\varnothing^2}=f''$ yazılır.

Buradan

$$\frac{3}{4\pi a^2}f''+\frac{9}{4}\pi^2\left(kca^2-\frac{8}{3}\pi a^4 V(\varnothing)\right)[ca+f(\varnothing)]=0 \quad \text{olur.} \tag{2.22}$$

$$a=\frac{\alpha}{V(\varnothing)} \tag{2.23}$$

kabul edilmesi durumunda

$$\frac{3V^2(\varnothing)}{4\pi\alpha^2}f''+\frac{9}{4}\pi^2 kc.\frac{\alpha^3}{V^3}+\frac{9}{4}\pi^2 kc\frac{\alpha^2}{V^2(\varnothing)}f-6\pi^3\frac{\alpha^5}{V^5(\varnothing)}V(\varnothing).c$$
$$-6\pi^3\frac{\alpha^4}{V^4(\varnothing)}V(\varnothing)f=0 \tag{2.24}$$

biçimine dönüşür.

$V = \frac{1}{2}m^2\varnothing^2$ harmonik salınım fonksiyonunda $\varnothing$ çok küçük bir değer olduğundan $V^2 f'' \approx 0$ olup bu değer ihmal edilir ve (2.24) denklemi

$$f\left[\frac{9}{4}\pi^2 kc\frac{\alpha^2}{V(\varnothing)} - \frac{6\pi^3\alpha^4}{V^3(\varnothing)}\right] = \frac{6\pi^3\alpha^5 c}{V^4(\varnothing)} - \frac{9}{4} - \frac{\pi^2 kc.\alpha^3}{V^3(\varnothing)} \tag{2.25}$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemde bazı değerler aşağıda gösterilmiş belli sabitler yardımıyla yazılırsa

$$\delta = 6\pi^3\alpha^5 c \tag{2.26}$$

$$W = \frac{9}{4}\pi^2 kc.\alpha^3 \tag{2.27}$$

$$\beta = \frac{9}{4}\pi^2 kc\alpha^2 \tag{2.28}$$

$\gamma = 6\pi^3\alpha^4$ (Burada $\gamma \neq 0$, $\gamma > 0$'dır).

Kabul edilen sabitlerden;

$$\begin{aligned} &W \rightarrow kc \text{ ve c'de bağımlı} \\ &\beta \rightarrow kc \text{ 'de bağımlı} \\ &\delta \rightarrow c \text{ 'de bağımlı değerlerdir} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Bu yaklaşımla (2.25) denklemi

$$f\left[\frac{9}{4}\pi^2 kc\alpha^2 - \frac{6\pi^3\alpha^4}{V(\varnothing)}\right] = \frac{6\pi^3\alpha^5 c}{V^2(\varnothing)} - \frac{9}{4}\frac{\pi^2 kc.c\alpha^3}{V(\varnothing)} \tag{2.30}$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemdeki değerlere yukarıdaki ifade edilen sabitler yazıldığında (2.30) denklemi $f = \dfrac{\left[\dfrac{\delta}{V^2(\varnothing)} - \dfrac{W}{V(\varnothing)}\right]}{\left[\beta - \dfrac{\gamma}{V(\varnothing)}\right]}$ şeklinde yazılabilir. Bu ifade gerekli işlemler yapıldığında

$$f = \left(\frac{W}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma V(\varnothing)}\right)\left(1 - \frac{\beta V(\varnothing)}{\gamma}\right)^{-1} \tag{2.31}$$

biçimine dönüşür.

(2.31) denkleminde $(1+X)^n = 1 + nX$ biçiminde binom açılımı kullanılarak

$$f \approx \left(\frac{W}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma V(\varnothing)}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\gamma} V(\varnothing)\right) \tag{2.32}$$

$$f \approx \frac{W}{\gamma} + \frac{W\beta}{\gamma^2} V(\varnothing) - \frac{\delta}{\gamma V(\varnothing)} - \frac{\delta\beta V(\varnothing)}{\gamma^2 V(\varnothing)} \tag{2.33}$$

yaklaşımı oluşturulabilir.

Denklem içinde keyfi bir $V(\varnothing)$ alınarak Taylor serisine açılır. Taylor serisinde Mclaurine açılımı gibi birinci türev sıfırdır. $\varnothing$ = 0'da $V(\varnothing)$ minimumda denge noktası etrafında seriye açılır.

$$V(\varnothing) = V + \frac{\partial V}{\partial \varnothing}\frac{\varnothing}{1!} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varnothing^2}\right)\frac{(\varnothing)^2}{2!} + \ldots \tag{2.34}$$

olur. $\psi = ca + f(\varnothing)$ denkleminde $f(\varnothing)$ fonksiyonu yerine yazılırsa $\psi = \dfrac{c\alpha}{V(\varnothing)} + \dfrac{W}{\gamma} + \dfrac{w\beta V(\varnothing)}{\gamma^2} - \dfrac{\delta}{\gamma V(\varnothing)} - \dfrac{\delta\beta}{\gamma^2}$ biçimine dönüşür.

- $kc \to 0$
- $W \to 0$
- $\beta \to 0$ alınırsa denklem

$$\bullet\ \psi = \frac{c\alpha}{V(\varnothing)} - \frac{\delta}{\gamma V(\varnothing)}$$ biçimine dönüşür.

Denklemde gerekli işlemler yapıldığında;

$$\bullet\ \psi = \left(c\alpha - \frac{\delta}{\gamma}\right)\frac{1}{V(\varnothing)}$$ denklemi oluşur.

$$\bullet\ \psi = \left(c - \frac{\delta}{\gamma\alpha}\right)\frac{\alpha}{V(\varnothing)}$$ denkleminde

$$\psi = \left(c - \frac{\delta}{\gamma\alpha}\right)a \quad \text{oluşur.} \tag{2.35}$$

Buradan ψ'nin a ile uyumlu bir sonuç olduğu görülür. Bu beklenen bir sonuçtur. Peki (2.1) denklemine farklı bir bakış açısı getirsek nasıl bir sonuç elde edebiliriz.

Bunun için $a = \alpha V(\varnothing)$ demeliyiz.

Bu varsayım eski varsayımın zıttıdır. Ayrıca bu yaklaşımda kc = +1 ve kc = -1 olasılıkları da yerine koyup denenmelidir. (2.1) denklemine tekrar geri dönersek $\frac{3}{4\pi^2\alpha^2V^2}f'' + \frac{9}{4}\pi^2\left(kc\alpha^2V^2 - \frac{8}{3}\pi\alpha^4V^5\right)[c\alpha V + f] = 0$ yazılır. Denklemi V^2 ile çarparsak;

$$\frac{3}{4\pi^2\alpha^2}f'' + \frac{9}{4}\pi^2 kc.c\alpha^3V^5 + \frac{9}{4}\pi^2 kc\alpha^2V^4 f - \frac{8}{3}\pi c\alpha^5V^8 - \frac{8}{3}\pi\alpha^4V^7 f = 0 \tag{2.36}$$

Bu denklemde V^5, V^7, V^8 ihmal edersek, denklem

$$\frac{3}{4\pi^2\alpha^2}f'' + \frac{9}{4}\pi^2 kc.c\alpha^2V^4 f = 0 \tag{2.37}$$

biçimine dönüşür. Bu denklemi $\pi^2\alpha^2$ ile çarparsak

$$\frac{3}{4}f'' + \frac{9}{4}\pi^4 k c \alpha^4 V^4 f = 0 \tag{2.38}$$

$$f'' + 3\pi^4 k c \alpha^4 V^4 f = 0 \tag{2.39}$$

biçimine dönüşür.

Çalışmamızda yalnızca V^4 potansiyel fonksiyonu kaldı. Buna göre denklemimizde $V(\varnothing)$ yerine harmonik potansiyel fonksiyon değeri yerine yazılırsa

$$f'' + 3\pi^4 k c \alpha^4 \left(\frac{1}{2} m^2 \varnothing^2\right)^4 f = 0 \tag{2.40}$$

$$f'' + \frac{3\pi^4 k c \alpha^4 m^8 \varnothing^8}{16} f = 0 \tag{2.41}$$

elde edilir. Denklem $\frac{\sqrt{3}\pi^2 \alpha^2 m^4}{4} = \xi$ sabiti kabul edilirse

$$f'' + k c \xi^2 \varnothing^8 f = 0 \tag{2.42}$$

biçimine dönüşür.

$$X = \mu\varnothing \quad \text{seçilirse} \quad \varnothing = \frac{X}{\mu} \quad \text{olur.} \tag{2.43}$$

$\frac{d}{d\varnothing} = \frac{d}{dX}\frac{dX}{d\varnothing} = \mu\frac{d}{dX}$ yazılırsa (2.42) denklemi $f'' + k c \xi^2 \varnothing^8 f = 0$ şeklinde yazılır.

$$\mu^2 \frac{d^2 f}{dX^2} + k c \xi^2 \frac{X^8}{\mu^8} f = 0 \tag{2.44}$$

- $\mu^2 = \frac{\xi^2}{\mu^8}$ seçilirse $\mu^{10} = \xi^2 \Rightarrow \mu = \xi^{1/5}$ olur.
- $\mu = \xi^{1/5}$ (2.43) denkleminde yerlerine yazılırsa denklem

$$\frac{d^2 f}{dX^2} + k c X^8 f = 0 \tag{2.45}$$

biçimine dönüşür

Bundan sonraki aşamada (2.44) denklemi kc = +1 ve kc = -1 seçilerek iki ayrı çözüm yapılır. kc: +1 seçilirse (2.44) denklemi Bessel denklemi olarak çözüldüğünde ;

$$f = c_1 \frac{\sqrt{X}\Gamma\left(\frac{9}{10}\right) J_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right)}{\sqrt[10]{10}} + c_2 \frac{\sqrt{X}\Gamma\left(\frac{11}{10}\right) J_{-\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right)}{\sqrt[10]{10}} \tag{2.46}$$

kc: -1 seçilirse (2.2.15) denklemi Bessel denklemi olarak kaynak [13]'den çözüldüğünde

$$f = c_1 \sqrt{X}\Gamma\left(\frac{9}{10}\right) I_{-\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right) + c_2 \left(-\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}} \sqrt{X}\Gamma\left(\frac{11}{10}\right) I_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right) \quad \text{olur.} \tag{2.47}$$

Bu çözümler Bessel 1.çeşit çözümüdür. Bu bağlamda Bessel fonksiyonları hakkında ek kısmında bilgi verilecektir. (2.1) denkleminde $\frac{\partial \psi}{\partial a} = c$ sabit kabul edilmesi durumunda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} = 0 \quad \text{olur.} \tag{2.48}$$

Buna göre denklem $a = \frac{\alpha}{V(\varnothing)}$ ve $a = \alpha V(\varnothing)$ kabullerine göre

- kc = -1, 0, 1 değerleri için incelenirse
- kc = 0 için $\frac{d^2 f}{dX^2} = 0 \Rightarrow f' = c_1$
- $f = c_1 X_1 + c_2$ olur.

Daha önce çalıştığımız (2.43) denklemi $X = \mu\varnothing \Rightarrow X = \xi^{1/5}\varnothing$ şeklinde yazılır.Burada daima $\xi > 0$ 'dır. Daha önce başladığımız $a = \alpha V(\varnothing)$ çözümüne geri dönersek

$$a = \alpha V(\varnothing) \qquad (2.49)$$

$$a = \alpha \frac{1}{2} m^2 \varnothing^2 \qquad (2.50$$

$$\frac{2a}{\alpha m^2} = \varnothing^2 \Rightarrow \varnothing = \sqrt{\frac{2a}{\alpha m^2}} \quad \text{olur.} \qquad (2.51)$$

- $kc = 0$ için
- $f = c_1^{\xi^{1/5}\sqrt{\frac{2a}{\alpha m^2}}} + c_2$
- $f = c_1\sqrt{a} + c_2$

diyebiliriz.

Burada (2.3) denklemine göre $\psi(a) = ca + c_1\sqrt{a} + c_2$ yazılır ve genelleştirildiğinde $kc = 0$ için $\psi(a) = c_1 + c_2\sqrt{a} + c_3 a$ yazılır. Buradan $\varnothing = \sqrt{\frac{2a}{\alpha m^2}}$ den $X = \xi^{1/5}\sqrt{\frac{2}{\alpha m^2}} + \sqrt{a}$ biçimine dönüşür.

$kc = +1$ için denklemi çözmek istediğimizde daha önce Bessel fonksiyonlarının 1. çeşidi için çözdüğümüz f fonksiyonunun içinde $J\left(\frac{X^5}{5}\right)$ ifadelerinin yaklaşık formlarını da bulmamız gerekir.

$X << 1$ için J_n formu :

$$J_n(z) \approx Z^n\left(\frac{Z^{-n}}{\Gamma(n+1)} - \frac{Z^{-n-2}.Z^2}{(n+1)\Gamma(n+1)} + \frac{Z^{-n-5}.Z^4}{(n+1)(n+2)\Gamma(n+1)}\cdots\right) \quad \text{olur.} \qquad (2.52)$$

I_n formu ise

$$I_n(z) \approx Z^n\left(\frac{Z^{-n}}{\Gamma(n+1)} + \frac{Z^{-n-2}.Z^2}{(n+1)\Gamma(n+1)} + \frac{Z^{-n-5}.Z^4}{(n+1)(n+2)\Gamma(n+1)}\cdots\right) \quad \text{olur.} \qquad (2.53)$$

Daha önceki (2.37) çözümü $J_n(z)$ açılımına uygularsak

$$J_{-\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right) \approx \left(\frac{X^5}{5}\right)^{-\frac{1}{10}} \left[\frac{2^{\frac{1}{10}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{10}+1\right)} - \frac{Z^{\frac{1}{10}-2}\left(\frac{X^5}{5}\right)^2}{\left(-\frac{1}{10}+1\right)\Gamma\left(-\frac{1}{10}+1\right)} \right]$$

$$\approx \left(\frac{X^{-1/2}}{5^{-1/10}}\right)\left[\frac{2^{\frac{1}{10}}}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} - \frac{2^{-\frac{19}{10}}\frac{X^{10}}{25}}{\frac{9}{10}\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} \right] \approx \left[2^{\frac{1}{10}} - \frac{X^{10}}{\frac{9}{10}.Z^{\frac{19}{10}}.25} \right] \qquad 2.53)$$

$$\approx \frac{\alpha_1}{\sqrt{X}} - \alpha_2 X$$

$$J_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right) \approx \left(\frac{X^5}{5}\right)^{\frac{1}{10}} \left[\frac{2^{-\frac{1}{10}}}{\Gamma\left(\frac{1}{10}+1\right)} - \frac{Z^{-\frac{1}{10}-2}\left(\frac{X^5}{5}\right)^2}{\left(\frac{1}{10}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{10}+1\right)} \right]$$

$$\approx \frac{\sqrt{X}}{5^{\frac{1}{10}}}\left[t - nX^{10}\right]$$

(2.54)

buradaki t ve n keyfi sabitlerdir.

$$J_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right) \approx \alpha_3\sqrt{X} - \alpha_4 X^{\frac{21}{2}} \qquad (2.55)$$

$$X = \xi^{\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{2}{\alpha m^2}}\sqrt{a} \qquad (2.56)$$

$$J_{-\frac{1}{10}}(a) \approx \frac{\beta_1}{a^{\frac{1}{4}}} - \beta_2 a^{\frac{19}{4}} \qquad (2.57)$$

$$J_{\frac{1}{10}}(a) \approx \beta_3 a^{\frac{1}{4}} - \beta_4 a^{\frac{21}{4}} \qquad (2.58)$$

bulunur.

$X\alpha\sqrt{a}$ olduğu bilindiğine göre bu sonuçlar (2.45) denkleminde yerine yazılırsa

$$f \cong c_1 a^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\beta_1}{a^{\frac{1}{4}}} - \beta_2 a^{\frac{19}{4}}\right] + c_2 a^{\frac{1}{4}}\left[\beta_3 a^{\frac{1}{4}} - \beta_4 a^{\frac{21}{4}}\right]$$

$$f \cong c_1\left[\beta_1 - \beta_2 a^5\right] + c_2\left[\beta_2\sqrt{a} - \beta_4 a^{\frac{11}{2}}\right] \qquad (2.59)$$

yazılır.

Buradan ψ fonksiyonu;

• $\psi = ca + c_1\beta_1 - c_1\beta_2 a^5 + c_2\beta_2\sqrt{a} - c_2\beta_4 a^{\frac{11}{2}}$ yazılırsa a'nın küçük değerleri için $c_1\beta_2 a^5$ ve $c_2\beta_4 a^{\frac{11}{2}}$ değerleri ihmal edilebilir ve ψ fonksiyonu

• $\psi = c_1 + c_2\sqrt{a} + ca$ biçiminde yazılır.

$I_{\frac{1}{10}}$ Bessel fonksiyonu içinde yerine konulursa kc = -1 için

$$I_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right) \approx \left(\frac{X^5}{5}\right)^{\frac{1}{10}}\left[\gamma_1 + \gamma_2\left(\frac{X^5}{5}\right)^2\right] \qquad (2.60)$$

olur.

Bu denklemde γ_1 ve γ_2 sabitlerdir. Buradan denklem çözümüne devam edildiğinde δ_1, δ_2, W_1, W_2 yeni sabitleri kabul edilir ve denklem şu şekilde yazılabilir.

$$\approx \frac{\delta_1}{\sqrt{X}} + \delta_2 X^{\frac{19}{2}} \qquad (2.61)$$

$$I_{\frac{1}{10}}\left(\frac{X^5}{5}\right) \approx \left(\frac{X^5}{5}\right)^{\frac{1}{10}}\left[W_1 + W_2\left(\frac{X^5}{5}\right)^2\right] \approx \zeta_1\sqrt{X} + \zeta_2 X^{\frac{21}{2}} \tag{2.62}$$

$$f = c_1\sqrt{X}\left[\frac{\delta_1}{\sqrt{X}} + \delta_2 X^{\frac{19}{2}}\right] + c_2\sqrt{X}\left[\gamma_1\sqrt{X} + \gamma_2 X^{\frac{21}{2}}\right]$$
$$= c_1\left[\delta_1 + \delta_2 X^{10}\right] + c_2\left[\zeta_1 X + \zeta_2 X^{11}\right]$$
(2.63)

$$\approx c_1 + c_3 a^5 + c_4\sqrt{a} + c_5 a^{\frac{11}{2}} \tag{2.64}$$

olur.

a'nın küçük değerleri için,

- $f \approx c_1 + c_4\sqrt{a}$
- $f \approx c_1 + c_2\sqrt{a}$

olur.

Buradan Ψ denklemi;

$$\Psi = ca + f \tag{2.65}$$

$$\Psi = ca + c_1 + c_4\sqrt{a} \tag{2.66}$$

$$\Psi = c_1 + c_2\sqrt{a} + c_3\sqrt{a} \tag{2.67}$$

şeklinde yazılabilir.

3. DALGA FONKSİYONUNUN KISMİ MERTEBEDE İNCELENMESİ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a} = c \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a} = c^2 \qquad (3.2)$$

olmak üzere (2.1) denkleminde $a = \dfrac{\alpha}{V(\varnothing)}$ ve $V(\varnothing) = \dfrac{1}{2} m^2 \varnothing^2$ değerleri yerine konulursa

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} - \frac{3}{4\pi a^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varnothing^2} - \frac{144}{64}\frac{\pi^4}{\pi^2}\left(kca^2 - \frac{8\pi}{3} a^4 \frac{1}{2} m^2 \varnothing^2 \right)\Psi = 0 \qquad (3.3)$$

- $a = f(\varnothing)$
- $\varnothing = f(a)$
- $\dfrac{\partial}{\partial a} = \dfrac{\partial}{\partial \varnothing}\dfrac{\partial \varnothing}{\partial a}$ ve $a = \dfrac{\alpha}{V(\varnothing)}$ ve $a = \dfrac{\alpha}{\frac{1}{2} m^2 \varnothing^2} \Rightarrow a = \dfrac{2\alpha}{m^2}\varnothing^{-2}$
- ve $\varnothing = \mp \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m^2}} a^{-1/2}$ olur.

Buradan

- $\dfrac{\partial \varnothing}{\partial a} = \mp \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m^2}} \dfrac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}$ olur.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial a}\right] \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varnothing}\frac{\partial \varnothing}{\partial a}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \varnothing}\frac{\partial \varnothing}{\partial a}\right] \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial\varnothing}{\partial a} = \mp\sqrt{\frac{2\alpha}{m^2}}\frac{1}{2}\left[\frac{2\alpha}{m^2}\varnothing^{-2}\right]^{-\frac{3}{2}} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\varnothing}{\partial a} = \mp\sqrt{\frac{2\alpha}{m^2}}\frac{1}{2}\frac{2^{-\frac{3}{2}}\alpha^{-\frac{3}{2}}\varnothing^3}{m^{-3}} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial\varnothing}{\partial a} = \mp\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{m}\frac{2^{-\frac{3}{2}}}{2^{1/2}}\frac{\alpha^{-\frac{3}{2}}}{m^{-3}}\varnothing^3 = \mp\frac{\alpha^{-1}}{m^{-2}}\frac{1}{4}\varnothing^3 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial\varnothing}{\partial a} = \mp\frac{m^2}{4\alpha}\varnothing^3$$

(3.1) ifadesini $\frac{\partial\varnothing}{\partial a}\frac{\partial}{\partial\varnothing}\left[\frac{\partial\varnothing}{\partial a}\frac{\partial\Psi}{\partial\varnothing}\right]$ ifadesinde yerine koyarsak

$$= \pm\frac{m^2}{4\alpha}\varnothing^3\frac{\partial}{\partial\varnothing}\left[\mp\frac{m^2}{4\alpha}\varnothing^3\frac{\partial\Psi}{\partial\varnothing}\right] \tag{3.9}$$

$$= \frac{m^4}{16\alpha^2}\left\{3\varnothing^5\frac{\partial\Psi}{\partial\varnothing} + \varnothing^6\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varnothing^2}\right\} \tag{3.10}$$

ifadesi elde edilir.

Bu sonucu (2.1) denklemi içindeki $\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^2}$ kısmında denklemin yerine yazarsak

$$\left[\frac{m^4}{16\alpha^2}\varnothing^6 - \frac{3m^4}{16\pi\alpha^2}\varnothing^4\right]\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varnothing^2} + \frac{3m^4}{16\alpha^2}\varnothing^5\frac{\partial\Psi}{\partial\varnothing}$$

$$-\frac{9}{4}\pi^2 kc\frac{4\alpha^2}{m^4}\varnothing^{-4}\Psi + \frac{12\pi^3\alpha^4}{m^6}\varnothing^{-6}\Psi = 0 \tag{3.11}$$

biçimine dönüşür.

Bu ifade $|\varnothing| < 1$ olmak üzere $\varnothing$: Order parameter (düzen parametresi) olarak ifade edilir.

• $-1 < \varnothing < 1$ olduğu için

$\frac{m^4}{16\alpha^2}\varnothing^6 << \frac{3m^4}{16\pi\alpha^2}\varnothing^4$ olduğu için $\frac{m^4}{16\alpha^2}\varnothing^4$ ifadesi ihmal edilebilir. Buradan denklemimiz

$$-\frac{3m^4}{16\pi\alpha^2}\varnothing^4\Psi'' + \frac{3m^4}{16\alpha^2}\varnothing^5\Psi' + \left[\frac{48\pi^3\alpha^4}{m^6}\varnothing^{-6} - \frac{9\pi^2 k c\alpha^2\varnothing^{-4}}{m^4}\right]\Psi = 0 \qquad (3.12)$$

yazılır.

Denklemin her tarafını $\varnothing^6$ ile çarparsak

$$\varnothing^{10}\Psi'' + \pi\varnothing^{11}\Psi' + \left[\frac{-256\pi^4\alpha^6}{m^{10}} + \frac{48\pi^3 k c\alpha^4}{m^8}\varnothing^2\right]\Psi = 0 \quad \text{oluşur.} \qquad (3.13)$$

Buradan $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1$, Ψ_1: ek çözüm Ψ_0 , Ψ_1 ; keyfi değerler ε; 1'den çok küçük bir pertürbasyon açılım parametresi kabul edilirse bu yaklaşım bize denklemin daha basit bir çözümünü verir. (3.3) denklemine operatör yardımıyla yaklaşırsak ($L \Rightarrow$ Operatör olmak üzere)

$$L = \varnothing^{10}\frac{d^2}{d\varnothing^2} - \pi\varnothing^{11}\frac{d}{d\varnothing} + \left[\frac{48\pi^4 k c\alpha^4\varnothing^2}{m^8} - \frac{16^2\pi^4\alpha^6}{m^{10}}\right] \qquad (3.14)$$

$$L\Psi = 0 \qquad (3.15)$$

$$L = L_0 + \varepsilon L_1 \qquad (3.16)$$

• $\varepsilon = \frac{\alpha^4}{m^8}$ $\qquad \varepsilon^2 \approx 0$

• $L_0 = \varnothing^{10}\frac{d^2}{d\varnothing^2} - \pi\varnothing^{11}\frac{d}{d\varnothing}$

- $L_1 = \left(48\pi^3 kc\varnothing^2 - \frac{16^2\pi^4\alpha^2}{m^2} \right)$
- $L = L_0 + \varepsilon L_1$
- $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1$ olmak üzere

(3.15) denklemi $(L_0 + \varepsilon L_1)(\Psi_0 + \varepsilon\Psi_1) = 0$ yazılabilir.

- $L_0\Psi_0 + \varepsilon L_0\Psi_1 + \varepsilon L_1\Psi_0 + \varepsilon L_1\Psi_1 = 0$
- $\varepsilon^2 \approx 0$ olduğu için $\varepsilon^2 L_1\Psi_1$ ihmal edilebilir.
- $L_0\Psi_0 + \varepsilon (L_0\Psi_1 + L_1\Psi_0) = 0$ olur.

Buradan $L_0\Psi_0 = 0$ için,

- $L_0\Psi_1 + L_1\Psi_0 = 0$ ve $L_0\Psi_1 = -L_1\Psi_0$ olur.
- $\varnothing^{10} \frac{d^2\psi_0}{d\varnothing^2} - \pi\varnothing^{11} \frac{d\Psi_0}{d\varnothing} = 0$

$$\frac{d^2\psi_0}{d\varnothing^2} - \pi\varnothing\frac{d\Psi_0}{d\varnothing} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d\Psi_0}{d\varnothing} = u \tag{3.17}$$

$$\frac{du}{d\varnothing} = \pi\varnothing u \quad \text{ve} \quad u = c.e^{\pi\frac{\varnothing^2}{2}} \tag{3.18}$$

$$\frac{d\Psi_0}{d\varnothing} = c.e^{\pi\frac{\varnothing^2}{2}} \tag{3.19}$$

$$\Psi_0 = c\int e^{\frac{\pi\varnothing^2}{2}} d\varnothing + k \tag{3.20}$$

e^x ifadesinin Taylor açılımından $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ kullanılarak ifade;

$$e^{\pi\frac{\varnothing}{2}} = 1 + \frac{\pi\varnothing^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi\varnothing^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi\varnothing^2}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi\varnothing^2}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{\pi\varnothing^2}{2}\right)^5}{5!} + \frac{\left(\frac{\pi\varnothing^2}{2}\right)^6}{6!} + \ldots$$

$$\Psi_0 = c\left[\varnothing + \frac{\pi}{2}\frac{\varnothing^3}{3} + \frac{\pi^2}{8}\frac{\varnothing^5}{5} + \frac{\pi^3}{48}\frac{\varnothing^7}{7} + \frac{\pi^4}{(16)(24)}\frac{\varnothing^9}{9} + \frac{\pi^5}{(32)(120)}\frac{\varnothing^{11}}{11} + \ldots\right] + k \qquad (3.20)$$

yazılır.

$$L_0\Psi_1 = -L_1\Psi_0 \qquad (3.21)$$

$$= \qquad \left(\varnothing^{10}\frac{d^2}{d\varnothing^2} - \pi\varnothing^{11}\frac{d}{d\varnothing}\right)\Psi_1$$

(3.20)

$$= \left[48\pi^3 kc\varnothing^2 - \frac{16^2\pi^4\alpha^2}{m^2}\right]\left\{c\left[\varnothing + \frac{\pi}{2}\frac{\varnothing^3}{3} + \frac{\pi^2}{8}\frac{\varnothing^5}{5} + \frac{\pi^3}{48}\frac{\varnothing^7}{7} + \ldots\right] + k\right\} \qquad (3.22)$$

$$\varnothing^{10}\frac{d^2\Psi_1}{d\varnothing^2} - \pi\varnothing^{11}\frac{d\Psi_1}{d\varnothing} \quad \text{ve}$$

$$= \left[\frac{16^2\pi^4\alpha^2}{m^2} - 48\pi^3 kc\varnothing^2\right]$$

$$\left\{c\left[\varnothing + \frac{\pi}{6}\varnothing^3 + \frac{\pi^2}{40}\varnothing^5 + \frac{\pi^3}{(48)(7)}\varnothing^7 + \frac{\pi^7}{(16)(24)(9)}\varnothing^9 + \frac{\pi^5}{(32)(120)(11)}\varnothing^{11}\right] + k\right\} \qquad (3.23)$$

$$\varnothing + \frac{\pi}{6}\varnothing^3 + \frac{\pi^2}{40}\varnothing^5 + \frac{\pi^3}{236}\varnothing^7 + \frac{\pi^4}{384}\frac{\varnothing^9}{9} + \frac{\pi^5}{(32)(120)}\frac{\varnothing^{11}}{11} = h$$

Homojen kısmın çözümüyle ilgili olarak $\Psi_{1H} = ch(\varnothing) + k$ yazılabilir. Buradan homojen ve partiküler kısmın ortak çözümü olarak $\Psi_1 = \Psi_{1H} + \Psi_{1P}$ yazılabilir.

Önce homojen kısmın çözümünü araştıralım.

$$\Psi_{IH} = c\left[\varnothing + \frac{\pi^2}{2}\frac{\varnothing^3}{3} + \frac{\pi^2}{8}\frac{\varnothing^5}{5} + \frac{\pi^3}{48}\frac{\varnothing^7}{7} + \frac{\pi^4}{(16)(24)}\frac{\varnothing^9}{9} + \frac{\pi^5}{(32)(120)}\frac{\varnothing^{11}}{11}\right] + k$$

$$\Psi_1'' - \pi\Psi_1' = \left[\frac{16^2\pi^4\alpha^2}{m^2} - 48\pi^3 kc\frac{\pi^2}{2}\varnothing^2\right].\left\{ch(\varnothing) + k\right\} \tag{3.24}$$

olur.

4. FONKSİYONEL YAKLAŞIM

4.1. Denklemin Green Fonksiyonunda Çözümü

Şimdi yukarıda bahsedilen çözüme Green Fonksiyonu yaklaşımında bakmaya çalışacağız.

$$G(\varnothing, \varnothing') = \begin{cases} G_{>} \ \ldots\ldots \ \varnothing > \varnothing' \\ G_{<} \ \ldots\ldots \ \varnothing < \varnothing' \\ \qquad\quad \varnothing \in (0, 1) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} G_{>}\ c_1(\varnothing').h(\varnothing) + k_1(\varnothing') \\ G_{<}\ c_2(\varnothing').h(\varnothing) + k_2(\varnothing') \\ (G_{>})_{\varnothing=\varnothing'} = (G<)_{\varnothing=\varnothing'} \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\left(\frac{dG >}{d\varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing'} - \left(\frac{dG <}{d\varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing'} = \frac{1}{p} \quad , \quad p = e^{-\frac{\pi}{2}\varnothing^2} \tag{4.3}$$

Sturm-Liovelle bağıntısına göre denklem

$$py'' + p'y' + \ldots + \frac{1}{W(x)}\frac{d}{dx}\left[\underset{\downarrow}{p(x)}\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = 0 \tag{4.4}$$

olur.

$$\frac{dp}{dx}y' + py'' + W\lambda y = 0 \tag{4.5}$$

$$W\Psi_1'' - \pi\varnothing W\Psi_1' = W\left[\frac{16^2\pi^4\alpha^2}{m^2} - 48\pi^3 kc\right]\varnothing^2\{ch + k\} \tag{4.6}$$

Denklemin Sturm-Liouvelle formatına uyabilmesi için;

- $W' = -\pi\varnothing W$

- $\dfrac{W'}{W} = -\pi\varnothing$
- $\ln W = -\pi\dfrac{\varnothing^2}{2}$
- $W = e^{-\frac{\pi}{2}\varnothing^2}$
- $W = p = e^{-\frac{\pi}{2}\varnothing^2}$
- $(G_>)_{\varnothing=\varnothing'} = (G_<)_{\varnothing=\varnothing'}$
- $\dfrac{dG_>}{d\varnothing_{\varnothing=\varnothing'}} - \dfrac{dG_<}{d\varnothing_{\varnothing=\varnothing'}} = e^{\frac{\pi}{2}\varnothing^2}$

Sıçrama süreksizliği

- $c_1 h(\varnothing') + k_1 = c_2 h(\varnothing') + k_2$

Burada $\varnothing'$ ifadesi türev olmayıp, başka bir tanımlama ifadesidir.

- $c_1\left(\dfrac{dh}{d\varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing'} = c_2\left(\dfrac{dh}{d\varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing'} = e^{\frac{\pi}{2}\varnothing'^2}$

- $$\left(\frac{dh}{d\varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing'} =$$ $$1+\frac{\pi}{2}\varnothing'^2+\frac{\pi^2}{8}\varnothing'^4+\frac{\pi^3}{48}\varnothing'^6+\frac{\pi^4}{(16)(24)}\varnothing'^8+\frac{\pi^5}{(32)(120)}\varnothing'^{10}=\left(\frac{dh}{d\varnothing}\right)_{\varnothing=\varnothing'} \tag{4.7}$$

- $e^{\pi\frac{\varnothing}{2}} = \dfrac{dh}{d\varnothing}$
- $c_1 - c_2 = 1$ (Sıçrama süreksizliğidir)

Süreklilik olarak yazılırsa

- $c_1 h(\varnothing') + k_1 = c_2 h(\varnothing') + k_2$
- $c_1 = c_2 + 1$
- $(1 + c_2)\, h(\varnothing') + k_1 = c_2\, h(\varnothing') + k_2$
- $G_>(1) = 0$
- $G_<(0) = 0$

2 tane sınır koşulu ortaya çıktı.

• $h(0) = 0$

$$h(1) = 1+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi^2}{40}+\frac{\pi^3}{(7)(48)}+\frac{\pi^4}{(16)(24)(9)}+\frac{\pi^5}{(32)(120)(11)} = \delta \qquad (4.8)$$

• $G_> = c_1 h(\varnothing) + k_1$

• $G_< = c_2 h(\varnothing) + k_2$

$$G_> (1) = c_1\delta + k_1 = 0 \qquad (4.9)$$

$$G_< (0) = c_2 0 + k_2 = 0 \; k_2 = 0 \qquad (4.10)$$

$$c_1\delta + k_1 = 0 \qquad (4.11)$$

$$c_1\delta = -k_1 \;\rightarrow\; c_1 = -\frac{k_1}{\delta} \qquad (4.12)$$

$$-\frac{k_1}{\delta} = 1 + c_2 \;\rightarrow\; c_2 = \frac{k_1}{\delta} - 1 \qquad (4.13)$$

$$\left(-\frac{k_1}{\delta} - 1\right) h(\varnothing') + k_1 = \left(-\frac{k_1}{\delta} - 1\right) h(\varnothing') + 0 \qquad (4.14)$$

$$-\frac{k_1}{\delta} h(\varnothing') + k_1 = -\frac{k_1}{\delta} h(\varnothing') - h(\varnothing') \quad k_1 = -h(\varnothing') \qquad (4.15)$$

$$G_> = +\frac{h(\varnothing')}{\delta} h(\varnothing) - h(\varnothing') \qquad (4.16)$$

$$G_< = \left(\frac{+h(\varnothing')}{\delta} - 1\right) h(\varnothing) \qquad (4.17)$$

$$G_> = h(\varnothing')\left[\frac{h(\varnothing)}{\delta} - 1\right] \quad ; \quad \varnothing > \varnothing' \qquad (4.18)$$

$$G_< = h(\varnothing)\left[\frac{h(\varnothing')}{\delta} - 1\right] \quad ; \quad \varnothing < \varnothing' \tag{4.19}$$

Simetrik Green Fonksiyonu

$$\Psi_{1p} = \int_0^1 G(\varnothing, \varnothing') \begin{bmatrix} \text{2 deki denklemin} \\ \text{sağ tarafı} \\ \varnothing = \varnothing' \text{olarak} \end{bmatrix} d\varnothing'$$

$$= \int_0^{\emptyset} G_> \begin{bmatrix} \text{2 deki denklemin} \\ \text{sağ tarafı} \\ \emptyset = \emptyset' \end{bmatrix} d\varnothing' + \int_{\emptyset}^1 G_< \begin{bmatrix} \text{2 deki denklemin} \\ \text{sağ tarafı} \\ \emptyset = \emptyset' \end{bmatrix} d\varnothing' \tag{4.20}$$

Bizim çözmeye çalıştığımız orijinal denklem Green fonksiyonundaki görüntüye dönüştü.

(4.9) denkleminin sağ tarafı $= [\alpha_1 - \alpha_2 kc\varnothing^2]\{ch(\varnothing) + k\}$ yazılabilir. $\alpha_1 = \frac{16^2 \pi^4 \alpha^2}{m^2}$ $\alpha_2 = 48\pi^3$ olmak üzere

Şimdi (4.20) denklemine geri dönersek

$$\Psi_{1p} = \int_0^{\varnothing} h(\varnothing')\left[\frac{h(\varnothing)}{\delta} - 1\right][\alpha_1 - \alpha_2 kc\varnothing'^2]\{ch(\varnothing') + k\}d\varnothing + \int_{\varnothing}^1 h(\varnothing)\left[\frac{h(\varnothing')}{\delta} - 1\right].$$

$$[\alpha_1 - \alpha_2 kc\varnothing'^2]\{ch(\varnothing') + k\}d\varnothing' \tag{4.21}$$

$$\Psi_{1p} = \left[\frac{h(\varnothing)}{\delta} - 1\right]\int_0^{\varnothing} h(\varnothing')[\alpha_1 - \alpha_2 kc\varnothing'^2]\{ch(\varnothing') + k\}d\varnothing' + h(\varnothing)\int_{\varnothing}^1 \left[\frac{h(\varnothing'}{\delta} - 1\right].$$

$$[\alpha_1 - \alpha_2 kc\varnothing'^2]\{ch(\varnothing') + k\}d\varnothing' \quad h = \varnothing + \tag{4.22}$$

$$\frac{\pi}{6}\varnothing^3 + \frac{\pi^2}{40}\varnothing^5 + \frac{\pi^3}{(7)(48)}\varnothing^7 + \frac{\pi^4}{(9)(16)(24)}\varnothing^9 + \frac{\pi^5}{(32)(120)(11)}\varnothing^{11}$$

- $\beta_3 = \frac{\pi}{6}$
- $\beta_5 = \frac{\pi^2}{40}$

- $\beta_7 = \dfrac{\pi^3}{(7)(48)}$
- $\beta_9 = \dfrac{\pi^4}{(9)(16)(24)}$
- $\beta_{11} = \dfrac{\pi^5}{(32)(120)(11)}$ yazılabilir.
- $h(\varnothing) \approx \varnothing + \beta_3\varnothing^3$ olmak üzere

$$\Psi_{1p} = \left[\frac{\varnothing}{\delta} + \frac{\beta_3}{\delta}\varnothing^3 - 1\right]\int_0^{\varnothing}[\varnothing' + \beta_3\varnothing'^3].[\alpha_1 - \alpha_2\varnothing'^2][c\varnothing' + c\beta_3\varnothing'^3 + k]d\varnothing' +$$

$$+ [\varnothing + \beta_3\varnothing^3]\int_0^1\left[\frac{\varnothing'}{\delta} + \frac{\beta_3}{\delta}\varnothing'^3 - 1\right][\alpha_1 - \alpha_2 kc\varnothing'^2].\{c\varnothing' + c\beta_3\varnothing'^3 + k\}d\varnothing' \quad (4.23)$$

$$\Psi_{1p} \approx \left[\frac{\varnothing}{\delta} + \frac{\beta_3}{\delta}\varnothing^3 - 1\right]\int_0^{\varnothing}[\varnothing' + \beta_3\varnothing'^3].[\alpha_1 c\varnothing' + \alpha_1 c\beta_3\varnothing'^3 + \alpha_1 k - \alpha_2 kc.c\varnothing'^3 -$$

$$- \alpha_2 kc.k\varnothing'^2]d\varnothing' + [\varnothing + \beta_3\varnothing^3]\int_{\varnothing}\left[\frac{\varnothing'}{\delta} + \frac{\beta_3}{\delta}\varnothing'^3 - 1\right][\alpha_1 c\varnothing' + \alpha_1 c\beta_3\varnothing'^3 + \quad (4.24)$$

$$+ \alpha_1 k - \alpha_2 kc.c\varnothing'^3 - \alpha_2 kc.k\varnothing'^2]\ d$$

$$\Psi_{1p} \approx \left[\frac{\varnothing}{\delta} + \frac{\beta_3}{\delta}\varnothing^3 - 1\right]\int_0^{\varnothing}[\alpha_1 c\varnothing'^2 + \alpha_1 k\varnothing' - \alpha_2 kc.k\varnothing'^3 + \beta_3\alpha_1 k\varnothing'^3]d\varnothing' +$$

$$+ [\varnothing + \beta_3\varnothing^2].\int_0^1[\frac{\alpha_1 c}{\delta}\varnothing'^2 + \frac{\alpha_1 k}{\delta}\varnothing' - \frac{\alpha_2 kck}{\delta}\varnothing'^3 + \frac{\beta_3}{\delta}\alpha_1 k\varnothing'^3 \quad (4.25)$$

$$-\alpha_1 c\varnothing' - \alpha_1 c\beta_3\varnothing'^3 - \alpha_1 k + \alpha_2 kcc\varnothing'^3 + \alpha_2 kck\varnothing'^2]d\varnothing'$$

$$\Psi_{1p} \approx \left[\frac{\varnothing}{\delta} + \frac{\beta_3}{\delta}\varnothing^3 - 1\right]\left[\frac{\alpha_1 c\varnothing'^3}{3} + \frac{\alpha_1 k\varnothing'^2}{2} - \alpha_2 kck\frac{\varnothing'^4}{4} + \beta_3\alpha_1 k\frac{\varnothing'^4}{4}\right]$$

$$+ [\varnothing + \beta_3\varnothing^3].\ [\frac{\alpha_1 c\varnothing'^3}{\delta.3} + \frac{\alpha_1 k}{2} + \frac{\varnothing'^2}{2} - \frac{\alpha_2 kck}{\delta}\frac{\varnothing'^4}{4} + \frac{\beta_3}{\delta}\alpha_1 k\frac{\varnothing'^4}{4} \quad (4.26)$$

$$- [\frac{\alpha_1 c\varnothing'^2}{2} - \alpha_1 c\beta_3\frac{\varnothing'^4}{4} - \alpha_1 k\varnothing' + \alpha_2 kcc\frac{\varnothing'^4}{4} + \alpha_2 kck \Big|_0^1$$

$$\Psi_{1p} \approx \left[\frac{\varnothing}{\delta}+\frac{\beta_3}{\delta}\varnothing^3-1\right]\left[\frac{\alpha_1 c\varnothing^3}{3}+\frac{\alpha_1 k\varnothing^2}{2}\right]+\left[\varnothing+\beta_3\varnothing^3\right]+$$

$$+\ [\frac{\alpha_1 c}{3\delta}+\frac{\alpha_1 k}{2\delta}-\alpha_2\frac{kck}{4\delta}+\frac{\alpha_1 k\beta_3}{4\delta}-\frac{\alpha_1 c}{2}-\frac{\alpha_1 c\beta_3}{4}-\alpha_1 k+\frac{\alpha_2 kc.c}{4}+\frac{\alpha_2 kc.k}{3}$$

$$-\ \frac{\alpha_1 c}{3\delta}\varnothing^3-\frac{\alpha_1 k}{2\delta}\varnothing^2+\frac{\alpha_1 c}{2}\varnothing^2+\alpha_1 k\varnothing-\frac{\alpha_2 kck}{3}\varnothing^3]$$

$$\Psi_{1p} \approx \frac{\alpha_1 k}{2\delta}\varnothing^3-\frac{\alpha_1 c\varnothing^3}{3}-\frac{\alpha_1 k\varnothing^2}{2}+[\varnothing+\beta_3\varnothing^3] \tag{4.27}$$

$$\cdot\left(\frac{\alpha_1 c}{3\delta}+\frac{\alpha_1 k}{2\delta}-\frac{\alpha_1 kck}{4\delta}+\frac{\alpha_1 k\beta_3}{4\delta}-\frac{\alpha_1 c}{2}-\frac{\alpha_1 c\beta_3}{4}-\alpha_1 k+\frac{\alpha_2 kcc}{4}+\frac{\alpha_2 kck}{3}\right)$$

$$+\ \alpha_1 k\varnothing+\frac{\alpha_1 c}{2}\varnothing^2-\frac{\alpha_2 kck}{3}\varnothing^3]$$

$$U_{1p} \approx -\frac{\alpha_1 k}{2}\varnothing^2+\left(\frac{\alpha_1 k}{2\delta}-\frac{\alpha_1 c}{3}\right)\varnothing^3+$$

$$+\left(\frac{\alpha_1 c}{3\delta}+\frac{\alpha_1 k}{2\delta}-\frac{\alpha_2 kck}{4\delta}+\frac{\alpha_1 k\beta_3}{4\delta}-\frac{\alpha_1 c}{2}-\frac{\alpha_1 c\beta_3}{4}-\alpha_1 k+\frac{\alpha_2 kcc}{4}+\frac{\alpha_2 kck}{3}\right)$$

$$(\varnothing+\beta_3\varnothing^3)+ \tag{4.28}$$

$$+\ \alpha_1 k\varnothing^2+\frac{\alpha_1 c}{2}\varnothing^3$$

$$\Psi_{1p} \approx (\text{Uzun sabit})\varnothing+\frac{\alpha_1 k}{2}\varnothing^2-\frac{\alpha_1 k}{2}\varnothing^2+\beta_3\ (\text{Uzun sabit})\varnothing^3+$$

$$+\left(\frac{\alpha_1 k}{2\delta}-\frac{\alpha_1 c}{3}\right)\varnothing^3 \tag{4.29}$$

$$\Psi_{1p} \approx (\text{Uzun sabit})\varnothing+\frac{\alpha_1 k}{2}\varnothing^2+[\beta_3\ (\text{Uzun sabit})+\left(\frac{\alpha_1 k}{2\delta}-\frac{\alpha_1 c}{3}\right)\varnothing^3 \tag{4.30}$$

Buradan;

$$\Psi = \Psi_0+\varepsilon\Psi_1 = \Psi_0+\varepsilon(\Psi_0+\Psi_{1p})$$

$$\equiv \Psi_0\,(1+\varepsilon)+\varepsilon\Psi_{1p} \tag{4.31}$$

$$\Psi_1 = \Psi_{1H} + \Psi_{1p} \tag{4.32}$$

$$\Psi_{1H} = \Psi \tag{4.33}$$

$$\Psi = (1 + \varepsilon)\Psi_0 + \varepsilon\Psi \tag{4.34}$$

$$\Psi_0 = (ch(\varnothing) + k)(1 + \varepsilon) + \varepsilon[(\text{Uzun sabit})\varnothing + \frac{\alpha_1 k}{2}\varnothing^2 +$$

$$\{\beta_3(\text{Uzun sabit}) + \left(\frac{\alpha_1 k}{2\delta} - \frac{\alpha_1 c}{3}\right)\}\varnothing^3] \tag{4.35}$$

Uzun sabit =

$$\left(\frac{\alpha_1 c}{3\delta} + \frac{\alpha_1 k}{2\delta} - \frac{\alpha_2 kck}{4\delta} + \frac{\alpha_1 k\beta_3}{4\delta} - \frac{\alpha_1 c}{2} - \frac{\alpha_1 c\beta_3}{4} - \alpha_1 k + \frac{\alpha_2 kcc}{4} + \frac{\alpha_2 kck}{3}\right) \tag{4.36}$$

Buradan;

$$a = \alpha V(\varnothing) \quad \text{ve} \quad a = \frac{\alpha}{V(\varnothing)} \tag{4.37}$$

koşulları altında $V(\varnothing) = \frac{1}{2}m^2\varnothing^2$ harmonik fonksiyonu ile denklemimiz $h \approx \varnothing + \beta_3\varnothing^3$ şeklinde elde edilir.

5. SONUÇLAR ve YORUMLAR

Evrenin oluşumunda incelenen Wheeler-De Witt denklemi "twice loasing shoe" yöntemi ile incelendiğinde ortaya çıkan adi diferensiyel denklemi çözümleri, istediğimiz bakış açılarına uygun yaklaşımlar ortaya çıkararak fiziksel durumlarla

Biz bu çalışmada grek yukarıda belirttiğimiz teknikler gerekse de her iki değişkeni de kullanarak Wheeler-De Witt denklemine fiziksel anlamlar taşıyan çözümler üretmeye çalıştık. Kuantum kozmolojinin dalga fonksiyonunun skaler alana bağlı çözümlerini elde ettik. Bu çözümlerin daha sonraki kuantum kozmoloji çalışmalarında faydalı olacağını umuyoruz.

Gelecekte yapılabilecek bir çalışma da bu tezde yaptığımızın tam tersi yapılıp, bütün çözümleri evrenin yarıçap fonksiyonu cinsinden bulmak olabilir. Bu çalışmanın da başka bir tez çalışmasında ele alınabileceğini ümit ediyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Peebles P. J. E., (1993),“Physical Cosmology”, 1st Edition, Princeton University Press.

[2] Wald R. M., (1984),“General Relativity”, 1st Edition, The University of Chicago Press.

[3] Bojowald M., (2011), ‘‘Quantum Cosmology A Fundamental Description of the Universe’’, 1st Edition, Springer.

[4] Hawking S. W., (1984),“The Quantum State of theUniverse’’, Nuclear Physics B, 239 (1), 257-276.

[5] Hawking S. W., Wu Z. C., (1985), “Numerical Calculations of the Minisuperspace Cosmological Models’’, Physics Letters B, 151 (1), 15-20.

[6] Wheeler J. A., (1968), “Relativity Groups and Topology,”1st Edition, Benjamin.

[7] De Witt B. S., (1967), “Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory”, Physical Review, 160, 1113-1114.

[8] Guth A. H., (1981),“A Possible Solution of Tothehorizon” PhysicalRewiew, 23,347-348.

[9] Linde A., (1982), “A Possible Solution of Tothehorizon, Flatness, Homogeneity, İsotropy, Primordial Monopole Problems”, Physics Letters,108,6-7.

[10] Albrecht A. P. J., Steinhardt F. L. R., (1982), “Solving The Cosmological Moduli Problem With Weak Scale İnflation”, Physical Review Letters, 48,1220-1221.

[11] Zhang D. H., (2004), “An Exact Evolution Equation of The Curvature Perturbation For Closed Universe”, Physical Letters, 35,635-636.

[12] Huang Y. C., Wheng G., (2005) “Solution of Wheeler-De Witt Equation Potential Well,Tunnel Effect”,Communications in Theoretical Physics, 44,757-758.

[13] Web 1, (2014), http://www.wolframalpha.com. ,(ErişimTarihi: 08/01/2014).

[14] Jackson J. D., (1975) “Classical Electrodynamics, 2nd Edition, John Wiley 8 Sons, Inc.

[15] Watson, G. N., (1952) “Theory of Bessel Functions,” 2nd Edition, Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Murat Özdere, 1976 yılında İstanbul'da doğdu. 1995 yılında başladığı İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nü 2000 yılında başarıyla tamamlayarak 2002 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2004 yılından buyana da özel öğretim kurumlarında Fizik Öğretmenliği görevini sürdürmektedir.