T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SKALER VE OPERATÖR-DEĞERLİ POISSON ÇEKİRDEĞİ KAVRAMLARININ BAZI GENELLEMELERİ

DOKTORA TEZİ

Serap BULUT

Balıkesir, Mayıs – 2007

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SKALER VE OPERATÖR-DEĞERLİ POISSON ÇEKİRDEĞİ KAVRAMLARININ BAZI GENELLEMELERİ

DOKTORA TEZİ

Serap BULUT

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR

Sınav Tarihi : 11. 05. 2007

Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV**	**(BAÜ)**
	Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR	**(Danışman-BAÜ)**
	Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ	**(CBÜ)**
	Yrd. Doç. Dr. Erdal EKİCİ	**(ÇOMÜ)**
	Yrd. Doç. Dr. Ali GÜVEN	**(BAÜ)**

Balıkesir, Mayıs - 2007

ÖZET

SKALER VE OPERATÖR-DEĞERLİ POISSON ÇEKİRDEĞİ KAVRAMLARININ BAZI GENELLEMELERİ

Serap BULUT

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR)

Balıkesir, 2007

Bu çalışmanın amacı skaler ve operatör-değerli Poisson çekirdeği kavramlarının bazı genellemelerini vermektir.

Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümde, skaler Poisson çekirdeğinin ortaya çıkışı ele alınmış ve bu kavramın bazı genellemeleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise operatör-değerli Poisson çekirdeği kavramı ele alınıp bu kavramın yeni bir genellemesi elde edilmiştir.

Birinci bölümde Banach uzayı, sınırlı doğrusal operatör, Hilbert uzayı, spektral yarıçap, Riesz-Dunford integrali ve Banach cebiri gibi temel kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölüm, iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde ilk olarak skaler Poisson çekirdeği kavramının ortaya çıkışı ele alınmış ve bununla ilgili elde edilen bazı sonuçlara ve genellemelere yer verilmiştir. İkinci kesimde ise skaler Poisson çekirdeğinin yeni bir genellemesi tanımlanmıştır.

Üçüncü bölüm, iki kesime ayrılmaktadır. Birinci kesimde skaler Poisson çekirdeği yardımıyla tanımlanan operatör-değerli Poisson çekirdeği kavramı incelenmiştir. Ardından bir polinom yardımıyla operatör-değerli Poisson çekirdeği için elde edilen bir integral eşitliğinin ispatı polinomdan bağımsız olarak verilmiştir. İkinci kesimde ise operatör-değerli Poisson çekirdeği tanımının bir genellemesi ve buna bağlı olarak elde edilen bazı sonuçlar yer almaktadır.

ANAHTAR KELİMELER : Skaler Poisson çekirdeği / Operatör-değerli Poisson çekirdeği

ABSTRACT

SOME GENERALIZATIONS OF THE CONCEPTS OF SCALAR AND OPERATOR-VALUED POISSON KERNEL

Serap BULUT

Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mathematics

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR)

Balıkesir - Turkey, 2007

The purpose of this work is to give some generalizations of the concepts of the scalar and the operator-valued Poisson kernel.

The work consists of three chapters. The first chapter is assigned for basic concepts related to second and third chapters. In the second section, it is introduced the scalar Poisson kernel and investigated some generalizations of this concept. In the third section, the concept of the operator-valued Poisson kernel is introduced and a new generalization of this concept is obtained.

In the first chapter, it is assigned for basic concepts like Banach space, bounded linear operator, Hilbert space, spectral radius, Riesz-Dunford integral and Banach algebra.

The second chapter consists of two sections. In the first section, firstly it is introduced the concept of scalar Poisson kernel. Afterwards some results and generalizations related to this are considered. In the second section, it is defined a new generalization of the scalar Poisson kernel.

The third chapter is seperated into two sections. In the first section, the concept of the operator-valued Poisson kernel defined by means of the scalar Poisson kernel is investigated. Following, the proof of an integral equation obtained by means of a polynomial is given independently from the polynomial. The second section is assigned for a generalization of the definition of the operator-valued Poisson kernel and some results obtained related to this.

KEY WORDS : Scalar Poisson kernel / Operator-valued Poisson kernel

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
D	$\{z\in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$ birim diski
$B(X, Y)$	$(X,\lVert\cdot\rVert)$ normlu uzayından $(Y,\lVert\cdot\rVert)$ normlu uzayına bütün sınırlı doğrusal dönüşümlerin uzayı
T^{*}	T operatörünün Hilbert-eşleği
$\rho(T)$	T operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(T)$	T operatörünün spektrumu
$r(T)$	T operatörünün spektral yarıçapı
$\mathcal{H}$	Hilbert uzayı
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$'dan $\mathcal{H}$'ya bütün sınırlı doğrusal operatörlerin cebiri
$P_{r,t}(e^{i\theta})$	Skaler Poisson çekirdeği
$K_{r,t}(T)$	Operatör-değerli Poisson çekirdeği

ÖNSÖZ

Skaler Poisson çekirdeği $P(r,\theta)$, analizde önemli bir yere sahip olan kavramlardan biridir. En iyi bilinen özellikleri 2π-periyotlu, çift ve pozitif bir fonksiyon olması ve $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$ integral eşitliğini sağlamasıdır. Bu integral eşitliği skaler Poisson çekirdeğinin tanımı yardımıyla elementer olarak elde edilebilir. Ancak Taylor farklı bir bakış açısıyla bu integral eşitliğinin yeni bir ispatını vermiştir, [11].

Haruki ve Rassias, skaler Poisson çekirdeği tanımını önce $Q(\theta;a,b)$ sonra da $R(\theta;a,b,c,d)$ olarak genellemişler ve dolayısıyla yukarıdaki $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$ integral eşitliğinin de genellemelerini elde etmişlerdir, [7]. Aynı çalışmada Haruki ve Rassias, skaler Poisson çekirdeğinin genellemesi olan $Q(\theta;a,b)$'nin kuvvetlerinin $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(\theta;a,b)^{n+1} d\theta$ şeklindeki integralinin çözümünü bir açık problem olarak bırakmışlardır. Bu integral $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P^{n+1}(r,\theta)d\theta$ integralinin bir genellemesidir, [6]. Ayrıca bu açık problemin çözümü [8] numaralı kaynakta verilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle skaler Poisson çekirdeğinin yeni bir $S(\theta;x,y,z,t,u,v)$ genellemesi verilmiş ve buna bağlı olarak bir integral eşitliği elde edilmiştir, [1].

Diğer taraftan operatör-değerli Poisson çekirdeği, skaler Poisson çekirdeği yardımıyla tanımlanan yeni bir kavramdır, [2]. Bu kavram operatör teori ve harmonik analizde pek çok uygulamaya sahiptir.

Skaler Poisson çekirdeği $P(r,\theta)$ için elde edilen $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$ integral eşitliğine benzer olarak operatör-değerli Poisson çekirdeği $K_{r,t}(T)$ için de bir polinom yardımıyla $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T)dt = I$ integral eşitliği elde edilmektedir, [2].

Bu tez çalışmasında operatör-değerli Poisson çekirdeği ile ilgili olarak $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T)dt = I$ integral eşitliğinin ispatı bir polinomdan bağımsız olarak verilmiştir. Ayrıca operatör-değerli Poisson çekirdeği tanımının yeni bir genellemesi verilerek buna bağlı bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar [2]'deki sonuçları genelleştirmektedir.

Hem danışmanım olarak atanmadan önce hem de atandıktan sonra bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2007 **Serap BULUT**

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, 2. ve 3. bölümlerde yararlanacağımız bazı temel kavramları ele alacağız.

1.1 Hilbert Uzayları

1.1.1 Tanım: X bir reel yada kompleks vektör uzayı olsun. Eğer $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü, her $x, y \in X$ vektörleri ve herhangi bir α skaleri için

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*üçgen eşitsizliği*)

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir *norm*, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* adı verilir, [9, s.58].

1.1.2 Tanım: Eğer bir normlu uzay, normunun indirgediği metriğe göre bir tam metrik uzay ise bu normlu uzaya bir *Banach uzayı* denir, [9, s.58].

1.1.3 Tanım: X ve Y bir K sayı cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. Eğer $T : X \to Y$ dönüşümü, her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

(i) $T(x + y) = Tx + Ty$

(ii) $T(\alpha x) = \alpha Tx$

koşullarını sağlıyorsa T dönüşümüne X ’den Y ’ye bir *doğrusal operatör* denir, [9, s.82].

1.1.4 Not: X üzerinde bir doğrusal operatör, X 'den X 'e tanımlı bir doğrusal operatördür.

1.1.5 Tanım: X, Y birer normlu uzay ve $T: X \to Y$ bir doğrusal operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \tag{1.1.1}$$

olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı varsa T 'ye *sınırlı operatör* denir.

$x = 0$ için $Tx = 0$ elde edilir. Bu nedenle $x \neq 0$ için

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M$$

olur. Bu eşitsizlik M 'nin en küçük değerinin, eşitsizliğin solundaki ifadenin $X - \{0\}$ üzerinden alınan supremumu kadar olacağını gösterir. Bu değer $\|T\|$ ile gösterilir. Böylece

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

olur. $\|T\|$ sayısına T operatörünün *normu* (yada T 'nin *operatör normu*) denir. Eğer $X = \{0\}$ ise $\|T\| = 0$ olarak tanımlanır; bu durumda $T0 = 0$ olduğundan $T = 0$ 'dır.

(1.1.1)'de $M = \|T\|$ alınırsa

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$$

elde edilir, [9, s.91].

1.1.6 Yardımcı Teorem: $\|T\|$ sayısının bir diğer eşiti

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|Tx\|$$

sayısıdır, [9, s.92].

1.1.7 Yardımcı Teorem: X, Y birer normlu uzay ve $T: X \to Y$ bir sınırlı doğrusal operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq M\|x\|$ oluyorsa $\|T\| \leq M$ elde edilir.

1.1.8 Teorem: X, Y birer normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir doğrusal operatör olsun. Bu durumda

(i) T süreklidir

(ii) T, 0 noktasında süreklidir

(iii) T sınırlıdır

koşulları denktir, [12, s.71].

1.1.9 Teorem: X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlı bütün sınırlı doğrusal operatörlerin vektör uzayı $B(X,Y)$,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

şeklinde tanımlanan operatör normuna göre bir normlu uzaydır, [9, s.118].

1.1.10 Teorem: Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de Banach uzayıdır, [9, s.118].

1.1.11 Uyarı: $T : X \to Y$ ve $S : Y \to Z$ operatörlerinin bileşimini ST ile göstereceğiz. Böylece eğer $x \in X$ ise $STx = S(Tx) \in Z$ olur.

1.1.12 Teorem: X, Y ve Z birer normlu uzay olsun. Eğer $T \in B(X,Y)$ ve $S \in B(Y,Z)$ ise $ST \in B(X,Z)$ 'dir ve

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\| \tag{1.1.2}$$

olur, [12, s.72].

1.1.13 Uyarı: $B(X,X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazacağız. $T \in B(X)$ için TT, $TTT, \ldots$ yerine ise sırasıyla $T^2, T^3, \ldots$ gösterimini kullanacağız.

1.1.14 Sonuç: X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $n \in IN$ için

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \tag{1.1.3}$$

olur.

1.1.15 Not: Bir X normlu uzayı üzerindeki birim operatör I_X yada kısaca I ile gösterilir.

1.1.16 Not: T ne olursa olsun T^0 birim operatör olarak tanımlanmaktadır.

1.1.17 Tanım: X, Y birer normlu uzay ve $T \in B(X,Y)$ olsun. Eğer

$$TS = I_Y \text{ ve } ST = I_X$$

olacak şekilde bir $S \in B(Y,X)$ varsa T 'ye *terslenebilirdir* denir. Böyle bir S varsa tektir ve buna T 'nin *inversi* adı verilir, T^{-1} ile gösterilir, [12, s.72].

1.1.18 Teorem: X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $\|T\| < 1$ ise $I - T$ terslenebilirdir ve $B(X)$ normlu uzayında,

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \tag{1.1.4}$$

olur, [12, s.73].

1.1.19 Sonuç: X bir Banach uzayı olsun. X üzerinde terslenebilir olan operatörlerin kümesi $B(X)$ 'de açıktır, [12, s.75].

1.1.20 Tanım: X, K sayı cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to K$$

dönüşümü, her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

(i) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(v) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme bir *iç çarpım*, $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ikilisine de bir *iç çarpım uzayı* denir, [9, s.128].

1.1.21 Teorem: *X* bir iç çarpım uzayı olmak üzere $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{1.1.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* adı verilir.

(1.1.5)'de eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul *x* ve *y*'nin doğrusal bağımlı olmalarıdır, [12, s.7].

1.1.22 Yardımcı Teorem: Bir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı üzerinde,

$$x \to \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|$ dönüşümü *X* üzerinde bir normdur, [9, s.128].

1.1.23 Tanım: Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımının indirgediği metriğe göre bir tam metrik uzay ise bu iç çarpım uzayına bir *Hilbert uzayı* denir, [12, s.23].

1.1.24 Teorem: *X* ve *Y* birer Hilbert uzayı olmak üzere $T \in B(X, Y)$ olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, T^* y\rangle_X$$

olacak şekilde $T^* \in B(Y, X)$ operatörü vardır ve tektir. T^* operatörüne T 'nin *Hilbert-eşleği* denir, [12, s.76].

1.1.25 Teorem: *X*, *Y* birer Hilbert uzayı olmak üzere $T \in B(X, Y)$ olsun. Bu durumda

$$T^{**} = T \text{ ve } \|T^*\| = \|T\|$$

olur, [12, s.78].

1.1.26 Yardımcı Teorem: *X*, *Y* ve *Z* birer Hilbert uzayı olsun.

(i) Eğer $T \in B(X, Y)$ ve $S \in B(Y, Z)$ ise $(ST)^* = T^* S^*$ olur.

(ii) Eğer $T, S \in B(X, Y)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ise $(\lambda T + \mu S)^* = \overline{\lambda} T^* + \overline{\mu} S^*$ olur, [12, s.78].

1.1.27 Yardımcı Teorem: *X*, *Y* birer Hilbert uzayı olmak üzere $T \in B(X,Y)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $I^* = I$ olur.

(ii) T yada T^* terslenebilir ise diğeri de terslenebilirdir ve $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ olur, [5, s.480].

1.1.28 Tanım: *T* bir *X* iç çarpım uzayı üzerinde sınırlı doğrusal bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ oluyorsa T 'ye *pozitif operatör* denir.

T operatörünün pozitif olduğu $T \geq 0$ şeklinde gösterilir. $T \geq S$ ifadesi ise $T - S \geq 0$ olduğu anlamına gelir. Denk olarak, her $x \in X$ için

$$T \geq S \Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle \geq \langle Sx, x\rangle$$

olur, [12, s.141].

1.1.29 Tanım: *X*, *Y* birer Hilbert uzayı ve $T \in B(X,Y)$ olsun. Eğer $\|T\| \leq 1$ ise T 'ye bir *daralma*, $\|T\| < 1$ ise *kesin daralma* denir, [12, s.143].

1.1.30 Tanım: *X* bir Hilbert uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $T^*T = TT^* = I$ oluyorsa T 'ye *birimsel* (*unitary*) *operatör* denir, [9, s.206].

1.2 Spektral Teori

1.2.1 Tanım: $X \neq \{0\}$ bir kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. T operatörünün *rezolvent kümesi*,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - T \text{ terslenebilirdir}\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu kümenin tümleyenine T 'nin *spektrumu* adı verilir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir, yani $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ 'dir. $(\lambda I - T)^{-1}$ fonksiyonuna T 'nin *rezolvent fonksiyonu* (yada *rezolvent operatörü*) veya kısaca *rezolventi* denir. Bir $\lambda \in \sigma(T)$ sayısına da T 'nin *spektral değeri* adı verilir, [5, s.566].

1.2.2 Yardımcı Teorem: X bir kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\rho(T)$ rezolvent kümesi açıktır, [9, s.376].

1.2.3 Sonuç: $\sigma(T)$ kapalıdır, [9, s.376].

1.2.4 Teorem: X bir kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Her $\lambda_0 \in \rho(T)$ için $(\lambda I - T)^{-1}$ rezolventi

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j [(\lambda_0 I - T)^{-1}]^{j+1}$$

açılımına sahiptir. Bu seri,

$$|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|}$$

ile belirtilen açık diskteki her λ için mutlak yakınsaktır. Bu disk $\rho(T)$'nin bir alt kümesidir, [9, s.377].

1.2.5 Teorem: $\sigma(T)$ kompakttır ve

$$|\lambda| \leq \|T\| \tag{1.2.1}$$

ile verilen diskte bulunur. Bu nedenle $\rho(T)$ boştan farklıdır, [9, s.377].

1.2.6 Tanım: X bir kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. T operatörünün *spektral yarıçapı*,

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

şeklinde tanımlanır. Yani spektral yarıçap, λ-kompleks düzleminde merkezi orjinde olan ve $\sigma(T)$'yi içeren en küçük kapalı diskin yarıçapıdır, [9, s.378].

1.2.7 Not: (1.2.1)'den açıktır ki bir $T \in B(X)$ operatörünün spektral yarıçapı için

$$r(T) \leq \|T\|$$

olmaktadır, [9, s.378].

1.2.8 Teorem (*Polinomlar için spektral dönüşüm teoremi*): X bir kompleks Banach uzayı, $T \in B(X)$ ve

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \qquad (\alpha_n \neq 0)$$

olsun. Bu durumda

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

olur, yani

$$p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1} T^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I$$

operatörünün spektrumu olan $\sigma(p(T))$, p polinomunun T ' nin $\sigma(T)$ spektrumu üzerinde aldığı bütün değerlerinden oluşur; burada

$$p(\sigma(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ \mu = p(\lambda), \lambda \in \sigma(T)\}$$

dir, [9, s.381].

1.2.9 Yardımcı Teorem: X bir kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $(\lambda I - T)^{-1}$, $\rho(T)$ rezolvent kümesindeki her λ_0 noktasında analitiktir. Dolayısıyla $\rho(T)$ üzerinde yerel olarak analitiktir, [9, s.389].

1.2.10 Not: $\rho(T)$, T 'nin rezolventinin yerel olarak analitik olduğu en geniş kümedir. Gerçekten rezolvent, spektrumun noktalarına analitik olarak devam ettirilemez.

Bu aşağıdaki teoremden görülebilir.

1.2.11 Teorem: X bir kompleks Banach uzayı, $T \in B(X)$ ve $\lambda \in \rho(T)$ olsun.

$$\delta(\lambda) = \inf_{s \in \sigma(T)} |\lambda - s|$$

olmak üzere

$$\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \geq \frac{1}{\delta(\lambda)},$$

λ'nın $\sigma(T)$ spektrumuna olan uzaklığıdır. Dolayısıyla

$$\delta(\lambda) \to 0 \ \text{iken} \ \left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \to \infty$$

olur, [9, s.390].

1.2.12 Teorem: Eğer $X \neq \{0\}$ bir kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ ise $\sigma(T) \neq \phi$'dir, [5, s.567].

1.2.13 Teorem: X bir kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. T operatörünün spektral yarıçapı $r(T)$ için

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\| T^n \right\|}$$

elde edilir. Bu eşitliğe *Gelfand formülü* adı verilir, [9, s.391].

1.2.14 Tanım: f bir E bölgesi üzerinde analitik olan kompleks değerli bir fonksiyon, $D \subset E$ bir açık küme ve $C = \partial D$ pozitif yönlü basit kapalı sonlu uzunluklu bir çevre olsun. $T \in B(X)$ olmak üzere $\sigma(T) \subseteq D$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(T)$ operatörü

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(zI - T)^{-1}\, dz \qquad (1.2.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. (1.2.2) eşitliğine *Riesz-Dunford integrali* adı verilir, [5, s.568].

Spektra, Banach cebirleri kavramı ile de bağlantılıdır. Bir Banach cebiri hem cebir hem de Banach uzayı yapılarına sahiptir. Şimdi, ilgili bazı kavramları ele alacağız.

1.2.15 Tanım: A, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. A üzerinde

$$A \times A \to A\,,\ (x, y) \to xy$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi, her $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in K$ için

(i) $(xy)z = x(yz)$

(ii) $x(y+z) = xy + xz$

(iii) $(x+y)z = xz + yz$

(iv) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

özelliklerini sağlıyorsa A'ya K cismi üzerinde bir *cebir* adı verilir.

Eğer çarpma işlemi değişmeli ise yani her $x, y \in A$ için

$$xy = yx$$

oluyorsa A'ya *değişmeli* (yada *abelian*) *cebir* denir.

Eğer her $x \in A$ için

$$ex = xe = x$$

olacak şekilde bir $e \in A$ elemanı varsa A'ya *birimli cebir* denir. Bu e elemanına ise A'nın bir *birimi* adı verilir.

Eğer A'nın bir birimi varsa bu birim tektir, [9, s.394].

1.2.16 Tanım: A hem bir normlu uzay hem de her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \tag{1.2.3}$$

eşitsizliği gerçeklenen ve eğer bir e birimi varsa bu birimi

$$\|e\| = 1$$

koşulunu sağlayan bir cebir olsun. Bu durumda A'ya bir *normlu cebir* denir, [9, s.395].

1.2.17 Tanım: Eğer bir normlu cebir, normlu uzay olarak göz önüne alındığında tam ise bu normlu cebire bir *Banach cebiri* denir, [9, s.395].

1.2.18 Not: Bir $X \neq \{0\}$ kompleks Banach uzayı üzerindeki bütün sınırlı doğrusal operatörlerden oluşan $B(X)$ Banach uzayı, birimi I (X üzerindeki birim operatör) olan ve çarpma işlemi operatörlerin bileşkesi olarak tanımlanan bir Banach cebiridir. (1.2.3) bağıntısı,

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \, \|T_2\|$$

şeklindedir ((1.1.2)'ye bakınız), [9, s.396].

1.2.19 Tanım: A birimli bir cebir ve $x \in A$ olsun. Eğer x, A'da bir *inverse* sahip ise yani

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e$$

olacak şekilde bir $x^{-1} \in A$ elemanı varsa x'e *terslenebilirdir* denir.

Eğer x terslenebilir ise inversi tektir, [9, s.396].

1.2.20 Tanım: A bir birimli kompleks Banach cebiri olsun. Bu durumda bir $x \in A$ elemanının $\rho(x)$ *rezolvent kümesi*

$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x$ terslenebilirdir$\}$

şeklinde tanımlıdır. x 'in *spektrumu* olan $\sigma(x)$, $\rho(x)$'in kompleks düzlemde tümleyenidir, yani $\sigma(x) = \mathbb{C} - \rho(x)$'dir. Herhangi bir $\lambda \in \sigma(x)$ sayısına x'in bir *spektral değeri* denir, [9, s.396].

O halde $x \in A$ elemanının spektral değerleri $\lambda e - x$'i terslenemez yapan bu λ değerleridir.

Eğer X bir kompleks Banach uzayı ise $B(X)$ bir Banach cebiridir, dolayısıyla Tanım 1.2.20 uygulanabilir. Böylece görülmektedir ki Tanım 1.2.20 ile Tanım 1.2.1 birbiri ile örtüşür.

2. SKALER POISSON ÇEKİRDEĞİ

Bu bölümde öncelikle iki boyuttaki skaler Poisson çekirdeği kavramının ortaya çıkışını ele alacağız.

Birinci kesimde bu kavramla ilgili bazı çalışmaları inceleyeceğiz. Bu çalışmaların ilki bize skaler Poisson çekirdeğine bağlı bir integral eşitliğinin farklı bir ispatını sunmaktadır. Bir diğer çalışmada ise skaler Poisson çekirdeğinin bazı kuvvetlerine bağlı bir integralin çözümü yer almaktadır. Bunların ardından her iki integral eşitliğinin genellemelerinden bahsedeceğiz.

İkinci kesimde ise skaler Poisson çekirdeğinin yeni bir genellemesini tanımlayıp buna bağlı olarak elde ettiğimiz bazı sonuçları ele alacağız.

2.1 Skaler Poisson Çekirdeği

f fonksiyonu, orjin merkezli pozitif yönlü bir C_0 çemberinin içinde ve üzerinde analitik olsun.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(s)ds}{s-z} \tag{2.1.1}$$

Cauchy integral formülü, [3, 4, 10], f fonksiyonunun C_0 içindeki herhangi bir z noktasındaki değerini, f'nin C_0 üzerindeki s noktalarında aldığı değerler yardımıyla ifade eder. Bu kesimde (2.1.1) formülünden, f fonksiyonunun reel kısmı için karşılık gelen bir formül elde edeceğiz ve bu sonucu Dirichlet probleminin birim disk için çözümünde kullanacağız.

r_0, C_0'ın yarıçapını belirtsin ve $0 < r < r_0$ olmak üzere $z = re^{i\theta}$ alalım. Sıfırdan farklı olan z noktasının çembere göre inversi, z ve orjinden geçen ışın üzerinde bulunan ve $|z_1||z| = r_0^2$ koşulunu sağlayan z_1 noktasıdır. Böylece eğer s, C_0 üzerinde bir nokta ise

$$z_1 = \frac{r_0^2}{r} e^{i\theta} = \frac{r_0^2}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}} \tag{2.1.2}$$

olur. z_1, C_0 çemberinin dışında olduğundan (2.1.1)'deki integrandda z yerine z_1 alınırsa Cauchy-Goursat teoremi, [3], gereği integralin değeri sıfır bulunur. Bundan dolayı

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \left(\frac{1}{s-z} - \frac{1}{s-z_1} \right) f(s)ds$$

yazılabilir. C_0 için $s = r_0 e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ kutupsal gösterimi kullanıldığında

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-z_1} \right) f(s)dt$$

olur. Burada $r_0 e^{it}$ yerine sadelik için s kullanılmıştır.

Dikkat edilirse parantez içindeki çarpan, (2.1.2) ifadesinin son kısmına göre

$$\frac{s}{s-z} - \frac{1}{1-(\bar{s}/\bar{z})} = \frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = \frac{r_0^2 - r^2}{|s-z|^2} \tag{2.1.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle (2.1.1) Cauchy integral formülünün bir başka ifadesi, $0 < r < r_0$ iken

$$f(re^{i\theta}) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_0 e^{it})}{|s-z|^2} dt \tag{2.1.4}$$

olur. Bu ifade $r = 0$ iken de geçerlidir ve bu durumda

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_0 e^{it})dt$$

biçimine gelir ki bu, (2.1.1) denkleminin $z = 0$ için kutupsal biçimidir.

Diğer taraftan,

$$|s-z|^2 = r_0^2 - 2r_0 r \cos(t-\theta) + r^2 \tag{2.1.5}$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla eğer u, f analitik fonksiyonunun reel kısmı ise (2.1.4) formülünden

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0{}^2-r^2)u(r_0,t)}{r_0{}^2-2r_0r\cos(t-\theta)+r^2}dt \qquad (r<r_0) \tag{2.1.6}$$

bulunur. Buna $r=r_0$ çemberi ile sınırlanan açık diskte u harmonik fonksiyonu için *Poisson integral formülü* denir.

(2.1.6) formülü, $u(r_0,t)$'den $u(r,\theta)$'ya bir doğrusal integral dönüşümü tanımlar. Bu dönüşümün çekirdeği, $1/(2\pi)$ çarpanı hariç, reel değerli

$$P(r_0,r,t-\theta)=\frac{r_0{}^2-r^2}{r_0{}^2-2r_0r\cos(t-\theta)+r^2} \tag{2.1.7}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon *Poisson çekirdeği* olarak bilinir. (2.1.5) eşitliği gereği ayrıca

$$P(r_0,r,t-\theta)=\frac{r_0{}^2-r^2}{|s-z|^2} \tag{2.1.8}$$

eşitliği de yazılabilir. $r<r_0$ olduğundan P'nin pozitif bir fonksiyon olduğu açıktır. Üstelik $\bar{z}/(\bar{s}-\bar{z})$ ve bunun kompleks eşleniği olan $z/(s-z)$'nin reel kısımları aynı olduğundan (2.1.3)'teki ikinci eşitlikten

$$P(r_0,r,t-\theta)=\operatorname{Re}\left(\frac{s}{s-z}+\frac{z}{s-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{s+z}{s-z}\right) \tag{2.1.9}$$

bulunur. Böylece C_0 üzerindeki sabit tutulan her bir s için $P(r_0,r,t-\theta)$, C_0 içindeki r ve θ'nın bir harmonik fonksiyonudur. (2.1.7) eşitliğinden görülmektedir ki $P(r_0,r,t-\theta)$, $t-\theta$'nın bir çift periyodik fonksiyonudur ve periyodu 2π'dir. Ayrıca $r=0$ iken değeri 1'dir.

(2.1.6) Poisson integral formülü,

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,t-\theta)u(r_0,t)dt \qquad (r<r_0) \tag{2.1.10}$$

şeklinde yazılabilir. $f(z)=u(r,\theta)=1$ iken (2.1.10) denklemi, P'nin

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,t-\theta)\,dt=1 \qquad (r<r_0) \tag{2.1.11}$$

özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Özel halde $r_0 = 1$ alınırsa birim disk için Poisson çekirdeği

$$P(1,r,t-\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} \overset{tn}{=} P_{r,t}(e^{i\theta}) \tag{2.1.12}$$

olarak elde edilir.

Bu eşitlik daha sade olarak

$$P(r,\theta) \overset{tn}{=} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \tag{2.1.13}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Biz bundan böyle (2.1.7) Poisson çekirdeğinin (2.1.12) ve (2.1.13)'teki ifadelerini kullanacağız ve bunları *skaler Poisson çekirdeği* olarak adlandıracağız.

Dikkat edilirse (2.1.7),

$$P(r_0,r,t-\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(t-\theta)$$

serisi yardımıyla da ifade edilebilir.

Şimdi (2.1.13) yardımıyla Dirichlet probleminin D birim diski için çözümünü ifade edelim.

2.1.1 Teorem: $f:\partial D \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(i) $z \in \partial D$ için $u(z) = f(z)$

(ii) u, D'de harmonik

olacak şekilde bir $u:\overline{D} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. Üstelik u tektir ve $0 \le r < 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ için

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta - t) f(e^{it})\,dt$$

formülü ile tanımlanır, [4, s.257].

Şimdi (2.1.11) integral eşitliğinin [11] numaralı kaynakta yer alan farklı bir ispatını vereceğiz. Ancak sadelik için (2.1.13)'ü ele alacağız. Bu ispat metodunu Teorem 3.1.6'da kullanacağız.

2.1.2 Teorem: $0 \le r < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 1 \tag{2.1.14}$$

olur.

İspat: Öncelikle yukarıdaki (2.1.14) integral eşitliğinin sol tarafını $F(r)$ ile gösterelim. Bu durumda $F(r)$, $0 \le r < 1$ iken r'ye bağlı sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $F(0) = 1$ olduğu da açıktır.

Şimdi,

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P(r,\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} P(r,x)dx$$

yazalım. İkinci integralde $x = \theta + \pi$ değişken değişimi yapılmasının ardından iki integral birleştirildiğinde

$$F(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-r^4}{(1+r^2)^2 - 4r^2\cos^2\theta} d\theta$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$(1+r^2)^2 - 4r^2\cos^2\theta = 1 - 2r^2(2\cos^2\theta - 1) + r^4$$

ve

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

eşitliklerini göz önüne alalım. Bu durumda, $\phi = 2\theta$ değişken değişimi ile

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^4}{1-2r^2\cos\phi + r^4} d\phi = F(r^2)$$

bulunur.

Benzer şekilde $F(r)$'nin tanımı gereği

$$F(r^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r^2,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^4}{1-2r^2\cos\theta + r^4} d\theta$$

yazabiliriz. Bu son integrale yukarıdaki yöntem uygulandığında

$$F(r^2) = F(r^4)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$F(r) = F(r^{2^n}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bundan dolayı, eğer $0 \leq r < 1$ ise

$$F(r) = \lim_{n\to\infty} F(r^{2^n}) = F(0) = 1$$

elde edilir. Böylece (2.1.14) ispatlanmış olur.

Son olarak, dikkat edilirse $0 < r \neq 1$ ise $F(r) = -F(1/r)$ eşitliği sağlanır. Bu sonuç ve (2.1.14), bize

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = -1, \qquad 1 < r$$

eşitliğini verir. ◊

Şimdi Teorem 2.1.2'deki integralde $P(r,\theta)$ yerine $P(r,\theta)$'nın bazı kuvvetlerinin alınması durumunda elde edilen integralin çözümünü vereceğiz.

2.1.3 Teorem: Eğer $x = 2r/(1+r^2)$ ve $n = 0,1,2,\ldots$ ise

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P^{n+1}(r,\theta)d\theta = \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^n}{(1-x^2)^{1/2}}\right) \tag{2.1.15}$$

olur, [6].

Özetleyecek olursak, D birim diski için skaler Poisson çekirdeği

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$$

şeklinde tanımlıdır ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$$

integral eşitliğini sağlar. Burada r, $0 \leq r < 1$ özelliğinde bir reel sayıdır. (2.1.13) ayrıca

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$$

şeklinde de yazılabilir.

Diğer taraftan,

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\theta + a^2} \qquad (-1 < a < 1)$$

eşitliği göz önüne alınırsa (2.1.13)'ün, $-1 < r < 1$ özelliğindeki reel sayılar için de geçerli olduğu görülür. Yani

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} \qquad (-1 < r < 1) \tag{2.1.16}$$

eşitliği geçerlidir ve dolayısıyla (2.1.16) için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)\,d\theta = 1 \tag{2.1.17}$$

integral eşitliği sağlanır.

Eğer (2.1.13) yerine (2.1.12) kullanılırsa, $-1 < r < 1$ özelliğindeki reel sayılar için bu kez

$$P_{r,t}(e^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} = \frac{1-r^2}{(1-re^{it}e^{-i\theta})(1-re^{-it}e^{i\theta})} \tag{2.1.18}$$

elde edilir ve (2.1.18) için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{r,t}(e^{i\theta})\,dt = 1$$

integral eşitliği sağlanır.

Şimdi amacımız ilk olarak (2.1.16) ve (2.1.17) eşitliklerinin genellemelerini vermektir.

2.1.4 Tanım: a ve b, sırasıyla $|a| < 1$ ve $|b| < 1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$Q(\theta;a,b) \overset{tn}{=} \frac{1-ab}{(1-ae^{i\theta})(1-be^{-i\theta})} \tag{2.1.19}$$

tanımlanır, [7].

2.1.5 Uyarı: Eğer (2.1.19)'da $a = r$ ve $b = r$ alınırsa (2.1.19)'un (2.1.16)'nın bir genellemesi olduğu görülür, [7].

2.1.6 Teorem: a ve b, sırasıyla $|a|<1$ ve $|b|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(\theta;a,b)d\theta = 1 \tag{2.1.20}$$

integral eşitliği sağlanır, [7].

2.1.7 Uyarı: (2.1.20)'de $a=r$ ve $b=r$ alınırsa (2.1.20)'nin (2.1.17)'nin bir genellemesi olduğu görülür, [7].

2.1.8 Uyarı: Dikkat edilirse (2.1.18)'in genellemesi,

$$Q_{a,b,t}(e^{i\theta}) = \frac{1-ab}{(1-ae^{it}e^{-i\theta})(1-be^{-it}e^{i\theta})} \tag{2.1.21}$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi de (2.1.19) ve (2.1.20)'nin genellemelerini vereceğiz.

2.1.9 Tanım: a, b, c ve d, sırasıyla $|a|<1$, $|b|<1$, $|c|<1$ ve $|d|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$R(\theta;a,b,c,d) = \frac{L(a,b,c,d)}{(1-ae^{i\theta})(1-be^{-i\theta})(1-ce^{i\theta})(1-de^{-i\theta})} \tag{2.1.22}$$

tanımlanır; burada

$$L(a,b,c,d) \overset{tn}{=} \frac{(1-ab)(1-ad)(1-bc)(1-cd)}{1-abcd}$$

dir, [7].

2.1.10 Uyarı: Eğer (2.1.22)'de $c=0$ ve $d=0$ alınırsa (2.1.22)'nin (2.1.19)'un bir genellemesi olduğu görülür, [7].

2.1.11 Teorem: a, b, c ve d, sırasıyla $|a|<1$, $|b|<1$, $|c|<1$ ve $|d|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(\theta;a,b,c,d)d\theta = 1 \tag{2.1.23}$$

olur, [7].

2.1.12 Sonuç: Eğer Teorem 2.1.11'de $c = a$ ve $d = b$ alınırsa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(\theta;a,b)^2\, d\theta = \frac{1+ab}{1-ab}$$

elde edilir; burada a ve b, sırasıyla $|a|<1$ ve $|b|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$Q(\theta;a,b) = \frac{1-ab}{(1-ae^{i\theta})(1-be^{-i\theta})}$$

dır, [7].

Haruki ve Rassias, Teorem 2.1.6 ve Sonuç 2.1.12'den hareketle aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

2.1.13 Tanım: a ve b, sırasıyla $|a|<1$ ve $|b|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$I_n \overset{tn}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(\theta;a,b)^{n+1}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-ab}{(1-ae^{i\theta})(1-be^{-i\theta})}\right)^{n+1} d\theta \quad (n = 0,1,\ldots) \qquad (2.1.24)$$

tanımlanır, [7].

Şimdi, Teorem 2.1.6 ve Sonuç 2.1.12 göz önüne alındığında

$$I_0 = 1 \qquad (2.1.25)$$

ve

$$I_1 = \frac{1+ab}{1-ab} \qquad (2.1.26)$$

elde edilir.

Bunun sonucunda Haruki ve Rassias aşağıdaki Açık Problemi bırakmışlardır.

Açık Problem: $n = 2, 3, 4, \ldots$ için I_n'in hesaplanmasıdır, [7].

Aşağıdaki teorem bize bu açık problemin çözümünü verir.

2.1.14 Teorem: a ve b sırasıyla $|a|<1$ ve $|b|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı ve $n=0,1,2,\dots$ olmak üzere (2.1.24)'de tanımlanan I_n'in değeri,

$$I_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{(2n-j)!}{j!\,((n-j)!)^2}\left(\frac{ab}{1-ab}\right)^{n-j} \tag{2.1.27}$$

olur, [8].

2.1.15 Uyarı: (2.1.27)'de $n=0$ ve $n=1$ alınırsa sırasıyla (2.1.25) ve (2.1.26) elde edilir, [8].

2.2 Skaler Poisson Çekirdeğinin Yeni Bir Genellemesi

Şimdi benzer şekilde (2.1.22) ve (2.1.23)'ün yeni genellemelerini vereceğiz, [1].

2.2.1 Tanım: x, y, z, t, u ve v, $|x|<1$, $|y|<1$, $|z|<1$, $|t|<1$, $|u|<1$ ve $|v|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$S(\theta;x,y,z,t,u,v)=\frac{L(x,y,z,t,u,v)}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})(1-ze^{i\theta})(1-te^{-i\theta})(1-ue^{i\theta})(1-ve^{-i\theta})} \tag{2.2.1}$$

tanımlayalım; burada

$$L(x,y,z,t,u,v)\overset{tn}{=}\frac{(1-xy)(1-xt)(1-xv)(1-yz)(1-yu)(1-zt)(1-zv)(1-tu)(1-uv)}{K(x,y,z,t,u,v)}$$

ve

$$\begin{aligned}K(x,y,z,t,u,v)=1&-(xz+xu+zu)(yt+yv+tv)\\&+xzu\,[y^2(t+v)+t^2(y+v)+v^2(y+t)\\&+ytv\,[x^2(z+u)+z^2(x+u)+u^2(x+z)\\&-(x^2zu+xz^2u+xzu^2)(y^2tv+yt^2v+ytv^2)\\&+4xyztuv+x^2y^2z^2t^2u^2v^2\end{aligned}$$

dir.

2.2.2 Not: Eğer (2.2.1)'de $u=0$ ve $v=0$ alınırsa (2.2.1)'in (2.1.22)'nin bir genellemesi olduğu görülür.

Bu yeni tanıma bağlı olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

2.2.3 Teorem: x, y, z, t, u ve v, $|x|<1$, $|y|<1$, $|z|<1$, $|t|<1$, $|u|<1$ ve $|v|<1$ özelliğinde birer kompleks sayı olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta; x, y, z, t, u, v)\,d\theta = 1$$

olur.

İspat: Öncelikle

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})(1-ze^{i\theta})(1-te^{-i\theta})(1-ue^{i\theta})(1-ve^{-i\theta})}\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta})^2}{(1-xe^{i\theta})(e^{i\theta}-y)(1-ze^{i\theta})(e^{i\theta}-t)(1-ue^{i\theta})(e^{i\theta}-v)}ie^{i\theta}d\theta\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

elde edilir. Eğer $w=e^{i\theta}$ değişken değişimi yapılırsa

$$ie^{i\theta}d\theta = dw \tag{2.2.3}$$

olur. Şimdi

$$f(w)=\frac{w^2}{(1-xw)(w-y)(1-zw)(w-t)(1-uw)(w-v)} \tag{2.2.4}$$

diyelim. Dikkat edilirse $f(w)$ fonksiyonu $w=y$, $w=t$ ve $w=v$ noktaları hariç $|w|\le 1$'de analitiktir; bu noktaların her biri $f(w)$'nun bir kutup noktasıdır.

Bu kutup noktaları için beş durum söz konusudur:

1) $y\ne t, t\ne v, y\ne v$

2) $y=t\ne v$

3) $y=v\ne t$

4) $t=v\ne y$

5) $y=t=v$

Şimdi, sırasıyla bu durumları inceleyeceğiz.

1. Durum: $y \neq t, t \neq v, y \neq v$ olsun.

Bu durumda (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.4) gereği

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})(1-ze^{i\theta})(1-te^{-i\theta})(1-ue^{i\theta})(1-ve^{-i\theta})}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)dw\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

elde edilir; burada $|w|=1$ birim çemberi boyunca $f(w)$ fonksiyonunun integrali pozitif yöndedir.

R_1, R_2 ve R_3, $f(w)$ fonksiyonunun sırasıyla $w=y$, $w=t$ ve $w=v$ noktalarındaki rezidülerini belirtsin. Dikkat edilirse bu noktaların her biri $f(w)$ fonksiyonunun birer basit kutbudur. Bu durumda rezidü teoremi, [3, 10], gereği

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)dw = R_1 + R_2 + R_3 \tag{2.2.6}$$

elde edilir. Şimdi R_1, R_2 ve R_3 rezidülerini hesaplayalım. Sırasıyla

$$\begin{aligned}R_1 &= \lim_{w\to y}[(w-y)f(w)]\\&=\lim_{w\to y}\frac{w^2}{(1-xw)(1-zw)(w-t)(1-uw)(w-v)}\\&=\frac{y^2}{(1-xy)(1-zy)(y-t)(1-uy)(y-v)},\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned}R_2 &= \lim_{w\to t}[(w-t)f(w)]\\&=\lim_{w\to t}\frac{w^2}{(1-xw)(w-y)(1-zw)(1-uw)(w-v)}\\&=\frac{t^2}{(1-xt)(t-y)(1-zt)(1-ut)(t-v)}\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

ve

$$\begin{aligned}R_3 &= \lim_{w\to v}[(w-v)f(w)]\\&=\lim_{w\to v}\frac{w^2}{(1-xw)(w-y)(1-zw)(w-t)(1-uw)}\\&=\frac{v^2}{(1-xv)(v-y)(1-zv)(v-t)(1-uv)}\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

bulunur.

O halde (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) ve (2.2.9)'dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)dw = \frac{1}{L(x,y,z,t,u,v)} \tag{2.2.10}$$

elde edilir.

Böylece (2.2.1), (2.2.5) ve (2.2.10)'dan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta;x,y,z,t,u,v)d\theta = 1$$

sonucuna ulaşılır.

2. Durum: $y = t \neq v$ olsun.

Bu durumda (2.2.4),

$$f(w) = \frac{w^2}{(1-xw)(w-y)^2(1-zw)(1-uw)(w-v)} \tag{2.2.11}$$

biçimindedir.

O halde (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.11) gereği

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})(1-ze^{i\theta})(1-te^{-i\theta})(1-ue^{i\theta})(1-ve^{-i\theta})} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})^2(1-ze^{i\theta})(1-ue^{i\theta})(1-ve^{-i\theta})} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)dw
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

elde edilir; burada $|w| = 1$ birim çemberi boyunca $f(w)$ fonksiyonunun integrali pozitif yöndedir.

Dikkat edilirse $f(w)$, $w = y$ ve $w = v$ noktaları hariç $|w| \leq 1$'de analitik bir fonksiyondur. Ayrıca f, $w = y$'de bir çift katlı kutba ve $w = v$'de ise bir basit kutba sahiptir.

$f(w)$'nun $w = y$'deki rezidüsüne R_1 ve $w = v$'deki rezidüsüne R_2 diyelim. Rezidü teoremi, [3, 10], gereği

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)dw = R_1 + R_2 \tag{2.2.13}$$

olur.

Önce R_1'i hesaplayalım. Cauchy türev formülü, [3, 10], gereği

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{w^2}{(1-xw)(1-zw)(1-uw)(w-v)}\Big/(w-y)^2\, dw \\
&= \left[\frac{d}{dw}\left(\frac{w^2}{(1-xw)(1-zw)(1-uw)(w-v)}\right)\right]_{w=y} \qquad (2.2.14)\\
&= \frac{y\left[2+\dfrac{xy}{1-xy}+\dfrac{zy}{1-zy}+\dfrac{yu}{1-yu}-\dfrac{y}{y-v}\right]}{(1-xy)(1-zy)(1-uy)(y-v)}
\end{aligned}
$$

bulunur.

R_2 hesaplandığında ise

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \lim_{w\to v}\left[(w-v)f(w)\right] \\
&= \lim_{w\to v}\frac{w^2}{(1-xw)(w-y)^2(1-zw)(1-uw)} \qquad (2.2.15)\\
&= \frac{v^2}{(1-xv)(v-y)^2(1-zv)(1-uv)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

O halde (2.2.13), (2.2.14) ve (2.2.15) gereği

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)dw &= \frac{K(x,y,z,y,u,v)}{(1-xy)^2(1-zy)^2(1-yu)^2(1-xv)(1-uv)(1-zv)} \\
&= \frac{1}{L(x,y,z,y,u,v)} \qquad (2.2.16)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (2.2.1), (2.2.12) ve (2.2.16) gereği

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta; x,y,z,y,u,v)d\theta = 1$$

olur.

3. Durum ve 4. Durum:

3. ve 4. durumlar için sırasıyla

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta; x,y,z,t,u,y)d\theta = 1$$

ve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta; x, y, z, t, u, t)\,d\theta = 1$$

integral eşitliklerinin ispatları 2. durumun ispatı ile aynıdır.

5. Durum: $y = t = v$ olsun.

Bu durumda (2.2.4),

$$f(w) = \frac{w^2}{(1-xw)(w-y)^3(1-zw)(1-uw)} \tag{2.2.17}$$

biçimindedir. Böylece (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.17) gereği

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})(1-ze^{i\theta})(1-te^{-i\theta})(1-ue^{i\theta})(1-ve^{-i\theta})} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})^3(1-ze^{i\theta})(1-ue^{i\theta})} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)\,dw
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

elde edilir; burada $|w| = 1$ birim çemberi boyunca $f(w)$ fonksiyonunun integrali pozitif yöndedir.

$f(w)$, $w = y$ noktası hariç $|w| \le 1$'de analitik bir fonksiyondur. Dikkat edilirse $f(w)$, $w = y$'de 3. mertebeden bir kutba sahiptir. $f(w)$'nun $w = y$'deki rezidüsüne R diyelim. Bu durumda rezidü teoremi, [3, 10], gereği

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)\,dw = R$$

olur. O halde R'yi hesaplamalıyız: Cauchy türev formülü, [3, 10], gereği

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(w)\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{w^2}{(1-xw)(1-zw)(1-uw)} \Big/ (w-y)^3\,dw \\
&= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dw^2}\left(\frac{w^2}{(1-xw)(1-zw)(1-uw)}\right)\right]_{w=y} \\
&= \frac{K(x, y, z, y, u, y)}{(1-xy)^3(1-zy)^3(1-uy)^3} \\
&= \frac{1}{L(x, y, z, y, u, y)}
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

elde edilir. Bu durumda (2.2.1), (2.2.18) ve (2.2.19) gereği

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta; x, y, z, y, u, y)d\theta = 1$$

bulunur.

Böylece ispat biter. ◊

2.2.4 Sonuç: Eğer Teorem 2.2.3'te $z = x$, $u = x$ ve $t = y$, $v = y$ alınırsa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-xy)^3}{(1-xe^{i\theta})^3(1-ye^{-i\theta})^3}d\theta = \frac{1+4xy+x^2y^2}{(1-xy)^2}$$

elde edilir.

İspat: Teorem 2.2.3 gereği

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta; x, y, z, t, u, v)d\theta$$

olduğunu biliyoruz. O halde $z = x$, $u = x$ ve $t = y$, $v = y$ için

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta; x, y, x, y, x, y)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{L(x, y, x, y, x, y)}{(1-xe^{i\theta})^3(1-ye^{-i\theta})^3}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-xy)^9}{(1-xe^{i\theta})^3(1-ye^{-i\theta})^3 K(x, y, x, y, x, y)}d\theta \\
&= \frac{(1-xy)^6}{K(x, y, x, y, x, y)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-xy)^3}{(1-xe^{i\theta})^3(1-ye^{-i\theta})^3}d\theta \\
&= \frac{(1-xy)^6}{(1-xy)^4(1+4xy+x^2y^2)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-xy)^3}{(1-xe^{i\theta})^3(1-ye^{-i\theta})^3}d\theta \\
&= \frac{(1-xy)^2}{(1+4xy+x^2y^2)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-xy)^3}{(1-xe^{i\theta})^3(1-ye^{-i\theta})^3}d\theta
\end{aligned}$$

elde edilir; burada

$$K(x, y, x, y, x, y) = (1-xy)^4(1+4xy+x^2y^2)$$

dir. Böylece

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-xy)^3}{(1-xe^{i\theta})^3(1-ye^{-i\theta})^3}d\theta = \frac{1+4xy+x^2y^2}{(1-xy)^2}$$

bulunur. ◊

3. OPERATÖR-DEĞERLİ POISSON ÇEKİRDEĞİ

Bu bölümde operatör-değerli Poisson çekirdeği kavramı üzerine yapılan bazı çalışmaları ele alacağız.

Operatör-değerli Poisson çekirdeği kavramı skaler Poisson çekirdeği kavramı yardımı ile tanımlanmaktadır. Operatör-değerli Poisson çekirdeği ile skaler Poisson çekirdeği arasındaki bağlantı [2] numaralı kaynakta ayrıntılı olarak yer almaktadır.

Biz bu tez çalışmasında operatör-değerli Poisson çekirdeği için elde edilen bazı sonuçları inceleyeceğiz, [2]. Bu sonuçlardan biri operatör-değerli Poisson çekirdeğinin sağladığı $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T)dt = I$ integral eşitliğidir. Bu eşitlik, $p(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{it})K_{r,t}(T)dt, \quad p \in \mathbb{C}[z]_{|\overline{D}}$ integral eşitliğinde p polinomunun 1'e özdeş olması durumunda elde edilir.

Bu bölümdeki ilk amacımız bu integral eşitliğinin ispatını bir polinomdan bağımsız olarak vermektir. Böylece yukarıda bahsettiğimiz kısıtlama ortadan kalkmış olur. İkinci amacımız ise operatör-değerli Poisson çekirdeğinin bir genellemesini vermektir. Böylece hem [2]'de elde edilen bazı sonuçlar genelleştirilmiş olur hem de ikinci bölümde skaler Poisson çekirdeği için verilen ilk genellemenin operatör-değerli versiyonu elde edilir.

Bundan böyle bir kompleks Hilbert uzayını $\mathcal{H}$ ile, $\mathcal{H}$'dan $\mathcal{H}$'ya bütün sınırlı doğrusal operatörlerin cebirini $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ile ve bunun birimini I ile göstereceğiz.

3.1 Operatör-değerli Poisson Çekirdeği

Hatırlanacak olursa, $re^{it} \in D$ için skaler Poisson çekirdeği $P_{r,t}$,

$$\begin{aligned} P_{r,t}(e^{i\theta}) &= \frac{1}{1-re^{it}e^{-i\theta}} + \frac{1}{1-re^{-it}e^{i\theta}} - 1 \\ &= \frac{1-r^2}{\left|1-re^{it}e^{-i\theta}\right|^2} \\ &= \sum_{n\geq 0} r^n e^{\mathrm{int}} e^{-in\theta} + \sum_{n\geq 0} r^n e^{-\mathrm{int}} e^{in\theta} - 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Operatör-değerli Poisson çekirdeği ise $P_{r,t}(e^{i\theta})$ yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

3.1.1 Tanım: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ ve $re^{it} \in D$ için *operatör-değerli Poisson çekirdeği* $K_{r,t}(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

$$K_{r,t}(T) = (I - re^{it}T^*)^{-1} + (I - re^{-it}T)^{-1} - I \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır, [2].

3.1.2 Not: Dikkat edilirse

$$(K_{r,t}(T))^* = K_{r,t}(T)$$

ve

$$K_{r,-t}(T) = K_{r,t}(T^*)$$

olur, [2].

Skaler Poisson çekirdeği için olduğu gibi operatör-değerli Poisson çekirdeği için de aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

3.1.3 Yardımcı Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ için

$$K_{r,t}(T) = (I - re^{it}T^*)^{-1}(I - r^2T^*T)(I - re^{-it}T)^{-1} \tag{3.1.2}$$

$$= (I - re^{-it}T)^{-1}(I - r^2TT^*)(I - re^{it}T^*)^{-1} \tag{3.1.3}$$

$$= \sum_{n\geq 0} r^n e^{itn} T^{*n} + \sum_{n\geq 0} r^n e^{-itn} T^n - I \tag{3.1.4}$$

olur, [2].

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve bir $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]_{|\overline{D}}$ polinomu için $p(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,

$$p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

şeklinde tanımlanır.

Aslında, $0 \leq r < 1$ için $p(rT)$'yi tanımlamanın bir başka yolu daha vardır. O da operatör-değerli Poisson çekirdeğini kullanmaktır.

3.1.4 Yardımcı Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun. Her $r \in [0,1)$ için

$$p(rT) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(e^{it}) K_{r,t}(T)\,dt, \quad p \in \mathbb{C}[z]_{|\overline{D}}$$

elde edilir, [2].

Bir $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatörünün daralma dönüşümü olmasını karakterize etmenin de başka bir yolu daha vardır. O da yine operatör-değerli Poisson çekirdeğini kullanmaktır.

3.1.5 Yardımcı Teorem: $\|T\| \leq 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\sigma(T) \subset \overline{D}$ ve her $re^{it} \in D$ için $K_{r,t}(T) \geq 0$ olmasıdır, [2].

Yardımcı Teorem 3.1.4'te p polinomunun 1'e özdeş olması durumunda aşağıdaki teoremi elde ederiz.

3.1.6 Teorem: $0 \le r < 1$ ve $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T)dt = I \tag{3.1.5}$$

olur.

Şimdi amacımız Teorem 2.1.2'deki ispat yönteminin benzerini kullanarak (3.1.5)'in ispatını farklı bir şekilde vermektir. Böylece (3.1.5)'deki integral eşitliğinin bir polinomdan bağımsız olarak elde edilebileceğini ispatlamış olacağız.

İspat: $re^{it} \in D$, $0 \le r < 1$ ve $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun.

$$F(rT) \overset{tn}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T)dt \tag{3.1.6}$$

tanımlayalım. Bu durumda F sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $r = 0$ için $F(0) = I$ olduğu açıktır.

$$F(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_{r,t}(T)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} K_{r,x}(T)dx$$

yazalım. İkinci integralde $x = t + \pi$ değişken değişimi yapılıp (3.1.1) kullanılarak

$$F(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(I - re^{it}T^*)^{-1} + (I - re^{-it}T)^{-1} - I]dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(I + re^{it}T^*)^{-1} + (I + re^{-it}T)^{-1} - I]dt$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} F(rT) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(I - re^{it}T^*)^{-1} + (I + re^{it}T^*)^{-1}]dt \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(I - re^{-it}T)^{-1} + (I + re^{-it}T)^{-1}]dt \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2Idt \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$(I - re^{it}T^*)^{-1} + (I + re^{it}T^*)^{-1} = 2(I - r^2e^{2it}T^{*2})^{-1} \tag{3.1.8}$$

ve

$$(I - re^{-it}T)^{-1} + (I + re^{-it}T)^{-1} = 2(I - r^2e^{-2it}T^2)^{-1} \tag{3.1.9}$$

eşitliklerini göz önüne alalım. Böylece (3.1.8) ve (3.1.9) gereği (3.1.7),

$$F(rT) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [(I - r^2 e^{2it} T^{*2})^{-1} + (I - r^2 e^{-2it} T^2)^{-1} - I]\, dt$$

biçimine gelir. Yukarıdaki integralde $\phi = 2t$ değişimi yapılırsa

$$F(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(I - r^2 e^{i\phi} T^{*2})^{-1} + (I - r^2 e^{-i\phi} T^2)^{-1} - I]\, d\phi$$

olur. (3.1.1) gereği

$$F(rT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r^2,\phi}(T^2)\, d\phi \qquad (3.1.10)$$

yazılabilir. (3.1.6) ve (3.1.10) göz önüne alınırsa

$$F(rT) = F(r^2 T^2) \qquad (3.1.11)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.1.6) gereği

$$F(r^2 T^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r^2,t}(T^2)\, dt$$

yazabiliriz. Bu son integrale yukarıdaki yöntem uygulandığında

$$F(r^2 T^2) = F(r^4 T^4)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$F(rT) = F((rT)^{2^n}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

eşitliğine ulaşılır. $\|rT\| < 1$ olduğundan

$$F(rT) = \lim_{n\to\infty} F((rT)^{2^n}) = F(0) = I$$

elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır. ◊

3.1.7 Sonuç: $F(rT^*) = I$ ’dır.

Tanım 3.1.1 kullanılarak aşağıdaki yardımcı teoremin ispatı kolayca elde edilebilir.

3.1.8 Yardımcı Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun. Eğer T terslenebilir ise $0 < r < 1$ için

$$K_{r^{-1},t}(T^{-1}) = -K_{r,-t}(T)$$

olur.

Buradan aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

3.1.9 Sonuç: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun.

(i) Eğer T terslenebilir ise $0 < r < 1$ için

$$F(r^{-1}T^{-1}) = -F(rT^{*})$$

olur.

(ii) Eğer T bir birimsel operatör ise $0 < r \neq 1$ için

$$F(r^{-1}T^{-1}) = -F(rT^{-1})$$

olur.

İspat: (i) T terslenebilir ve $0 < r < 1$ olsun. (3.1.6) ve (3.1.1) gereği

$$\begin{aligned} -F(rT^{*}) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T^{*})dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(I - re^{it}T)^{-1} + (I - re^{-it}T^{*})^{-1} - I]dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,-t}(T)dt \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Yardımcı Teorem 3.1.8 gereği

$$-F(rT^{*}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r^{-1},t}(T^{-1})dt$$

olur. Böylece (3.1.6) istenilen sonucu verir.

(ii) Eğer T bir birimsel operatör ise (i) gereği $0 < r \neq 1$ için $F(r^{-1}T^{-1}) = -F(rT^{-1})$ elde edilir. ◊

Sonuç 3.1.9'u göz önüne aldığımızda aşağıdaki teoremi elde ederiz.

3.1.10 Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun.

(i) Eğer *T* terslenebilir ise $0 < r < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r^{-1},t}(T^{-1})dt = -I$$

olur.

(ii) Eğer *T* bir birimsel operatör ise $r > 1$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T^{-1})dt = -I$$

olur.

İspat: (i) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r^{-1},t}(T^{-1})dt = F(r^{-1}T^{-1})$ diyelim. Hipotez gereği $0 < r < 1$ ve *T* terslenebilir olduğundan Sonuç 3.1.9-(i) ve Sonuç 3.1.7'den istenilen sonuç elde edilir.

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T^{-1})dt = F(rT^{-1})$ diyelim. Hipotez gereği $r > 1$ ve *T* birimsel operatör olduğundan Sonuç 3.1.9-(ii) ve Sonuç 3.1.7'den istenilen sonuca ulaşılır. ◊

3.2 Operatör-değerli Poisson Çekirdeğinin Yeni Bir Genellemesi

Bu kesimde, (3.1.1)'deki operatör-değerli Poisson çekirdeği tanımının yeni bir genellemesini vereceğiz.

3.2.1 Not: (2.1.12)'deki skaler Poisson çekirdeği $P_{r,t}(e^{i\theta})$'nın tanımı $|r| < 1$ için de geçerli olduğundan (3.1.1)'deki operatör-değerli Poisson çekirdeği $K_{r,t}(T)$'nin tanımı da $|r| < 1$ için geçerlidir. Böylece aşağıdaki tanım ve teoremi elde ederiz.

3.2.2 Tanım: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun. Operatör-değerli Poisson çekirdeği

$$K_{r,t}(T) = (I - re^{it}T^*)^{-1} + (I - re^{-it}T)^{-1} - I \qquad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada r, $|r|<1$ özelliğinde bir reel sayıdır.

3.2.3 Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T)dt = I \tag{3.2.2}$$

elde edilir; burada r, $|r|<1$ özelliğinde bir reel sayıdır.

Bu kesimde (3.2.1) ve (3.2.2)'nin genellemelerini vereceğiz.

3.2.4 Tanım: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun. Operatör-değerli Poisson çekirdeği $K_{r,t}(T)$ 'nin bir genellemesi,

$$Q_{a,b,t}(T) = (I - ae^{it}T^*)^{-1} + (I - be^{-it}T)^{-1} - I \tag{3.2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada a ve b, sırasıyla $|a|<1$ ve $|b|<1$ özelliğinde birer kompleks sayıdır.

3.2.5 Not: Dikkat edilirse $Q_{a,b,t}(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$'dır.

3.2.6 Not: Eğer (3.2.3)'de $a=r$ ve $b=r$ alınırsa görülür ki (3.2.3), (3.2.1)'in bir genellemesidir.

Tanım 3.2.4 yardımıyla aşağıdaki yardımcı teorem kolayca ispatlanır.

3.2.7 Yardımcı Teorem: Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(Q_{a,b,t}(T))^* = Q_{\bar{b},\bar{a},t}(T) = Q_{\bar{a},\bar{b},-t}(T^*)$$

3.2.8 Yardımcı Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ için

$$Q_{a,b,t}(T) = (I - ae^{it}T^*)^{-1}(I - abT^*T)(I - be^{-it}T)^{-1} \tag{3.2.4}$$

$$= (I - be^{-it}T)^{-1}(I - abTT^*)(I - ae^{it}T^*)^{-1} \tag{3.2.5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{itn} T^{*n} + \sum_{n=0}^{\infty} b^n e^{-itn} T^n - I \tag{3.2.6}$$

olur.

İspat: (3.2.3) gereği,

$$\begin{aligned} Q_{a,b,t}(T) &= (I - ae^{it}T^*)^{-1} + (I - be^{-it}T)^{-1} - I \\ &= (I - ae^{it}T^*)^{-1}[I + (I - ae^{it}T^*)(I - be^{-it}T)^{-1} - (I - ae^{it}T^*)] \\ &= (I - ae^{it}T^*)^{-1}[(I - be^{-it}T) + (I - ae^{it}T^*) - (I - ae^{it}T^*)(I - be^{-it}T)](I - be^{-it}T)^{-1} \\ &= (I - ae^{it}T^*)^{-1}(I - abT^*T)(I - be^{-it}T)^{-1} \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.2.4) elde edilir.

Benzer şekilde,

$$Q_{a,b,t}(T) = (I - be^{-it}T)^{-1} + (I - ae^{it}T^*)^{-1} - I$$

eşitliği (3.2.5)'in ispatını verir.

Diğer taraftan, $\|ae^{it}T^*\| < 1$ ve $\|be^{-it}T\| < 1$ olduğundan Teorem 1.1.18 gereği sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{itn} T^{*n} = (I - ae^{it}T^*)^{-1}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n e^{-itn} T^n = (I - be^{-it}T)^{-1}$$

elde edilir. Yukarıdaki son iki eşitlik ve (3.2.3)'ten (3.2.6) elde edilir. ◊

3.2.9 Yardımcı Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun. Bu durumda

$$\|T\| \leq 1 \Leftrightarrow Q_{a,\bar{a},t}(T) \geq 0$$

olur.

Şimdi, (3.2.6) yardımıyla Yardımcı Teorem 3.1.4'e benzer bir sonuç vereceğiz.

3.2.10 Yardımcı Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ olsun. Bu durumda $q(z) \in \mathbb{C}[z]_{|\overline{D}}$ için

$$q(bT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(e^{it})Q_{a,b,t}(T)dt$$

elde edilir; burada a ve b, sırasıyla $|a|<1$ ve $|b|<1$ özelliğinde birer kompleks sayıdır.

İspat: $q(z)=\sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ olsun. (3.2.6) eşitliği kullanılarak ve $m \in \mathbb{Z}-\{0\}$ için $\int_0^{2\pi} e^{imt}dt = 0$ eşitliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(e^{it})Q_{a,b,t}(T)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k b^k T^k\right)dt \\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k b^k T^k \\ &= q(bT)\end{aligned}$$

elde edilir. ◊

3.2.11 Sonuç: Dikkat edilirse q polinomunun 1'e özdeş olması durumunda

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{a,b,t}(T)dt = I \qquad (3.2.7)$$

olur.

Şimdi (3.2.7)'nin ispatını bir polinomdan bağımsız olarak farklı bir şekilde vereceğiz. Bunun için de Riesz-Dunford integralini (Tanım 1.2.14'e bakınız) kullanacağız.

3.2.12 Teorem: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ öyle ki $\sigma(T) \subset \overline{D}$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{a,b,t}(T)dt = I \qquad (3.2.8)$$

elde edilir; burada a ve b, sırasıyla $|a|<1$ ve $|b|<1$ özelliğinde birer kompleks sayıdır.

İspat: (3.2.3) gereği

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{a,b,t}(T)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(I-ae^{it}T^*)^{-1}+(I-be^{-it}T)^{-1}-I]\,dt \tag{3.2.9}$$

elde edilir.

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(I-ae^{it}T^*)^{-1}dt\,, \tag{3.2.10}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(I-be^{-it}T)^{-1}dt \tag{3.2.11}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I\,dt \tag{3.2.12}$$

diyelim. Bu durumda (3.2.10), (3.2.11) ve (3.2.12) gereği (3.2.9),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{a,b,t}(T)dt = I_1 + I_2 - I_3 \tag{3.2.13}$$

biçimindedir. Öncelikle

$$I_3 = I \tag{3.2.14}$$

olduğu açıktır. Şimdi I_1 ve I_2 integrallerini hesaplayalım.

İlk olarak,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(I-ae^{it}T^*)^{-1}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-it}(e^{-it}I-aT^*)^{-1}dt$$

elde edilir. Son integralde $z = e^{-it}$ değişimi yapılırsa

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}(zI-aT^*)^{-1}dz$$

bulunur; burada $|z|=1$ boyunca integral negatif yöndedir. O halde Riesz-Dunford integrali gereği

$$I_1 = I \tag{3.2.15}$$

olur.

Benzer şekilde,

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(I-be^{-it}T)^{-1}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}(e^{it}I-bT)^{-1}dt$$

elde edilir. Eğer $z = e^{it}$ denirse son integral

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (zI - bT)^{-1} dz$$

biçimine gelir; burada $|z| = 1$ boyunca integral pozitif yöndedir. Böylece Riesz-Dunford integrali gereği

$$I_2 = I \tag{3.2.16}$$

olur. Sonuç olarak (3.2.13), (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) gereği (3.2.8) elde edilir. ◊

3.2.13 Not: Eğer (3.2.8)'de $a = r$ ve $b = r$ alınırsa görülür ki (3.2.8), (3.2.2)'nin bir genellemesidir.

3.2.14 Sonuç: Eğer Teorem 3.2.12'de $a = r$ ve $b = r$ alınırsa Teorem 3.2.3 elde edilir. Bundan dolayı Teorem 3.2.12, Teorem 3.2.3'ün bir başka ispatını verir.

3.2.15 Not: Dikkat edilirse Tanım 3.2.4'te verilen $Q_{a,b,t}(T)$, Uyarı 2.1.8'deki $Q_{a,b,t}(e^{i\theta})$'nın operatör-değerli bir biçimidir.

SONUÇ

Tezde elde edilen esas sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. $P(r,\theta)=\dfrac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$ $(-1<r<1)$ skaler Poisson çekirdeği'nin

$$S(\theta;x,y,z,t,u,v)=\frac{L(x,y,z,t,u,v)}{(1-xe^{i\theta})(1-ye^{-i\theta})(1-ze^{i\theta})(1-te^{-i\theta})(1-ue^{i\theta})(1-ve^{-i\theta})}$$

şeklinde yeni bir genellemesi tanımlanmıştır (Tanım 2.2.1).

2. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P(r,\theta)d\theta=1$ integral eşitliğinin

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(\theta;x,y,z,t,u,v)d\theta=1$$

şeklinde yeni bir genellemesi elde edilmiştir (Teorem 2.2.3).

3. Operatör-değerli Poisson çekirdeği $K_{r,t}(T)$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{r,t}(T)dt=I \quad (0\le r<1)$$

integral eşitliğinin farklı bir ispatı verilmiştir. Böylece ilk ispattaki kısıtlama ortadan kaldırılmış olmaktadır (Teorem 3.1.6).

4. T operatörünün terslenebilir olması durumunda $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}K_{r,t}(T)dt$ integralinin değeri araştırılmıştır (Teorem 3.1.10).

5. Tanım 3.2.2'deki operatör-değerli Poisson çekirdeği $K_{r,t}(T)$'nin $Q_{a,b,t}(T)$ ile gösterilen yeni bir genellemesi tanımlanmıştır (Tanım 3.2.4).

6. Bir q polinomu yardımıyla

$$q(bT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(e^{it})Q_{a,b,t}(T)dt$$

integral eşitliği elde edilmiştir (Yardımcı Teorem 3.2.10).

7. Yukarıdaki integral eşitliğinde q polinomunun 1'e özdeş olması durumunda

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{a,b,t}(T)dt = I$$

sonucuna ulaşılmıştır (Sonuç 3.2.11).

8. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_{a,b,t}(T)dt = I$ integral eşitliğinin ispatı bir polinomdan bağımsız olarak farklı bir şekilde verilmiştir (Teorem 3.2.12).

KAYNAKLAR

[1] Bulut, S., "A new generalization of the Poisson kernel", *Math. J. Okayama Univ.* **48** (2006), 173-180.

[2] Chalendar, I., "The operator-valued Poisson kernel and its applications", *Irish Math. Soc. Bull.* **51** (2003), 21-44.

[3] Churchill, R. V. ve Brown, J. W., Complex Variables and Applications, Fifth Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, (1990).

[4] Conway, J. B., Functions of One Complex Variable, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, 11, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1978).

[5] Dunford, N. ve Schwartz, J. T., Linear Operators, Part I, General Theory, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1958).

[6] Galbraith, A. S. ve Green, J. W., "A note on the mean value of the Poisson kernel", *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 314-320.

[7] Haruki, H. ve Rassias, Th. M., "New generalizations of the Poisson kernel", *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **10** (2) (1997), 191-196.

[8] Kim, B., "The solution of an open problem given by H. Haruki and T. M. Rassias", *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **12** (3) (1999), 261-263.

[9] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1989).

[10] Nehari, Z., Conformal Mapping, McGraw-Hill Book Co., New York, (1952).

[11] Taylor, A. E., “A note on the Poisson kernel”, *Amer. Math. Monthly* **57** (1950), 478-479.

[12] Young, N., An Introduction to Hilbert Space, Cambridge University Press, Cambridge, (1988).