T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

GEOMETRİLERİN VE GEOMETRİ ÖĞRETİMİNİN GELİŞİMİ, ÇEŞİTLERİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERYEM ÇILDIR

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR

BALIKESİR, Temmuz- 2007

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

GEOMETRİLERİN VE GEOMETRİ ÖĞRETİMİNİN GELİŞİMİ, ÇEŞİTLERİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERYEM ÇILDIR

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR

Sınav Tarihi: 03.07.2007
Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR (Danışman-ÇOMÜ-FEF)

Prof. Hasan SOYDAN (BAÜ-NEF)

Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ-FEF)

BALIKESİR, Temmuz-2007

ÖZET

GEOMETRİLERİN VE GEOMETRİ ÖĞRETİMİNİN GELİŞİMİ, ÇEŞİTLERİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

Meryem ÇILDIR

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İlköğetim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi/ Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR)
Balıkesir, 2007

Geometri, isminden de anlaşıldığı gibi, ölçmenin pratik bir bilimi olarak ortaya çıkmıştır. Aslında, geometri M.Ö. 2000'li yıllarda Mısır'da kullanılmaktaydı. Mısır'dan, konumları ve düz kenarları, noktalar ve doğrulara idealize eden aksiyomatik sistemi kuran Thales (M.Ö. 640-546) ile Yunanistan'a getirilmiştir. Pythagoras ve onun öğrencileri tarafından da geliştirilmiştir. Hippocrates, birkaç tanım ve varsayıma dayanan önermeler zinciri şeklinde mantıksal bir gösterim girişiminde bulunmuştur. Geometri, dünyada en geniş kabulü gören kitaplardan biri olan Elementler (Türkçesi: Geometrinin Temelleri) kitabıyla Euclid (M.Ö. 300'lerde) tarafından geliştirilmiştir. Bugün okullarda öğretilen geometri, aslında önemsiz birkaç değişiklikle Elementler'in bir parçasıdır.

Euclid diğerlerinden ayrılan V. Postulatı ileri sürmesiyle yeteneğinin büyük gücünü göstermiştir. Euclid'in tanımına göre, düzlemsel olan iki doğru kesişmiyorsa paraleldir. Gauss ve Lobatschewsky bu tanımı değiştirmiştir. Sonuçta bazı farklı varsayımlarda bulunmanın gerekliliği sadece son yüzyılda ortaya çıkmıştır.

Görülüyor ki, yalnız Euclid geometrisinin doğru olduğu inancı bir kuşağı yetiştirmiştir. Biz şimdi çok farklı geometrileri (yani, projektif geometri, hiperbolik geometri, eliptik geometri, afin geometri, Riemann geometrisini) de biliyoruz.

Bu çalışmada, Euclidean ve Euclidean olmayan geometriler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eclidean geometri/ Euclidean olmayan geometri/ projektif geometri/ hiperbolik geometri/ eliptik geometri/ afin geometri/ Riemann geometri.

ABSTRACT

DEVELOPMENT, VARIETY AND COMPARISION OF THE GEOMETRIES AND GEOMETRY EDUCATION

Meryem CILDIR

Balıkesir University, Institute of Science, Department of Primary School Mathematics Education

(M. Sc. Thesis/Supervisor: Prof. Dr. Hasan Basri OZDEMIR)

Balıkesir-Turkey, 2007

Geometry, as we see from its name, began as a practical science of measurement. As such, it was used in Egypt about 2000 B.C. Thence it was brought to Greece by Thales (640-546), who began the process of abstraction by which positions and straight edges are idealized into points and lines. Much progress was made by Pythagoras and his disciples. Hippocrates attempted a logical presentation in the form of a chain of propositions based on a few definitions and assumptions. This was greatly improved by Euclid (about 300 B.C.), whose Elements became one of the most widely read books in the world. The geometry taught in school today is essentially a part of the Elements, with a few unimportant changes.

Euclid showed the great strength of his genius by introducing Postulate V, which is not self-evident like the others. According to Euclid's definition, two lines are parallel if they are coplanar without intersecting. Gauss and Lobatschewsky modified this definition. The necessity of making some such assumptions has been finally established only during the last hundred years.

It seemed to a generation brought up in the belief that Euclid's was the only true geometry. We now know of many different geometries which the name non-Euclidean: projective geometry, hyperbolic geometry, elliptic geometry, affine geometry, Riemann geometry.

In this study was compared Euclidean and non-Euclidean geometries.

Key words: Euclidean geometry/ non-Euclidean geometry/ projective geometry/ hyperbolic geometry/ elliptic geometry/ affine geometry/ Riemann geometry.

İÇİNDEKİLER

2. YÖNTEM

$U = (\{z \mid z{=}x{+}iy,\ y{>}0\})$	üst yarı düzlem
H-metrik	hiperbolik metrik
H-doğru	hiperbolik doğru
H-orta nokta	hiperbolik orta nokta
$g \in PSL(2,\mathbb{R})$	hiperbolik izometri
$\{z \in U \mid \rho(z,z_0) < r\}$	(z_0 merkez, r yarıçap) hiperbolik disk
H-disk	hiperbolik disk
H-merkez	hiperbolik merkez
$\lVert A \rVert$	A nın normu
$\{z \mid \lvert z \rvert < R, R \in \mathbb{R}\}$	Euclid diksi
T_pS	teğet düzlem
$K(p) = \det(dg_p)$	Gauss eğrisi
M	manifold
$\langle , \rangle$	iç çarpım
$\langle u,v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1.u, d\pi_1.v \rangle_p + \langle d\pi_2.u, d\pi_2.v \rangle_q$	Riemann metriği
∇	afin bağıntı
$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k$	kovaryant türev

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Necatibey Eğitim Fakültesi'nde, öncelikle bana destek olan ve bilimsel bir çalışmanın nasıl yapılacağını öğreten Danışman Hocam Prof. Dr. Hasan Basri Özdemir Hocama ve emeği geçen tüm hocalarıma teşekkür ediyorum.

Çalışmalarımda beni yönlendiren, benden ilgi ve yardımlarını esirgemeyen anneme, babama, biricik ablam Fatma Çıldır Pelitoğlu'na ve tüm öğrencilerime teşekkürü bir borç bilirim.

Balıkesir, 2007

Meryem Çıldır

1. GİRİŞ

Geometrik düşünmenin gelişiminin belli aşamalar göstermesi geometri öğretimine bazı güçlükler getirmektedir. Yapılan uluslararası araştırmalar, Türkiye'nin geometri başarısında 38 ülke arasında 31. oluğunu göstermiştir. Ayrıca, Türkiye diğer konu alanlarına göre geometride daha düşük bir başarı göstermiştir [1].

OKS ve ÖSS matematik soruları içerisinde de, öğrenci ve öğretmenlerin en fazla zorlandığı soru tipleri geometri sorularıdır. Bunun başlıca nedenlerinden biri; geometri sorularının geometrik bilgileri içermesinin yanında, çeşitli matematik konularıyla da ilişkili alt yapıda kurulması olabilir. Diğer bir neden olarak da; okullarda tek tip bakış açısıyla verilen geometri bilgisinin, daha geniş bir ufku gerektiren analitik düşünme tarzı karşısında yetersiz kalışı gösterilebilir. Burada, öğretmen faktörü de göz ardı edilmemelidir. Matematik ve geometri gibi daha çok stratejiler üzerine kurulu derslerde kalıcı bir başarı, ancak bir öğretmenin rehberliğinde elde edilebilir.

İyi bir geometri öğretimi için de, matematik öğretmenlerinin;

- geometri konusunda yeterince deneyim ve bilgisinin olması,
- öğreteceği sınıf düzeyinin en az bir ya da iki düzey ilerisinde geometri alan bilgisine sahip olması,
- ileri düzeylere öğrencilerini hazırlayabilmesi gerekir [1].

Öğretmenin bilgisinin, öğretim sürecinin iyileştirilmesinde etkili olduğu bir gerçektir. Burada öğretmenin bilgisi iki önemli unsurdan oluşmaktadır. Bunlar geometri alan bilgisi ve öğrencilerin geometriye ilişkin bilişsel süreçleridir. Öğretmenin geometri bilgisi ve öğrencilerin bilişsel süreçleri hakkındaki bilgileri geliştikçe, neyi nasıl öğrettikleri gözlenebilir şekilde değişmektedir. Bu nedenle, matematik öğretmenleri hem öğretecekleri düzeyin özelliklerini bilmeli hem de ileri düzeylere öğrencileri hazırlayabilmelidir [1]. Günümüz Türkiye'sinde ilköğretim ve ortaöğretim kurumlarında öğretilen geometri, bu konuda sınırlı kalmaktadır.

Bu çalışmada, Türkiye'deki ilköğretim ve ortaöğretim kurumlarında yer alan geometrinin (Eucleides geometrisinin) yanında, var olan diğer geometri çeşitlerinin de hem tarihsel hem de aksiyomatik olarak gelişiminin incelenmesi ve birbirleriyle temel yapılarında karşılaştırılması yapılmıştır. Böylece, özellikle öğrencilerin ufkunun genişletilmesi amaç edinilmiştir.

1.1 Kavramsal Çerçeve

1.1.1 Geometri Nedir?

Geometri sözcüğü Yunanca *geometrien* (*Geo*: yer, *metrien*: ölçmek) sözcüğünden gelmektedir. Geometri adı altında ilk kez ortaya konulan bilgilere göre geometri; "*cisimlerin büyüklük ve biçimlerini inceleyen bilim dalı*"dır [2, s.10-11].

Geometrinin daha çok benimsenen ve Alman Matematikçisi Felix Klein'a ait olan daha genel bir tanımı da şöyledir: S bir cümle, G de S yi kendisine dönüştüren dönüşümlerden meydana gelen bir grup olmak üzere, S cümlesinin G nin elemanları olan dönüşümler altında *değişmez* (invaryant) kalan özeliklerinin incelenmesine *geometri* denir. [2, s.10-11]

Bu tanım geometriyi, cebirsel bir kavram olan bir dönüşümler grubuyla birleştirmek zorunluluğunu ortaya çıkarır. Dönüşümler de genel olarak geometrik kavram olmayan *noktaların koordinatları* yardımıyla formülleştirilebilirler. Bu sebeple, Klein'ın tanımı geometriyi bağımsız ve kendine özgü yöntemlerle incelenebilen bir dal olarak düşünmek fikrine aykırı göründüğünden, geometri alanında çalışan bazı bilim adamları tarafından eleştirilmektedir. Buna karşın, bu tanım genel bir geometri tanımı olarak düşünülebileceği için geometri kavramına daha geniş bir açıdan bakılmasını mümkün kılar [2, s.10-11].

Bugün matematiğin bütün dallarında yaygın olan soyut ve aksiyomatik yöntem geometriye de sınırları belirsiz denebilecek boyutlar kazandırmıştır. "Önceden doğruluğu varsayılan bir takım basit önermelerden (aksiyomlardan) hareketle elde edilebilecek bütün sonuçları incelemek" biçiminde bir ifade göz önüne alınırsa, bu ifade teorik matematiğin birçok dallarını ve bu arada geometriyi de içine alan genel bir tanım olarak düşünülebilir. Bu genel ifade içinde geometri, bazı özel aksiyomlar ve bu aksiyomlar içinde bulunan bazı geometrik kavramlarla belirlenmektedir [2, s.10-11].

Bu durumda, matematik ve geometrinin kuruluş sistemindeki benzerlikler, bu iki bilimi ayrı ayrı ele almanın sakıncasını ortaya koyar.

1.1.2. Geometri Öğretimi

Okul programlarında geometrinin geniş yer tutmasının başlıca nedenleri şöyle ele alınabilir [3].

a) İnsanın çevresini saran eşya ve varlıkların çoğu geometrik şekil ve cisimlerdir. Ayrıca insan işini ya da mesleğini yürütürken geometrik şekil ve cisimler kullanılır. Bu varlıklardan en etkili şekilde yararlanmak, bunları tanımaya, eşyanın şekli ile görevi arasındaki ilişkiyi kavramaya dayanır [3].

b) Uzayı tanıma ve uzayla ilgili yeteneklerin (çizim yapma, model üretme, modelde değişiklik yapma, çevre düzenleme gibi) gelişimi temelde geometrik düşüncelerden beslenir [3].

c) Günlük hayatta insanların çözmek zorunda kaldıkları basit problemlerin pek çoğunun (ev dekorasyonu, çerçeve yapma, duvar kağıdı kaplama, boya yapma, depo yapma gibi) çözümü temel geometrik beceriler gerektirir [3].

d) Soyut düşünme yeterliliğini henüz kazanmamış olan, özellikle ilköğretim düzeyi birinci kademe öğrencilerinin çeşitli kazanımları somut geometrik etkinliklerle öğrenmesi daha istendik, hızlı ve kalıcı olmaktadır.

Bu öneminden dolayı, ilköğretimin ilk kademesinden itibaren tüm sınıflarında geometri öğretimine geniş yer verilir. Geometrik bilgiler diğer öğretim basamaklarında, özellikle problem çözme çalışmalarında yardımcı öğretim alanı olarak kullanılır [3].

Geometri öğretimiyle ilgili iki temel yaklaşım vardır. Bunlardan biri, parçadan bütüne (tümevarım kapsamında); örneğin, noktadan cisme giden yaklaşımdır. Öğretimde geometrinin tanımsız kavramları olarak adlandırılan nokta, doğru, düzlem ve uzay kavramlarının önce tanıtılması ve bunlar tanındıkça, elemanları bu kavramlar olan şekillerin (ışın, doğru parçası, açı, üçgen, vb. diğer düzlemsel şekillerin) tanıtılması şeklinde bir sıra izler. Diğer yaklaşım ise, çocukların eşya ve cisimleri önce kavradıkları düşüncesinden yola çıkarak, öğretime bütünden başlayıp daha sonra parçaların tanıtılmasına (tümdengelim kapsamında) yer veren yaklaşımdır. Bu yaklaşımda örneğin önce cisimler; daha sonra yüz, ayrıt, köşe, vb. kavramlar verilir [3].

1.1.2.2 Geometrik Düşünmenin Gelişimi

Çocukta geometrik düşünmenin nasıl geliştiğine ilişkin genel kabul gören bir çalışmada, Hollandalı eğitimciler Pierre ve Dina Van Hiele Geldof tarafından, geometrik düşünmenin gelişiminin beş basamakta düşünülebileceği gösterilmiştir. Her çocuk bu basamaklardan aynı yaşlarda olmasa bile sırayla geçer. Bir basamaktaki geometrik etkinliklerle uğraşma diğer basamağa geçişi kolaylaştırmaktadır. Bu düzeyler yaşlarla doğrudan bağlantılı değildir. Bireysel farklılıklar burada da ortaya çıkmaktadır. Ancak her insan geometrik gelişmeyi bu sıraya göre yaşamaktadır. Öğretmenin bu basamakları bilmesi, uygun eğitim-öğretim etkinlikleri düzenleyebilmesi bakımından önemlidir. Aksi halde öğrenciler örneğin, *"Kare aynı zamanda bir eşkenar dörtgendir."* cümlesini ilgili gelişme basamağına gelmeden bu bilgiyi öğrenirlerse bunu ezbere akılda tutabilmekte, fakat kullanmakta problem yaşamaktadırlar [3].

Hiele'ler gelişme için beş düzey önermiş, bunları 0, 1, 2, 3 ve 4 düzeyler olarak adlandırmışlardır [3].

1.1.2.2.1 0 Düzey (Görsel Düzey)

Bu basamaktaki çocuklar geometrik şekil ve cisimleri bir bütün olarak algılarlar. Çocuk için "kare karedir". Çocuk, bu safhada özellik ve ayrıtları bütüne yapışık olarak algılamaktadır. Köşe, geometrik şeklin köşesi olarak anlamlıdır [3].

Bu evredeki çocuklara geometri öğretiminde fiziksel gereçlerin sunulması, çocukların bunlarla oynamaları ve kullanmaları gerekir. Bunun için;

- Çalışılan şekillerin çocuğun günlük yaşamında rastlanabilen çeşitlerine yer verilmelidir.
- Çocuklara geometrik eşya ve şekilleri yapmaları, çizmeleri için fırsatlar verilmelidir.
- Geometrik eşya ve şekillerle ilgili gözlem ve düşüncelerini anlatmaları için olanak sağlanmalıdır..
- Bir kavramın öğretimi yapılırken tanım yapmaktan kaçınılmalı, bunun yerine çocukların üzerinde çalışılan şekil ve cisme örnek göstermeleri ön planda tutulmalıdır [3].

Bu etkinlikler yani 0 düzeyi, ilköğretimin 1., 2. ve 3. sınıfları için uygun etkinliklerdir. Diğer sınıflarda da, yeni tanıtılan kavramlar için (5. sınıfta koni) bu tür etkinliklere başvurulabilir [3].

1.1.2.2.2 Düzey 1 (Analiz Düzeyi)

Bu safhadaki çocuklar şekillerin özelliklerini analiz etmeye başlarlar ve şekillerin özelliklerini tümüyle açıklayabilirler. *"Yamuğun dört kenarı vardır. Dört açısı vardır. İki kenarı birbirine paraleldir. Kapalı bir şekildir."* gibi. Yamuğun bir şekilde, özelliklerin bir araya gelmesi hali olduğunu anlarlar [3].

Bu düzeydeki çocuklar şekillerle ilgili bazı genellemelere ulaşabilirler. Örneğin *"Eşkenar dörtgenin dört eş kenarı vardır."*, *"Yamuğun iki kenarı paraleldir."* gibi. Bunun yanında şekil sınıfları arasındaki ilişkileri göremezler. *"Dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenardır."* gibi [3].

Eğitim-öğretimde bu safhada bir önceki düzeyin çalışmalarının bir devamı olarak,

- Yararlanılan eşya ve şekillerin değişik özellikleri üzerinde konuşma, anlatma, bunların listesini çıkarma,
- Kullanılan geometrik eşya ve şekilleri ölçme, tanımlama, şekli bozarak başka bir şekle çevirme,
- Eşya ve şekilleri göz önünde tutarak sınıflandırma ve adlandırma, bunun yanı sıra bu şekiller üstüne problem çözme çalışmaları yapılmalıdır [3].

1.1.2.2.3 Düzey 2 (İnformal Çıkarım Düzeyi)

Bu düzey, şekil sınıfları arasında bağ kurabilmenin geliştiği evredir. Örneğin; *"Yamuk iki kenarı paralel olan dörtgendir."*, *"Dikdörtgen açıları 90'ar derece olan paralelkenardır."* gibi. Çocuklar şekilleri, şekillerin karakteristik özelliklerini kullanarak sınıflayabilirler. Fakat aksiyomatik sistemi kullanamaz ve çıkarım yapamazlar. Bu safhada çocuklar özelliği veya ayrıtı bütünden ayrı olarak düşünebilirler [3].

İlköğretimin ikinci kademesi çoğunlukla bu basamağa denk gelmektedir. Bu safhadaki çocuklar;

- Kullandıkları geometrik eşya ve şekillerin neden faydalı oldukları, hangi özelliklerinin ne işe yaradığı üstüne konuşturulmalı,
- Şekiller ve eşyaların üstüne gözleme dayalı konuşmaları için ortam hazırlanmalı,
- Şekil ve modellerle ilgi çizim yapma, şekil sınıflarının ortak özelliklerini söyleme, genellemeye varma, hipotez kurma, hipotez test etme gibi etkinliklere yer verilmelidir [3].

1.1.2.2.4 Düzey 3 (Formal Çıkarım)

Çocuklar bu dönemde bir aksiyomatik yapıyı kullanabilirler ve bu sistem içinde kendi kendilerine ispat yapabilirler. Bir teoremin farklı uygulamalarını görebilirler. Bu düzeydeki biri için şekillerin özellikleri, şekil ve cisimden bağımsız bir hale gelir. Bu dönem genel olarak lise yıllarına karşılık gelir [3].

1.1.2.2.5 Düzey 4 (En Üst Düzey)

Bu düzeydeki öğrenciler farklı iki aksiyomatik sistem arasındaki ilişkileri ve farklılıkları görebilirler. Öğrenciler bu düzeyde geometriyi bir bilim olarak ele alıp çalışabilirler [3]. Bu düzeye erişebilenlerin sayısı, genellikle diğer düzeylere göre daha azdır.

1.1.2.3 Geometrinin Kuruluşu

Geometri altı temel kavram üzerine kurulur. Bunlar şöyle sıralanabilir:

- tanımsız terimler (nokta, doğru, düzlem, uzay, küme)
- tanımlı terimler
- önermeler
- aksiyomlar
- teoremler
- (elde edilen) sonuçlar [3].

Bu kavramlar kısaca şöyle tanıtılabilir:

1.1.2.3.1 Tanımsız Terimler

Aksiyom ya da teorem kavramlarının anlaşılabilmesi için öncelikle önermenin anlaşılması gerekir. Yani önermeyi oluşturan kelimelerin veya matematiksel ifadelerin bilinmesi gerekir ki, önerme anlaşılsın. Bu kelime ve matematiksel ifadelerin anlaşılabilmesi için *tanımlar* kullanılır. (Örneğin; açı, üçgen gibi kavramlar tanımlanır.) Bu yapılırken de başka kavramlar kullanılmak zorundadır. Bu kavramlar da daha başka kavramlara dayanacağından sonunda bazı kavramlar tanımsız olarak kabul edilir.

Eucleides'in aksiyomlarında, kaçınılmaz olarak ne anlama geldiği tam belli olmayan tanımlanmamış (ancak terminolojide bulunması gereken) tanımı verilmeyen bu terimler, biliniyor varsayılıp diğer yapılar anlaşılmaya çalışılmalıdır. Tanımı verilmeyen bu terimlere *tanımsız (asal terimler)* denir. Asal terimler olmadan matematik bilimi oluşturulamaz [4].

Asal terimler için çeşitli seçenekler kullanılabilir. Eğer T kavramından S kavramı ve S kavramından da T kavramı tanımlanabiliyorsa, T terimi asal terim olarak kabul edileceğine S terimi asal terim olarak kabul edilebilir ya da tam tersi yapılabilir. Bu ise görecelidir [4].

Sadece "küme" ve "elemanı olmak" kavramları asal terim olarak kabul edilip kümeler kuramıyla işe başlanıp, geometri de dahil olmak üzere, tüm matematik inşa edilebilir. Ancak, örneğin bir lise öğrencisinin geometri öğrenmek için kümeler konusundan başlaması pedagojik olmaz. O halde, sadece geometriyi inşa etmek için Eucleides geometrisinde "nokta", "doğru", "düzlem" gibi asal terimler kabul edilir. Ama bu asal terimlerin kümeler kuramından hareketle matematiksel olarak tanımlanabileceği de bilinmelidir [4].

Tanımsız terimler okullarda sezgisel yolla kazandırılır. Yani bunlar etkinliklerle öğrencilere sezdirilir [3].

1.1.2.3.1.1 Nokta

Her şekil ve cisme bir nokta kümesi olarak bakılabilir. Noktanın kendisi geometrinin en temel elemanıdır ve tanımsızdır. Yani noktayı başka bir şeyden yaralanarak tanımlama imkanı yoktur. (Tanımsız terimlerden doğru, düzlem ve uzayı ise nokta yardımıyla anlatma imkanı vardır.) [3].

Eucleides geometrisinin bu kavramı tanımsız terimler arasında yer alır. David Hilbert'ten önceki matematikçiler, diğer iki kavram gibi noktayı da tanımlamak için büyük çaba sarf etmişlerdir. Bazı matematikçilerin "nokta" için vermiş oldukları tanımlara bakılırsa, bu tanımlarda açıklanması daha zor olan başka kavramların yer aldığı kolayca görülebilir [5].

EUCLID: *"Nokta parçasız nesnedir."*
LEGENDRE: *"Çizgilerin ucuna nokta denir."*
ROCHE: *"Çizgilerin arakesitine nokta denir."*

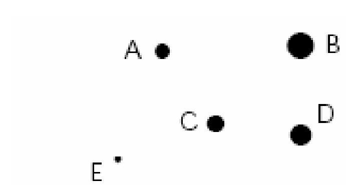
Görüldüğü gibi noktanın tanımında açıklanması pek de kolay olmayan "parça", "çizgi", "uç", "arakesit" gibi kavramlar yer almaktadır [5].

Noktanın ne demek olduğuna sözlükten bakılırsa, örneğin Türk Dil Kurumu'nun sözlüğünde nokta için şu tanım bulunur: *"Nokta: Hiçbir boyutu olmayan işaret."* [6].

Noktanın tanımı boyut kavramına dayandırıldığı için, boyutun anlamına da bakılırsa şu tanımla karşılaşılır: *"Boyut: doğruların, yüzeylerin veya cisimlerin ölçülmesinde ele alınan üç doğrultudan yani uzunluk, genişlik ve derinlikten her biri."* [7].

"Boyut" kavramının "doğru", "yüzey", "ölçü", "doğrultu", "uzunluk", "genişlik", "derinlik" gibi kavramlara; sonuç olarak da "nokta" tanımının "doğru" kavramına, "doğru" tanımının da "nokta" kavramına dayandırıldığı görülür. O halde, "nokta", "doğru" ve "düzlem" kavramları tanımsız terimler olarak kabul edilmelidir [5].

Nokta, okullarda; kalemin kağıttaki izi, tebeşirin tahtadaki izi, küçük bir kum tanesi, toz şeker zerreciği gibi bir şey olarak anlatılmalıdır. "Cümle sonunda", "bazı harfleri yazarken" nokta kullanırız gibi cümleler çocuk zihninde nokta hakkında bir fikir oluşturur. Noktaların büyük harfler kullanılarak adlandırıldığı belirtilir [3].



Şekil 1.1: Noktanın tanıtılması

1.1.2.3.1.2 Doğru

Doğru kavramı da başka bir tanımsız terimdir. Ancak matematikçiler, bu kavramı da tanımlamaya çalışmışlardır [5].

EUCLID: *"Doğru, noktalarına göre düzgün yayılan nesnedir."*

HERON: *"Sabit tutulan iki nokta etrafında döndürüldüğünde durumunu değiştirmeyen nesneye doğru denir."*

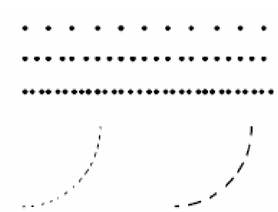
GRASSMANN: *"Hareketi esnasında yönünü koruyan bir noktanın çizdiği çizgiye doğru denir."*

LEGENDRE: *"Doğru, iki nokta arasındaki en kısa yoldur."*

BARBARIN: *"İki noktasıyla tamamen belirli nesneye doğru denir."* [5].

Bu tanımlardaki durum da noktadaki gibidir. Yani, bu tanımlarda da açıklanması daha zor olan başka kavramlar bulunmaktadır [5].

Doğru, okullarda; cetvel yardımıyla sıkça koyduğumuz noktalardan oluşan bir nokta kümesi olarak anlatılabilir. Doğrunun her iki uçtan sonsuza gittiği belirtilmelidir. Bunun için noktaların çiziminde kullanılan cetvelin çok uzun olduğu durumun hayal edilmesi yeterlidir [3].



Şekil 1.2: Çizgi bir nokta kümesidir

Bir doğru, üzerine konulan iki harf ile adlandırılır ve gösterilir. Her iki yönden sonsuza gittiğini göstermek için çoğunlukla iki ucuna da ok işareti konur [3].

Şekil 1.3: AB doğrusu

1.1.2.3.1.3 Düzlem

Geometrinin başlarında verilebilecek sonuncu tanımsız terim düzlemdir [5].

EUCLID: *“Düzlem, doğrularına göre düzgün yayılan nesnedir.”*

LEIBNIZ: *“İki noktaya uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yerine düzlem denir.”*

THEON - SIMSON - LEGENDRE: *“Düzlem, herhangi iki noktasından geçen doğruyu içine alan yüzeydir.”*

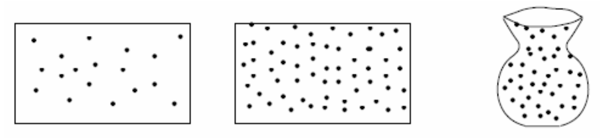
DUHAMEL: *“Bir noktadan bir doğruya dik olarak çizilen doğruların geometrik yerine düzlem denir.”* [5].

Nokta ve doğru tanımsız olarak alınıp, düzlemi tanımlamak adına Gauss-Crelle-Veronese-Peano-Veblen tarafından önemli çalışmalar yapılmıştır [5].

Burada da düzlem, Hilbert’in çalışmalarında olduğu gibi tanımsız terim olarak kabul edilecektir [5].

Düzlem okullarda anlatılırken öğrencilerin dikkati masanın yüzü, kağıdın yüzü, cam yüzeyi, sınıf tahtasının yüzeyi, durgun su yüzeyi üzerine çekilir ve bunların her bir yönden sonsuz olması hali düşündürülür [3].

Düzlemin bir noktalar kümesi olduğunu kavratmak için kağıt veya cam üstüne fırça ile boya taneleri püskürtmek veya püskürtmeye devam etmek suretiyle kağıt yüzeyinin nokta şeklindeki boya tanecikleriyle kapandığını göstermek uygun bir çalışmadır. Bu çalışmayı izleyen çocuklar “Düzlem bir nokta kümesidir.” fikrine ulaşır [3].



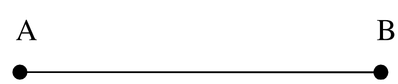
Şekil 1.4: Düzlem ve uzay birer nokta kümeleridir

Uzayı anlatmak için ise; toz şeker, tuz veya kum dolu bir kavanozdan yararlanılabilir. Her kum taneciği bir nokta ve kavanozun çok büyük olduğu düşünülürse noktaların uzayı nasıl doldurduğu anlaşılır [3]. Ayrıca tüm galaksileri içine alan, astronomik bir terim olan "uzay" örneği verilebilir.

1.1.2.3.2 Tanımlı Terimler

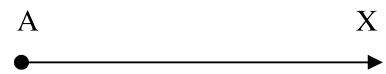
Tanımlı terimler, tanımsız terimlere ve kendisinden daha önce tanımlanan terimlere bağlı olarak dil ve mantık kuralları içinde tanımlanan terimlerdir. Doğru parçası, yarı doğru, açı, üçgen, dörtgen, vb. bunlara örnek olarak verilebilir [3].

Bir doğru ve üzerinde iki nokta verildiğinde, doğru üzerindeki bu noktalar ve bu noktaların arasında kalan tüm noktaların kümesine *doğru parçası* denir. Şekil1.5'teki doğru parçası [AB] biçiminde gösterilir ve "AB doğru parçası" biçiminde okunur [3].



Şekil 1.5: [AB]

Bir doğru ve bu doğru üzerinde bir nokta verildiğinde, bu nokta ve doğrunun bir tarafında kalan tüm noktaların kümesine *ışın* denir. Şekil 1.6'daki ışın [AX şeklinde gösterilir ve "AX ışını" şeklinde okunur [3].

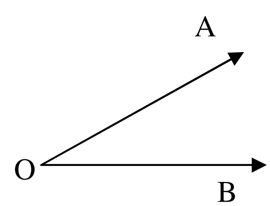


Şekil 1.6: [AX

Buraya kadar verilen tanımların yapılması için tanımsız terimler yeterlidir.

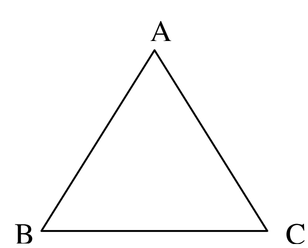
Tanımlı terimler ve tanımsız terimlerin birlikte kullanıldığı tanımlara örnek olarak açı ve üçgen tanımları verilebilir [3].

Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesine *açı* denir. Şekil1.7'deki açı, $A\hat{O}B$ veya $B\hat{O}A$ şeklinde gösterilir ve "AOB veya BOA açısı" olarak okunur [3].



Şekil 1.7: $A\hat{O}B$ veya $B\hat{O}A$

Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan üç noktanın ikişer ikişer oluşturduğu doğru parçalarının kümesine *üçgen* denir. Şekil 1.8'deki üçgen $\overset{\Delta}{ABC}$ şeklinde yazılır ve "ABC üçgeni" şeklinde okunur [3].



Şekil 1.8: $\overset{\Delta}{ABC}$

Verilen açı ve üçgen tanımlarının yapılmasında tanımsız terimlere ek olarak tanımlı terimler de kullanılmıştır [3]. Örneğin; açı tanımlanırken "ışın" tanımlı terimi, üçgen tanımlanırken de "doğru parçası" tanımlı terimi kullanılmıştır.

1.1.2.3.3 Önerme

Doğru ya da yanlış, bir hüküm bildiren ifadelere önerme denir. Örneğin, bir önceki cümle de bir önermedir. Hüküm bildiren ifadelere dilimizde "önerme" denmese de, o cümle matematiksel anlamda bir önerme olur [5].

"Karenin kenar uzunlukları birbirine eşittir." cümlesi de bir önermedir ve hatta doğru bir önermedir. *"İstanbul şehri Afrika kıtasındadır."* önermesi yanlıştır, ama sonuçta bir önermedir.

Önermede bildirilen hüküm doğruysa önermeye *doğru önerme*, yanlışsa *yanlış önerme* denir.

Önermeler soru, emir, ünlem, istek bildirmezler. Çünkü bu ifadeler hüküm bildirmez [5].

1.1.2.3.4 Aksiyom

Geometrinin aksiyomatikleştirilişi sadece matematik tarihinde değil, insanlık tarihinde de bir devrimdir [4].

Doğruluğu tartışılmadan, ispatsız kabul edilen önermelere *aksiyom* denir. Bu tanım "Aksiyomlar doğrudur" ifadesinden farklıdır. Aksiyomlar, sadece kabul edildiklerinde doğruluğu tartışılmayan önermelerdir. Hiç kimse aksiyomları kabul etmek zorunda değildir. Ama kabul edildiklerinde, artık tartışılamazlar [4].

Aksiyomlar olmadan matematik ortaya çıkmaz. Çünkü matematik tümdengelime dayalıdır, yani genelden özele iner. Matematik bilimiyle uğraşanlar daha önce kanıtlanmış olan önermelere *çıkarım kuralları* denilen bazı akıl yürütme (ispat) yöntemleri uygulayarak farklı yeni önermeler ispatlar. Bu çıkarım kuralları öyle kurallardır ki, eğer uygulandıkları önermeler doğruysa, o zaman elde edilen (yani ispatlanan) yeni önerme de doğrudur. Yalnız buradaki "doğru", mantıksal anlamdaki doğrudur [4].

Daha önce ispatlanmış önermeler yoksa, yeni bir önerme ispatlanamaz. Çünkü çıkarım kurallarının uygulanacağı önermeler olmalıdır. Hiçbir çıkarım kuralı doğrudan bir önermeyi vermez, sadece başka önermeler temel alınarak yeni önermeler elde edilebilir [4].

Aksiyomlar olmadan ilk önerme ispatlanamaz. Aksiyom yoksa ve henüz hiçbir teorem ispatlanmamışsa, yani daha işin en başında, çıkarım kurallarının uygulanabileceği bir önerme mevcut değildir. Bir başlangıç noktası bulanması zorunludur. Varsayım olmadan bir gerçeğe ulaşmak mümkün olmayacaktır. Bir gerçeğe de ancak bir başka gerçekten hareket edilerek ulaşılabilir [4].

Böylece aksiyomlar olmadan ilk ispata başlanamaz. Dolayısıyla kabul edilmiş aksiyomlar olmadan birinci önermenin ispatlanması mümkün değildir. Aksiyomlar da bu yüzden gereklidir [4].

1.1.2.3.4.1 Aksiyomların Özellikleri

Aksiyomların Bağımsızlığı İlkesi: Her düşünülen fikir aksiyom olarak kabul edilemez. Bir aksiyomun diğer aksiyomlardan hareketle ispatlanamıyor olması istenir. Çünkü ispatı olan bir önerme ispatsız kabul edilemez. Örneğin; Pisagor Teoremi Eucleides aksiyomlarından hareketle ispatlanabildiğinden, Pisagor Teoreminin bu aksiyomlar arasında bulunması yakışık almaz. Buna *aksiyomların bağımsızlığı ilkesi* denir [4].

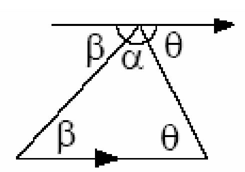
Aksiyomların Doğruluğunun Varsayılması: Aksiyomlar, ispatlanamayan ama "doğruluğu su götürmeyen" önermelerden oluşmalıdır. Örneğin hiç de açık olmayan Morley Teoremi, ispatlanmış bir teorem olmasa dahi, bir aksiyom olarak kabul edilemez. Ancak belirtilmelidir ki, bilimin "şüphe" temeline dayandırılması sonucunda, aksiyomların bu son özelliği artık aranmamaktadır [4].

1.1.2.3.5 Teorem

Doğruluğu ispatlanabilen önermelere *teorem* denir. Teoreme bir örnek verelim:

Teorem 1.1: *Herhangi bir üçgende iç açıların ölçüleri toplamı 180° dir.*

İspat:



Şekil 1.9: Teorem 1.1'in ispatının çizimi

Üçgenin herhangi bir köşesinden geçen ve bu köşenin karşısındaki kenarına paralel olan bir doğru çizilir. İç ters açıların özelliği gereğince, bu köşede oluşan üç açının bir doğru açı oluşturduğu görülür. Dolayısıyla $\alpha+\beta+\theta=180^{\circ}$ olur.

Örnekte de görüldüğü gibi, teoremler doğruluğu ispatlanabilen önermelerdir.

1.1.2.3.6 Sonuçlar

Teoremler yardımıyla bazı genel hükümlere varılabilir. Bu hükümler, ortak durumlarda hep aynı sonucu verdikleri için *sonuç* olarak adlandırılır.

2. YÖNTEM

Bu bölümde, geometrinin epistemolojik analizi yapılacaktır. Böylece geometrinin tarih boyunca geçirdiği aşamalardan bahsedilecektir. Bu yapılırken, geometrinin gelişimine katkıda bulunan matematik bilim adamlarının yaşam öykülerine de yer verilmiştir. Geometri tarihsel süreci dikkate alınarak hazırlanan bu çalışmada, veriler nitel bir bakış açısıyla değerlendirilmiştir.

Ayrıca bu tarihsel süreçte geometri çeşitlerinin ortaya çıkış nedenleri ve gelişimlerine de değinilecektir.

Aşağıda öncelikle geometrinin kurucuları hakkında genel bilgi verilecektir.

2.1 Geometrilerin Kurucuları

2.1.1 Tales [Thales] M.Ö. 640-546

Geometrinin uygulamalı fen derslerinden pür matematiğin bir dalı olması dönüşümü Eski Yunan bilginleri tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu bilimsel ve ispatlı geometri üzerine ilk disiplinli çalışmayı Miletli (Bkz. Şekil A.1ve Şekil A.4) Thales'in yaptığı söylenir. Thales, belki de tüccar olduğu için, genç yaşlarında Mısır ve Orta Asya'yı dolaşmış ve oralarda o sıralarda kullanılan ölçüm tekniklerinin hepsini öğrenerek memleketi Yunanistan'a dönmüştür. Onun önemli geometriciler arasında bulunmasının sebebi ise, Mısırlıların sezgisel olarak buldukları önermelerin doğruluğuna mantıklı açıklamalar getirme yeteneğidir. Yoksa Thales'in bulduğu önermeler geometrinin en basit kurallarıdır. Proclus, *Eudemian Summary* isimli eserinde çapın, ait olduğu çemberi iki eşit parçaya bölmesini Thales'in bulduğunu söylemiştir. Günümüz standartlarında Thales'in ispatları geçerli değildir. Hatta bu ispatların Eucleides tarafından yasaklandığı söylenmektedir. Fakat Thales, önermelerin doğruluğunu o güne kadar yapılanlar gibi sezgisel yolla ya da deneme-yanılma ile değil, sebep-sonuç ilişkisine dayandırmaya çalışan ilk kişi olması bakımından önemlidir [5].

D. E. Smith, Thales'in geometri alanındaki çalışmaları için: *"Thales olmasaydı, Pisagor –böyle bir Pisagor- , Pisagor olmasaydı da Plato –böyle bir Plato- olmazdı."* demiştir [5].

2.1.2 Pisagor [Phytagoras] M.Ö. 560-480

Phytagoras, Thales ölmeden önce, bir Yunan adası olan Samos'ta (Bkz. Şekil A.1) dünyaya gelmiştir. Thales'in öğrencisi olduğu düşünülmektedir. Phytagoras tüm Akdeniz ülkelerine ve Hindistan'a gitmiştir. Filozofik yaklaşımı da daha çok Hint uygarlığına yakındır. Avrupa'ya geri döndüğünde İtalya'nın güneyinde bulunan bir Yunan kolonisi olan Croton'a göç ederek burada "Pisagorcular" isimli bir tarikat kurmuştur. Yaklaşık 200 yıl süren bu tarikatın üyeleri tarafından bugün Phytagoras adıyla anılan gelişmelerin gerçekleştirildiği de söylenmektedir. Thales'in aksine Phytagoras, çoğu ispatsız olarak geride pek çok önerme bırakmıştır. Phytagoras'un ölümünden sonra Pisagorcular, Thales'in yanlıları ve karşıtları manasına da gelen, *akousmatikoi* ve *mathematikoi* olmak üzere ikiye ayrılmışlardır [5].

2.1.3 Chios'lu Hipokrates M.Ö. 460-380

Hipokrates, bir Yunan adası olan Chios'ta (Bkz. Şekil A.1) doğmuştur. Bu ada, Phytagoras'un doğduğu yer olan Samos Adası'na (Bkz. A.1) oldukça yakındır. Bu sebeple, Hipokrates'in Pisagorcular'dan etkilenmiş olabileceği düşünülür. Yaşamının büyük bir bölümünü bir geometri ustası olarak Atina'da geçirmiştir. Burada geometri dersleri verirken *"Geometri'nin Ögeleri (Elements of Geometry)"* isimli, her biri daha önce verilen teoremlerle ispatlanabilecek şekilde düzenlenmiş ilk kitap olarak bilinen eserini yazmıştır. Ancak bu eseri daha sonra kaybolmuştur [5].

2.1.4 Plato M.Ö. 427-348

Aristokrat bir ailenin çocuğu olarak Atina'da (Bkz. Şekil A.1) dünyaya gelmiştir. Yirmili yaşlarının başlarında, eğitiminde büyük rolü olan Sokrates ile tanışmıştır. Plato'nun Yunan felsefesindeki üstün konumu çoğu kez matematiğin ve geometrinin gelişimindeki rolünü gölgede bırakmıştır. M.Ö. 388 yılında, o dönemin en ünlü bilim adamlarını tek çatı altında toplamak amacıyla *Akademi*'yi kurmuştur. *Akademi*'nin giriş kapısının üzerine *"Geometri bilmeyen giremez"* yazısını asması ve *"Matematik ruhu saflaştırıp yüceltir"* demesi, matematiği ne kadar sevdiğini ve önemsediğini gösterir [5].

2.1.5 Eudoxus M.Ö. 400-347

Karadeniz'deki Cnidus Adası'nda (Bkz. Şekil A.5) dünyaya gelmiştir. 23 yaşında Atina'ya taşınıp Plato'nun *Akademi*'sine kaydolmuştur. Kendi adıyla günümüze hiçbir yazısının ulaşamamış olmasına rağmen, Eucleides'in *Elements* isimli eserinin 5. , 6. ve 12. kitaplarının temellerinin Eudoxus'un çalışmaları olduğu söylenmektedir. Ayrıca aksiyomlar, postulatlar ve tanımlar yardımıyla aksiyomatik bir sistem kuranlar arasında ismi ilk geçenlerdendir [5].

2.1.6 Öklid [Eucleides] M.Ö. 330-275

Eucleides, henüz Antik Çağ'da *Geometri*'nin kurucusu olmuştur. Kendisi Megara'lıdır (Bkz. Şekil A.1). Bir Antik Yunan filozofu olarak kabul edilmektedir. Ancak O'nun yaşadığı yer yine Anadolu topraklarıdır. *Megara Okulu'*nun kurucusudur ve yöneticisidir. Aynı zamanda burada dersler de vermiştir. Bu tam bir felsefe okulu olup burada matematiğe de yer verildiği bilinmektedir [8].

Eucleides'in geometri anlayışı ve ona yaklaşımı, bulunduğu çağ itibariyle bir devrim sayılmaktadır. Aksiyomatik yaklaşım ilk kez Eucleides ile ortaya çıkmıştır. Bu ustalık isteyen işte başarılı olan Eucleides, gerçek bir *geometri* kurmuştur. Bu geometri, yüzyıllardır gücünden bir şey kaybetmemiş ve tüm tarihler boyunca *Eucleides Geometrisi* ya da *Düzlem Geometri* olarak anılmıştır [8].

Bu Yunan filozofu, yaşamının neredeyse tamamını, İskenderiye'de geçirmiştir. İskenderiye Okulu O'nun hem öğrencilik hem de hocalık yıllarını geçirdiği bir yer olmuştur [8].

M.Ö. III. y.y.'ın içinde geçen bu yaşam süresince O ünlü eserlerini vermiştir. En ünlü eseri *Stoikheia* yani diğer adıyla *Elements* olarak bilinmektedir. Bunun Türkçedeki karşılığı *Geometrinin Temelleri (Ögeleri)* olmaktadır. Bu eser, düzlem geometrinin kurulup tanıtıldığı eserdir. Tamamı 13 ciltten (kitaptan) oluşmaktadır. Ancak bu kitap üzerinde hayli spekülatif tartışmalar da yapılmıştır. "Kitapların tamamı Eucleides tarafından mı yoksa bir kısmı Megara Okulu mensupları tarafından mı yazılmıştır?" sorusu, bu tartışmanın konusunu oluşturur. Nitekim Hypsikles bu kitaba sonradan iki kitap daha ekleyen kişi olarak kabul edilir. Bu ise kesin olarak bilinmektedir [8].

Kitabın ilk dört cildi "düzlem geometri"ye ayrılmıştır. İlk ciltte, çokgenler ve çembersel şekillerden söz edilip,. bunlara ait temel özellikler belirtilmektedir. İkinci cilt, "geometrik cebir" denilen yeni bir kavramı gündeme getirmiştir. Bu kavram ile tüm niceliklerin geometrik olarak incelenebilmesi öngörülmüştür. Buradaki amaç, geometrik şekillerin sadece *pergel-cetvel* kullanılarak oluşturulmasıdır. Beşinci kitap daha karmaşık bilgilerle doludur. Bu kitapta, *oran-orantı* ile ilgili konuların yanında, *ölçüm kuramı*'na ilişkin bilgiler de yer almıştır. (Bu kitabı Knidos'lu Eudoxus'a atfedenler vardır.) Altıncı kitap *düzlem geometri*'yi ve özellikle *benzer şekilleri* konu edinmiştir. Yedinci, sekizinci ve dokuzuncu kitaplar, *aritmetik* ile *tam sayılar* hakkındaki konulara ayrılmış olarak görülmektedir. Onuncu kitabın anlaşılmasının oldukça güç olduğu söylenmektedir. Bu kitapta *oran dışı sayıların sınıflaması* bulunmaktadır. Son kitap ise *uzay geometri*'ye ayrılmıştır.

Görülüyor ki, modern bilim çağının gereksinmesi olan pek çok bilgiye daha o çağlarda ulaşılmış ve temel geometri bu şekilde kurulmuştur [8]. Eucleides'in sözü edilmeye değer başka yapıtları da vardır. Bunlar:

-Dedomena (Veriler),

-Porismata (Gerçekler),

-Peri Dhiaireseon (Kanonun bölünmesi),

-Optika (Optik) dır [8].

Bu listedeki ilk iki kitap, Stoikheia'yı tamamlayan on ikinci ve on üçüncü kitaplardır. Üçüncü kitap müzikle ilgili olup, Optik ise o çağlarda moda olan bir çalışmadır [8].

Eucleides geometrisinin bir diğer özelliği de, ortaya çıkışı ile sadece matematikçilerin değil, fizikçilerin geometrisinin de kurulmuş olmasıdır. Bilindiği gibi, Eucleides geometrisinin bulunmasından sora fizikte de belirgin sayılabilecek düzeyde gelişmeler olmuştur [8].

Eucleides Aksiyomları olarak bilinen ünlü beş aksiyom kısaca şu şekilde düzenlenmiştir:

1) Herhangi bir noktadan herhangi bir noktaya giden bir doğru çizmek,
2) Bir doğru içinde, süreklilikle sonlu bir doğru meydana getirmek,
3) Herhangi bir noktadan herhangi bir uzaklıkta bir çember çizebilmek,
4)Bütün dik açıların birbirlerine eşit olduklarını kanıtlamak,
5) Bu gerektirim için özel not: daha önceki dördüne dayanarak kanıtlamanın ya da bunlara bağlı olmadığını göstermenin olanaksızlığı… [8]. ("3.1.1.1.2 Eucleides Geometrisinin Aksiyomları" bölümünde bu konuya daha geniş yer verilecektir.)

Bu sonuncu aksiyom, "paralellik aksiyomu" olarak da anılmaktadır. Bu aksiyom yüzlerce yıl sonra yeniden yorumlanacak ve farklı olarak ele alındığında, bu aksiyomdan *Euclideen Olmayan Geometriler* ortaya çıkacaktır. [3, 8 s.14-16.]

2.1.7 Bolyai [Farkas Bolyai] (1775-1856)

Macar matematikçi 1775'te Bolya'da doğmuştur. Günümüzde burası Sibiu yakınındaki Buia'dır [8] (Bkz. Şekil A.3).

Bolyai, Gauss ile sınıf arkadaşıdır. Bu arkadaşlığı ilerleyen yaşlarında mektup arkadaşlığı ile devam etmiştir [8].

Bolyai, Eucleides'in paralellik aksiyomunu ispatlamak için çeşitli girişimlerde bulunmuştur.Bu konuda ünlü *Tentamen* adıyla tanınan: "*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae introducendi*" isimli eserini yayımladı [8].

Daha sonra oğlu Janos Tentamen'in ilk iki cildi için bir ek yayımlamıştır. Burada paralellik aksiyomunu farklı bir biçimde ele alarak yeni bir geometri kurduğunu açıklamıştır. Janos'un *mutlak geometrisi* bir bakıma *hiperbolik geometri* ile denktir, eş anlamlıdır. Bu geometri, "bir doğrunun dışındaki bir noktada, bu doğruya paralel olan sonsuz sayıda doğrunun var olduğu" varsayımına dayanır. Bu ise "*Euclidean olmayan geometri"* ile doğrudan ilişkilidir. [3, 8, s.219.]

2.1.8 Lobatschewsky [Nikolay İvanoviç Lobatschewsky] (1793-1856)

Bir Rus matematikçi olan Lobatschewsky 2 Kasım 1793'te Rusya'da Makariev eyaletinin Nijni-Nogvorod kentinde dünyaya gelmiştir [8] (Bkz. Şekil A.6).

Yüksek öğrenimini Kazan Üniversitesi'nde yapmıştır. Çalışmaları içinde en önemlisi, kuşkusuz kendi adıyla kurduğu geometri olan "*Lobatschewsky Geometrisi"*dir. Bu geometri aslında bir Euclidean olmayan geometridir. Gauss ve Bolyai gibi, ancak onlarınkinden daha farklı bir yöntem kullanarak yeni bir geometri kurmuştur. Bu geometriyi daha sonra Klein, *hiperbolik* olarak nitelendirmiştir [8].

Eucleides'in tüm aksiyomlarını kabul etmiş, sadece sonuncu "*paralellik"* aksiyomunu şu şekilde yeniden düzenlemiştir:

"Bir C noktası ve bir d doğrusu verilsin. C den geçen iki doğru sınıfı vardır: d yi kesen doğrular sınıfı; d yi kesmeyen doğrular sınıfı." Bu iki sınıf arasındaki sınır, d nin paralelleri denilen ve d nin C den geçen dikmesiyle bir dik açı oluşturan iki doğrudan oluşmaktadır [8].

Lobatschewsky çalışmasını 1826'dan itibaren çeşitli dillerde yazılı olarak duyurmuş ve daha sonra bu bilgileri "*Pangéometrie"* adlı kitabında bir araya getirmiştir. [3, 8, s.246-247.]

2.1.9 Gauss [Carl Friedrich Gauss] (1777-1855)

Gauss, fakir bir işçi ailenin çocuğu olarak 1777 yılında Almanya'nın Braunschweig (Bkz. Şekil A.7) kentinde dünyaya gelmiştir. Dedesi bu kentte 1740 yılında fakir bir insan olarak gelmiş ve bahçıvanlık yapmıştır. Üç oğlundan Gerhard Dietrich'in oğlu geleceğin ünlü matematikçisi "Gauss" olmuştur. Babası fakirliğin verdiği güç yaşamı nedeniyle çocuklarını okutmaktan çok çalıştırmak istemiştir. İşte babasının bu direnciyle karşılaşan Gauss hiçbir zaman okuma azmini yitirmemiş ve direnmiştir. Bunun yanında babasına saygı göstermeyi de ihmal etmemiştir.. Henüz genç yaşlarında bile, bilimle uğraşmak ve bunun için okumak istemiştir. Annesi ise kendisine bu konuda çok daha anlayışlı davranmıştır. Dayısı, ünlü bir dokuma ustası olan Friedrich Benz, kendi alanında bir deha idi. Kız kardeşi Dorothea otuz dört yaşındayken 1776'da bir evlilik yapmış ve bir yıl sonra oğlu Gauss doğmuştur. Bu çocuğun vaftiz adı "Johann Friedrich Carl Gauss"tur. O daha sonra eserlerini imzalarken "Friedrich Carl Gauss" adını kullanmıştır. Adındaki Friedrich kısmı dayısı tarafından konulmuştur [8]. Bu isim benzerliği nedeniyle karışıklık ortaya çıkabilmektedir.

Gauss daha çocukluğundan itibaren ileride büyük bir bilim adamı olacağını daima belli etmiştir. Annesi bütün ömrünce buna inanmış, oğluna en büyük desteği de yine annesi sağlamıştır. Yedi yaşına bastığı yıl okul ile tanışmıştır. On yaşına bastığında onun için bir şans doğmuş ve "aritmetik sınıfı"na geçmiştir. Bu sınıfta matematikle biraz daha fazla ilgilenme fırsatı yakalamıştır.

Bir gün derste onlara şu soru sorulmuştur:

$$81297+81495+81693+\ldots+100899=?$$

(Bu toplamdaki sayılar arasındaki fark birbirine eşit ve 198'dir. Bu şekildeki terimlerin sayısı ise 100'dür.) Öğretmenleri daha problemi tahtaya yazıp yerine otururken Gauss problemi çözmüştür [8].

1791'de Gauss çekingen ve sempatik tavırlarıyla Dük'ün hayranlığını kazanmış ve Gauss'un bütün öğrenim masraflarını Dük üstlenmiştir. Böylece Gauss artık sıradan okullarda değil, Collegium Carolinum gibi bir kolejde okuma şansını yakalamıştır. Koleje başladığında Latinceyi çok iyi biliyordu ve sonraki çalışmalarında da bu dili kullanmıştır [8]. Göttingen Üniversitesi'nde 1795-1798 yılları onun yaşamındaki en verimli yıllardır. Bu yıllarda matematikçi Bolyai kendisine yakınlık ve ilgi göstermiştir. Gauss'un "Euclidean olmayan geometriler" hakkındaki çalışmalarını yakından izleyen Bolyai bu çizgiyi devam ettirmiştir [8].

Gauss'un önemli çalışmalarından biri de *kompleks (karmaşık) sayılar* hakkındadır. Herhangi bir cebirsel denklemin köklerinin; $a,b \in IR$ olmak üzere ve $i^2= -1$ olan bir sayı ise, $a + ib$ şeklinde gösterilebileceğini ispatlamıştır. Ayrıca a ve b nin reel olmalarıyla sayının "reel düzlem" ile ilişkisi kurularak buradan yeni bir *analitik gösterim* ortaya koymuştur ki buna Gauss Düzlemi denilmektedir. $a+ib$ ile gösterilen bu tür yeni sayılara *kompleks sayılar* denilmiştir [8].

Gauss Düzlemi, birbirini O (başlangıç) noktasında dik kesen iki yönlü doğrunun belirttiği düzlem olarak tanımlanır [8]. Yatay eksen "reel sayıları" ve düşey eksen ise "imajiner sayıları" içeren birer yönlü doğrudur. a sayıları yatay eksen üzerinde, b sayıları ise düşey eksen üzerinde işaretlenir. Bu büyüklükler, düzlemdeki bir karmaşık noktayı gösterecek şekilde, eksenlere çıkılan dik doğrular yardımıyla belirginleşecektir [8].

Durum geometrisi, kompleks değişkenli fonksiyonlara bağlı bir geometri olarak da bilinen "Hiperbolik Geometri"yi bu şekilde oluşturan Gauss'un bu konuda bilime kazandırdığı eseri "*Disquisitones Arithmeticae*" adını taşımaktadır. [3, 8, s.226-235.]

2.1.10 Riemann [Georg Friedrich Bernhard Riemann] (1826-1866)

Bir papazın dört çocuğundan ikincisi olarak dünyaya gelmiştir. Hannover'in (Bkz. Şekil A.2) küçük bir köyünde 17 Eylül 1826'da doğmuştur. Annesini çocukken kaybetmiştir. Fakir bir ailede büyümüştür. Buna rağmen çok mutlu bir çocukluk geçirmiştir. Aile içindeki bağları çok kuvvetlidir. Ancak ürkek ve biraz da insanlardan ayrık büyümüşlerdir. Bu ürkek tavırlar zamanla kimilerine sempatik gelmeye başlamıştır. Zekasının derecesini anlamakta kimse zorluk çekmemiştir. Babası onların yetişmesiyle yeterince ilgilenmiştir. Hatta ilk temel bilgileri ondan almışlardır. Altı yaşındayken ciddi bir şekilde aritmetik ile tanışmış, bu ondaki matematik ilgisinin ortaya çıkması için bir şans olmuştur. On yaşına geldiğinde bir özel öğretmenden yüksek derecede aritmetik ve cebir öğrenmiş, bir süre sonra da hocasını geçmiştir. Hocasından daha hızlı ve daha güzel yanıtlar bulabilir düzeye gelmiştir. On dört yaşına geldiğinde Gymnasium'un üçüncü sınıfına girmek üzere Hannover'e büyük annesinin yanına gitmiştir. Okula yerleştiğinde ailesinden ayrıldığı için çok üzülmüştür. Maddi sıkıntı ve ailesine bağlılığından şehirde pansiyonda kalmaktan vazgeçmiş, okul ile evinin arası biraz uzak da olsa bu yolu her gün yürüyerek gidip gelmeyi göze almıştır. Bu onu yorsa da mutlu etmiştir. Bir süre sonra bu durumu bilen ve üzülen İbranice öğretmeni onu evine pansiyoner olarak almıştır. Onun durumunu bildiği için göstermelik bir kira almıştır. Bu sırada hocasının bilgisinden yararlanmış ve adeta özel ders alır gibi İbranice' yi çok iyi öğrenmiştir [8].

Lise müdürü, Riemann'daki yeteneği sezmiştir. Ona, özel kütüphanesini açıp hatta isterse matematik derslerine girmeyebileceğini söylemiştir. O da bunu çok iyi değerlendirmiş ve bu saatler de dahil, fırsat bulduğu tüm zamanlarda müdürü Schmalfuss'un kütüphanesine gitmiştir. Burada çok önemli ve güç kitaplar bulmuştur. Örneğin, Legendre'nin "Sayılar Teorisi" (*Théorie des Nombres*) adlı 859 sayfalık kitabını okumuştur. Kütüphanesini açan müdür merakla kendisine "Nereye kadar okudunuz?" diye sorduğunda yanıtı "Tamamını… Gerçekten takdire layık bir kitap; onu tamamen anladım." olmuştur. Riemann bu konuda doğru söylemiştir. Yaşamı boyunca bu kitap hakkında söylediklerinin hepsi de doğru çıkmıştır. Bu örnek, onun bir okuyuşta bu kadar kapsamlı ve zor bir eseri anlayıp özümsemesindeki yeteneğini ortaya koyması bakımından önemlidir. Bu eser sayesinde "Sayılar Teorisi"ne yönelmiştir. İlk çalışmalarını bu alanda yapmış, tamamı sekiz sayfa olan makalesinde Legendre'nin verdiği bir formülün genel anlamda incelenmesi yer almıştır. Bu çalışma geliştirilerek *Riemann Hipotezi* olarak adlandırılacaktır. Bu hipotez, 1859 yılında Berlin Akademisince basılmıştır. Bu gerçekleştiğinde Riemann otuz üç yaşındaydı. Bu hipotez üzerinde birçok matematikçi çalışmıştır. Bu konuda en önemli açıklamayı ve kanıtı, şimdiye kadar en iyi şekilde yapan matematikçinin İngiliz G. H. Hardy olduğu konusunda birçok kişi aynı fikirdedir [8].

Riemann, on dokuz yaşında olduğu 1846 yılında filoloji ve teoloji öğrenimi görmek üzere Göttingen Üniversitesi'ne yazılmıştır. Üniversitede izlediği dersler arasında onun en çok ilgisini çekenler matematik dersleri olmuştur. Böylece matematiğe yönelmiştir. Babasından bu konuda eğitim almak için izin almış ve o da bunu onaylamıştır. Bu karar üzerine matematik eğitiminin en güçlü verildiği Berlin'e giderek oradaki üniversiteye yazılmıştır. Bu üniversitede Jacobi, Steiner, Dirichlet ve kendisinden sadece üç yaş büyük olan Eisenstein'in öğrencisi olmuştur. Bu müthiş kadro ona çok şeyler katmış ya da bir başka değişle, o bu müthiş kadrodan en iyi şekilde yararlanmıştır. Riemann Berlin Üniversitesi'nde iki yıl kalmıştır. Sonra matematik doktorasını hazırlamak üzere 1849 yılının sonlarında Göttingen'e geri dönmüştür. Herkesin matematikle ilgilendiğini düşündüğü bir sırada fizikle, daha sonra da felsefeyle ilgilenmiştir. Bu konularla ilgisi çevresinin genişlemesine yaramış ve bu arada yeni arkadaş ve dostlar edinmiştir. Bunlar arasında Wilhelm Weber ona en yakın olanlardan biriydi [8].

1850 yılı onun için önemli bir çıkış yılı olmuştur. Henüz yirmi dört yaşında şöhret basamaklarını çıkmaya başlamıştır. Aynı yıl önemli bir iddiada bulunup "Gravitasyon Yasası'na elektrik, manyetizm veya termostatik arasındaki farkı gözetmeksizin belirgin noktaların elemanter yasalarından itibaren sürekli bir madde ile dolu bir uzayda oluşan olaylara kadar ilerleyebilecek ve iyice sınırlandırılmış tam bir matematik teorisinin kurulabileceği" sonucuna varmıştır. Buna benzer iddialar üreterek uzay geometrisine yaklaşmaya başlamıştır. Fizik çalışmalarına kendisini öylesine kaptırmıştır ki, bir ara Weber, Listing, Ulrich ve Stern ile birlikte "Fizik-

Matematik Enstitüsü"ne üye yazılmıştır. Burada Listing'le birlikte kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisine, topolojik yöntemlerin girişinde temel fikirleri oluşturmuştur. Riemann böylece bu konuyu bir adım daha geliştirmiştir [8].

1851 yılında doktora tezini vermiştir. Tezin konusu "Kompleks değişkenli fonksiyonların bir genel teorisinin ilkeleri"dir. Üniversitede bağımsız ders verebilmek için çeşitli aşamalardan geçmesi gerekmiştir. Bu nedenle zaman zaman sıkıntılı günler geçirmiştir. Weber' in asistanı olarak görev yapmaya başlamıştır. 1854 yılında bir deneme konferansı (ya da dersi) vermesi gerekmiştir. Bu dersin konusu "Geometrinin esasını oluşturan hipotezler hakkında" dır. 1855 yılında Gauss'un ölümü üzerine onun kürsüsüne Dirichlet geçmiştir. Riemann için yardımcı profesörlük kadrosu istenmişse de üniversite buna yanaşmamıştır. Bu durum onu hem üzmüş hem de maddi yönden sıkıntıya sokmuştur. Neyse ki 1856 yılında işler biraz düzelmiştir. Çalışmalarını bir yandan da devam ettirmiştir. Bu süre içinde çalıştığı ve eserler ürettiği konular: "Abelyan fonksiyonlar, hipergeometrik seriler, diferansiyel denklemler …" olmuştur. Bunların bir kısmını Gauss'un ünlü eserinden izlemiştir. 1857 yılında yardımcı profesörlük kadrosuna nihayet atanabilmiştir. Bu onu maddi değilse de manevi yönden, kısmen de olsa tatmin etmiştir. Dirichlet 1859 yılı Mayıs ayı içinde ölmüştür. Sağ iken Dirichlet, Riemann'a sahip çıkan insanlardan biri olmuştur. Ölümü sonrasında da Riemann onun yerine getirilmiştir. Bu önemli ve saygı gören bir mevkidir. Gauss'ta olduğu gibi rahat çalışabilmesi için ona rasathanede bir oda verilmiştir. O artık matematikteki otoritesini kabul ettirmiş ve yeteri kadar tanınmıştır. Nitekim Berlin'e yaptığı bir seyahatte Kummer, Borchardt, Kronecker ve Weierstrass tarafından karşılanmış, kendisine büyük ilgi gösterilmiştir. Bilim Akademileri onu şeref üyesi yapmak için davet üstüne davet göndermişlerdir. Londra'da Royal Society ile Fransa'da Française des Sciences'a üye olmasından şeref duydukları bildirilmiştir. 1860'da Paris'e gitmiş, orada Hermit ile tanışmıştır. Hermit onu en çok takdir edenlerden biridir. 1860 yılı, Fizik-Matematik için özel bir yıl olmuştur. Bu yıl içinde Riemann, "Isının iletkenliğine dair" adlı teziyle, bugün "İzafilik Teorisi" denilen kavramın temellerini atmıştır. Bununla ilişkili olarak "Kuadratik diferansiyel şekiller sistemi"ni kurmuştur [8].

Profesör olduktan sonra biraz rahat etmiş, biraz da kendine güveni gelmiştir. Otuz altı yaşında iken kız kardeşinin arkadaşı Elise Koch ile evlenmiştir. Ancak bu evlilikten birkaç ay sonra, 1862 yılı Temmuz ayında plörize denilen hastalığa tutulmuş, üstelik yanlış tedavi gördüğünden, iyileşeceğine daha da kötü olmuştur. Onun İtalya'nın yumuşak ikliminde iyi olabileceği düşüncesiyle, dostlarının gayret ve desteği ile İtalya'ya gitmiş ve kışı orada geçirmiştir. İlkbahar ayları geldiğinde ülkesine dönmüştür. Hastalığı geçeceğine ağırlaşmıştır. Tekrar İtalya'ya dönmüştür ve kızı İda Pisa'da doğmuştur. Kış çok şiddetli geçtiğinden, bir de sarılık olmuştur. İtalya'da kendisine bir üniversite iş teklifinde bulunmuş, ancak o sağlığını ileri sürerek bunu nezaketle reddetmiştir. Göttingen Üniversitesi ona sahip çıkmış ve maddi yönden destek olmuştur. O kışı Pisa'da geçirmiş, özlemi üstün geldiğinden bir ara tekrar ülkesine, Almanya'ya dönmüştür [8].

Ömrünün son zamanlarını İtalya'da Majeur Gölü kenarındaki Selesca'da geçirmiştir. 1866 yılında henüz kırk yaşında olduğu sırada, son bulunduğu Selesca'da yaşama veda etmiştir. Arkadaşları onu, öldüğü İtalya'da toprağa vermişlerdir [8]. Riemann'ın geometri alanındaki en önemli çalışması ise kendi adıyla anılan *Riemann Geometrisi*'dir. Bu geometri *Euclidean olmayan geometrilerden* biridir. [3, 8, s.289,294.]

Başlıca geometri kurucularının hayatlarından ve geometriye sağladıkları katkılardan kısaca bahsedildikten sonra, gelecek bölümde geometri çeşitleri hakkında genel bir bakış açısı sunulmaya çalışılacaktır. Bu amaçla Euclidean geometri ve Euclidean olmayan geometriler ele alınacaktır.

2.2 Sınırlılıklar

Geometri çeşitleri; aksiyomları, genel tanımları, modelleri ve metrikleri bakımından incelenirken, trigonometrik kavramlara ve hacimlere yer verilmemiş, afin geometrinin bir alt geometrisi olan Minkowskian geometri ile sonlu geometriler inceleme dışında bırakılmıştır.

3. BULGULAR

Geometrideki aksiyomatik sistemin kurucusu olan Eucleides ile başlayan geometri serüveni, 5. Postulatı'na farklı yaklaşımlar getiren diğer bilim adamları ile çeşitlilik kazanmıştır. Eucleides geometrisinden "Paralellik Postulatı" ile ayrılan bu çeşit geometriler ortak olarak "Euclidean Olmayan Geometriler" adıyla bir başlık altında toplanabilir.

Bu bölümde, bu iki ana başlık altında yer alan geometri çeşitleri aksiyomatik ve yer yer de karşılaştırmalı olarak incelenecektir.

3.1 Geometri Çeşitleri

Geometri çalışmalarının bir kısmında ölçü araçları kullanılır, bir kısmında kullanılmaz. Ölçmeye yer verip vermemesine göre geometriyi iki başlık altında ele almak mümkündür. Bunlar ölçü dışı geometri ve ölçüsel geometridir [3].

Ölçü dışı geometri; geometrinin bir ölçme ve hesap yapmaya ihtiyaç göstermeyen, tanım yapma, özellikler belirleme, çıkarımlar yapma, ispatlama gibi etkinlikleri içeren kısmıdır. Kapsamı çok geniştir. Düzlemin bir nokta kümesi olduğunu anlatma, doğru parçasını tanımlama, aynı doğruya paralel olan iki doğrunun birbirine paralel olduğunu ispatlama, üçgenin üç iç açıortayının bir noktada kesiştiğini gösterme, vb. ölçü dışı geometri konuları arasındadır [3].

Ölçüsel geometri; geometrinin şekil ve cisimlerle ilgili ölçmeler yapma, ölçme sonuçları üzerinde veya verilen ölçüler üzerinde bir hesaplama yapma, bu hesaplamalara dayanarak bir düşüncenin doğruluğunu gösterme türünden etkinliklerini içeren kısmıdır. Bir prizmanın boyutlarının ölçülüp alan ve hacmini hesaplanması, bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğuna açıları ölçüp toplamak suretiyle ulaşma birer ölçüsel geometri etkinliğidir [3].

Eğitim-öğretimde ölçüsel geometri ile ölçü dışı geometri sürekli iç içedir. Örneğin bir üçgenin alanının bir kenar ile o kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısı olduğunu ispatlamak ölçü dışı, bu sonucun bir uygulamasını yapmak ölçüsel geometri kapsamındaki birer etkinliktir [3].

Çizim çalışmalarının bir kısmı ölçüsel, bir kısmı da ölçü dışı geometri ile ilgilidir. Ölçüleri verilen bir üçgenin çizilmesi ölçüsel, ölçü verilmeden herhangi bir düşünceyi tasarlamak için yapılan çizimler ölçü dışı geometri içindedir. *"Bir açının kollarından aynı uzaklıkta, köşesinden belli bir uzaklıkta kaç nokta vardır?"* gibi. İlköğretim düzeyinde bir düşünceyi doğrularken sık sık ölçmeden yararlanılır. *"Bir üçgende iki kenarın uzunlukları toplamı üçüncünün uzunluğundan büyüktür."* yargısına ulaşmak için verilmiş değişik üçgenlerde kenarlar ölçtürülerek kısa kenarlar toplamı ile uzun kenar ölçüleri bir tabloda karşılaştırılabilir. Böylece kuralı öğrencilerin elde etmesi sağlanır. Çünkü bu düzey formal ispat yapmaya henüz uygun değildir [3].

3.1.1 Euclidean Geometri

Euclidean geometri doğru, çember, paralel doğrular, açılar, benzer üçgenler, düzgün çokgenler, düzlemler, vb. gibi konuları inceleyen ve okullarımızda orta öğrenim boyunca bugün bile okutulmakta olan geometridir. Bu isimle anılmasının nedeni yaklaşık olarak M.Ö. 300 yıllarında bu geometrinin temellerinin İskenderiyeli Eucleides tarafından sistematik olarak 13 kitap halinde işlenmiş olmasındandır. Bu kitaplardan 1, 2, 3, 4 ve 5. doğru ve çemberlerin düzlem geometrisine; 11, 12 ve 13. uzay geometrisine (bu arada da katı cisimlerin geometrik özelliklerinin incelenmesine) ayrılmış bulunmaktadır [2].

Bu geometri üç temel kavrama dayandırılmıştır: tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar. Tanımlar, anlaşılan anlamda, yani kendine özgü bir takım özelikleri olan geometrik nesneleri belirlemek ya da diğerlerinden ayırmak için onlara kısaca ad vermekten ibarettir. Bununla birlikte Eucleides'in orijinal tanımlarında oldukça çok belirsizlik ve eksiklikler vardır. Örneğin, doğruyu tanımlayan "*çizgi genişliği* *olmayan bir uzunluktur*" ve "*doğru her noktada kendisinin aynı kalan çizgidir*" ifadeleri gerçekte doğru denilen çizgilerin varlığından söz etmektedir. Aksiyomlar, doğruluğundan şüphelenmeksizin ispatsız olarak kabul edilen temel önermelerdir. Postulatlar da aksiyomlar gibi ispatsız kabul olunan ama doğruluklarına o zamanki anlayışa göre, aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel önermelerdir. Günümüzde bu çeşit temel önermeler arasında ayırım yapılmamaktadır. [2, s.11-12.]

Euclidean geometri öncelikle aksiyomatik olarak incelenecektir:

3.1.1.1 Aksiyom Sistemleri

Eucleides geometrisi için şimdiye kadar düzenlenen üç tane aksiyom sistemi vardır. Bunlardan <u>birincisi</u> Eucleides'inki olup 8 + 5 = 13 aksiyomdan oluşmuştur. Bu sistemin aksiyom sayısı bakımından eksikliği XIX. Yüzyılda Gauss ve Pasch tarafından fark edilmiş ve matematikçilerin yeni bir aksiyom sistemi kurma çabaları böylece başlamıştır. Özellikle Pasch ile başlayan inceleme Hilbert tarafından sonuçlandırılmış ve <u>Hilbert'in</u> 21 aksiyomdan oluşan aksiyom sistemi kurulmuştur. Son ve üçüncü sistem ise <u>Birkhoff</u> tarafından düzenlenmiş ve SMSG (*School Mathematics Study Group* - Okul Matematiği İnceleme Grubu) tarafından benimsenmiştir. Günümüz liselerimizde okutulan geometri, lise müfredatımızda yapılacağı yetkililerce belirtilen kapsamlı yenilik öncesinde, bu son sistem üzerine oturtulmuştur [5].

Bu aksiyom sistemlerinden ilk önce Hilbert'in aksiyom sistemi, daha sonra Birkhoff'un aksiyom sistemi ele alınmıştır. Son olarak da Eucleides aksiyomlarına değinilmiştir.

3.1.1.1.1 Hilbert'in Geometri Aksiyomları

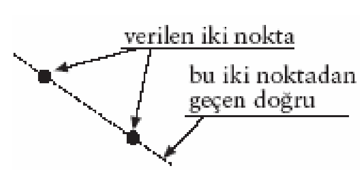
Hilbert, 1899'da Geometri'nin Temelleri (Grundlagen der Geometri) adlı eserinde Eucleides'in yapmak istediğini (bugünkü anlamda) çok daha matematiksel olarak yapmıştır [4].

Hilbert'in kabul ettiği asal terimler; nokta, doğru, düzlem, üstünde/içeriyor, arasında, eş olmak üzere 6 tanedir. Bu terimlerin anlamını anlamaya çalışmak yersizdir. Bunlar tanımsız terim olarak kabul edilir. Bunun yanında, örneğin "üçgen"i matematiksel olarak bu asal terimleri kullanarak tanımlamak gerekir, "üçgen"i tanımlamadan "üçgen"den söz edemeyiz [4].

"Nokta" elbette sezgilerimizle algıladığımız "nokta" yerine kullanılırken, tam matematiksel tanımı sadece geometri kullanılarak verilemez. "Nokta" matematiğin olmasa da, geometrinin asal terimlerinden biridir [4].

İlk üç terim (yani nokta, doğru ve düzlem) nesne isimleriyken, son üç terim ise iki ya da üç nesne arasındaki olası ilişkilerin isimleridir. Örneğin bir doğru bir düzlemin üstünde olabilir ya da olmayabilir, bir nokta bir doğru ya da bir düzlem üstünde olabilir ya da olmayabilir, bir nokta diğer iki noktanın arasında olabilir ya da olmayabilir. Eşlik ilişkisi ise "doğru parçaları" ve "açılar" arasındaki bir ilişkidir. İki doğru parçasının ya da iki açının eş olması, sezgisel olarak o doğru parçalarının uzunluklarının ya da o açıların ölçülerinin eşit olması anlamındadır [4].

Hilbert'in ilk aksiyomu şöyledir: "Verilmiş herhangi iki noktayı içeren bir doğru vardır" [4].



Şekil 3.1: Hilbert'in ilk aksiyomunun gösterimi

Bu aksiyomun, Eucleides'in birinci aksiyomuyla arasında fark yoktur. Ancak Hilbert, doğru ve nokta kavramlarının tanımlanmadan verilmesi gerektiğini söylemiştir [4].

3.1.1.1.1.1 Konum (Kapsam) Aksiyomları

Hilbert'in ilk iki aksiyomunu tek bir aksiyomda toplamakta bir sakınca yoktur [4].

Aksiyom 3.1-2: *Verilmiş herhangi iki değişik noktayı içeren tek bir doğru vardır [4].*

A ve B noktalarından geçen bu doğruya AB adı verilsin [4].

Aksiyom 3.3: *Her doğru en az iki nokta içerir. Ayrıca, aynı doğru üstünde olmayan (yani doğrusal olmayan) en az üç nokta vardır* [4].

P noktalar kümesi ve L de doğrular kümesi olsun. Bir A nesnesinin nokta olduğunu belirtmek için P(A), bir ℓ nesnesinin doğru olduğunu belirtmek için L(ℓ) yazalım. Eğer bir A noktası ℓ doğrusunun üstündeyse (ya da ℓ doğrusu A noktasını içeriyorsa) o zaman $A \in \ell$ yazalım. O zaman, "verilmiş herhangi iki değişik noktayı içeren bir doğru vardır" önermesi şöyle yazılabilir: P(A) ve P(B) ise, öyle bir ℓ vardır ki

$$L(\ell),\ A \in \ell \text{ ve } B \in \ell.$$

Matematiksel dilde bu da şöyle yazılır:

$$\forall A, B\ ((P(A) \wedge P(B)) \rightarrow \exists \ell (L(\ell) \wedge A \in \ell \wedge B \in \ell))$$

Hilbert'in dikkat ettiği bu son yazılımdır. Ancak önemli olan, aksiyomları yukarıdaki gibi biçimsel olarak yazmak değil, aksiyomların böyle biçimsel olarak yazılabileceğini bilmektir. Yukarıdaki biçimsel yazılımın okunuşu şöyledir:

$\forall$ A: A ne olursa olsun

$\forall$ B: B ne olursa olsun

P(A): [eğer] A bir noktaysa

$\wedge$: ve

P(B): B bir noktaysa,

$\rightarrow$: o zaman

$\exists\, \ell$: öyle bir ℓ vardır ki,

L(ℓ): ℓ bir doğrudur

$\wedge$: ve

A $\in \ell$: A, ℓ doğrusundadır

$\wedge$: ve

B $\in \ell$: B, ℓ doğrusundadır [4].

Sezgisel olarak ve alışageldiğimiz eğitimde bir doğru, üstünde bulunan noktalar kümesidir. Ama Hilbert'in sunduğu biçimde bir doğru, noktalar kümesi olarak tanımlanmamıştır, hatta hiç tanımlanmamış ve tanımsız terim olarak alınmıştır. Ancak bir doğru üstündeki noktaların kümesi olarak algılanılabilir. Nitekim, birinci aksiyoma göre, iki doğrunun sadece iki noktası ortaksa bile bu iki doğru birbirine eşit olurlar ve ikinci aksiyoma göre de her doğrunun üstünde en az iki nokta vardır. Bundan böyle bir doğru, üstündeki noktaların kümesi olarak kabul edilsin [4].

Aynı uygulama düzlemler için de yapılabilir. Her düzlem, üstündeki noktaların kümesi olarak algılanabilir [4].

Aksiyom 3.4-5: *Doğrusal olmayan herhangi üç noktayı içeren tek bir düzlem vardır. Her düzlemde en az bir nokta vardır [4].*

A, B ve C yi içeren bu bir tane düzleme bundan sonra ABC adı verilsin. Bir düzlemde doğrusal olmayan üç nokta olduğunun bilinmediği kabul edilsin. Bu, aksiyomlar yardımıyla ispatlanabilir [4].

Aksiyom 3.6: *İki nokta bir düzlemdeyse, o iki noktadan geçen doğrunun tüm noktaları da o düzlemdedir* [4].

Yukarıdaki aksiyomlardan, bir doğruyu ve o doğruda bulunmayan bir noktayı içeren tek bir düzlemin olduğu ispatlanabilir [4].

Aksiyom 3.7: *Eğer iki düzlemin ortak bir noktası varsa, ortak bir başka noktası daha vardır* [4].

Yukarıdaki aksiyomlardan kesişen iki düzlemin bir doğruda kesiştikleri ispatlanabilir. Böylece geometrinin boyutunun üçten büyük olmadığı anlaşılır. Yoksa tek noktada kesişen düzlemler olurdu, örneğin dört boyutlu geometride $x = y = 0$ ve $z = t = 0$ düzlemleri sadece (0, 0, 0, 0) noktasında kesişirler [4].

Aksiyom 3.8: *Aynı düzlemde olmayan dört nokta vardır [4].*

Bu aksiyom tek düzlemi olan geometrileri kapsam dışında bırakmak için yazılmıştır. Yani düzlemin boyutu en az üç olmalıdır. Böylece bu aksiyomların tanımlandığı düzlem tam üç boyutlu olacaktır [4].

3.1.1.1.1.2 Sıralama Aksiyomları

"Arasındalık" kavramı tanımsız kabul edilmiştir. Arasındalık üç nokta arasında bir ilişkidir. Sezgisel olarak "A noktası B ve C noktaları arasındadır" demek, bu üç nokta aynı doğru üstündeler, birbirinden değişikler ve A noktası gerçek hayatta hissettiğimiz anlamda B ve C noktaları arasındadır olarak yorumlanmalıdır [4].

Eğer A noktası B ve C noktaları arasındaysa, bunu A-B-C gibi görsel olarak gösterilebilir [4].

Aksiyom 3.9: *Eğer bir A noktası B ve C noktalarının arasındaysa, o zaman bu üç nokta birbirinden değişiktir ve doğrusaldırlar. Ayrıca A noktası C ve B noktalarının da arasındadır [4].*

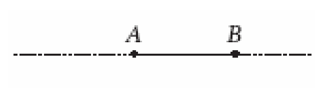
Bu aksiyom, arasındalık ilişkisinin tahmin edildiği gibi bir ilişki olduğunu gösterir. Son kısım B-A-C ise C-A-B dir [4].

Aksiyom 3.10: *Herhangi iki nokta arasında bir başka nokta vardır [4].*

Bu aksiyom noktaların "yoğun" olduğundan bahsetmektedir [4].

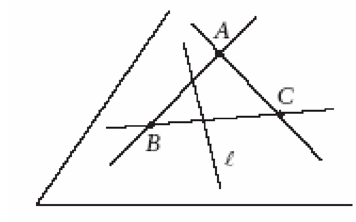
Aksiyom 3.11: *Doğrusal üç nokta verildiğinde bunlardan biri ve sadece biri diğer ikisinin arasındadır* [4].

Bundan böyle A ve B arasındaki noktalar kümesi [AB] olarak gösterilsin. Bu kümeye ayrıca A ve B noktaları da eklensin. Aksiyom 3.9'dan, [AB] nin her noktasının AB doğrusunda olduğu anlaşılır. [AB] ye *doğru parçası* veya *(kapalı) aralık* denir [4].



Şekil 3.2: Doğru üzerindeki [AB]

Aksiyom 3.12: *A, B ve C doğrusal olmayan üç nokta olsun. ℓ, ABC düzleminde bir doğru olsun. Eğer ℓ, [AB] nin bir noktasından geçiyorsa, o zaman ℓ, [AC] ya da [BC] nin de bir noktasından geçer [4].*



Şekil 3.3: "Bir noktadan geçme" kavramının gösterilmesi

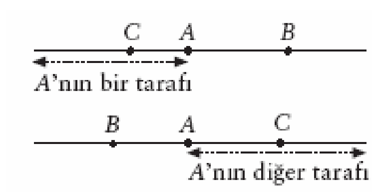
Arasındalık ilişkisi dikkat edilirse, her doğru üzerinde birbirinin zıttı iki sıralama verir [4].

3.1.1.1.1.3 Eşlik Aksiyomları

Eşlik de sıralama gibi bir ilişkidir. Bu, iki doğru parçası (ya da daha sonra tanımlanacak olan iki açı) arasındaki bir ilişkidir. "İki doğru parçası eş" demek, sezgisel olarak, bu doğru parçalarının uzunlukları birbirine eşit demektir [4].

Eşlik aksiyomundan bahsedilebilmesi için, bir doğrunun herhangi bir "tarafında olma" kavramından söz edilmelidir.

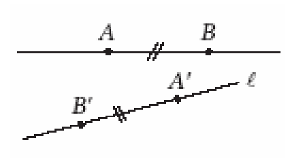
A herhangi bir nokta ve ℓ, A dan geçen herhangi bir doğru olsun. ℓ üstünde A dan değişik herhangi bir B noktası alınsın. A nın B ve C noktalarının arasında olduğu C noktalar kümesine A nın ℓ deki bir *tarafı* denir. A nın bir doğru üzerinde iki tarafı vardır [4].



Şekil 3.4: A nın bir doğru üzerindeki iki tarafı

A nın B yi içeren tarafına *AB ışını* adı verilir. AB ışının *başlangıç noktası* A dır. AB'nin bir doğru değil de bir ışın olduğunu belirtmek için [AB sembolü kullanılır [4].

Aksiyom 3.13: *A ve B iki farklı nokta olsun. ℓ, herhangi bir doğru ve A', ℓ üzerindeki herhangi bir nokta olsun. O zaman* A' noktasının ℓ *deki herhangi bir tarafında [AB] ve [A' B'] doğru parçalarının eş olduğu bir* B' noktası bulunabilir [4].



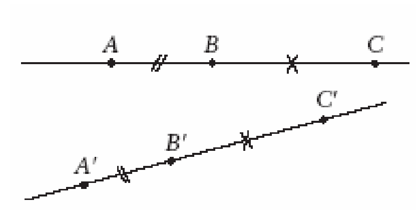
Şekil 3.5: Bir doğru parçasının uzayda, uzunluğu bozulmadan istenildiği gibi yerinin değiştirilebilmesinin gösterilmesi

Bu aksiyom, bir doğru parçasının uzayda, uzunluğu bozulmadan istenildiği gibi yerinin değiştirilebileceğini söyler [4].

Aksiyom 3.14: *Eğer iki doğru parçası üçüncü bir doğru parçasına eşse, o zaman o iki doğru parçası da eştir [4].*

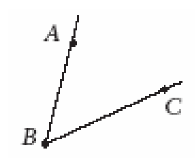
Eğer [AB] ve [CD] doğru parçaları eşse (eşlik tanımsız bir terim olarak kabul edilmişti), bu ifade [AB] $\cong$ [CD] olarak gösterilir [4].

Aksiyom 3.15: *A, B ve C noktaları doğrusal olsun. Sadece B noktasının [AB] ve [BC] doğru parçaları üstünde olduğunu varsayalım.* A', B' *ve* C' *aynı özellikleri sağlayan üç nokta olsun. Eğer [AB]* $\cong$ *[A' B'] ve [BC]* $\cong$ *[B' C'] ise, o zaman [AC]* $\cong$ *[A' C'] olur* [4].



Şekil 3.6: Doğru parçalarının eşliği

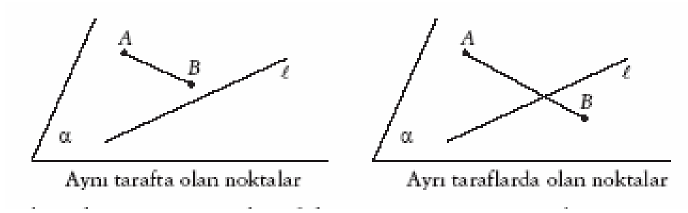
Sıralı verilmiş üç değişik A, B, C noktasına $\widehat{ABC}$ denir ve *ABC açısı* olarak okunur. B noktasına, $\widehat{ABC}$ nın *tepe noktası* denir. $\widehat{ABC}$, [BA ve [BC ışınlarıyla (BA, BC) olarak da ifade edilebilir [4].



Şekil 3.7: ABC açısı

ABC yazılımı, hem bir noktadan geçen bir düzlemi, hem bir açıyı, hem de bir üçgeni temsil eder. Bu üç yazılım arasında semboller kullanılarak ayrım yapılabilir. Yani, ABC düzlemi ifade ediyorsa (B) ile (bu sembol "B düzlemi" olarak okunur), açıyı ifade ediyorsa $\widehat{ABC}$ ile (bu sembol de "ABC açısı" biçiminde okunur) ya da üçgeni ifade ediyorsa $A\overset{\Delta}{B}C$ ile (bu sembol de "ABC üçgeni" şeklinde okunur) gösterilir [4].

α bir düzlem ve ℓ, α düzleminde bir doğru olsun. A ve B noktaları, α düzleminde olan ama ℓ de olmayan iki nokta olsun. Eğer [AB] doğru parçası ℓ doğrusunu kesmiyorsa, A ve B noktaları ℓ nin *aynı tarafında*dır denir. α düzleminde olan her ℓ doğrusu α'da olan ama ℓ de olmayan noktaları kesişmeyen iki alt kümeye ayırır. Böylece ℓ nin aynı tarafında ya da ayrı taraflarda olan noktalardan söz edebiliriz [4].

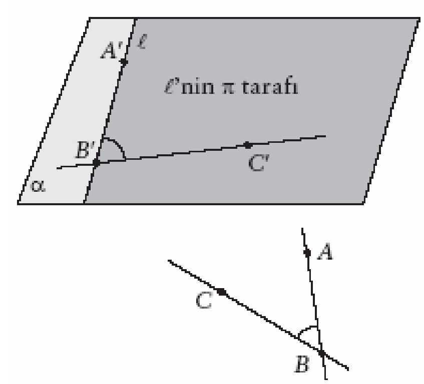


Şekil 3.8: ℓ doğrusunun aynı ve ayrı tarafında olan noktalar

Eşlik ilişkisi tanımsız olarak açılara da uygulanabilir [4].

Aslında doğru parçalarının eşliğinden açıların eşliği (üç kenarı da birbirine olan eş üçgenler sayesinde) tanımlanabilir. Dolayısıyla eşlik ilişkisi sadece doğru parçaları için tanımsız olur ve açıların eşliği daha sonra bir tanım olarak verilebilir. Ancak burada Hilbert'in aksiyomlarından bahsedildiği için açıların eşliği (Aksiyom 3.17'de) verilecektir [4].

Aksiyom 3.16: *ABC bir açı olsun. A, B ve C nin doğrusal olmadıklarını varsayalım.* ℓ*, bir* α *düzleminde bir doğru olsun.* A' *ve* B'*,* ℓ *üzerinde iki farklı nokta olsun.* π*,* ℓ *nin* α *düzleminde bir tarafı olsun. O zaman* π de *öyle bir* C' noktası vardır ki, $A'B'C'$ *ve ABC açıları eştirler. Ayrıca, eğer* C'' *bu özellikleri sağlayan bir başka noktaysa,* $A'C'$ *doğrusu* $A'C''$ *doğrusuna eşittir [4].*

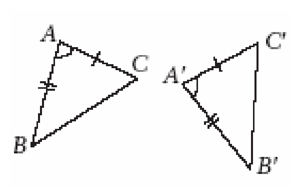


Şekil 3.9: Eş açılar

Hilbert bir üçgeni {AB, BC, CA} doğru parçaları kümesi olarak tanımlamıştır. Ayrıca bir üçgenin üç doğru parçasının doğrusal olmadığını varsaymıştır. Eğer birbirinden farklı doğrusal olmayan üç nokta A, B ve C ise {A, B, C}üçgeni $\overset{\Delta}{ABC}$ olarak yazılır. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni $\overset{\Delta}{BCA}$, $\overset{\Delta}{CAB}$, vb. gibi de yazılabilir [4].

Aksiyom 3.17: *Eğer* $\overset{\Delta}{ABC}$ ve $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ *üçgenleri için, [AB] ≅ [A′ B′], [AC] ≅ [A′ C′] ve* $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$ *eşlikleri geçerliyse, o zaman* $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ *eşliği de geçerlidir* [4].

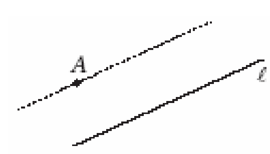
Bu aksiyom için mutlaka bir üçgenden söz etmek gerekmez. Bu aksiyom üçgensiz de yazılabilir [4].



Şekil 3.10: Eş üçgenler

3.1.1.1.1.4 Paralellik Aksiyomu

Aksiyom 3.18: *ℓ herhangi bir doğru ve A, ℓ de olmayan herhangi bir nokta olsun. O zaman A ve ℓ yi içeren düzlemde bulunan, A dan geçen ve ℓ ile kesişmeyen en fazla bir doğru vardır* [4].



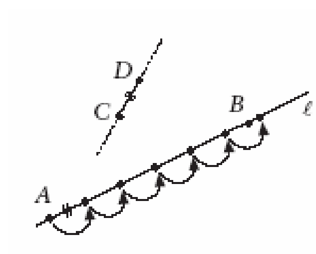
Şekil 3.11: Paralellik

Eucleides'in ilk dört aksiyomundan yola çıkılarak ispatlanmaya çalışılan, bu çalışmaların sonucunda geometri çeşitlerinin bulunmasına sebep olan aksiyom, bu "paralellik aksiyomu"dur [4].

3.1.1.1.1.5 Süreklilik Aksiyomları

Buradaki iki aksiyom bir doğrunun gerçel sayılarla kodlanabileceğini söylemektedir [4].

Aksiyom 3.19 (Archimedes Aksiyomu): *[AB] ve [CD] herhangi iki doğru parçası olsun. O zaman öyle bir k doğal sayısı vardır ki, [CD] ye eş k tane doğru parçası, A dan başlanarak ardı ardına [AB ışınında peşi sıra sıralandığında, B noktası geçilir* [4].



Şekil 3.12: Archimedes Aksiyomu'nun şekli

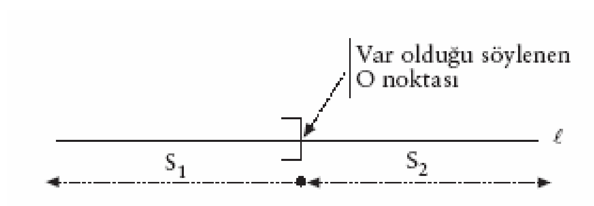
Bu aksiyom gerçel sayıların şu özelliğini ifade eder: $\varepsilon > 0$ ne kadar küçük bir sayı olursa olsun, eğer n doğal sayısı yeterince büyük alınırsa, $n.\varepsilon$ sayısı her gerçel sayıyı geçer [4].

Bir sonraki aksiyomun neden gerekli olduğu açıklanırsa, önceki aksiyomları kullanarak, bir birim uzunluğunda bir doğru parçası verilmişse o zaman iki birim uzunluğunda bir doğru parçası inşa edilebilir. Hatta $\sqrt{2}$ uzunluğunda bir doğru parçası da inşa edilebilir. Ama π, e, $2^{1/3}$ uzunluğunda doğru parçaları önceki aksiyomlarla inşa edilemez. Bir sonraki aksiyom da bu uzunlukta doğru parçalarının inşa edilebileceğini söylemez, ama en azından o aksiyom kullanılarak bu uzunlukta doğru parçalarının olduğu ispatlanabilir. Bu aksiyomda, Hilbert'in verdiği şekli çok karışık olduğu için, Dedekind'in ifadesi yer alacak:

Aksiyom 3.20: (Doğrunun Tamlığı) [Dedekind] *ℓ herhangi bir doğru olsun. (ℓ, ℓ'nin noktaları kümesi olarak alındığında) S_1 ve S_2 kümeleri şu özellikleri sağlasın:*

1. $\ell = S_1 \cup S_2$,
2. $S_1 \cap S_2 = \varnothing$,
3. $S_1 \neq \varnothing$, $S_2 \neq \varnothing$,
4. *A, B* $\in S_1$ *ise* $[A,B] \subseteq S_1$,
5. *A, B* $\in S_2$ *ise* $[A,B] \subseteq S_2$ [4].

O zaman öyle bir $O \in \ell$ *noktası vardır ki, her* $A \in S_1$, $B \in S_2$, $A \neq O$, $B \neq O$ *için O noktası A ile B arasındadır* [4].



Şekil 3.13: Doğrunun Tamlığı'nın şekli

Dolayısıyla Eucleides'in yapmak istediğini ama tam olarak yapamadığını Eucleides'ten 2000 küsur yıl sonra Hilbert yapmıştır ve üç boyutlu geometrinin aksiyomlarını vermiştir. Matematikte bu aksiyomları sağlayan bir sistem elbette vardır ve kümeler kuramından hareketle ispatlanabilir. Kümeler kuramından hareketle doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ve gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ tanımlanabilir. Ardından geometrinin noktaları $\mathbb{R}^3$ kümesinin elemanları olarak tanımlanabilir. Doğru, düzlem, arasındalık, üstündelik gibi kavramları da tanımladıktan sonra elde edilen sistemin bu bölümde adı geçen aksiyomları sağladığı kolayca ispatlanabilir [4].

3.1.1.1.2 Eucleides Geometrisinin Aksiyomları

Matematiği aksiyomatik olarak yazılı ilk yansıtan Eucleides'dir. Bin yıldan fazla Batı'da ders kitabı olarak okutulan "Elemanlar" isimli kitabında geometri için şu beş aksiyomu vermiştir:

1. Herhangi iki noktadan bir doğru geçer

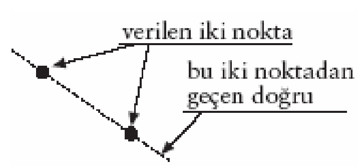
2. Herhangi bir doğru parçası sonsuza kadar bir doğru olarak uzatılabilir

3. Bir doğru parçası verildiğinde; merkezi verilen doğru parçasının bir ucunda olan, yarıçapı ise verilen doğru parçası olan bir çember çizilebilir

4. Tüm dik açılar eştir

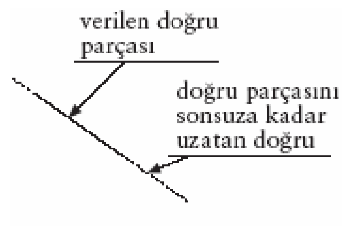
5. Eğer iki doğru parçası üçüncü bir doğru parçasını, dar iç açılarının toplamı iki dik açıdan az olacak biçimde keserse, o zaman ilk iki doğru parçası yeterince uzatılırsa, üçüncü doğrunun toplanan iç açılarının olduğu tarafta kesişirler [4].

Birinci aksiyom; "Verilen iki noktadan bir doğru geçer" demektedir. Yalnız dikkat edilirse bu aksiyom, iki noktadan *bir tek* doğrunun geçtiğini söylemez; bu iki noktadan geçen en az bir doğru olduğunu söyler. İki noktadan *bir tek* doğrunun geçtiğinin ise diğer aksiyomlar kullanılarak ispatlanması gerekir [4].



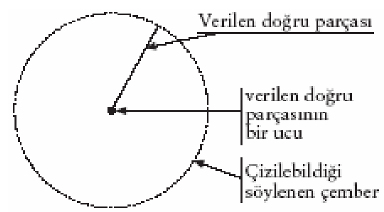
Şekil 3.14: Birinci Eucleides Aksiyomu'nun şekli

İkinci aksiyom; "Bir doğru parçası, sonsuza kadar bir doğru olarak uzatılabilir" demektedir. Yine dikkat edilirse, doğru parçasının *bir tek* doğru olarak uzatılacağını söylemez. Doğru parçasının *bir tek* doğru olarak uzatılacağının diğer aksiyomlar kullanılarak ispatlanması gerekir [4].



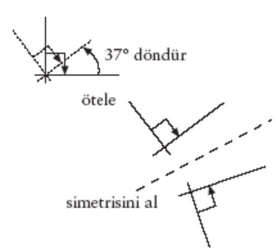
Şekil 3.15: İkinci Eucleides Aksiyomu'nun şekli

Üçüncü aksiyom; "Bir doğru parçası verildiğinde; merkezi verilen doğru parçasının bir ucunda olan, yarıçapı ise verilen doğru parçası olan bir çember çizilebilir" demektedir. Şekil 3.16'dan bu rahatça görülebilmektedir [4].



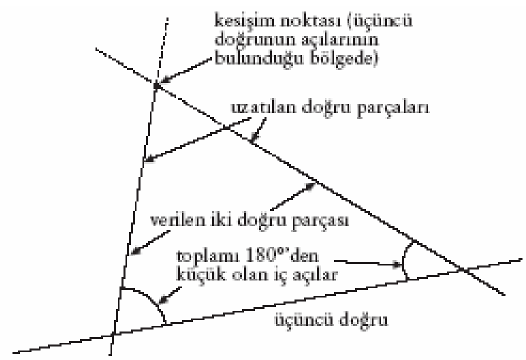
Şekil 3.16: Üçüncü Eucleides Aksiyomu'nun şekli

Dördüncü aksiyom; "Tüm dik açılar eştir" demektedir ve burada "eşlik" sözcüğü karşımıza çıkar. Bu aksiyom bir dik açının bir başka dik açının üstüne (ötelenerek, döndürülerek ve bir doğruya göre simetrisi alınarak, yani mesafeleri değiştirmeyen dönüşümler uygulanarak) taşınabileceğini belirtir [4].



Şekil 3.17: Dördüncü Eucleides Aksiyomu'nun şekli

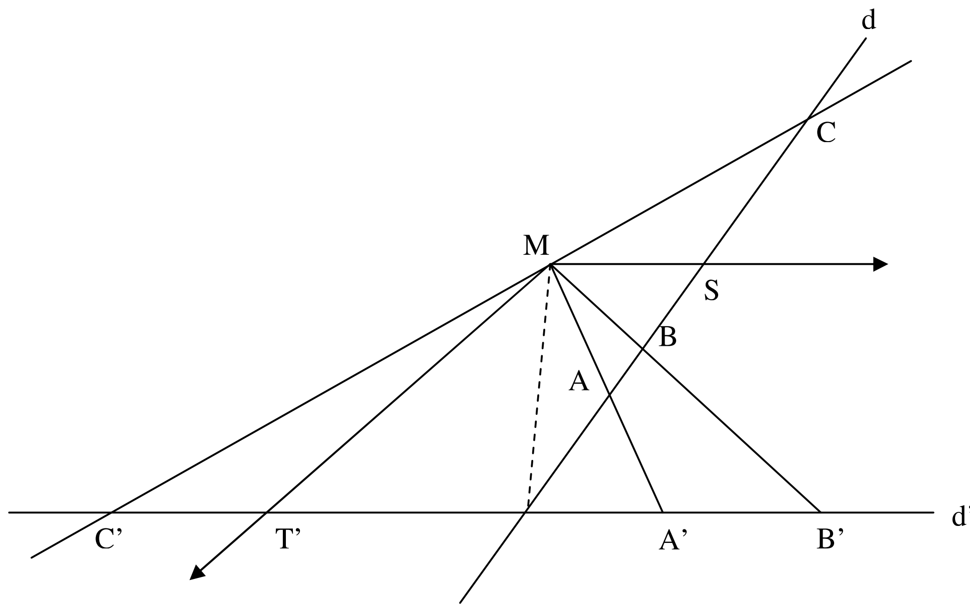
Beşinci aksiyom; "Eğer iki doğru parçası üçüncü bir doğru parçasını, dar iç açılarının toplamı iki dik açıdan az olacak biçimde keserse, o zaman ilk iki doğru parçası yeterince uzatılırsa, üçüncü doğrunun toplanan iç açılarının olduğu tarafta kesişirler" demektedir. Bu aksiyom anlaşılması zor aksiyomlardan biridir. Bu aksiyom "Paralel olmayan doğrular kesişir ve kesişim noktası da doğruların birbirine yaklaştığı taraftadır" şeklinde düşünülebilir [4].



Şekil 3.18: Beşinci Eucleides Aksiyomu'nun şekli

3.1.2 Euclidean Olmayan Geometriler

Eucleides geometrisinin en önemli postulatı şudur: *Başka iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğruyla aynı tarafta, toplamları iki dik açıdan küçük iç açılar meydana getirirse bu iki doğrunun uzantıları açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.* Buna göre, bir doğruya paralel olan ve bu doğru dışında verilen bir noktadan geçen bir tek doğru vardır. Eucleides düzleminde kesişen d ve d´ doğrularını göz önüne alınsın. d ve d´ nün noktalarını, bu doğrulardan hiçbiri üzerinde bulunmayan bir M noktası yardımıyla birbirine şöyle eşlensin: d üzerindeki herhangi x noktasına MX doğrusu ile d´ nün ortak (arakesit) noktası karşı gelsin (Buna M merkezli izdüşüm denir) [2].



Şekil 3.19: Paralellik Postulatı’nın gösterimi

Buna göre d nin A, B, C, … noktaları d´ nün A´, B´, C´, … noktalarına eşlenir (Şekil 3.19). Burada şu sorulara cevap aranacaktır. MS doğrusu d´ ne paralel olacak biçimde seçilmişse d nin S noktasına d´ nün hangi noktası karşılık gelir? MT´ doğrusu d ye paralelse d nin hangi noktası T´ ye eşlenir? Eucleides düzleminde bu sorulara cevap olacak noktalar bulmak mümkün değildir. Bu ve benzeri düşünceler matematikçileri Eucleides geometrisinde bir boşluk olabileceği düşüncesine yöneltmiş ve paralellik postulatı kuşku ile karşılanır olmuştur. Bu nedenle, önceleri bu postulatın ispat edilebileceği sanılarak bu yönde çalışmalar yapılmış ama sonuç alınamamıştır. [2]

Daha sonraları F. Bolyai (1802-1860), N. I. Lobatschewsky (1792-1856) ve C. F. Gaus (1777-1855) tarafından paralellik postulatının ispat edilemeyeceğinin, onun mümkün hallerinden yalnız bir tanesi olduğu görülmüştür. Daha açık söylemek gerekirse, aksiyomların gerçeklerden çok varsayımlar olduğu anlaşılmış ve bu sonuç yepyeni geometrilerin doğmasına yol açmıştır. Örneğin, yukarıdaki soruları olumlu cevaplayabilmek için Eucleides postulatını “düzlemde herhangi iki doğru en az bir ortak noktaya sahiptir” varsayımı ile değiştirmekle eliptik (gerçel projektif) geometrinin temeli atılmıştır. Bu alanda paralelliğin söz konusu olmadığı bir geometri ilk kez B. Riemann (1826-1856) tarafından geliştirilmiştir. Bundan başka Eucleides postulatı yerine "bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebilir" varsayımını almakla hiçbir çelişkiye düşmeyen ve Eucleides geometrisi kadar doğru olan başka geometrilerin (Bolyai-Lobatschewsky geometrisinin) varlığı da gösterilmiştir [2].

Eucleides geometrisinden paralellik özelliği ile ayrılan bu çeşit tüm geometrilere, yani Eucleides geometrisi dışındaki her geometriye *Euclidean olmayan geometri* denir [2].

Bir doğruya aynı düzlem içinde, bu doğru dışındaki bir noktadan "bir tek", "hiç" ya da "birçok" paralel doğru çizilebilen geometriler yalnızca Eucleides geometrisi, eliptik geometri ve Bolyai- Lobatschewsky geometrisi değildir. Bunlar sırayla afin, projektif ve hiperbolik geometri denilen daha genel geometriler için birer örnektir. Bütün bu geometriler paralellik postulatı üzerindeki değişikliklerden hareketle genelleştirme ve soyutlama yoluyla kurulmuştur denilebilir [2].

3.1.2.1 Projektif Goemetri

Projektif geometri deyimindeki *projektif* (izdüşel) sözcüğünün İngilizce *projection* (izdüşüm) sözcüğünden geldiğini, izdüşümün de özel bir dönüşüm çeşidi olduğunu bilinmektedir. (Şekil 3.19 ile böyle bir dönüşüm tanımlanmaktadır). Üç boyutlu Eucleides uzayında da böyle dönüşümler kolaylıkla tanımlanabilir. Yalnız böyle bir dönüşümün uzaydaki her nokta ve doğru için anlamlı olması, aynı düzlemde bulunan doğrulara ilişkin paralellik kavramının ortadan kaldırılması gerekir. Bu dönüşümler projektif geometride çok önemli olup, gerçekte projektif geometri bu çeşit dönüşümler (izdüşümler) altında değişmez kalan özeliklerin incelenmesi olarak tanımlanabilir. Bu da bize Klein'in geometri tanımında sözü edilen dönüşüm grubunun, projektif geometri için hangi dönüşümlerden oluştuğunu açıkça gösterir. İzdüşümler altında değişmez kalan özeliklerin (projektif değişmezlerin) neler olduğunu birkaç örnekle şöyle açıklansın:

Üç boyutlu Eucleides uzayı göz önüne alınsın. Bu uzayın herhangi bir düzlemi (düzlemde doğrular için paralellik kavramını ortadan kaldırmak için) şöyle genişletilsin: Bu düzlemde birbirine paralel bütün doğruların kesiştiği kabul edilen *sonsuzdaki* bir nokta düzleme katılsın. Böylece düzleme her doğrultuda bir yeni nokta katılmış olur. Bu yeni noktaların hepsi *sonsuzdaki doğru* denilen yeni bir doğru üzerinde olduğu da kabul edilerek bu doğru da düzleme katılsın. Sonra bu genişletme yöntemiyle uzaydaki her düzlem genişletilsin. Son olarak bu uzaya tüm yeni (sonsuzdaki) doğruları üzerinde bulunduran bir (sonsuzdaki) *düzlem* katılsın [2].

Böyle elde edilen uzayda aşağıdaki dönüşümler düşünülsün: D ve D´ bu uzayda iki düzlem olsun. D ve D´ dışındaki bir M noktası yardımıyla D nin X noktası, MX doğrusu ile D´ düzleminin ortak noktasına izdüşürülsün:

M merkezli bu izdüşüm altında D düzlemindeki bir *dikdörtgen* D´ düzleminde herhangi bir *dörtgene* dönüşür. D üzerindeki bir çemberin görüntüsü de genel olarak bir çember değildir [2].

Buradan şu sonuçlar elde edilir: İki nokta arasındaki uzaklık, iki doğrunun dikliği ya da iki doğru arasındaki açının genişliği, bir üçgenin alanı, iki doğru parçasının (ya da doğrunun) paralelliği merkezsel izdüşümler altında değişebilmektedir. O halde bunlar projektif özelikler değildir. Aynı şekilde çemberin şekli de böyle dönüşümler altında korunmadığı için, *çember* bir projektif kavram olarak düşünülemez. Gerçekten uzaklık, diklik, paralellik, ... v.s. gibi ölçüye dayanan karam ve özelikler projektif geometride hiçbir rol oynamazlar [2].

Buna karşın, sözü geçen tipte dönüşümler altında, bir nokta her zaman bir noktaya, bir doğru üzerindeki noktalar bir başka doğru üzerindeki noktalara (yani doğrular doğrulara) dönüşür. Yine, aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta aynı özelikte üç noktaya, bir noktadan geçen doğrular bir noktadan geçen doğrulara dönüşür [2].

Dolayısıyla, bir noktanın bir doğru üzerinde bulunması ve bir doğrunun bir noktadan geçmesi *projektif özelikler;* nokta, doğru, üçgen, arakesit alma, noktaları birleştirme *projektif kavramlardır* [2].

Projektif özeliklerin ölçü kavramından yoksun (ya da tamamen bağımsız) olması onlara genellik kazandırır. Dolayısıyla bu özelikleri inceleyen projektif geometri de diğer geometrilere göre daha çok genel olmak durumundadır [2].

İki ya da daha yüksek boyutlu gerçel uzaylarda izdüşümler altında değişmez kalan özelikler XVIII. Asırda projektif geometri olarak incelenmiştir. Bugün projektif geometri; kendisinden diğer geometriler geliştirilebilecek genellikte olan, matematiğin yerleşmiş bir dalıdır. Diğer bütün geometriler projektif geometriden çeşitli özelleştirmelerle elde edilen alt geometriler olarak düşünülebilirler [2, s.10-15.].

3.1.2.1.1 Reel Projektif Geometri: Temelleri

Geometride elemanlar genellikle noktalar ve doğrulardır. Elemanların kümesi de bir figürle isimlendirilir. İki figürün arasındaki bir benzerlikten bahsedilebilir. Benzerliğin ilk figürünü ikinci figüre dönüştüren bir işlem gibi sayılması daha uygundur. (İyi bilinen örnekler rotasyon, yansıma, ters çevirme ve karşılık gelmedir.) Benzerliklerden bahseden genel uygulama özellikle Grup Teorisi'nde yer alır. Fakat aşağıdaki taslak amaca yetecektir. Benzerlik θ gibi büyük Yunan harfleriyle gösterilir. $F\theta=F'$ yazılışı F′ ne F figürünün θ ile bağlanması (veya F nin benzer figürünün F′ olduğu) anlamındadır. Eğer ikinci bir benzerlik olarak F′ figürü, F_1' figürüne ϕ ile bağlıysa, bu $F'\phi = F_1'$ veya $F\phi = F_1'$ şeklinde yazılabilir ve F yi F_1' ne $\theta\phi$ çarpımı ile bağlar, denir. Her elemanı birbirine bağlayan bayağı benzerlik "özdeşlik" olarak isimlendirilir ve I ile gösterilir. (θ ile çarpımın yine kendisi olan θ ettiği gibi.) Eğer $\theta\phi$=I ise, θ nın tersi ϕ olur ve $\phi = \theta^{-1}$ şeklinde yazılır. (Böylece $F\theta=F'$ bağıntısı $F = F'\theta^{-1}$ e eşit olur.) Bazı yazarlar Fθ yerine θ(F) yazar. (F nin fonksiyonunu göstermek için bu kabul edilen notasyonlardan birindeki nottur. Burada $\sin x = x'$ olduğunda $x = \sin^{-1} x'$ yazılmaktadır. F i F′ ne θ ile bağlayan benzerlik, (F, F′) figür çiftini (F_1, F_1') ne bağlayan diğer bir ϕ benzerliği ile bağlıyken bulunuyorsa, F_1 ve F_1' arasındaki benzerlik ϕ yi θ içine dönüştürür denir. $F_1' = F'\phi = F\theta\phi = F_1\phi^{-1}\theta\phi$ olduğundan, bu translasyon (dönüşüm) benzerliği $\phi^{-1}\theta\phi$ dir. ϕ, θ yı kendi içine dönüştürdüğü için F_1, F_1' ne θ nın kendisiyle bağlanmış olabilir. O halde θ, ϕ tarafından translasyon (dönüşüm) altında invaryanttır. $\phi^{-1}\theta\phi = \theta$ bağıntısı $\theta\phi = \phi\theta$ şeklinde bir eşitlikle yazılabileceği için θ ve ϕ için değişme özelliği vardır denir. (Biri diğerine dik olmayan iki düzlemde yansımalar dikkate alındığında, benzerliklerin bilinen bir örneği gibi değişme özellikleri yoktur.) [9].

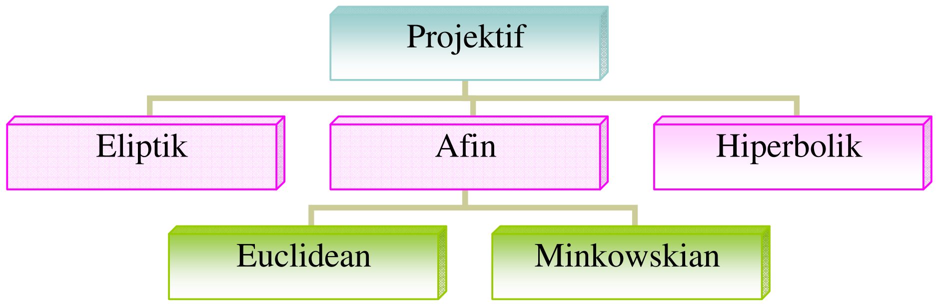
Klein'a göre herhangi bir geometrinin özelliği, invaryant olan bağıntıları altında benzerlik çeşidi tarafından belirlenmesidir. Örneğin, Euclidean Geometri "benzerlik translasyonları (dönüşümleri)" altında invaryanttır. Bu başlık sadece Eliptik ve Hiperbolik Geometriler ile ilgilidir. Fakat diğer bazı geometriler bu geometriler ile birbirine yakın olduğundan karıştırılmaktadır ve dikkatli olunması gerekmektedir. Euclidean Geometride önemli bir rol oynayan benzerlik kavramı, Euclidean olmayan her iki geometrideki hiçbir analoga (benzeşime) sahip değildir. Diğer taraftan paralellik kavramı (bir düzlemdeki doğrular için) her iki Euclidean ve Hiperbolik Geometriye de aittir. Fakat Eliptik Geometride paralellik kavramı yoktur. Bolyai Janos, Euclidean ve Hiperbolik Geometride ortak olan geniş önerme grubuna *Mutlak Geometri* adını vermiştir. Önce Mutlak geometri, paralelliğin eşsizliğini (benzersizliğini) reddetme veya onaylama yoluyla iki bölüme bölünür [9].

Mutlak ve Eliptik Geometri arasındaki zıtlık, açıkça sıralama teorisinde görülmektedir. Her iki geometride "dört nokta"nın sıralanışını, aynı doğrultuda olan dört noktanın birbirinden ayrı iki çift olarak dizilmesi ile tanımlanabilir. Mutlak Geometride bu, aynı doğrultuda olan üç noktadan birinin diğer ikisi arasında yer aldığı belirli "üç nokta"dan alınabilir. Fakat Eliptik Geometride tüm doğrular kapalıdır ve bu yüzden sıralama görüşünde üç noktadan biri özelleşmemiştir. Sıralama "dizi(seri)"den çok "devir(dönme, dönüş)"dir [9].

Çağlar boyunca, eski Mısır ve Euclid’ten Poncelet ve Steiner’a, geometri kongrüans bağıntısının terimler içinde tanımlanan ölçüm kavramı üzerine kurulmuştur. Von Staudt (1798 -1867) ilk kez bu kavram olmaksızın Mantıksal Geometriyi kurmanın mümkün olduğunu göstermiştir. Onun zamanından beri, “bir p doğrusu üzerinde bulunan bir A noktası” veya “bir A noktasından geçen bir p doğrusu” deyimlerinde olduğu gibi ifade edilen çok basit daha basit “bulunma” bağıntısı üzerine ilgiyi odaklama eğilimi artmıştır [9].

Kongrüansı atlayan Euclidean Geometri Afin Geometri olarak adlandırır. Çünkü Euclidean Geometride pek çok şekil kongrüans açısından tanımlanmıştır. (Örneğin eşkenar üçgen, çember, konik kesiti) Afin Geometride kongrüanstan bahsedilebileceği çok az görülebilir. Afin Geometrinin içeriğinin Euclidean Geometrininkinden daha az zengin olduğu doğrudur, fakat Afin Geometride konikleri tanımlamak ve örneğin elips, parabol ve hiperbol olmak üzere üç tipe ayırmak mümkündür. 5. postülat belirli parçaların (bir diğerine paralel olma şeklinde isimlendirilen) ve alan ölçümlerinin karşılaştırılabilmesiyle indirgenmiş bir kongrüans çeşidini tanımlamaya izin verir. Fakat “diklik” görüşü tamamen eksiktir. Dikliğin uygun tanımıyla Euclidean Geometrinin tümü yenilenebilir. Tanımlamanın değiştirilmesiyle Minkowskian Geometrinin yerine Özel Bağıntı (Relativity) Teorisinde kullanılan 4 boyutlu durumu türetilebilir [9].

Benzer olarak, kongrüansı içermediğinde (atladığında) Eliptik Geometri, Reel Projektif Geometri olur. Projektif Geometri, (Euclidean Geometrinin noktalarla sonsuzluğa genişletildiği gibi), Eliptik Geometrinin kendinden çok uzun zaman önce geliştirilmiştir ve hala bu alanda bu alanda yaygın olarak çalışılmaktadır. Simetride “Duality İlkesi” gereğince çiftlerde olan önermelerin oluşturulmasında Afin Geometriden üstündür. Dahası, bahsi geçen diğer tüm geometrileri kapsar. Çünkü diklik tanımının uygulanmasıyla Eliptik Geometrinin metrik özellikleri yenilenebilir ve tanımlamanın değiştirilmesiyle hiperbolik geometrinin yerine türetilebilir. Yine, (üç boyutlu durumda olan) bir düzlemin veya (iki boyutlu) bir doğrunun özelleştirilmesiyle Afin Geometri ve buna dayanarak da Euclidean ve Minkowskian Geometrileri türetilebilir. Aşağıdaki “soyağacı”nda her bir geometri (ilkinden ayrılarak) bazı özelleşme çeşidiyle kendi kuşağıyla türetilir [9].



Şekil 3.20: Geometri çeşitleri soyağacı

Reel Projektif Geometrinin temellerinin araştırılmasında Pieri, Vailati ve Dedekind aksiyomları kullanılır. Bu durumda "nokta ve doğru" olmak üzere iki tanımsız eleman ile "aitlik ve ayırma" olmak üzere iki tanımsız bağıntı vardır [9].

3.1.2.1.2 Aitlik (Konum) Aksiyomları

1. En az iki nokta vardır
2. Herhangi bir nokta tek bir doğruya aittir

Böylece doğru A ve B gibi 2 nokta tarafından tanımlanır ve bu noktaların bitiştirilmesiyle söylenir, AB ile gösterilir

3. AB doğrusunda A ve B noktalarının arasında en az 1 nokta vardır

Bir doğruya ait olan noktalar, doğru üzerinde veya doğrusal olarak adlandırılır. Bir doğru üzerindeki noktaların sınıflandırılması "aralıklı" olarak isimlendirilir [9].

4. AB doğrusuna ait olmayan en az 1 nokta vardır

Bir noktaya ait olan doğrular, bu noktadan geçen veya Uyuşan Doğrular olarak isimlendirilir. Böyle iki doğru Karşılaşan veya Kesişen Doğrular olarak isimlendirilir. Bir aralığın bu noktalarının bu aralığa ait olmayan bir C noktasıyla birleştirilmesiyle doğrular C merkezli düz bir çizgi halinde görülür. Bir düzlem; düz bir çizginin doğruları üzerindeki noktaların, bu nokta çiftlerinin birleştirildiği doğrularla birlikte sınıflandırılmasıdır [9].

5. Eğer A,B,C doğrusal olmayan 3 nokta, D noktası B ve C den başka BC üzerideki bir nokta, E noktası da C ve A dan başka CA üzerindeki bir nokta ise; D, E, F doğrusal olmak üzere AB doğrusu üzerindeki bir nokta F dir

Doğrularının her birinin üzerindeki tüm noktaları içeren bir düzlem aşağıda verilmiştir. İçinde içerdiği herhangi bir doğru tarafından eşitliği iyi tanımlanabilir. 3 doğrusal olmayan nokta veya ait olmayan nokta ve doğru teriminde bir düzlem ABC veya A_p ile gösterilir. Bir düzlemdeki noktalar veya doğrular "eş düzlemli" olarak isimlendirilir [9].

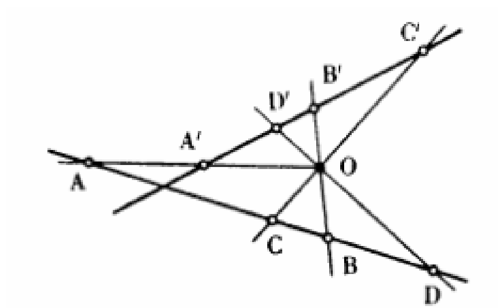
6. Bir ABC düzleminde olmayan en az bir nokta vardır
7. Herhangi iki düzlem bir doğruda kesişir [9].

Üstteki aksiyomlardan nokta, doğru ve düzlemler için tüm konum önermelerini ortaya çıkarmak mümkündür. Eğer p ve q doğruları kesişiyorsa, onların ortak noktaları (p,q) ve düzlemleri pq ile gösterilir. İki doğru kesişmiyorsa birbirine paralel oldukları söylenir. Bir doğruya özgü düzlemler bu doğrudan geçer denir veya Eş Eksenli olarak söylenir. Bir p doğrusundan geçen düzlemlerin sınıfı bir eksensel çizgi olan p ekseni ile isimlendirilir. Doğruların bir sınıfı olan ve bir O noktasından geçen düzlemler, O merkezli bir yığın (veya demet veya yıldız) ile isimlendirilir [9].

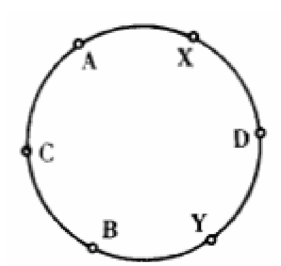
"Serbestlik dereceleri" göz önünde tutulduğunda, bir noktanın hiçbir boyutunun olmadığı, bir doğrunun bir boyutlu olduğu ve bir düzlemin iki boyutlu olduğu söylenir. Doğrular düz bir çizgiyle ve aynı şekilde düzlemler bir eksensel çizgi ile, paralel olan (konumca) bir doğrunun kesit çizgisiyle gösterilen bir aralığın noktaları ile belirtilir. Bu mantıkla, aralıklar ve çizgilerle birlikte tek boyutlu ilkel şekiller tanımlanır. Benzer şekilde düzlemler ve yığınlar, bir yığının düzlemleri ve doğrularının kesitleri olan bir düzlemin noktaları ve doğruları iki boyutlu formlardır ve üç boyutlular uzayın tümüdür [9].

Projektif Geometrideki en önemli benzerliklerden biri perspektiftir. Bu, eş düzlemli iki doğru veya iki düzlem arasında onların sırasıyla aynı düz çizgi veya yığının faklı kesitlerinin bağıntısıyla kurulmuş bir benzerliktir. Doğrular olması halinde, bir aralığın diğerinin içinde ve perspektif içinde olduğu söylenen bu iki aralığın düz bir çizgi tasarısı olduğu söylenir (Şekil 3.21, çizginin merkezi O olan). Paralel olan noktalar formülle aşağıdaki gibi gösterilir: [9].

$$ABC\ldots \underset{\wedge}{=} A'B'C'\ldots \qquad \text{veya} \qquad ABC\ldots \overset{o}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'\ldots$$



Şekil 3.21: Merkezi O olan çizgi



Şekil 3.22: Doğrunun çember gibi sembolize edilmesi

İkinci belirsiz bağıntı, bir doğrunun üzerindeki iki çift noktadan söz eder. Aşağıdaki Vailati'de, A ve B nin C ve D yi ayırması anlamında $AB \,||\, CD$ sembolü kullanılır. (Bu bağıntının önemi, doğruyu bir çember gibi sembolize etmesiyle açıkça görülmektedir.) [9].

3.1.2.1.3 Ayırma Aksiyomları

1. *Eğer A,B,C aynı doğrultuda olan üç nokta ise, en az bir D noktası için* $AB \parallel CD$ *olur*
2. *Eğer* $AB \parallel CD$ *ise; A,B,C,D doğrusal ve farklıdır.*
3. *Eğer* $AB \parallel CD$ *ise;* $AB \parallel DC$ *dir.*
4. *Eğer A,B,C,D doğrusal dört nokta ise; ya* $AB \parallel CD$ *ya* $AC \parallel BD$ *veya* $AD \parallel BC$ *dir.*
5. *Eğer* $AB \parallel CD$ *ve* $AD \parallel BX$ *ise;* $AB \parallel CX$ *tir.*
6. *Eğer* $AB \parallel CD$ *ve* $ABCD \underset{\wedge}{=} A'B'C'D'$ *ise* $A'B' \parallel C'D'$ *dür.*

Bu aksiyomların sonuncusundan $AB \parallel CD$ bağıntısının $CD \parallel AB$ anlamına geldiği sonucu ortaya çıkar. Ayırma aksiyomlarında 5'te X yerine C konursa ve ayırma aksiyomlarından 2'de kullanılırsa, $AC \parallel BC$ hesaba katılmadığında $AB \parallel CD$ bağıntısı olduğu görülür. Ayırma aksiyomlarından 1, yani varlık aksiyomu, noktaların sonsuzluğunu korumanın en doğal yolunu araya eklemektedir. Buna göre, yukarıdaki aksiyomlar Vailati tarafından verilenleri hiçe sayarak daha değişiktir. (Veblen ve Russell'dan alıntı yapılmıştır.) [9].

Robinson, aşağıdaki Veblen ve Robinson'un çeşitli perspektiflerinin kombinasyonu için $\barwedge$ sembolünü kullanır. Aşağıdaki Von Staudt bu sembolü icat eden kişidir. Geçen iki tanımın eşit olabileceğine karşın, farklı tanımlama tercih edilir (Gerçel Geometride) [9].

Eğer A,B,C doğrusal üç nokta ise; AB/C parçası $AB \parallel CX$ için X noktalarının bir sınıfı gibi tanımlanır. Böylece AB/C parçası C yi içermez. Bu parça A ve B uç noktalarıyla bir "aralık" olarak isimlendirilir ve $\overline{AB}/C$ ile sembolize edilir. Eğer X ve Y, $\overline{AB}/C$ ye ait ise; $\overline{XY}/C$ aralığının $\overline{AB}/C$ nin içinde olduğu söylenir ve eğer XY/C ye ait ise (örneğin eğer $XY \parallel CD$ ise) $\overline{AB}/C$ içindeki X ve Y nin arasında bir D noktası yer alır. (Ya X veya Y çakışabilir ya da A veya B çakışabilir. Diğer durumda ya $AX \parallel BY$ veya $AY \parallel BX$ olur.) Böylece bir aralık veya bir parça faktörünü sınırladığında "üç nokta" sınıfını geçerli kılar [9].

3.1.2.1.4 Süreklilik Aksiyomu

Boş olmayan iki kümenin içindeki bir parçanın tüm noktalarının her bölümü için öyle ki herhangi birinin iki noktası arasında diğerinin hiçbir noktası bulunmuyorsa, bu kümenin her diğer noktası ve diğer kümenin her noktası arasında bulunan bir kümenin bir noktası vardır [9].

3.1.2.1.5 Modeller

Bir aksiyomlar sisteminin tutarlı oluşundan konuşulduğunda, mantıksal olarak aksiyomların sonucunda ortaya çıkan iki teoremin hiçbir zaman çelişkili olamayacağı demek istenir. ("*Tüm doğrular eşittir*." ve "*Bazı doğrular kendine diktir*." ifadelerinde olduğu gibi.) Açıkça tümdengelimin sonsuz sayıda olası zincirlerinin herhangi ikisinin bir çelişkiye sebep olup olmadığını görmeyi tamamlayamayacağımızdan tutarlılık için doğrudan hiçbir test yoktur. Dolaylı bir test için orijinal sistemin tanımsız elemanları gibi aynı aksiyomları sağlayan nesnelerin bir kümesi olan bir "model" kullanılır. Orijinal sistemin içerdiği herhangi bir çelişki modelde de bir çelişki ile ifade edilir ve kesin var olan nesneler oldukça bu çelişki bulunmaz. Bu nesneler tutarlılığı olmuş farz edilen başka bir soyut sistem içindeki (tanımlı veya tanımsız) elemanlar veya matematiğin alanı dışındaki mantıklar için gerçekliği kabul edilen fiziksel nesneler olabilir. Önceki durumdaki tutarlılık varsayımı sadece bu modelin bir modeli aracılığı ile doğrulanabilir. Böylece tutarlılığın her sorusunun eninde sonunda düşüncelerle açıklandığı gibi, fiziksel dünyanın özelliklerine dayandırıldığı uygun bir şekilde iddia edilebilir [9].

Burada reel projektif geometri için üç model verilіştir. Birincisi afin geometri açısındandır. Afin geometrinin tutarlılığı genellikle Kartezyen koordinatlar ("modelin modeli") aracılığıyla kurulur. İkincisi doğrudan sayı sisteminden bahseder. Üçüncüsü mutlak geometri açısındandır. Mutlak geometri, “belli” postulatlara dayanan fiziksel uzayla doğrudan karşılaştırmaya yöneltir [9].

Kurulan ilk modele göre, paralellerin çizgilerini ve yığınlarını kapsayan bir biçimdeki gibi afin uzayda (veya tercihen Euclidean’de) eksensel çizgiler ve yığınlar tanımlanır ve sonra aşağıdaki gibi bir sözlük kurulur [9].

Reel projektif uzay	Afin uzay
Nokta	Yığın
Doğru	Eksensel çizgi
Bir doğru üzerinde bir nokta bulunur	Bir yığının düzlemleri bir çizginin düzlemlerini kapsar
İki nokta bir doğru belirtir	İki yığının bayağı (basit) düzlemleri bir çizgi oluşturur

Bu modelin kuruluşu, “sonsuzlukta bir düzlem” kabulüne “ideal” noktaların ve düzlemlerin eklenmesiyle afin (veya Euclidean) uzaydan projektif uzayı klasik olarak türetmeye eşittir. Çünkü böyle noktalar paralel doğruların yığınlarının merkezleri olarak ortaya çıkar ve bu doğrular paralel düzlemlerin çizgilerinin eksenleri olarak ortaya çıkar [9].

Doğrudan aritmetiğe başvurma homojen koordinatlar kullanılarak yapılır. Bu kez uygun sözlük aşağıdadır [9]:

Reel projektif uzay	Reel sayı sistemi
A noktası	(a_0,a_1,a_2,a_3) olarak verilen bir dörtlüyle orantılı olan, reel sayıların sıralı dörtlülerinin bir sınıfı
p doğrusu	$P_{23}P_{01}+P_{31}P_{02}+P_{12}P_{03}= 0$ denklemini sağlayan $\{P_{23},P_{31},P_{12},P_{01},P_{02},P_{03}\}$ olarak verilen bir altılıyla orantılı olan, reel sayıların sıralı altılılarının bir sınıfı. ($P_{\nu\mu}=-P_{\mu\nu}$ ve bu yüzden $P_{\nu\nu}=0$ olsun diye uygunluk için P_{32} gibi tanımlarız.)
p doğrusu üzerinde bulunan A noktası	V nin iki değeri (ve bu nedenle tümüyle dört) için $a_0P_{0\nu}+a_1P_{1\nu}+a_2P_{2\nu}+a_3P_{3\nu}=0$
AB doğrusu	$\{a_0b_1-a_1b_0,\ a_0b_2-a_2b_0,\ a_0b_3-a_3b_0,\ a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\}$
AB‖CD	A nın ve aynı şekilde b nin, c nin ve d nin iki bağımsız homojen lineer denklemi sağlaması; kendi oranları olan a_μ/a_ν, c_μ/c_ν, b_μ/b_ν, d_μ/d_ν sağlaması veya bazı dairesel permutasyonlar sağlaması bu nedenle, iyi seçilmiş v nin en az biri için kesinlikle artan büyüklükte olması

Eğer iki boyutlu projektif geometriyi tek bir düzlem olarak düşünmeyi sağlayabilirsek, sıradan uzayda (metriksel kavramlar olmaksızın) bir nokta sayesinde, üçüncü bir model doğrular ve düzlemlerden oluşur [9].

Reel projektif düzlem	Sabit bir 0 noktasının civarında Euclidean veya Euclidean olmayan uzay
A noktası	0 dan a doğrusu
AB doğru	ab düzlemi
Aralık	Düz çizgi
Düz çizgi	Eksensel çizgi
Üçgen	3 düzlemli
Konik	2. derece ve daha yüksek dereceli koni

Bu ilk modelin sahip olmadığı simetrinin avantajına sahiptir. Dahası, bir yığının geometrisi "5. Postulat" kullanılmaksızın geliştirilebilir; aslında bir yığın projektif geometrideki gibi mutlak geometride de aynı şeydir. Fakat üç boyutlu bu modele uyum sağlamak için mutlak (veya Euclidean) hiper uzayının özellikleriyle benzer olan herhangi biri için tamamen sağlanan dört boyutlu modeldeki bir nokta sayesinde doğruların ve düzlemlerin "hiper-yığını" hesaba katılmak zorundadır [9].

3.1.2.1.6 Dualite (İkilik) İlkesi

A, B, C noktaları doğrusal olmayan üç nokta olmak üzere bir ABC üçgeninin köşeleri olarak isimlendirilir. Onun kenarları BC, CA, AB olmak üzere üç doğrudur. Benzer olarak; A, B, C, D eş düzlemli olmayan dört nokta olmak üzere bir ABCD dört yüzlüsünün köşeleridir. Onun kenarları AD, BD, CD, BC, CA, AB olmak üzere altı doğru ve onun yüzleri BCD, CDA, DAB, ABC olmak üzere dört düzlemdir [9].

Düzlemde Dualite İlkesi önemli duran her tanımı ve doğru duran her teoremi doğrular. "Nokta" veya "doğru"yu değiştirdiğimizde değişikliklerin sonucu olarak ifade tarzında birkaç düzenleme yaparız. Bunun anlamı, doğruların geometrisi noktaların geometrisi için bir model kurar. Aşağıdaki tanıma bir örnek getirelim:

Eş düzlemli dört nokta A, B, C, D nin üçü doğrusal olmamak üzere:

AD, BD, CD, BC, CA, AB

kenarları için altı doğrusuyla bir ABCD tam dörtgeninin köşeleridir. "Karşıt" kenarların arakesit noktaları:

(AD, BC), (BD, CA), (CD, AB)

olarak adlandırılan köşegen noktaları diye isimlendirilir ve diyagonal üçgenin köşeleridir [9].

Eş düzlemli dört doğru a, b, c, d nin üçü aynı olmamak üzere:

(a, d), (b, d), (c, d), (b, c), (c, a), (a, b)

köşeleri için altı noktasıyla bir abcd tam dört kenarlısının kenarlarıdır. "Karşıt" köşelerin birleşimi:

(a, d), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (a, b)

olarak adlandırılan köşegen doğruları diye isimlendirilir ve diyagonal üçgenin kenarlarıdır [9].

Uzayda Dualite İlkesi "nokta" ve "düzlem"in benzer değişimine izin verir. Böylece Konum Aksiyomu 7 ve 2 ile dual uzaydır. Burada diğer bir örnek şudur:

A, B, C, D, E eş düzlemli olmayan beş nokta olmak üzere, kenarlar için AB,…, DE on doğrusuyla ve yüzleri için ABC,…, CDE on düzlemiyle bir ABCD tam beşgeninin köşeleridir. Her bir kenar üç yüz üzerinde bulunur.

α, β, γ, δ, ε dördü aynı olmayan beş düzlem olmak üzere, kenarlar için (α, β),…, (δ, ε) on doğrusuyla ve köşeler için (α, β, γ),…, (γ, δ, ε) on noktasıyla bir αβγδε tam beş yüzlüsünün yüzleridir. Her bir kenar üç köşeyi kapsar.

Dualite İlkesi'ni doğrulamak için aksiyomların kendi duallerini (ikililerini) beraberinde getirdikleri ileri sürülür. Örneğin Konum Aksiyomu 5 ve 2'nin dual-düzleminin ispatlanmasını sağlar [9].

3.1.2.1.7 Herhangi İki Eş Düzlemli Doğrunun Kesişimi

Bu projektif geometriyi afin geometriden açıkça ayıran sonuçtur. Bu sonuç, olası paralellerin kuralına aykırıdır [9].

Bir teoremin ispatlanmasında, aslında orijinal teoremin ispatlanmasında her adımda mekanik olarak dualizeyle bir ispatı kağıda dökebilmek için daha fazla karışıklık olmadan dual-uzay söylenebilir. Benzer açıklama düzlemin dışındaki noktalar kullanılmaksızın ispatlanabilen herhangi bir dual-düzlem teoremini içerir. Bununla birlikte Desargues'in Teoremi ve onun tersi dikkate alınırsa:

Teorem 3.1: İki eş düzlemli üçgenin köşelerinin paralel olması durumunda paralel köşelerin birleşim noktaları aynı ise paralel olan kenarların arakesitleri doğrusaldır.

Teorem 3.2: İki eş düzlemli üçgenin kenarlarının paralel olması durumunda paralel kenarların arakesitleri doğrusal ise paralel köşelerin birleşim noktaları aynıdır.

Bu dual teoremlerin herhangi biri, düzlemden ayrılmaksızın diğer birinden ortaya çıkabilir. Fakat ilk ispat aslında üç boyutlu olduğundan bu amaç için düzlemde Dualite İlkesi'ne başvurmak mantıklı değildir [9].

İki boyutlu projektif geometrinin aksiyomlarının yeterli bir kümesini elde etmek için Teorem 3.1 (eş düzlemli kelimesini çıkararak) ile Konum Aksiyomu 5-7 değiştirilebilir. O halde, Dualite İlkesi şüphesiz sağlanır [9].

3.1.2.2 Eliptik Geometri

3.1.2.2.1 Genelde Eliptik Geometri

Klein'ın Eliptik Geometrisi, eş düzlemli iki doğrunun arakesitinin genelde tek bir nokta olduğu bir metrik geometridir. Bu geometriye yaklaşmanın bir metodu, aşağıdaki gibi belli aksiyomları sağlayan tanımsız bir kongruans bağıntısını tanıtmaktır [9].

Aksiyom 3.21: *Verilen bir doğrunun üzerindeki herhangi bir D noktasından, her biri verilen bir AB parçasına eşlenik olan iki parça CD ve DE olmak üzere, iki parça ayrılabilir* [9].

O halde, Euclid'in özdeşliğine benzer önermelerin bir zinciri genişletilebilir ve tüm doğruların sınırlı ve eşit olduğu sonucu çıkartılabilir. Bir doğru sonsuzdur ve herhangi iki nokta iki "bütünler" parçayı belirler. Eğer bunlar eşitse, her biri bir "dik" parçadır ve bu iki nokta "eşlenik" olarak isimlendirilir. Verilen bir düzleme dik olan tüm bu doğrular, düzlemde her noktaya eşlenik olan belli bir noktada çakışık olarak bulunur. Tersine, verilen bir noktaya eşlenik olan noktaların yeri bir düzlemdir. Böylece bu, noktalar ve düzlemler arasındaki "uniform kutupsallık" olarak isimlendirilen bir çeşit tanımdır [9].

Reel projektif geometrinin her aksiyomunun eliptik geometride de geçerli olduğu ileri sürülür. Bu aksiyomlar kolayca benimsenir ve bir uniform kutupsallığın özel ilgi alanı olarak kabul edilir. Bu mutlak kutupsallık önce keyfi olarak seçilir, sabit tutulur ve bir eşlenik translasyon (dönüşüm) bu kutupsallığı kendisine dönüştüren bir kolineasyon gibi tanımlanır. Kongruansın tüm aksiyomları sonra ispatlanabilen teoremler olur. Basitlikteki bu artış önemlidir. Özellikle bu aksiyomlar (bir parçanın yeri eşsiz olarak belirlenen) Euclidean geometridekilerden daha karmaşıktır. Dahası reel projektif geometrinin tüm teoremleri hem de eliptik geometridekileri kesinlikle tutar ve başka teoremlerin sonuçları için önemli bir temel oluşturur ("Eşlenik translasyonun (dönüşümün)" diğer ismi izometridir.) [9].

Eğer eliptik geometriyi sadece iki boyutta geliştirilmek istenirse reel projektif düzlemle başlanır ve bir eliptik kutupsallığın özel ilgi alanı olur. Bir tek doğrunun geometrisini dikkate alan bir içerik oluşturulsun. Mutlak kutupsallığın yerine mutlak bir involusyon (karışıklık) alınsın. Bu, başlangıçta reel projektif doğrudaki herhangi bir eliptik involusyon (karışıklık) olsun, fakat ilk kez seçildiğinde tüm görüşler tamamen korunur. Bu tanımla, onun çiftleri bu doğruyu "dik parçalarına" ayıran konjuge (benzer) noktalardır [9].

Benzer olarak, sonsuzlukta bir düzlemde özel bir eliptik kutupsallık (veya involusyon (karışıklık)) ile "afin" geometriden Euclidean geometri türetilebilir. Aslında afin uzayın sonsuzda bir düzlemdeki noktaların ve doğruların geometrisi projektiftir. Oysa Euclidean uzayın sonsuzda bir düzlemdeki noktaların ve doğruların geometrisi eliptiktir [9].

3.1.2.2.2 Modeller

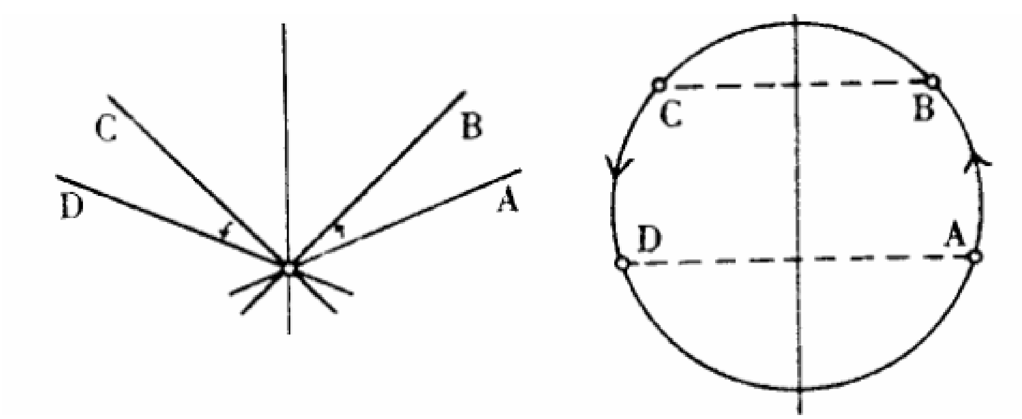
İki boyutlu eliptik geometri, Euclidean uzayda bir doğru ve düzlem yığınının oluşturduğu bir modelle gösterilir. Bir boyutlu eliptik geometri için benzer bir model, Euclidean düzlemde düz çizgi meydan getirir. Eşlenik noktalar dik doğrularla temsil edilmiş olur. Fakat bu bir boyutlu durumda istisna olarak başka basit model elde edilebilir. Aslında eliptik doğrunun geometrisi tipik bir çemberin geometrisiyle özdeştir. Noktalar çap boyunca zıt yerde olunca "konjuge (eşlenik)" olur [9].

Bu modelin elemanları bir konik üzerinde tanımlı izdüşümselliklerin olası bir sonucuyla ilgili olabilir. Çünkü bir çember bir koniktir ve bir konik üzerindeki herhangi bir involusyon (karışıklık) çiftinin birleştiği doğrular tıpkı bir çemberin çapı gibi taşınır. Bu kuadrik (ikinci dereceden bir yüzey) için benzer bir teori değildir ve sonuç olarak bir küre üzerindeki eliptik düzlemi bire-bir temsil etmez [9].

Eliptik geometrinin kendi soyut doğasını vurgulamak için aşağıdaki sözlükte olduğu gibi iki model yan yana yerleştirilebilir:

Eliptik doğru	Sabit bir O noktasının civarındaki Euclidean düzlem	Bir çemberin çevresi
Nokta	O dan geçen doğru	Çember üzerindeki nokta
Parça (segment)	Açı	Yay
Bütünler parçalar	Bütünler açılar	Major ve minor yaylar
Dik parça	Dik Açı	Yarım daire
Translasyon (dönüşüm)	O etrafında dönme	Merkez etrafında dönme
Bir noktada yansıma	O dan geçen bir doğruda yansıma	Bir çapta yansıma

Modellerin bu konunun mantıksal gelişiminin bir parçası olmadığı açıkça anlaşılabilir, fakat sadece grafikler gibi anlamlandırmaya yardım eder (Her iki model Şekil 3.23'te kullanılır). Reel projektif geometri kadar tutarlı olan eliptik geometri "3.1.2.1.1 Reel Projektif Geometri: Temelleri"nden beri hiçbir yeni varsayımdan oluşmadığı için artık herhangi bir tutarlılık sorusu yoktur [9].



Şekil 3.23: Euclidean ve eliptik modellerin kullanımı

3.1.2.2.3 Yansımalar ve Translasyonlar (Dönüşümler)

Bir Ω eliptik involusyonla (karışıklıkla) her projektiflik permute edildiğinde her biri eliptiktir, ama involusyon (karışıklık) veya hiperbolik involusyon (karışıklık) değildir. Ω bir mutlak involusyon (karışıklık) olduğunda (varsayıldığı gibi), bu hiperbolik involusyon (karışıklık) bir "yansıma" ve bu eliptik projektiflik bir "translasyon (dönüşüm)" olarak isimlendirilir. Benzer teorem söylendiğinde bu, A ve B herhangi iki nokta için her alınan A dan B ye; ${}_A\Phi_B$ bir tek yansıması, ${}_A\Psi_B$ bir tek translasyon (dönüşüm)ü vardır. A ve B eşlenik olduğunda özel olarak ${}_A\Psi_B = \Omega$ olur [9].

İki izdüşümselliğin sonucu Ω ile her biri permute edildiğinde, Ω ile kendisi permute edilir. (Ayrıntılı olarak; $\Omega\theta\theta' = \theta\Omega\theta' = \theta\theta'\Omega$ dır.) Bundan dolayı, iki yansıma sonucu veya iki translasyon (dönüşüm) sonucu bir translasyondur (dönüşümdür). Fakat bir yansımanın sonucu bir translasyon (dönüşüm) sonucu bir yansımadır. Bir doğru üzerinde herhangi üç nokta A, B, C olmak üzere sembol olarak [9].

$$ {}_A\Phi_B\,{}_B\Phi_C = {}_A\Psi_C = {}_A\Psi_B\,{}_B\Psi_C \tag{3.1} $$

$$ {}_A\Phi_B\,{}_B\Psi_C = {}_A\Phi_C = {}_A\Psi_B\,{}_B\Phi_C \tag{3.2} $$

şeklinde gösterilir [9].

Bundan dolayı, ${}_A\Psi_B^{-1} = {}_B\Psi_A$ apaçık gerçeği ile uyum içinde [9].

$$ {}_A\Psi_A = 1 \tag{3.3} $$

ifadesini içerdiği için gösterimi genişletmek doğaldır. Fakat ${}_A\Phi_A$, A ve AΩ nokta çiftinin involusyonudur. Bu A da (veya AΩ da) "yansıma" olarak adlandırılır. ${}_A\Phi_B$ olması için A ve B değiştirilir. ${}_B\Phi_A$ olması için de aynı şekilde A ve B değiştirilir [9].

Eğer Φ herhangi bir yasıma ve Ψ herhangi bir translasyon (dönüşüm) ise, $\Phi\Psi$ bir yansıma olduğunda $\Psi = \Phi\ \Phi\Psi$ olur. Bundan dolayı [9].

Her translasyon (dönüşüm) biri keyfi olarak seçilen iki yansımanın bir sonucudur [9].

Yine $\Phi\Psi$ için bir yansıma olduğuna göre [9].

$$\Psi \, \Phi\Psi = \Phi \tag{3.4}$$

ifadesi periyot ikidendir [9].

Böylece eğer $A\Psi = B$ ve $B\Phi = C$ ise, o halde $A\Phi = A\Psi \, \Phi\Psi = B\Phi\Psi = C\Psi$ dir. Bu son D noktası, Şekil 3.23'teki gibi aşağıdaki (eşlenik parçalar için benimsenen tanımı doğrulayan) teoremi ortaya çıkarır [9].

$$_A\Psi_B = {_C\Psi_D} \; ve \; {_B\Phi_C} = {_A\Phi_D} \tag{3.5}$$

*bağıntıları eşittir [9].*İkinci bağıntı B ve C arasında simetrik olduğuna göre, başka eşit bağıntı $_A\Psi_C = {_B\Psi_D}$ dir [9].

"Yansıma" ve "translasyon (dönüşüm)" kelimelerinin kullanımı Euclidean geometrideki üstteki teoremleri içine alan ispatlarla açıklanır. Fakat bu ispat metodu hiçbir mutlak involusyon (karışıklık) ve hiçbir eşlenik noktayı içine almayan Euclidean doğrusu için epey farklıdır. Euclidean geometride, herhangi iki translasyon (dönüşüm) permute edilebilir, fakat iki yansıma hiçbir zaman (tek boyutta) permute edilemez. Eliptik geometride benzer sonuçlar şöyledir: [9].

Ψ ve Ψ' iki translasyon (dönüşüm) ve A herhangi bir nokta olsun [9].

$$B = A\Psi, \; C = A\Psi', \; D = C\Psi \tag{3.6}$$

tanımlansın. Sonra $_A\Psi_B = {_C\Psi_D}$ ($= \Psi$) bağıntısı $_B\Psi_D = {_A\Psi_C}$ ($= \Psi'$) bağıntısına eşit olduğunda $B\Psi' = D$ olur. Böylece

$$A\Psi\Psi' = D = A\Psi'\Psi \tag{3.7}$$

olur ve dahası $\Psi\Psi' = {_A\Psi_D} = \Psi'\Psi$ dir. Buradan;

Herhangi iki translasyon (dönüşüm) permute edilebilir [9].

Diğer yandan, eğer ${}_A\Phi_B$ ve ${}_B\Phi_C$ yansımaları permute edilebilirse,

$$ {}_A\Psi_C = {}_A\Phi_B\, {}_B\Phi_C = {}_B\Phi_C\, {}_A\Phi_B = {}_C\Phi_B\, {}_B\Phi_A = {}_C\Psi_A \tag{3.8} $$

dır [9]. (3.5)'le (B için C ve D için A ile) bu, ${}_C\Phi_C = {}_A\Phi_A$ ile gösterilir. Böylece eğer A ve C farklı ise, eşlenik olurlar ve ${}_A\Phi_C = \Omega$ olur. Buradan,

Aksiyom 3.22: *Eğer iki yansıma permute edilebilirse, onların sonuçları mutlaka bir involusyondur* [9].

3.1.2.2.4 Bir Parçanın Uzunluğu

Bir parçanın uzunluğunu eşlenik dönüşüm altında değişmez kalan ve sıralanmış parçaların toplamsal bir özelliği araştırılır. Örneğin; AC parçasında B bulunduğunda, [9].

$$ AB + BC = AC \tag{3.9} $$

dir. ${}_A\Psi_B\, {}_B\Psi_C = {}_A\Psi_C$ olduğuna göre, A yı B ye dönüştürmek için Ω translasyonunun (dönüşümünün) yükseltilme kuvveti dikkate alınır. Kesin olarak, eğer ${}_A\Psi_B = \Omega^n$ $(0<n<2)$ ise, λ uzunluk birimine bağlı olan keyfi bir sabit olduğunda AB parçası $n\lambda$ uzunluğundadır denir ve

$$ AB = n\lambda \tag{3.10} $$

biçiminde yazılır. (Bir parça ve uzunluğu için aynı AB sembolünün kullanılması sonucu hiçbir karışıklık meydana gelmez. Bu bağlamda genellikle demek istenen anlam gösterilir.) İki parça eğer sadece ve sadece aynı uzunlukta ise eşlenik oldukları hemen anlaşılır [9].

Eğer A ve B eşlenikse, AB = λ dır ve tam doğrunun uzunluğu şöyle iki parçanın sıralanmasıyla elde edilir:

$$AB + BA = 2\lambda \tag{3.11}$$

Elbette A ve B eşlenik olmasa bile, daha kısa parça "dar" olarak ve daha uzun parça "geniş" olarak isimlendirildiğinde AB + BA tam doğrudur. Dar parçanın uzunluğu A ve B arasındaki "uzaklık" olarak isimlendirilir [9].

Bir birimin iyi seçimi, λ uzaklığı özel bir rol oynadığı için Euclidean geometrideki keyfiliğin aynı çeşidine sahip değildir. Aslında λ nın mantıklı bir seçimi belirli formülün görünüşünün çok basitleştirilmesiyle bulunur [9].

3.1.2.2.5 Çapraz Oran Koşullarında Uzaklık

Doğrunun noktaları reel sayılar ve ∞ tarafından aralıksız olarak homojen olmayan bir koordinat veya apsis(x) değeri ile temsil edilebilir. Bir eliptik involusyonun (karışıklığın) en basit şekli şudur:

$$xx' + 1 = 0\,. \tag{3.12}$$

Mutlak involusyon (karışıklık) Ω olduğunda temel noktalar P_0, P_1, P_∞ olarak seçilsin [9].

O halde eşlenik noktaların tipik bir çiftinin apsisi t ve $-t^{-1}$ olur. İnvolusyon (karışıklık) şöyle çift noktalardır:

$$xx' - \frac{1}{2}(t - t^{-1})(x + x^{-1}) - 1 = 0\,. \tag{3.13}$$

Bu ifade bu yüzden genel "yansıma"dır, fakat P_0 da yansıma şöyledir:

$$x + x' = 0 \tag{3.14}$$

Bu iki yansımanın birleşimi, (3.13)'te x yerine –x yazılmasıyla [9].

$$xx' - \frac{1}{2}(t - t^{-1})(x - x') + 1 = 0 \tag{3.15}$$

veya

$$(x' - x)/(1 + xx') = 2t/(1 - t^2) \tag{3.16}$$

şeklinde genel translasyon (dönüşüm) elde edilir [9].

Bu trigonometrik yerine koyma ile basitleştirilebilir. Aslında $x = \tan\xi$, $x' = \tan\xi'$, $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ konulursa $\tan(\xi' - \xi) = \tan\theta$ elde edilir. Bu yüzden şu denklik yazılabilir:

$$\xi' \equiv \xi + \theta (\bmod \pi). \tag{3.17}$$

Tanjant fonksiyonu genellikle Euclidean geometri terimlerinde tanımlanmış olmasına rağmen zorlukla gösterilmesi gerekir. Ancak $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ (x = 0 olduğunda y = 0 ile) gibi diferansiyel denklemi yoluyla analitik olarak rahatlıkla tanımlanabilir [9].

$0 \le \xi < \pi$ ile herhangi bir ξ sayısı için apsisi $\tan\xi$ olan (ξ) tanımlı bir noktadır. ξ nin durmadan $\frac{1}{2}\pi$ den π ye 0 dan arttırıldığı gibi, $\tan\xi$ de 0 dan ∞ a arttırılır ve sonra0 dan geriye negatif değerler boyunca arttırılır. Bu arada (ξ) noktası n, 0 dan 2 ye durmadan arttırıldığında sürekli Ω^n translasyonu (dönüşümü) yoluyla bu doğruyu tanımlar. Eğer Ω^n ve Ω^m orijini (0) dan sırasıyla (ξ) ve (θ) ya çevrilirse, Ω^{n+m} birleşimi "3.1.2.2.5 Çapraz Oran Koşullarında Uzaklığa" uygun olarak (0) dan ($\xi+\theta$) ya çevrilir. Bu yüzden ξ ve n orantılı olarak artar ve Ω^n, (0) dan $(\frac{1}{2}\pi n)$ ye çevrilir. Bir başka deyişle, parçanın uzunluğu (0) dan ($\xi+\theta$) ya "3.1.2.2.4 Bir Parçanın Uzunluğu"ndaki gösterimle ξ ye orantılıdır. Bu orantı da kesinlikle $2\xi\lambda/\pi$ dir [9].

θ nın terimlerinde translasyon (dönüşüm) ile (3.14) daha çok bilinen biçimler alır:

$$xx' + (x - x')\cot\theta + 1 = 0 \tag{3.18}$$

veya

$$x' = \frac{x\cos\theta + \sin\theta}{-x\sin\theta + \cos\theta} \tag{3.19}$$

İyi seçilmiş temel noktalardan bağımsız olan uzunluk için bir formül elde etmek için, verilen bir parçanın uç noktaları kendi eşlenikleriyle oluşturulduğunda çapraz oran hesaplanır. Uç noktaları (ξ) ve (η) olan bir AB parçası dikkate alınsın. A' ve B' eşlenik noktaları $(\xi \pm \frac{1}{2}\pi)$ ve $(\eta \pm \frac{1}{2}\pi)$ dir. Bu dört noktanın apsisleri $\tan\xi$, $\tan\eta$, -$\cot\xi$, -$\cot\eta$ dür. Bu yüzden şöyle olur [9]:

$$\{AA', BB'\} = \frac{(\tan\xi - \tan\eta)(-\cot\xi + \cot\eta)}{(\tan\xi + \cot\eta)(-\cot\xi - \tan\eta)} = -\frac{(\tan\eta - \tan\xi)^2}{(1 + \tan\eta\tan\xi)^2} = -\tan^2(\eta - \xi) \tag{3.20}$$

Başka bir deyişle, eğer AB, $2\theta\lambda/\pi$ uzunluğunda bir parçaysa,

$$\{AA', BB'\} = -\tan^2\theta \tag{3.21}$$

olur ve bundan dolayı şu eşitlikler bulunur:

$$\{AA', B'B\} = -\cot^2\theta, \tag{3.22}$$

$$\{AB', A'B\} = \cos ec^2\theta, \tag{3.23}$$

$$\{AB', BA'\} = \sin^2\theta, \tag{3.24}$$

$$\{AB, B'A'\} = \cos^2\theta, \tag{3.25}$$

$$\{AB, A'B'\} = \sec^2\theta. \tag{3.26}$$

Bu çapraz oranların uygun bir tanesi seçilip ABA' üçlüsünün anlamı belirsiz sembolle tanımlandığında, uzunluğun kendisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$AB = \frac{2\lambda}{\pi}\arccos(\pm\sqrt{\{AB, B'A'\}}) \tag{3.27}$$

İlk modelde $\lambda = \frac{1}{2}\pi$ ve ikinci modelde $\lambda = \pi$ alınırsa, açının veya yayın radyan cinsinden ölçüsü, uzunluk ölçüsü olarak kabul edilir. O halde, tüm doğruların uzunluğu, sırasıyla π veya 2π olur [9].

3.1.2.3 Tanımlayıcı Geometri

3.1.2.3.1 Hiperbolik Geometri İçin Klein'ın Projektif Modeli

Euclidean olmayan geometri yaklaşımında iki temel tarz vardır. Bunlardan biri Gauss, Lobatschewsky, Bolyai ve Riemann tarafından, Euclidean geometri ile başlatılan ve postulatları değiştirilen geometridir. Diğeri ise Cayley ve Klein tarafından projektif geometri ile başlatılan ve bir kutupsallık ile diğerinden ayrılan geometridir [9].

Klein'ın işleminde, mutlak geometride eğer iki doğru eşlenikse, bu geometri bu kutupsallığın tipine göre eliptik veya hiperbolik olur. Eliptik durum etraflıca ele alındığında; geçersiz kutupsallığın uygunsuz olduğu kolayca görülür. Bu bir yana, bir konik veya kuadriğin (ikinci veya daha yüksek dereceden bir yüzey) "mutlak" olarak tanımlanma çeşidine bir kutupsallıkla izin verilir. Eğer kendi kendine dik olan doğruların olasılığının kuralı dışındaki 4.Postulat kabul edilirse, mutlağın bir kuadrik kuralı olmadığı bulunur ve düzlemdeki bir koniğin veya uzaydaki bir oval kuadriğin iç noktalarının dikkate alınmasına yol gösterir [9].

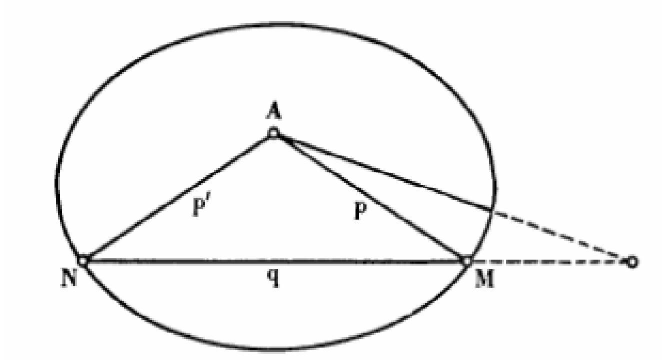
Bir eşlenik dönüşüm mutlağı koruyan bir kolineasyon gibi tanımlandığında, eğer bir AB doğrusu K ve L de mutlak oluyorsa, AB uzunluğu, Klein tarafından gösterildiği gibi,

$$e^{\alpha AB} = \{AB, KL\} \tag{3.28}$$

ile verilerek gösterilir. α burada uzunluk birimine bağlı olan bir reel sabittir. α pozitif olarak alındığında bu formülün AB yi, $AK \| BL$ veya $AL \| BK$ ye göre pozitif veya negatif yaptığı bulunur. Her iki durumda *AB uzunluğu* şöyle olur:

$$\frac{\left|\log\{AB, KL\}\right|}{\alpha}. \tag{3.29}$$

Özellikle $AK = \infty$ ise, "sonsuzluktaki noktalar" için mutlak üzerindeki noktalar olarak bahsedilir [9].



Şekil 3.24: A merkezli düz çizgi ve q doğrusunun aynı düzlemde olması

Lobatschewsky'nin "imgesel geometrisi"nin tüm özellikleri bu geometride bir konik veya bir kuadriğin içinde kolayca görülür. Örneğin; A merkezli düz bir çizginin ve q doğrusunun Şekil 3.28 ve Şekil 3.24'teki gibi aynı düzlemde olduğu göz önünde tutulur. p ve p' paralelleri, sonsuzdaki noktaların üzerinde olduğu q daki A noktasında birleşir ve çizgiyi iki parçaya ayırır. "İkinci" parça, mutlak dışında q da karşılaşan doğrulardan meydana gelir. Şöyle ki, hiperbolik geometri açısından doğruların hiçbiri q da karşılaşmaz [9].

Mutlağın dışında ve üzerinde olan "ideal" noktalar çok önemlidir. Örneğin, bir dış noktanın kutbu, kendisinden geçen herhangi iki doğrunun ortak dikmesidir. Fakat hiperbolik geometride düzenli noktaların tümü mutlağın iç noktası olduğuna göre, Euclidean geometri biraz değiştiği için klasik çeşitlerde hiperbolik geometriye yaklaştığında tanımlanabilen bu diğer noktalar hiçbir şekilde açık değildir. Klein, hiperbolik uzayın bu uzantısını üretmek için bir yöntem göstermiştir. Bu detaylar da Pasch tarafından düzenlenmiştir. Afin veya Euclidean uzaya sonsuzluktaki noktalarının eklenmesi özel bir durum gibi görünür [9].

Metrik kavramların konu dışında olması yeterince doğaldır. Verilen bir noktadan çizilen verilen bir doğruya paralel olan doğruların sayısını söylemek için başka hiçbir bilgiye ihtiyaç duyulmaz. Bu şekilde Euclidean ve hiperbolik geometrinin her ikisini birden kapsayan daha genel bir geometri ile ilgilenilebilir [9].

3.1.2.3.2 Dışbükey Bir Bölgede Geometri

Reel projektif geometri, "Tamamlanmamış düz bir kenarla ne yapılabilir?" gibi tanımlandığında, doğruların çiftlerinin istenen kesişim noktasının kullanılan kağıt yaprağının dışında olmasını içermesi karmaşık bir yapıya uygun olduğundan, pratik güçlük ihmal edilir. Dışbükey bir bölge etkeni sınırlandığında reel projektif geometrinin oluşması sorusuyla bilinen bu sıkıntı göz önünde tutulabilir (Örneğin, herhangi bir doğrunun tümünü içermeyen, fakat içinde herhangi iki noktasıyla tanımlanan iki parçadan birinin tümünü içeren bir bölge etkeni gibi). İhmal edilen aksiyomlar sadece Konum Aksiyomu 5 ve 7'dir. (İki doğru veya iki düzlem, seçilen bölgenin içinde karşılaşmıyorsa, hiçbiri karşılaşmıyor, denir.) "Tanımlayıcı" geometrinin meydana gelmesi, Dualite İlkesi'nin kaybını iki noktayla tanımlı bir tekparçanın ispatıyla telafi ettiğine göre, pratiksel ilgi kadar teoriktir. Dolayısıyla aitlik ve konum bağıntıları tanımlanmak yerine, her iki "üç nokta" dizisinin tek bağıntısı veya "arada olma" terimiyle ifade edilebilir. Aslında üç noktanın doğrusal olması, pratiksel araştırmada olduğu gibi, onlardan birinin diğer ikisi arasında bulunup bulunmadığına bakılarak test edilebilir [9].

Genellikle oldukça farklı kavramlar için tercih edilen (yani düzlemdeki izdüşümlerle katı bir figürün sembolize edilmesi tekniği) "tanımlayıcı geometri" ismi, Russell ve Whitehead tarafından "seri dizi geometrisi" için uygun bir kısaltma olarak benimsenmiştir [9].

Tanımlayıcı geometrinin aksiyomlarının bir kümesi "3.1.2.3.3 Veblen'in Dizi Aksiyomları"nda verilmiştir. O halde, dışbükey bir bölgenin geometrisi bir model görevi görür. Fakat olası dışbükey bölgelerin çeşitliliğinin tanımlayıcı geometri olarak gösterilmesi kesin değildir. Başka bir deyişle, kesinlikle bir geometri değildir, fakat geometrilerin bir ailesidir. En çok kullanılan iki bölge (iki boyutlu durumda) bir koniğin iç bölgesi ve projektif düzlemin dışındaki bir doğruyla tamamıdır. Bunlar sırasıyla hiperbolik geometri ve afin geometride verilir. Fakat bunlar diğer olasılıklardır. Örneğin, bir üçgensel bölge ve paralel üç doğrusal kutupsallık kullanılabilir. Bununla birlikte o zaman metrik özellikler, dikliğin daha fazla bir simetrik bağıntı olmasından dolayı oldukça tuhaf olur [9].

Kongruans ve paralelliği atlayan lise geometrisinde kullanılan tanımlayıcı geometri, projektif geometriden daha tanıdıktır. Bundan dolayı öncekinin, sonraki için aynı şekilde tersine bir model sağlaması ilginçtir. Aslında bu iki farklı yolla olur. Tanımlayıcı uzaydaki bir nokta sayesinde doğrular ve düzlemlerin, reel projektif geometrideki noktalar ve doğrular için bir model oluşturduğu görülür. Daha genel olarak, n-boyutlu tanımlayıcı uzaydaki bir nokta sayesinde doğrular ve düzlemler (n-1) boyutlu projektif uzayda noktalar ve doğrular için bir model oluşturur. İkinci olarak, aşağıdaki Pasch tarafından detaylandırıldığı gibi, Klein'ın önermesinin, tanımlayıcı uzaydaki doğruların ve düzlemlerin belli sınıflarının aynı sayıda boyutlu reel projektif uzaydaki noktalar ve doğrular için bir model oluşturduğu görülür. Aslında bir tanımlayıcı uzayın verilmiş olması, kendisi tanımlayıcı uzayın bir parçası olan bir projektif uzayın, yani dışbükey bir bölgenin çizilebilmesi demektir [9].

3.1.2.3.3 Veblen'in Dizi Aksiyomları

Veblen'in işleminde, bir "nokta" tanımlanmamış bir eleman ve "arada olma" tanımlanmamış bir bağıntıdır. Forder'a göre, "A ve C arasında B bulunur." veya "A, B, C üç noktası BC dizisindedir." şeklindeki bu bağıntıyı ifade etmek için [ABC] sembolünü kullanır [9].

3.1.2.3.4 Tanımlayıcı Geometri İçin Aksiyomlar

Aksiyom 3.23: *En az iki nokta vardır*

Aksiyom 3.24: *Eğer A ve B iki noktaysa, [ABC] olacak şekilde, en az bir C noktası vardır.*

Aksiyom 3.25: *Eğer [ABC] ise, o halde A ve C farklıdır.*

Aksiyom 3.26: *Eğer [ABC] ise, o halde [CBA] dır, fakat [BCA] değildir* [9].

Eğer A ve B herhangi iki nokta ise, AB "parçası" [AXB] olacak şekilde X noktalarının bir sınıfı, yarı doğru veya A/B "ışını" [BAY] olacak şekilde Y noktalarının bir sınıfıdır. $\overline{AB}$ "aralığı", A ve B uç noktalarıyla birlikte AB parçasından meydan gelir ve AB doğrusu Şekil 3.25'te olduğu gibi A/B ve B/A ışınlarıyla birlikte $\overline{AB}$ aralığından meydana gelir. A/B ışınının, A dan "çıktığı" söylenir. Eğer kendi sınıfına aitse noktaların bir parça, ışın, aralık veya doğru üzerinde bulunduğu söylenir. Örneğin; "doğrusallık" gibi, diğer birkaç sözcük

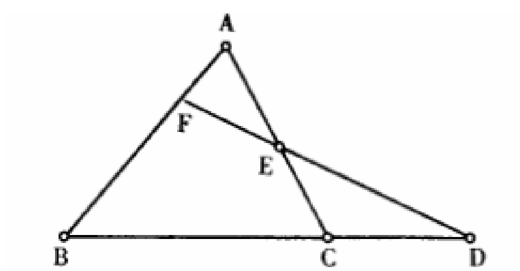
"3.1.2.1.1 Reel Projektif Geometri: Temelleri"nde olduğu gibi aynı anlamda kullanılır [9].

Şekil 3.25: $\overline{AB}$ aralığı

Aksiyom 3.27: *Eğer C ve D, AB doğrusu üzerinde iki nokta ise; o halde A, CD doğrusu üzerindedir* [9].

Aksiyom 3.28: *AB doğrusu üzerinde olmayan en az bir nokta vardır* [9].

Aksiyom 3.29: *Eğer A, B, C doğrusal olmayan üç nokta, D ve E öyle ki [BCD] ve [CEA] ise, o halde [AFB] ile DE doğrusu üzerinde bir F noktası vardır*. (Bkz. Şekil 3.26) [9].



Şekil 3.26: [AFB] ile DE doğrusu üzerindeki F noktası

Eğer A, B, C doğrusal değilse; ABC düzlemi, $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ aralıkları üzerindeki noktaların çiftleri ile doğrusal noktaların sınıfıdır. Buradan, bir düzlemin herhangi iki noktasının birleşimi olan bir doğruyu içerdiği sonucu çıkarılabilir [9].

Aksiyom 3.30: *ABC düzleminde olmayan en az bir nokta vardır* [9].

Aksiyom 3.31: *Bir ortak noktası olan iki düzlemin başka ortak noktaları da vardır* [9].

Aksiyom 3.32: *Boş olmayan iki kümenin içindeki bir doğrunun tüm noktalarının her bölümü için, herhangi birinin iki noktasının arasında diğerinin hiçbir noktası bulunmuyorsa, bu kümenin her diğer noktası ve diğer kümenin her noktası arasında bulunan bir kümenin bir noktası vardır* [9].

Bu son aksiyom, "3.1.2.1.4 Süreklilik Aksiyomu"ndan sadece "parça" yerine "doğru"nun konulmasıyla farklıdır. Projektif geometrideki Aksiyom 3.32'nin kullanılamamasının tersine, "3.1.2.1.4 Süreklilik Aksiyomu"nun kendisinin kullanılmasının hiçbir zararı yoktur [9].

3.1.2.4 Euclidean ve Hiperbolik Geometri

3.1.2.4.1 Kongruansı Tanıtma

Kongruansın tarihsel gelişimini daha yakından tanıtmak için, tanımsız ikinci bir bağıntı gibi tanımlayıcı geometri içinde kongruansı tanıtma ve aksiyomlar şeklinde özelliklerini belirtme yöntemini ters çevirmek tercih edilmiştir. Bolyai'nin "mutlak geometri" önermeleri apaçık bir şekilde sonuç olarak ortaya çıkabilir. Sonra bir reel projektif uzayda tanımlayıcı uzayı yerleştirme metoduyla, her kongruans dönüşümüyle permute edilebilen bir kutupsallık tanımı bulunur [9].

Kongruans bağıntısı başlangıçta nokta çiftlerini kapsar ve AB nokta çifti CD nokta çiftine eşleniktir anlamında $AB \equiv CD$ yazılır. Fakat her nokta çifti tek bir parça tanımlayacağından, "AB parçası CD parçasına eşleniktir." gibi aynı formule benzer bir okunuşla hiçbir karışıklığa sebep olmaz [9].

Kongruansı aksiyomatik olarak tanımlama fikri Pasch'den sayesinde ortaya çıkmıştır. O'nun aksiyomları Hilbert ve R. L. Moore tarafından basitleştirilmiştir. Aksiyomların sayısını bir minimuma indirgemek uğruna Aksiyom 3.24'ten gereksiz olarak söz edilebilir. Bundan dolayı, tek tanımsız eleman bir "nokta", iki tanımsız bağıntı "arada olma" ve "kongruans", tanımlayıcı aksiyomlar Aksiyom 3.23, 3.25-3.32 ve aşağıdakilerle meydana gelir [9].

3.1.2.4.1.1 Kongruans Aksiyomları

Aksiyom 3.33: *Eğer A ve B farklı noktalar ise, herhangi bir C/E ışını üzerinde* $AB \equiv CD$ *olacak şekilde sadece bir tek D noktası vardır* [9].

Aksiyom 3.34: *Eğer* $AB \equiv CD$ *ve* $CD \equiv EF$ *ise,* $AB \equiv EF$ *dir* [9].

Aksiyom 3.35: $AB \equiv BA$ *(Bundan dolayı* $AB \equiv AB$ *)dir* [9].

Aksiyom 3.36: *Eğer [ABC],* $\left[A'B'C'\right]$*,ve* $BC \equiv B'C'$ *ise,* $AC \equiv A'C'$ *dür* [9].

Aksiyom 3.37: *Eğer [ABC] ve* $\left[A'B'C'\right]$*;* $BC \equiv B'C', CA \equiv C'A', AB \equiv A'B'$ *ile* D *ve* D' *başka iki nokta iken aynı doğrultuda olmayan iki üçlü nokta ise, o halde* $\left[BCD\right], \left[B'C'D'\right]$ *ve* $BD \equiv B'D'$*, o durumda da* $AD \equiv A'D'$ *dür* [9].

Kongruans bağıntısının sadece dönüşlü ve geçişli değil aynı zamanda da simetrik olduğu sonucu kolayca ortaya çıkar. Dahası bu bağıntı, nokta çifti veya parçalardan herhangi bir çeşit figüre kolaylıkla genişletilir. Gerçekten karmaşık olan aksiyom sadece Aksiyom 3.37'dir [9].

Aksiyom 3.33-3.36 bir parçanın (veya bir aralığın) "uzunluğunu" tanımlamaya imkan sağlar ve sonra Aksiyom 3.32 büyüklüğün devamlı bir kümesini uzunlukların oluşturduğunu gösterir. Özellikle her aralık bir "orta nokta"ya sahiptir. Sonra doğal şekilde açıların eşliği tanımlanır ve *"eğer herhangi bir açı* p_1q_1 *,* q_1 *den geçen bir düzlemde herhangi bir ışın* a_1 *ise iki ışından daha çok* b_1 *yoktur, öyle ki* $a_1b_1 \equiv p_1q_1$ *dir."* sonucu çıkarılabilir [9].

Eğer a_1 ve a_2 bütünler ışınlar ve b_1 de aynı başlangıç noktasından çıkıyorsa, a_1b_1 ve a_2b_1 açılarının bütünler olduğu söylenir. Eğer $a_1b_1 \equiv a_2b_1$ ise, o halde a_1 ve b_1 ışınlarının veya onları içeren a ve b doğrularının "dik" olduğu söylenir ve a_1b_1 açısı "dik açı" olarak isimlendirilir [9].

Parçalar için $AB \equiv CD$ ifadesi açıkça uzunluklar için AB = CD ifadesine eşdeğerdir. Bu yüzden bir parça veya uzunluğu için aynı sembolün kullanılmasından hiçbir karışıklık çıkmaz. Benzer söz daha az karmaşık bir durum olmasına rağmen, açılara da uygulanabilir [9].

O merkezli ve OP yarıçaplı bir "çember" O dan geçen bir düzlemdeki $OX \equiv OP$ (veya $OX = OP$) koşulunu sağlayan X noktalarının bir sınıfı olarak tanımlanır. Bir Q noktasının, şayet OQ > OP ise, çemberin "dışında" olduğu söylenir. Noktalar ne çemberin üzerinde, ne de çemberin dışında ise "içinde" olduğu söylenir. Eğer A merkezli bir çember, aynı düzlemdeki C merkezli bir çemberin bir iç noktası ve bir dış noktasına sahip ise, o zaman iki çember her biri AC kenarı üzerinde olan en az bir noktada kesişir. O zaman "herhangi iki dik açının eşlenik" olduğu anlaşılır ve Euclid'in başlangıç noktasına ulaşılır (1-4 Postulatlarıyla). Buna göre, Euclid'in I. Önermeleri, "arakesit olmayan" ile yer değiştirip "paralel" kelimesiyle kabul edilir. Hem de A dan sırasıyla B ve C yi içeren ışınlarla oluşturulan bir açı için, $\angle BAC$ alışılmış gösterimi benimsenir [9].

3.1.2.4.2 Dik Doğrular ve Düzlemler

Cayley ve Klein'ın işlemi, Bolyai ve Lobatschewsky'den elde edilmiştir. İlk adım aşağıdaki diklik hakkındaki teoremler zinciriyle meydana gelen ideal elemanın çeşitli türlerini tanımlayan yığınlar ve çizgiler için bir metrik tanımı elde edilir. (Burada tüm noktalar, doğrular ve düzlemler normal olarak dikkate alınmıştır.) [9].

Teorem 3.3: *Ortak A noktasında kesişen iki doğrunun her birine dik olan bir doğru, iki doğrunun bulunduğu düzlemde A dan geçen her doğruya diktir* [9].

Euclid'in ispatı geçerlidir. Böyle bir doğru ve düzlemin (birbirlerine) dik olduğu söylenir [9].

Teorem 3.4: *Verilen herhangi bir düzleme dik olan, verilen herhangi bir noktadan geçen sadece bir tek doğru vardır* [9].

Euclid'in çizimi böyle bir doğruyu verir (Fakat onun önceki ispatı paralelleri kullanmaktan kaçınılarak değiştirilmiştir.). Böyle iki doğrunun tanımlandığı düzlemi dikkate alarak (Euclid'de olduğu gibi) eşsizliği anlaşılır [9].

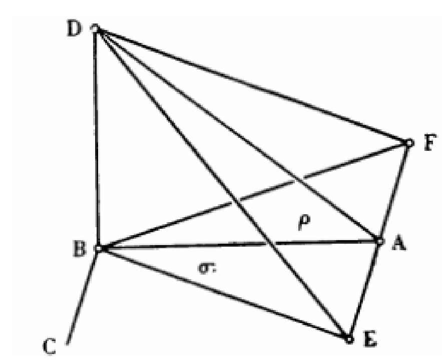
Teorem 3.5: *Eğer bir σ düzlemi bir ρ düzlemine dik bir r doğrusunu içeriyorsa, ρ düzlemi σ ya dik olan bir s doğrusunu içerir* [9].

Bu Teorem 3.3'ten kolayca anlaşılır. ρ ve σ gibi iki düzlemin dik olduğu söylenir [9].

Teorem 3.6: *Eğer ρ ve σ düzlemlere dikse, (ρ , σ) doğrusuna dik olan σ daki herhangi bir doğru ρ ye diktir* [9].

İspat:

σ, ρ ya dik olan BC doğrusunu içersin (Bkz. Şekil 3.27). AE, (ρ , σ) veya BA ya dik olan σ da herhangi bir doğru olsun. A/E üzerinde, $AF \equiv AE$ için F alınsın. Eşlenik üçgenlerin çifti dikkate alındığında (Euclid'in ispatında olduğu gibi), sırasıyla $BE \equiv BF$, $DE \equiv DF$ ve DA nın, EA ya dik olduğu sonucu ortaya çıkar. Bu nedenle hem AB ye hem AD ye dik olan EA, σ ya da dik olur [9].



Şekil 3.27: ρ ya dik ve BC doğrusunu içeren σ

Teorem 3.7: *Aynı düzleme dik olan iki doğru eş düzlemlidir* [9].

İspat:

BC ve AE_1, B ve A da ρ ye dik olan herhangi iki doğru olsun. Teorem 3.6 ile AE doğrusu (ABC düzleminde AB ye dik olan) ρ ye diktir. Teorem 3.4 ile AE_1, AE ile çakışır ve böylece BC ile eş düzlemli olur [9].

Teorem 3.8: *Kesişen herhangi iki düzlemin her birine dik olan bir düzlem, onların ortak doğrusuna da diktir* [9].

İspat:

ρ düzlemi, kesişen σ ve τ düzlemlerine dik olsun. (σ,τ) üzerindeki herhangi bir C noktasından sırasıyla (ρ,σ) ve (ρ,τ) ya dik doğrular çizilsin. Teorem 3.6 ile bu doğruların her biri ρ ye diktir. Fakat Teorem 3.4 ile ρ ye dik olup C den geçen sadece bir tek doğru vardır. Bundan dolayı bu düzlem, her iki σ ve τ düzlemlerinde bulunur ve (σ,τ) kendisi olur [9].

Teorem 3.9: *Verilen herhangi bir doğruya dik olan, verilen herhangi bir noktadan geçen sadece bir tek düzlem vardır* [9].

İspat:

Verilen A noktası ve verilen r doğrusunun bulunduğu düzlemde (veya r den geçen herhangi bir düzlemde eğer r, A yı içeriyorsa), A dan geçen r ya dik olan t doğrusu çizilir. s doğrusu, rt düzlemine dik olan A dan geçen bir doğru olsun. Sonra (Teorem 3.6'da p = st, σ = rt ile) st gerekli düzlemdir. rt üzerinde böyle iki düzlemi oluşturan bölüm göz önünde tutulduğunda (Euclid'deki gibi) eşsizlik kurulmuş olabilir [9].

3.1.2.4.3 Euclidean Paralellik Aksiyomu

Aksiyom 3.38: *En az bir q doğrusu ve q üzerinde olmayan en az bir A noktası vardır, öyle ki A dan geçen fakat q ile birleşmeyen eş düzlemli birden fazla doğru çizilemez* [9].

Bu, kendisi "sonsuzdaki nokta" olan tek bir ideal noktayı içeren sıradan bir (ve bu yüzden her) doğruya işaret eder. Sıradan bir düzlem bir tek ideal doğru içerir (iki ideal noktada sıradan bir doğruyu birleştiren böyle iki nokta için); bu yüzden düzlem sonsuzdaki böyle iki doğru ile ideal bir düzlem olacak şekilde tanımlanır. Benzer olarak, (üç boyutlu uzayda) bir tek ideal düzlem vardır. Bu "sonsuzdaki düzlem" her ideal noktayı içerir ve her sıradan noktanın düzlemi mutlak kutupsaldır. Böylece "mutlak kutupsallık" tüm projektif uzay boyunca daima aynı şekilde çalışmaz, fakat bozulur [9].

A, A_1 sıradan iki nokta ve ρ ve ρ_1 sırasıyla A, A_1 den geçen AA_1 e dik düzlemler olsun. O halde ρ ve ρ_1 aynı mutlak kutba, yani AA_1 üzerinde sonsuzda bir noktaya sahiptir ve her doğru hem ρ ye hem de ρ_1 e diktir. Bundan dolayı herhangi böyle bir doğrunun mutlak kutupsal doğrusu (ρ , ρ_1) dir ve ρ de sonsuzdaki bir doğrudan geçen her sıradan düzlem, AA_1 üzerinde sonsuzdaki bir noktadan geçen her sıradan doğruya diktir. Başka bir deyişle, ("düşey") doğruların düzensiz bir yığınına dik olan ("yatay") düzlemlerin düzensiz bir çizgisine sahiptir [9].

Yığınlar ve çizgiler arasındaki bu benzerlik sonsuzdaki bir düzlemde iki boyutlu bir kutupsallık gibi sayılabilir. İki sıradan doğru (veya düzlem), eğer onların sonsuzdaki noktaları (veya doğruları) bu polaritede eşlenik ise dik olur. Kendine dik olan doğrular dışarıda bırakıldığında, kutupsallık eliptiktir ve Euclidean geometri için projektif bir tanıma sahiptir [9].

Her ideal nokta aynı zamanda sonsuzda bir nokta olduğundan, doğrular ve düzlemler, paralellerin bir yığını şeklindeki verilen herhangi bir düzleme diktir ve düzlemler paralellerin bir çizgisi şeklindeki verilen herhangi bir doğruya diktir [9].

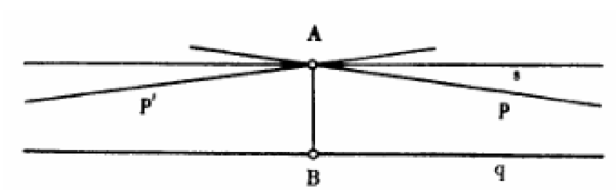
Yukarıdaki teoremin geniş bir bölümü, kongruansın bazı ekstra aksiyomlarının araya eklenmesiyle ispatlanmış olan süreklilik kullanılmaksızın geliştirilmiş olabilir. Bununla birlikte, burada paralellik teoremi terk edilmelidir. Aslında Dehn, aynı mutlak kutupsal düzleme sahip tüm sıradan noktaları içeren “yarı-Euclidean geometri”yi, bu düzlemin dışında ideal noktaların var olmasına rağmen geliştirmiştir [9].

3.1.2.4.4 Hiperbolik Paralellik Aksiyomu

Aksiyom 3.39: *En az bir q doğrusu ve en az bir A noktası vardır, öyle ki A dan geçen fakat q ile birleşmeyen iki farklı doğru çizilebilir* [9].

Bu, sıradan bir (ve böylece her) doğrunun, iki (ve böylece son derece çok) ideal noktayı içerdiğini gösterir. “3.1.2.4.5 Mutlak”ta bu durumda mutlak kutupsallığın bozulmadığı sonucu ortaya çıkar. Örneğin, hem sıradan hem ideal olan her nokta bir kutupsal düzlem tanımına sahiptir. Bunun için yapılan hazırlıkta, bir üçgenin tepe açısı hakkındaki ünlü sonuca erişilmesini sağlayan, iki boyutlu hiperbolik geometrinin klasik teoremlerinden birkaçı ispatlanır [9].

“3.1.2.4.4 Hiperbolik Paralellik Aksiyomu” ile, q ya paralel A dan çizilebilen bütünler olmayan iki ışın ve q da birleşen A dan geçen bir ışın sadece ve sadece bu özel ışınlarla oluşturulan bir üçgenin içinde bulunur. Diğer bir deyişle, Aq da A dan geçen doğruların düz çizgisi, q da birleşen tüm doğrulardan, q da birleşmeyen tüm diğer doğruları ayıran, iki özel doğru olan p ve p' yü içerir (Bkz. 3.28). Tanıma göre, p ve p' doğruları q ya paraleldir. “q da birleşmeyen diğer doğruları”, q ya “ultra-paralel” gibi tanımlamak uygundur. Bu doğrular iki paralel tarafından oluşturulan “dış” açıda bulunur [9].



Şekil 3.28: Aq da A dan geçen doğruların düz çizgisi, p ve p' yü içerir

Bir enine AB ile iki paralel doğrudan oluşan figür, sonsuzdaki M ile bir ABM üçgeni gibi dikkate alınabilir. Bu yüzden bir “tek başına asimptotik üçgen” olarak isimlendirilir. Benzer olarak, sonsuzdaki iki veya üç köşe ile bir üçgen “iki kat asimptotik” veya “üç kat asimptotik” olarak söylenir. Sıradan üçgenlerle benzerliği Euclid’den uyarlanan Teorem 3.10 ve Teorem 3.12’de örneklenir [9].

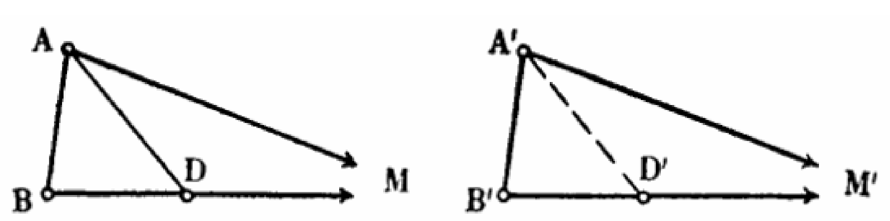
Teorem 3.10: *İki tek başına asimptotik üçgen ABM,* $A'B'M'$ *olmak üzere,* $AB = A'B'$ *ve* $\angle ABM = \angle A'B'M'$ *eşleniktir* [9].

İspat:

Eğer A ve A' eşit olmayan açılarsa, öncekinin daha büyük olduğu varsayılsın. $\angle BAC + \angle ACB + \angle CB'A = \angle BAD + \angle EBA + \angle IBA$ $\angle BAD = \angle B'A'M'$ için bir AD ışını çizilir ve D noktası Şekil 3.29’daki gibi BM de birleşen bu ışının bulunduğu yerdeki bir nokta olsun. $B'M'$ üzerinde $B'D' = BD$ için bir D' noktası alınsın. O halde ABD ve $A'B'D'$ üçgenleri eşlenik olur. Buradan,

$$\angle B'A'D' = \angle BAD = \angle B'A'M' \tag{3.30}$$

oluşu anlamsızdır. Bu yüzden aslında $\angle BAM = \angle B'A'M'$ olur [9].

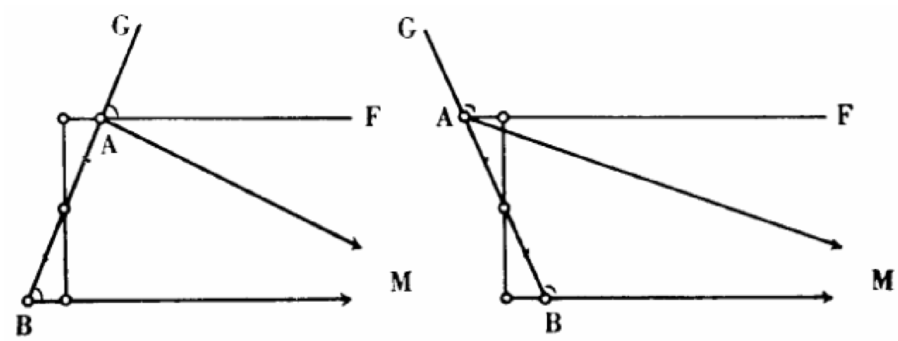


Şekil 3.29: Teorem 3.10’un ispatının gösterimi

AK ve AL, q ya A dan paralel ve AB, q ya dik olduğunda (Şekil 3.28’deki gibi), bu teoremin tek başına asimptotik üçgenler olan ABK ve ABL ye uygulanmasıyla $\angle BAK = \angle BAL$ ın eşit olduğu ve dolayısıyla dar olduğu sonucu çıkarılır. Onların genel değeri (Teorem 3.10 ile AB uzunluğunun bir fonksiyonu olan) AB için “paralellik açısı” olarak isimlendirilir ve II(AB) ile gösterilir (bu

Lobatschewsky'nin gösterimidir.). AB ye dik, A dan geçen bir doğrunun aynı zamanda q ya ultra-paralel olduğu ileri sürülür. Böylece

Teorem 3.11: *Aynı bir doğruya dik olan iki doğru diğer birine ultra-paraleldir* [9].



Şekil 3.30: Teorem 3.11'in ispatının gösterimi

Teorem 3.12: *Tek başına asimptotik bir ABM üçgeninde A daki dış açı, B deki iç açıdan daha büyüktür* [9].

İspat:

Şekil 3.30'daki gibi G ye AB üretilsin ve $\angle FAG = \angle MBA$ için AF çizilsin. O halde, AB nin orta noktasından BM ye dik olan aynı zamanda AF ye de diktir. Teorem 3.11 ile AF, BM ye ultra-paraleldir ve $\angle FAG = \angle MAG$ dir. Buradan şu elde edilir: [9].

$$\angle MAG > \angle MBA . \tag{3.31}$$

Gelecek teorem Saccheri'nin ikizkenar ikidikdörtgenlisi ile ilgilidir [9].

Teorem 3.13: *Eğer ABED, AD = BE iken, D ve E açıları dik açı olan basit bir dikdörtgen ise, A ve B açıları eşit dar açılardır* [9].

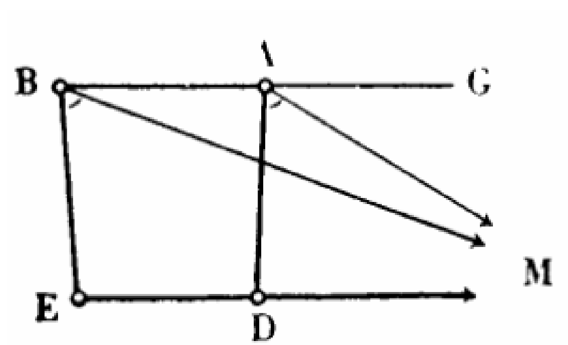
İspat:

Eşlenik üçgenlerin çiftleri kurulduğunda, A ve B de eşit olan açılar kolaylıkla görülür. Onların dar açı olduğunu göstermek için Şekil 3.31'deki gibi D/E ye paralel MA ve MB çizilir ve BEM, ADM üçgenlerine Teorem 3.10 uygulanır. BE = AD olduğunda E ve D de eşit açılarken $\angle EBM = \angle DAM$ olduğu sonucu çıkar. Teorem 3.12 ile A/B üzerindeki herhangi bir nokta G olduğunda $\angle MBA < \angle MAG$ dir. Buradan,

$$\angle BAD = \angle EBA < \angle DAG \tag{3.32}$$

olur ve $\angle BAD$ dar açı olur [9].

Aynı zamanda böylece üç dağın tepe noktası üzerinde arazi ölçüm cihazını kurduğunda fiziksel uzayın doğasını tanımlamaya çalışan Gauss'un başarısız olduğu denemesinde kullandığı teoreme ulaşılır [9].



Şekil 3.31: D/E ye paralel MA ve MB

Teorem 3.14: *Herhangi bir üçgenin tepe açısı, iki dik açıdan daha azdır* [9].

İspat:

Euclid'e göre bir üçgenin iki açısı dik veya geniş olamaz; başka bir deyişle, üç açıdan en az ikisi dar açı olmalıdır. ABC, A ve B deki dar açılarıyla herhangi bir üçgen olsun. I ve J, Şekil 3.32'deki gibi BC ve CA nın orta noktaları olsun. IJ ye dik olan AD, B, CF çizilsin. O halde ADJ, CFJ dik açılı üçgenleri eşleniktir; böylece hem de BEI, CFI eşleniktir. Buradan;

$$AD = CF = BE \tag{3.33}$$

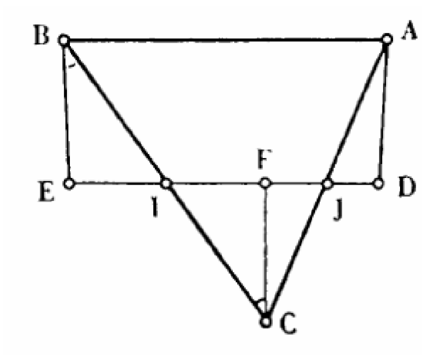
$$\angle ACB = \angle JCF + \angle FCI = \angle JAD + \angle EBI \tag{3.34}$$

olur. ABC üçgeninin tepe açısı şöyle olur:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = \angle BAJ + \angle JAD + \angle EBI + \angle IBA \tag{3.35}$$

$$= \angle BAD + \angle EBA\,. \tag{3.35-a}$$

Teorem 3.13'ten bu son açıların her ikisi de dar açıdır. Böylece tepe açısı, iki dik açıdan daha azdır [9].



Şekil 3.32: BC ve CA nın orta noktaları olan I ve J

Herhangi basit bir dörtgenin içi iki üçgen parçalarına ayrılabildiğinde, bir dörtgenin tepe açısının dört dik açıdan az olduğu ileri sürülür. Özellikle bunlar dikdörtgen değilse;

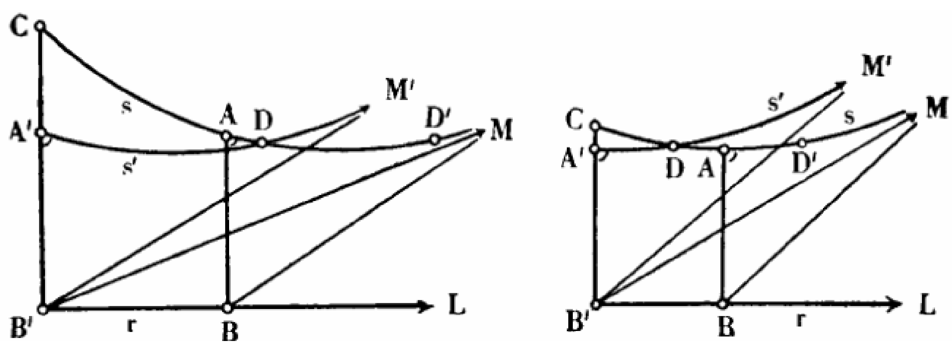
Teorem 3.15: *İki eş düzlemli doğru, iki ortak dikmeye sahip olamaz* [9].

Teorem 3.11'de ortak bir dikmesi olan iki eş düzlemli doğrunun ultra-paralel olduğu gösterilmişti. Tersine;

Teorem 3.16: *Herhangi iki ultra-paralel doğru, ortak bir dikmeye sahiptir* [9].

Çizim:

r ve s iki ultra-paralel doğru olsun. s üzerinde herhangi iki A ve C noktası için, r ye dik olan AB ve CB' çizilir. Eğer AB = CB' oluyorsa, istenen ortak dikme AC ve BB' nün orta noktalarında birleşir ($ACB'B$ ikizkenar ikidikdörtgenlisinin simetriği ile). Aksi takdirde, AB < CB' olduğu varsayılır. Şekil 3.33'teki gibi $A'B' = AB$ için A' ve CB' alınır. AB ile oluşturulan s, $A'B'$ ile aynı açıyı oluşturduğunda A' den geçen bir σ doğrusu çizilir. O halde (ispattaki gibi) s, sıradan bir D noktasında s' noktası ile birleşir. $AD' = A'D$ için A/C üzerinde bir D' noktası alınsın. O halde DD' nün açıortayına dik olan aynı zamanda r ye de diktir [9].



Şekil 3.33: $A'B' = AB$ için A' ve CB'

İspat:

L, M, M', A gibi CB' nün aynı kenarı üzerindeki r, s, s' üzerinde sonsuzdaki noktalar olsun. $BM, B'M, B'M'$ paralelleri çizilir. Teorem 3.10 ile $ABM, A'B'M'$ tek başına asimptotik üçgenleri eşleniktir. Teorem 3.12 ile;

$$\angle LB'M < \angle LBM = \angle LB'M' \tag{3.36}$$

olur. Buradan $B'M'$, CM den geçmesi gereken $\angle MB'C$ nin içinde bulunur. Bu yüzden hem de $A'M'$ geçmelidir. Bu D yi verir ve kendileri r ye dayanan bir ikizkenar ikidikdörtgenlisinin iki köşesi böyle bir şekilde D' nü oluşturmuş olur. İstenen sonuç kolaylıkla anlaşılır [9].

3.1.2.4.5 Mutlak

Üç boyutlu geometriye dönüldüğünde, ideal elemanlar varsayım ile genişletildiğinde şu elde edilir: Paralellerin her bir yığını için sonsuzluktaki bir nokta, paralellerin her bir çizgisi için "sonsuzluktaki bir doğru", ultra paralellerin her bir yığını için bir "ultra sonsuz nokta", ultra paralellerin her bir çizgisi için bir "ultra sonsuz doğru", sıradan bir düzlem tanımlamayan herhangi bir ideal nokta ve doğruyla ideal bir düzlem tanımlar. Teorem 3.9 ispatsız kabul edildiğinde aşağıdaki (Euclidean geometride yapılamayan) teorem elde edilir:

Teorem 3.17: *Herhangi sıradan iki düzlem, mutlak kutuplardan farklılığa sahiptir* [9].

İspat:

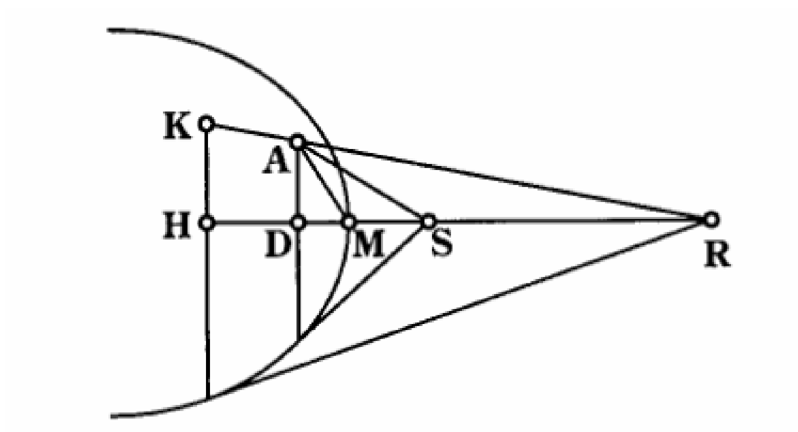
Eğer iki sıradan ρ ve ρ_1 düzlemleri aynı mutlak kutba sahipse, ρ ye dik olan her doğru ρ_1 e de dik olmalıdır. Böyle iki doğru, Teorem 3.15 reddedildiğinde, onların bir dikdörtgen olan düzlemi tarafından ρ ve ρ_1 in bölümleriyle şekillenir [9].

İki farklı yığının ortak düzlemleri olan herhangi iki ρ ve σ düzlemlerine dik düzlemlerin, ekseni ρ ve σ nın mutlak kutuplarını birleştiren bir çizgi şeklinde olduğu anlaşılır. Bu çizginin herhangi iki düzlemine dik olan düzlemler, ρ ve σ yı içeren ve böylece (ρ,σ) dan geçen tüm düzlemleri oluşturan ikinci bir çizgi şeklindedir. Bu yüzden ikinci çizginin her düzlemi, sadece birincinin iki düzlemine değil tümüne diktir. Böyle iki çizginin "karşılıklı" olduğu söylenir. Bunlar eksenleri mutlak kutupsal doğrular olan çizgileri özel durumlar olarak içerir. Diğer durumlarda (yani, her iki eksen de ideal olduğunda) onlar mutlak kutupsal doğrular için bir "tanım" sağlar. Böylece iki doğru (biri veya ikisi de ideal), eğer birinden geçen sıradan düzlemler diğerinden geçen sıradan düzlemlere dikse, mutlak kutupsallardır. Bu bağlamda, sıradan veya ideal her doğru, bir mutlak kutupsal doğru tanımına sahiptir. Tersine; her nokta, doğruları bir noktadan geçen doğrulara kutupsal olan mutlak kutupsal bir düzleme sahiptir ve benzer olarak her düzlem bir mutlak kutba sahiptir [9].

Teorem 3.18: *Mutlak kutupsallık (3,3) tipindedir* [9].

İspat:

Kutupsallığın olası dört tipinden ikisi hemen reddedilir: Kendi kutbunu içermeyen sıradan bir düzlem olduğu için bir geçersiz kutupsallık olamaz; kendisine dik olan kendisi kutupsal sıradan bir noktayla birleşen bir düzlem olduğu için tip (2,4) de olamaz [9].



Şekil 3.34: HD doğrusu üzerindeki eşlenik noktaların involusyonu (karışıklığı)

Kalan uniform veya (6,0) kutupsallık olasılıklarını dışarıda bırakmak için, Şekil 3.34'teki HD doğrusu üzerindeki eşlenik noktaların involusyonu (karışıklığı) dikkate alınır. Burada ADHK; D, H, K da dik açılı olan basit bir dörtgendir ve bundan dolayı A daki bir dar açıdır (Şekil 3.31'de H ve K, DE ve AB nin orta noktaları olarak alınabilir). Uzaydaki mutlak kutupsallık bu "üçlüdikdörtgen"in düzlemdeki iki boyutlu kutupsallığına neden olur. Böylece R = (KA, HD) ideal noktası KH nin kutbudur. Ad nin kutbu S olarak alınsın ve D/H üzeinde sonsuzdaki nokta M olsun. O halde $\angle DAR$, $\angle DAS$ ve $\angle DAM$ sırasıyla geniş, dik ve dar açılar olur. Buradan;

$$S(RSM) \neq S(HDM) \tag{3.37}$$

olur ve HD üzerindeki sıradan noktaların çeşidi, onların ideal eşleniklerine karşıdır. Eşlenik noktaların involusyonu (karışıklığı) hiperboliktir ve iki (ideal) çift noktaya sahiptir. Bunlardan biri daha sonra M ile özdeşleştirilir. Böylece mutlak kutupsallık kendi eşlenik noktaları içine alır ve tip (6,0) olmaz [9].

Yukarıdaki ispat özellikle, dar açılı bir üçlüdikdörtgenin dördüncü açısından bahseden Teorem 3.13'tekine bağlıdır. Bu, sırayla, paralelliğin özelliklerine bağlıdır ve böylece sonunda Süreklilik Aksiyomu'na bağlıdır. Süreklilik ihmal edildiğinde Dehn, uniform (buradan bir üçlüdikdörtgenin dördüncü açısının geniş ve bir üçgenin tepe açısının iki dik açıdan büyük olduğu anlaşılır.) olan mutlak kutupsallığa rağmen hala hiçbir sıradan kesişime sahip olmayan eş düzlemli doğruların çiftlerinde bir "Legendrian olmayan geometri"yi geliştirmiştir. İzlenen bu farklı yöntemle Hilbert bu olasılığı (süreklilik varsayımı olmaksızın) reddetmiştir [9].

Teorem 3.18 ile noktaları kendine eşlenik olan mutlak bir oval kuadrik vardır; fakat bu noktalar paralellerin yığınlarıyla tanımlanmış olan sonsuzdaki noktalarla henüz özdeşleştirilemez [9].

Teorem 3.19: *Mutlak üzerindeki noktalar sonsuzdaki noktalardır* [9].

Buradan mutlağın iç ve dış noktaları sırasıyla sıradan ve ultra-sonsuz noktalardır ve onun kiriş doğrusu ve düzlemi sıradan doğru ve düzlemdir. Böylece sonsuzdaki herhangi iki nokta, sıradan bir doğruyla birleşir; başka bir deyişle, paralellerin iki yığınının ortak düzlemleri bir özel çizgi oluşturur [9].

Teorem 3.20: *Mutlağın teğet doğruları, sonsuzdaki doğrulardır* [9].

Bir A noktasından geçen ve (A dan geçmeyen) ρ düzlemine paralel doğru ve düzlemlerin üreteçleri ve ρ ile mutlağın bölümüne A da birleşen bir "koni"nin teğet düzlemleri olduğu anlaşılır [9].

Yukarıdaki terminolojinin doğal bir uzantısı olarak, mutlağın bir teğet düzlemi veya sonsuzdaki bir noktanın kutupsal düzlemi gibi "sonsuzdaki bir düzlem"i tanımlanır. Böylece sonsuzdaki bir düzlem, paralellerin bir yığınının düzlemde sonsuzdaki doğrularla kopyalanır. Diğer ideal düzlemler "ultra-sonsuz" olarak isimlendirilir ve onlar sıradan noktaların kutupsal düzlemleridir [9].

Sıradan bir düzlem üzerinde sonsuzdaki noktalar, ultra-sonsuz noktalardan ayrılan sıradan (iç) noktaları olan bir konik oluşturur. Koniğin kirişleri sıradan doğrular, teğetleri sonsuzdaki doğrular ve dış doğruları ultra-sonsuz olur. Sonsuzdaki bir düzlem, sonsuzda sadece bir nokta içerir. Yani onun kutbu (değme noktası) ve sonsuzdaki "doğrular"ın düz bir çizgisini içerir. Diğer noktaları ve doğruları ultra-sonsuzdur. Sonuç olarak bir ultra-sonsuz düzlem yalnızca, noktaların ve doğruların ultra-sonsuzunu içerir. Böylece kutupsal elemanların çiftleri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Sıradan noktalar	Ultra-sonsuz düzlemler
Sonsuzdaki noktalar	Sonsuzdaki düzlemler
Ultra-sonsuz noktalar	Sıradan düzlemler
Sıradan doğrular	Ultra-sonsuz doğrular
Sonsuzdaki doğrular	Sonsuzdaki doğrular

Hiperbolik geometri hem tutarlı hem kategoriktir. "3.1.2.3.3 Veblen'in Dizi Aksiyomları", "3.1.2.4.1 Kongruansı Tanıtma", Teorem 3.9 Cayley'in mutlağının ("3.1.2.3.1 Hiperbolik Geometri İçin Klein'ın Projektif Modeli") oluşturulması için yeterli olduğundan kategoriktir (veya eşsizdir) ve Cayley-Klein modeli bu (kolayca doğrulanabilen) aksiyomları sağladığından tutarlıdır. Hem de Euclidean geometrinin "3.1.2.3.3 Veblen'in Dizi Aksiyomları", "3.1.2.4.1 Kongruansı Tanıtma", Teorem 3.9'a dayandığı görülür. Buradan herhangi bir paralellik aksiyomu dizi, süreklilik ve kongruansın aksiyomlarına bağlıdır. Bunun anlamı Euclid'in düşüncesi korunmuştur: Temel varsayımlarının arasındaki "5. Postulat"ı içeren görüşü tamamen sağlanmıştır [9].

3.1.2.4.6 Bir Yığın Geometrisi

Mutlak kutupsallık, merkezi kendine eşlenik olmayan herhangi bir yığında iki boyutlu bir kutupsallığa neden olur. Bu kutupsallık, yığının kendi eşlenik doğrusunu (mutlağın teğetini) içerip içermemesine göre hiperbolik veya eliptik olur (Örneğin merkezin, mutlağın dışında veya içinde olmasına göre). Buradan,

Teorem 3.21: *Sıradan bir noktadan geçen doğruların ve düzlemlerin geometrisi, bir düzlemdeki noktaların ve doğruların eliptik geometrisiyle özdeşleştirilebilir* [9].

Teorem 3.22: *Bir ultra-sonsuz noktadan geçen doğruların ve düzlemlerin geometrisi, sıradan bir düzlemdeki noktaların ve doğruların hiperbolik geometrisiyle özdeşleştirilebilir* [9].

Teorem 3.21'de eliptik kutupsallık, verilen noktadan geçen dik doğruların ve düzlemlerin arasındaki benzerliktir. Her iki durumda da dik düzlemler dik doğrularla temsil edilir. Teorem 3.22'de verilen doğrular ve düzlemler, bir sıradan (ultra-sonsuz noktanın kutupsalı olan) düzleme tamamen diktir ve onların bölümleriyle düzlem üzerinde temsil edilebilir. Benzer olarak,

Teorem 3.23: *Sonsuzdaki bir noktadan geçen doğruların ve düzlemlerin geometrisi, bir düzlemdeki noktaların ve doğruların Euclidean geometrisiyle özdeşleştirilebilir* [9].

İspat:

M sonsuzda verilen bir nokta ve μ onun kutupsal düzlemi olsun. μ den başka M den geçen düzlemlerin tümü sıradandır. μ kendisinde, M den geçen kutupsal doğruların çiftleriyle paralellerin yığınında bir Euclidean metrik kuran bir “mutlak” involusyon (karışıklık) oluşturur [9].

Bu sonuç, Euclidean düzlem geometrisinin her teoreminin hiperbolik katı geometrisinde karşıtının olduğunu göstermesi bakımından dikkate değerdir. Örneğin; “3.1.2.4.3 Euclidean Paralellik Aksiyomu”nun karşıtı:

Teorem 3.24: *Eğer bir ρ düzlemi bir l doğrusuna paralel ise, sıradan bir doğrudaki ρ de karşılaşmayan l den geçen sadece bir tek düzlem vardır* [9].

Bu eşsiz paralel düzlem elbette lm dir. m, sonsuzdaki bir (l, ρ) noktasının kutupsal düzleminin ρ düzlemi ile birleştiği yerdeki düzlemdir. Başka bir deyişle, ρ ye dik l den geçen σ düzlemi olduğunda, σ ya dik l den geçen düzlemdir [9].

Teorem 3.21, Teorem 3.23 ve Teorem 3.24’ün aynı zamanda Euclidean geometri için ve Teorem 3.21’in Eliptik geometri için sağlandığından bahsetmek ilginçtir. Şekillenmesine göre bir yığının geometrisi; bu yığının uygunluğuna, paralellerin bir yığınına veya ultra-paralellerin bir yığınına göre eliptik, Euclidean veya hiperbolik olur [9].

3.1.2.5 Çemberler ve Üçgenler

3.1.2.5.1 Bir Çember İçin Çeşitli Tanımlar

Eliptik geometri ve hiperbolik geometrinin her ikisinin de bir kutupsallıkla reel projektif geometriden türetildiği görülür [9].

Herhangi bir doğru ve düzlemin bir yığına, herhangi iki düzlemin bir çizgiye ait olduğu biçiminde "yığın" ve "eksensel çizgi" kavramları genelleştirilir. Düzlemde bulunan bir yığının bu doğruları "düz bir çizgi" şeklinde ifade edilir. Böylece herhangi iki eş düzlemli doğrular bir düz çizgi olarak tanımlanır. Herhangi bir düz çizginin, bir eksensel çizginin bir düzlem bölümü gibi oluşturulabildiği görülür. "Çember" kavramında benzer genelleştirmeler şöyle yapılır:

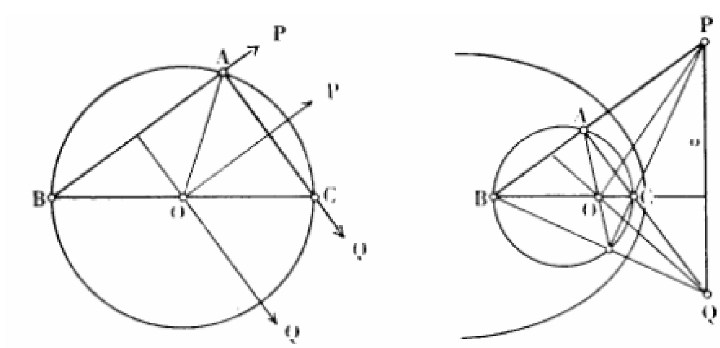
Bir çember, düz bir çizginin doğrularında yansımayla bir noktanın görüntülerinin bir sınıfıdır (Baldus). Bu doğrular "çap" olarak isimlendirilir. Onların ortak noktası "merkez" ve bu noktanın mutlak kutbu "eksen" olarak isimlendirilir. Eliptik geometride de bunun kabul edildiği görülür. Fakat hiperbolik geometride üç duruma ayrılmak zorundadır: bir "uygun çember" ("3.1.2.4.1 Kongruansı Tanıtma" bölümünde "çember") bir sıradan merkez ve bir ultra-sonsuz eksene sahiptir; bir "horocycle" merkezi ve ekseni sonsuzda olan paralel çaplara sahiptir; bir "eşit uzaklıktaki eğri" merkezi ultra-sonsuzken tümü eksene dik olan ultra-paralel çaplara sahiptir. (Bazı yazarlar hiperbolik geometride genel bir çember için farklı olarak "cycle" kelimesini kullanır ve bir çember, bir horocycle ve hiperçember gibi üç çeşide ayırır.) [9].

İki çaptaki yansımaların sonucuna göre, sürekli çeşitlendirilebilen alternatif bir tanım; eliptik geometrideki bir çember için veya hiperbolik geometrideki "merkez etrafında sürekli bir dönüşüm altındaki bir noktanın yeri" olan uygun bir çember için bir yer değiştirmedir. Böylece aynı zamanda bir horocycle veya bir eşit uzaklıktaki eğri, sırasıyla, sürekli paralel yer değiştirme ve translasyon (dönüşüm) altındaki bir noktanın yeridir. Bir eşit uzaklıktaki eğri d adı verilen eksenden sabit uzaklıktaki bir noktanın yeri iken, bir uygun çember R adı verilen merkezden sabit uzaklıktaki bir noktanın yeridir. Bu tanıma göre, eliptik geometrideki bir çember $R + D = \frac{1}{2}\pi$ ile hem uygun bir çember hem de eşit uzaklıktaki bir eğridir ve "çap boyunca karşı" noktalar, bir eksende yansımayla birbirlerinin görüntüleridir [9].

Hiperbolik geometride diğer taraftan, bir eşit uzaklıktaki eğri bir eksende yansımayla açıkça simetrik değildir. Bu istenen simetriyi elde etmek için biri mutlaka ultra-sonsuz olan iki eşlenik çaptaki yansımalar birleştirilmek zorundadır. Bu yapıldığında, bu eğrinin bir Euclidean hiperbole (veya daha çok dış merkezliliği l ye yönelen bir elipsten meydana gelebilen iki paralel doğruya) benzer iki ayrı kolu olduğu görülür. Bu, her “iki kenar” üzerinde bir eksenden D uzaklıktaki noktalardan oluşur. İlk tanıma dönüldüğünde ikinci kol, (tüm çapların ortak dikmesi olan) bir eksenin noktalarındaki yansımayla aynı noktanın görüntülerinin bir sınıfı olarak tanımlanabilir [9].

Böylece herhangi bir türün bir çemberi, kesişimleri (sonsuzda) bir merkez olan noktaların birinin horocycle olması durumuna rağmen her bir çap iki kez birleşir. Bu açıdan horocycle Euclidean bir parabole benzer [9].

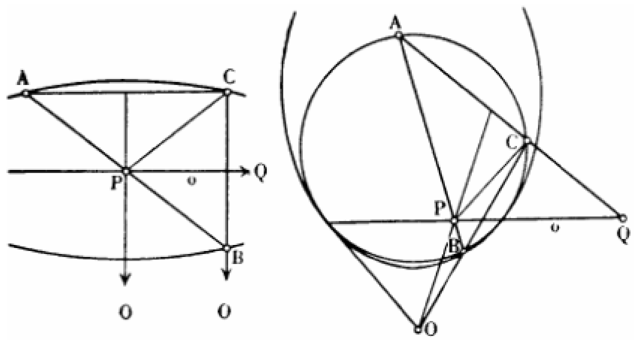
Bir çember herhangi bir çapta yansımayla simetriktir. Bir çember üzerindeki A ve B noktalarından geçen çaplar AB “yayı” ile eşit açı oluşturur. Tersine, bu özellik bazen bir çemberi tanımlamakta kullanılır. (Bonola) Gauss’tan sonra AA' ve BB' doğruları üzerindeki A ve B noktaları $\angle A'AB = \angle ABB'$ olduğunda “benzer” olarak ifade edilir. Eğer doğruların (sıradan bir noktada) kesişimi A ve B nin kesişim noktasından eşit uzaklıkta olduğu anlamındadır. Eğer onlar ultra-paralel ise, A ve B nin ortak dikmelerinden eşit uzaklıkta olduğu anlamındadır. Fakat bu tanımın, doğrular paralel olduğunda “arada olma” durumunda önemi devam eder, çünkü benzerlik özelliği paralellerin son çizgisinin tüm doğrular üzerindeki noktalar için geçişli olması hala doğrudur. Böylece tüm üç durumda, bir çizginin doğrular üzerindeki benzer noktalarının yeri bir çemberdir [9].



Şekil 3.35: Bir çizginin doğrular üzerindeki benzer noktalarının yeri olan çember

3.1.2.5.2 Özel Bir Konik Olan Çember

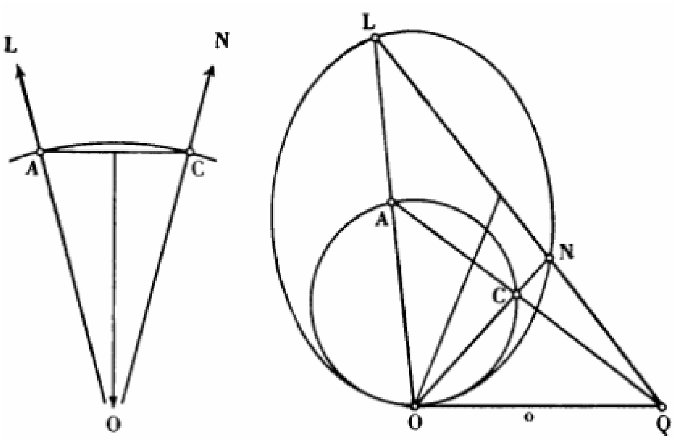
Bir çemberin çoğu özelliği “her çember bir koniktir” gerçeğini kolaylıkla ortaya çıkarır. (Klein) Bu, P ve Q bir eksen üzerindeki eşlenik noktaların değişken bir çifti olduğu, A = (BP, CQ) nun yeri gibi bir çember elde edildiğinde eliptik geometri için ispatlanır. Aynı ispat, hiperbolik geometrideki uygun bir çember ve eşit uzaklıktaki bir eğriye uygulanabilir [9].



Şekil 3.36: “Her çember bir koniktir” teoreminin gösterimi

Teorem 3.25: *Eşit uzaklıktaki bir eğri, mutlaka çift “değme” ye sahiptir* [9].

Buradan bir horocycle bir koniktir [9].



Şekil 3.37: “Bir horocycle bir koniktir.” gösterimi

Bir horocycle, eşit uzaklıktaki bir eğrinin sınırlı bir şekli gibi gösterilebilir. Aynı zamanda sonsuza çekilen bir merkezi olduğunda uygun bir çemberin sınırlı bir şekil olduğu açıktır. Aslında Lobatschewsky bazen basitçe "sınırlı eğri" ismini vermiştir [9].

3.1.2.5.3 Bir Üçgenin İç ve Dış Çemberleri

Genel üçgenler ele alındığında alışılmış terminoloji ve sembol sistemi kullanılır. a, b, c kenarları; A, B, C açıları; h_a, h_b, h_c yükseklikleri; r iç yarıçapı ve r_a, r_b, r_c, R, R_a, R_b, R_c üçü iç yarıçap ve dördü çevrel yarıçapı (var olduklarında) gösterir [9].

BC, CA, AB üç doğrusu reel projektif düzlemi dört bölgeye ayırır. Bunların herhangi biri, "ABC üçgeni" gibi bir dış doğru (veya iç nokta) adlandırılmasıyla olduğu gibi seçilebilir. Kalan üçü ortak veya "eş periyotlu" üçgen olarak isimlendirilir. Eliptik geometride eş periyotlu üçgen, açıları A, π-B, π-C iken aynı şekilde diğer iki kenarı π-b ve π-c için a kenarına sahiptir. Hiperbolik geometride A, B, C sıradan noktalar olarak alınır ve bir ABC üçgeninin iç noktalarının tamamen sıradan olması göz önünde bulundurulur. (Örneğin; p herhangi bir ideal doğru olduğunda, ABC/p üçgeni)

A, B, C açılarının iç ve dış açıortayları, kenar çiftlerinden eşit uzaklıktaki noktaların yeridir. Eliptik geometride bundan dolayı, her biri üç kenarın tümünden eşit uzaklıklı dört noktada üçünün takımlarında uyuşur. Bunlardan biri üçgenin bir iç noktası olursa, I "merkezdedir" diye isimlendirilir. Herhangi bir kenardan bu noktanın uzaklığı, "iç teğet" çemberin yarıçapı olduğundan r "yarıçapta" diye isimlendirilir. Dört noktanın kalan üçü I_a, I_b, I_c olmak üzere, "ex-merkezlerdir". Onların bir kenardan uzaklıkları r_a, r_b, r_c olmak üzere, "ex-yarçaptır". Dış teğet çemberler eş periyotlu üçgenlerin iç teğet çemberleridir [9].

Bu tanımların çoğu hiperbolik geometrideki değerleri gibi kalır. Fakat dış açının açıortaylarının bazı çiftleri paralel veya ultra-paralel olabilir. Böyle bir durumda üçgen, iki açının açıortaylarıyla tanımlı bir çizginin doğrularında yansımayla herhangi bir kenarı gösterilen teğetlerinin bir dış teğet horocycle'a veya eşit uzaklıktaki bir eğriye sahiptir [9].

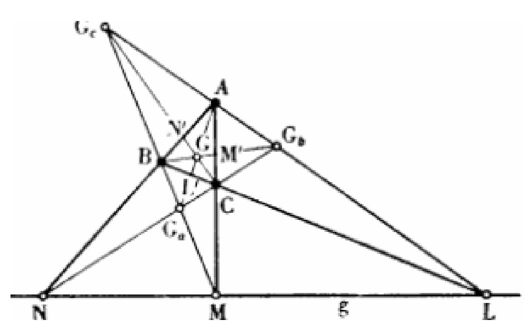
Euclidean geometride olduğu gibi; $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ olduğunda, A dan çemberin iç teğet ve dış teğetlerine uzaklıkları sırasıyla,

$$\text{s-a, s, s-c, s-b} \tag{3.38}$$

olduğu kolaylıkla ispatlanabilir [9].

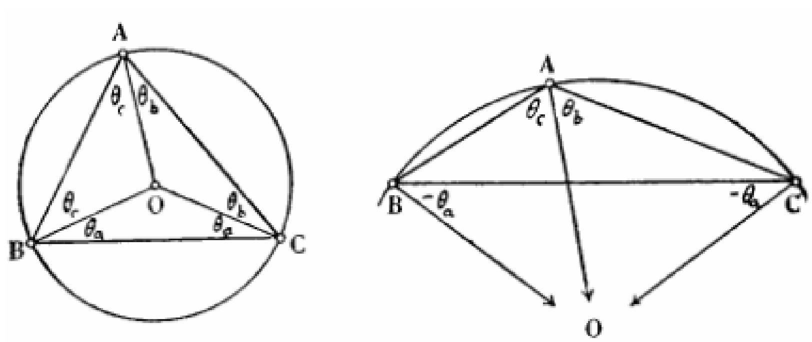
3.1.2.5.4 Çevrel Çemberler ve Ağırlık Merkezleri

a, b, c kenarlarının iç ve dış orta noktaları, köşe çiftlerinden eşit uzaklıktaki doğruların kareleridir. Bundan dolayı, eliptik geometride her biri tüm üç köşeden eşit uzaklıktaki dört nokta üzerinde üçüyle bulunur. Bu dört doğrunun "üçlü doğrusal kutupları", ağırlık merkezleri G, G_a, G_b, G_c olan kenarortayların uyumluluk noktalarını oluşturur (Şekil 3.38). Aynı dört doğrunun mutlak kutupları, bunlardan her biri sınırlanmış olan bir çemberin merkezi olduğu için "çevrel merkezler" olarak isimlendirilir. Doğruların biri üçgenin dışındadır ve çembere benzediğinden "büyük çevrel çember" olarak adlandırılır. Benzer olarak ağırlık merkezi, bir "büyük ağırlık merkezidir" [9].



Şekil 3.38: Kenarortayların uyumluluk noktası

Hiperbolik geometride BC, CA, AB nin orta noktaları, 9.67 ile her biri (biri bir bölüm üzerinde ve diğeri de diğer bir bölüm üzerinde olan iki köşeyle) sınırlandırılmış eşit uzaklıktaki eğrilerin eksenleri olan üç doğruyla çiftler halinde birleşir. Kenarların dış orta noktaları, sıradan olabilen ya da olmayabilen bir doğru üzerinde bulunan üç ultra-sonsuz noktalardır. Buradan her biri (bir bölümünün üzerindeki üç köşenin tümüyle) ya dördüncü bir sınırlandırılmış eşit uzaklıktaki eğri, ya sınırlandırılmış bir horocycle ya da uygun bir çevrel çemberdir. (Sommerville) Ağırlık merkezleri için, sadece "büyük" olan biri mutlaka sıradandır, diğer üçünün herhangi biri sonsuzda veya ultra-sonsuzda olabilir [9].



Şekil 3.39: O çevrel merkezinin BC kenarı dışında olması

O büyük çevrel merkez olmak üzere, OBC veya OCB açıları θ_a ile gösterilsin. Eğer O, ilk eş periyotlu üçgenin içindeyse, Şekil 3.39'daki gibi θ_b ve θ_c için benzer tanımlarla negatif olarak alınır. (Örneğin; eğer O, BC kenarı "dışında" ise). O halde

$$\theta_b + \theta_c = A, \tag{3.39}$$

$$\theta_c + \theta_a = B, \tag{3.40}$$

$$\theta_a + \theta_b = C. \tag{3.41}$$

Buradan $S = \theta_a + \theta_b + \theta_c = \frac{1}{2}(A + B + C)$ olduğunda şöyle yazılabilir:

$$\theta_a = S - A, \tag{3.42}$$

$$\theta_b = S - B, \tag{3.43}$$

$$\theta_c = S - C. \tag{3.44}$$

Böylece eğer, S = A ise O, BC üzerindedir. (Örneğin; B + C = A ise) Eğer B + C < A ise O ilk eş periyotlu üçgenin içindedir. Buradan,

Teorem 3.26: *Büyük çevrel merkez sadece ve sadece A, B, C açıları diğer ikisinin toplamından daha az ise ABC üçgeninin içindedir* [9].

3.1.2.5.5 Kutupsal Üçgen ve Diklik Merkezi

Eliptik geometride; BC, CA, AB nin mutlak kutuplarında ikisiyle kesişen A, B, C noktalarının mutlak kutupları dört yeni üçgen oluşturur. Bunlardan biri kenarları π-A, π-B, π-C ve açıları π-a, π-b, π-c olan, ABC nin "kutupsal üçgeni" olarak isimlendirilir. Açık bir biçimde, iç yarıçap ve büyük çevrel yarıçapı $\frac{1}{2}\pi - R$ ve $\frac{1}{2}\pi - r$ dir. Orijinal bir üçgen ve onun kutupsal üçgeni arasındaki bağıntı simetriktir. İç ve dış merkezlerin her biri, diğerine çevrel merkez olur. (M^cClelland and Preston) Aynı tanım hiperbolik geometride de kabul edilebilir; fakat bu durumda, elbette, kutupsal üçgen tamamen ultra-sonsuzdur [9].

Hesse'nin Teoremi'yle, eğer BC ve CA ya A ve B den kendi dikmeleri H de birleşiyorsa; CH, AB ye dik olur. Başka bir deyişle, "yükseklik doğruları" (kutupsal bir üçgenin benzer köşelerini A, B, C ile birleştiren), "diklik merkezi" denilen H noktasında kesişir [9].

Hiperbolik geometride geniş açılı bir üçgenin diklik merkezi sıradan, sonsuzda veya ultra-sonsuzda olabilir [9].

3.1.2.6 Açı ve Uzaklık Formülleri

Trigonometrinin gelişmesi pek çok amaç için, genel biçimde mutlak kutupsallığın alınması istenir. Yani $\mu = 0,1,2$ için:

$$c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu} \quad \text{ve} \quad c_{\lambda\nu} C_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\mu} \tag{3.45}$$

olduğunda,

$$X_{\mu} = c_{\mu\nu} x_{\nu}, \quad x_{\mu} = C_{\mu\nu} X_{\nu}\,. \tag{3.46}$$

Aşağıdaki biçimde (Klein'ın gösterimiyle) kısaltma yapmak uygundur:

$$(xy) = c_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu}\ , \ \left[XY\right] = C_{\mu\nu} X_{\mu} Y_{\nu}\,. \tag{3.47}$$

Buradan hiperbolik mutlak (xx) = 0 veya [XX] = 0 için bir koniktir. Kutupsallık nedeniyle tüm $c_{\mu\nu}$ ve $C_{\mu\nu}$ nin sembolleri tersine çevrilerek değiştirilemez. Sıradan bir nokta ve bu yüzden (sürekli değişimle) tüm sıradan noktalar için (xx) > 0 varsayımında genellikle hiçbir kayıp olmaz. Bu, hiperbolik geometride tüm ultra-sonsuz noktalar için (xx) < 0 olduğuna işaret eder [9].

[X] ve [Y], (x) ve (y) nin kendi kutupları olsun. Bu yüzden (3.45)'ten başka Y ninki ve y ninkinin arasında benzer bir bağıntı vardır. O halde,

$$c_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu} = x_{\mu} Y_{\mu} \quad \text{ve} \quad C_{\mu\nu} X_{\mu} Y_{\nu} = x_{\nu} Y_{\nu} \tag{3.48}$$

olduğu için

$$(xy) = \{xY\} = \left[XY\right] = \{Xy\}\,. \tag{3.49}$$

Orantılı olarak çarpanlar (3.45)'te ve aynı zamanda burada verilmiştir. Bu, her bir noktanın veya doğrunun koordinatlarında homojen denklemlerin alınmasının sağlanması hiçbir karışıklık çıkarmaz [9].

Özellikle, dik olan [X] ve [Y] doğruları için [XY] = 0 olması ve dik (veya eşlenik) olan (x) ve (y) noktaları için (xy) = 0 olması şarttır [9].

Daha genel olarak, *[X] ve [Y] doğruları arasındaki açının kosinüs karesi:*

$$\frac{\{xY\}\{yX\}}{\{xX\}\{yY\}} = \frac{[XY]^2}{[XX][YY]}, \tag{3.50}$$

(x) ve (y) noktaları arasındaki uzaklığın kosinüsü (veya hiperbolik kosinüs):

$$\sqrt{\frac{\{xY\}\{yX\}}{\{xX\}\{yY\}}} = \frac{|(xy)|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}}. \tag{3.51}$$

Eliptik geometride her doğru için [XX] = (xx) > 0 dır. Aslında (xx) ve [XX] nin her ikisi de pozitif olarak tanımlıdır. Hiperbolik geometride, herhangi bir sıradan noktanın kutbu için (Örneğin; herhangi bir ultra-sonsuz doğru için) [XX] = (xx) > 0 dır. Bu yüzden her sıradan doğru için [XX] < 0 dır [9].

Buradan kesişen *[X] ve [Y] doğruları arasındaki "iç" açı* iki geometride sırasıyla:

$$\arccos\frac{-[XY]}{\sqrt{[XX]}\sqrt{[YY]}} \text{ veya } \arccos\frac{[XY]}{\sqrt{([XX][YY])}} . \tag{3.52}$$

Aynı zamanda (x) noktasının [Y] doğrusuna uzaklığı [9]:

$$\arcsin\frac{\left|\{xY\}\right|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{[YY]}} \text{ veya } \arg\sinh\frac{\left|\{xY\}\right|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(-[YY])}}. \tag{3.53}$$

Her zaman dikkat edildiği gibi, *(x) ve (y) iki noktası arasındaki uzaklık*:

$$\arccos\frac{\left|(xy)\right|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}} \text{ veya } \arg\cosh\frac{\left|(xy)\right|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}}. \tag{3.54}$$

Sonuç olarak; *[X] ve [Y] ultra-paralel doğruları arasındaki uzaklık*:

$$\arg\cosh\frac{\left|[XY]\right|}{\sqrt{([XX][YY])}}. \tag{3.55}$$

Çapraz oran terimiyle, Klein'ın önceden tanımlamış olduğu uzaklığın (3.54)'te nasıl elde edildiğini göstermek ilginçtir. Cayley bu ifadeyi, bu bağıntıyı gözleyip parçaları yan yana koyarak toplamsal özellikle göstermiştir:

$$\arccos\frac{(xy)}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}}+\arccos\frac{(yz)}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}}=\arccos\frac{(xz)}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(zz)}}. \tag{3.56}$$

(x), (y), (z) nin aynı doğrultudaki noktalar olması durumunda (veya aynı cinsten toplam olan [X], [Y], [Z] nin uyuşan doğrular olması durumunda) determinantın ortadan yok olduğunu şöyle gösterir:

$$\begin{vmatrix}(xx) & (xy) & (xz)\\ (yx) & (yy) & (yz)\\ (zx) & (zy) & (zz)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\{xX\} & \{xY\} & \{xZ\}\\ \{yX\} & \{yY\} & \{yZ\}\\ \{zX\} & \{zY\} & \{zZ\}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_0 & x_1 & x_2\\ y_0 & y_1 & y_2\\ z_0 & z_1 & z_2\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}X_0 & Y_0 & Z_0\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix} \tag{3.57}$$

3.1.2.6.1 Genel Çember

Bir üçgen için eşitlik elde etmek amacıyla, (z) merkezinden geçen, değişken [U] doğrusundaki yansıyan sabit (y) noktası kullanılır. Eğer (u), [U] nun mutlak kutbuysa $(uz)=\{Uz\}=0$ için, verilen çember (x) in yeri için olduğunda,

$$x_\mu = y_\mu - 2u_\mu \{yU\}/\{uU\} = y_\mu - 2u_\mu (yu)/(uu) \tag{3.58}$$

ve benzer olarak,

$$y_\mu = x_\mu - 2u_\mu (xu)/(uu). \tag{3.59}$$

Bu bağıntı önce $c_{\mu\nu}x_\nu$ ile, ikinci olarak da $c_{\mu\nu}y_\nu$ ve her ikisi de $c_{\mu\nu}z_\nu$ ile çarpıldığında;

$$(xx)=(xy)-2(xu)(yu)/(uu)=(yy) \text{ ve } (zx)=(zy). \tag{3.60}$$

sonucu çıkarılır [9]. Bu da;

$$(yy)(zx)^2=(zy)^2(xx) \tag{3.61}$$

Tek homojen denklemine sebep olur [9]. (Eğer istenirse, (3.58)'de x_μ ye orantılı olan bir çarpan eklenebilir. O halde son adım onu yok etmeyi içerir.) Buradan, $g'=(zy)^2/(yy)$ olduğunda;

(z) merkezli (y) den geçen çemberin denklemi:

$$(zx)^2=g'(xx). \tag{3.62}$$

Başka bir deyişle,

$$g = \{Zy\}^2 / (yy) \tag{3.63}$$

olduğunda, *[Z] eksenli (y) den geçen çemberin denklemi*:

$$\{Zx\}^2 = g(xx). \tag{3.64}$$

Hiperbolik geometride yukarıdaki denklemler, (zz) = [ZZ] nin pozitif, sıfır veya negatif olmasına göre; uygun bir çember, horocycle veya eşit uzaklıktaki eğriyi temsil eder [9]. (y) ile (z) ye (3.54)'ün ve (y) ile [Z] ye (3.53)'ün uygulanmasıyla;

$$g' = (zz)\cos^2 R \text{ veya } (zz)\cosh^2 R \quad \text{(uygun bir çember için)} \tag{3.65}$$

$$g = [ZZ]\sin^2 D \text{ veya } -[ZZ]\sinh^2 D \quad \text{(eşit uzaklıktaki bir eğri için)} \tag{3.66}$$

olduğu görülür [9]. Bir horocycle olması durumunda g' ve g için böyle bir ifadeye bakılamaz. (3.64)'teki denklemin oluşması açıkça, kesişim kirişi $\{Zx\} = 0$ ekseninin (3.58) ile uyuşması ile olur [9].

Özellikle mutlak kutupsallık kendi kuralsal biçimini ifade ettiğinde;

(1, 0, 0) merkezli uygun bir çember:

$$x_0^2 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)\cos^2 R \text{ veya } x_0^2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)\cosh^2 R. \tag{3.67}$$

(1, 0, 1) merkezli (1, 0, 0) dan geçen horocycle:

$$(x_0 - x_2)^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2. \tag{3.68}$$

[0, 0, 1] eksenli eşit uzaklıktaki eğri:

$$x_2^2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)\sinh^2 D\,. \tag{3.69}$$

Genel koordinatların kullanıldığı bir örnek için, *"bir noktadan geçen çapa dik olan bir çembere göre bir noktanın kutupsallığı"* ile ilgili benzer teorem dikkate alınır [9]. Bu (aynı zamanda çemberin tüm çeşitleri için) aşağıdaki gibi ispatlanabilir. (3.64)'teki *koniğe uygun (w) noktasının kutbu*;

$$\{Zw\}\{Zx\} = g\left(wx\right) \tag{3.70}$$

doğrusudur [9]. Denklemi oluşturulduğunda $\{Zx\} = 0$ ve (wx) = 0 doğrularıyla (yani bir çemberin ve (w) nin mutlak kutupsallığıyla) uyuştuğu görülür. Buradan mutlak kutupsallığı, (w) nin kendisi ve çemberin merkeziyle aynı doğrultudadır. İstenen sonuç açıktır [9].

3.1.2.6.2 Teğetsel Denklemler

(u) merkezli ve [U] eksenli harmonik türdeşlik, dualize ile teğetsel koordinatların bir dönüşümü gibi ifade edilebilir:

$$X'_\mu = X_\mu - 2U_\mu\{uX\}/\{uU\}\,. \tag{3.71}$$

Bu, dualizeyi türetme imkanı verir, öyle ki $G' = \left[ZY\right]^2/\left[YY\right]$ olduğunda;

bir çembere [Z] ekseni ile [Y] deki teğetin denklemi:

$$\left[ZX\right]^2 = G'\left[XX\right]. \tag{3.72}$$

Diğer bir deyişle, $G = \{zY\}^2 / [YY]$ olduğunda;

bir çembere (z) merkezli [Y] deki teğetin denklemi:

$$\{zX\}^2 = G[XX]. \tag{3.73}$$

[Z] ve [Y] ye (3.52) veya (3.55); ayrıca (z) ve [Y] ye (3.53) uygulanırsa,

$$G' = [ZZ]\cos^2 D \text{ veya } [ZZ]\cosh^2 D \quad \text{(bir eşit uzaklıktaki eğri için)} \tag{3.74}$$

$$G = (zz)\sin^2 R \text{ veya } -(zz)\sinh^2 R \quad \text{(bir uygun çember için)} \tag{3.75}$$

olduğu görülür [9].

Böylece her iki geometride de $G + g' = (zz)$ ve $g + G' = [ZZ]$ dir. Aslında $[ZX]^2 = ([ZZ] - g)[XX]$ denklemini sağlayan bir koniğin teğetlerinin doğrudan sağlanması gerekir [9].

3.1.2.6.3 Çevrel Çember ve Ağırlık Merkezleri

Bir üçgenin köşeleri üç genel noktayla (x), (y), (z) olarak verilsin. Kenarlarının ve açılarının katsayı fonksiyonu $c_{\mu\nu}$ olarak tanımlansın [9].

Eliptik geometride (xx) ve [XX] pozitif tanımlandığında, "köşegen" katsayıları $c_{00}, c_{11}, c_{22}, C_{00}, C_{11}, C_{22}$ pozitiftir ve pozitif köklerinin karelerini $c_0, c_1, c_2, C_0, C_1, C_2$ ile göstermek uygundur. Karşılıklı determinantlar γ ve Γ pozitiftir [9].

Hiperbolik geometride, sıradan noktaların ve doğruların kaynağı olan üçgenin köşeleri ve kenarları; $c_0 = \sqrt{c_{00}}$ ve $C_0 = \sqrt{|C_{00}|}$ yazıldığında; c_{00}, c_{11}, c_{22} pozitif ve C_{00}, C_{11}, C_{22} negatif olur. Köşelerin mutlak kutupsalları, yani doğrular;

$$[c_{00}, c_{10}, c_{20}], [c_{01}, c_{11}, c_{21}], [c_{02}, c_{12}, c_{22}] \tag{3.75}$$

ultra-sonsuz ve böylece dış doğrulardır [9]. Buradan $c_{\mu\nu}$ tamamen pozitiftir [9]. $x_0 = 0$ kenarı üzerinde sonsuzdaki noktalar, ikinci dereceden;

$$c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 = 0 \tag{3.76}$$

denklemiyle verilir, buradan ${}_{\gamma}C_{00} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 < 0$ ve γ yine pozitiftir [9].

(xx) de x_0^2 nin katsayısı c_{00} veya c_0^2 olduğundan genel çember eğer $Z_0^2 = gc_0^2$ ise (1, 0, 0) noktasından ve eğer $Z_1^2 = gc_1^2$ ve $Z_2^2 = gc_2^2$ ise diğer iki köşesinden geçer. Buradan *çevrel çember*:

$$(c_0x_0 \pm c_1x_1 \pm c_2x_2)^2 = (xx) \tag{3.77}$$

ve *eksenleri* (bir çevrel çemberin mutlak kutupsalları):

$$[c_0, c_1, c_2], [-c_0, c_1, c_2], [c_0, -c_1, c_2], [c_0, c_1, -c_2]. \tag{3.78}$$

Böylece *büyük çevrel çember* [cX] = 0 veya

$$\left(C_{\mu 0}c_\mu, C_{\mu 1}c_\mu, C_{\mu 2}c_\mu\right). \tag{3.79}$$

Hiperbolik geometride; eğer $[c_0, c_1, c_2]$ ekseni ultra-sonsuz ise büyük çevrel çemberdir (Örneğin; [cc] > 0 ise), eğer [cc] = 0 ise bir sınırlanmış horocycle'dır [9].

Önceki durumda, *çevrel yarıçap R olduğunda, (1, 0, 0) dan çevrel çembere olan uzaklık:*

$$\cosh R = \frac{c_{0\nu} C_{\mu\nu} c_{\mu}}{\sqrt{c_{00}}\sqrt{[cc]}} \tag{3.80}$$

şeklinde verilir [9]. $c_{0\nu} C_{\mu\nu} c_{\mu} = \delta_{0\mu} c_{\mu} = c_0$ için bu,

$$R = \arg\cosh[cc]^{-1/2} \tag{3.81}$$

durumuna getirilir [9].

Eliptik geometride büyük çevrel çember daha kolay bulunur. $\frac{1}{2}\pi - R$ için $[c_0, c_1, c_2]$ *doğrusuna (1, 0, 0) noktasından olan uzaklık*:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - R\right) = c_0 / \sqrt{c_{00}}\sqrt{[cc]}\,, \tag{3.82}$$

buradan,

$$R = arc\cos[cc]^{-1/2} \tag{3.83}$$

Ağırlık merkezleri (3.78)'deki doğruların üçlü doğrusal kutupları olduğunda:

$$\left(\frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right), \left(-\frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right), \left(\frac{1}{c_0}, -\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right), \left(\frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1}, -\frac{1}{c_2}\right). \tag{3.84}$$

Hiperbolik geometride, son üçü mutlaka sıradan noktalar değildir; örneğin, dördüncü eğer

$$\frac{c_{12}}{c_1c_2}+\frac{c_{20}}{c_2c_0}-\frac{c_{01}}{c_0c_1}>\frac{3}{2} \tag{3.85}$$

ise, ultra-sonsuzdur [9].

3.1.2.6.4 İç ve Dış Çemberler

Eğer $z_0^2 = GC_{00} = |G|C_0^2$ ise, bir çembere [1, 0, 0] doğrusu dokunur ve eğer $z_1^2 = |G|C_1^2$ ve $z_2^2 = |G|C_2^2$ ise aynı zamanda diğer iki kenarları da dokunur (hiperbolik geometride G negatiftir). Buradan *iç ve dış çemberler*:

$$\left(C_0X_0 \pm C_1X_1 \pm C_2X_2\right)^2 = \left|[XX]\right| \tag{3.86}$$

ve onların *merkezleri*:

$$\left(C_0,C_1,C_2\right),\left(-C_0,C_1,C_2\right),\left(C_0,-C_1,C_2\right),\left(C_0,C_1,-C_2\right) \tag{3.87}$$

Uzaklığı $\left(C_0,C_1,C_2\right)$ *dan [1, 0, 0] a olan iç yarıçap*:

$$r = \arcsin(CC)^{-1/2} \text{ veya } \arg\sinh(CC)^{-1/2}. \tag{3.88}$$

3.1.2.6.5 Diklik Merkezi

Kenarlarının mutlak kutupları [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1] olan kaynak üçgenin kutupsal üçgeninin köşeleri:

$$\left(C_{00},C_{10},C_{20}\right),\left(C_{01},C_{11},C_{21}\right),\left(C_{02},C_{12},C_{22}\right). \tag{3.89}$$

Bunlar $\left(C_{20}C_{01}, C_{01}C_{12}, C_{12}C_{20}\right)$ diklik merkezinde birleştiğinde, yükseklik doğrularıyla orijinal üçgenin karşılıklı köşelerinde

$$\left[0, C_{20}, -C_{10}\right], \left[-C_{21}, 0, C_{01}\right], \left[C_{12}, -C_{02}, 0\right] \tag{3.90}$$

şeklinde birleşir. Eğer $C_{12}C_{20}C_{01} \neq 0$ ise bu basitçe şöyledir:

$$\left(\frac{1}{C_{12}}, \frac{1}{C_{20}}, \frac{1}{C_{01}}\right). \tag{3.91}$$

Eğer C_{12}, C_{20}, C_{01} den biri yok olursa, üçgen dik açılı olur ve diklik merkezi zirvede çakışır. Eğer onların birinden daha fazlası yok olursa, üçgen iki (veya üç) dik açılı olur ve diklik merkezi de bu durumda belirsizdir. Eğer C_{12}, C_{20}, C_{01} den biri, diğer ikisinden işaretçe farklıysa, (geniş açılı bir üçgen olması durumunda) diklik merkezi dışarıdadır [9].

Hiperbolik geometride diklik merkezi eğer;

$$\frac{c_{00}}{C_{12}^2} + \frac{c_{11}}{C_{20}^2} + \frac{c_{22}}{C_{01}^2} + \frac{2c_{12}}{C_{20}C_{01}} + \frac{2c_{20}}{C_{01}C_{12}} + \frac{2c_{01}}{C_{12}C_{20}} < 0 \tag{3.92}$$

ise ultra-sonsuzdur. $c_{00} = \gamma(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)$ ve $c_{12} = \gamma(C_{20}C_{01} - C_{00}C_{12})$ için, bu durumda eşitlik;

$$3 + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{12}^2} + \frac{C_{22}C_{00}}{C_{20}^2} + \frac{C_{00}C_{11}}{C_{01}^2} - \frac{2C_{00}C_{12}}{C_{20}C_{01}} - \frac{2C_{11}C_{20}}{C_{01}C_{12}} - \frac{2C_{22}C_{01}}{C_{12}C_{20}} < 0 \tag{3.93}$$

veya

$$\left(\frac{C_{01}}{C_{20}} - \frac{C_{11}}{C_{12}}\right)\left(\frac{C_{20}}{C_{01}} - \frac{C_{22}}{C_{12}}\right) + \left(\frac{C_{12}}{C_{01}} - \frac{C_{22}}{C_{20}}\right)\left(\frac{C_{01}}{C_{12}} - \frac{C_{00}}{C_{20}}\right) + \left(\frac{C_{20}}{C_{12}} - \frac{C_{00}}{C_{01}}\right)\left(\frac{C_{12}}{C_{20}} - \frac{C_{11}}{C_{01}}\right) < 0 \tag{3.94}$$

veya

$$\frac{c_{20}}{C_{20}C_{12}}\frac{c_{01}}{C_{01}C_{12}}+\frac{c_{01}}{C_{01}C_{20}}\frac{c_{12}}{C_{12}C_{20}}+\frac{c_{12}}{C_{12}C_{01}}\frac{c_{20}}{C_{20}C_{01}}<0 \tag{3.95}$$

veya

$$\frac{C_{20}C_{01}}{c_{12}}+\frac{C_{01}C_{12}}{c_{20}}+\frac{C_{12}C_{20}}{c_{01}}<0\ . \tag{3.96}$$

3.1.2.7 Alanlar

3.1.2.7.1 Bölgelerin Eşitliği

Aşağıdaki gibi standart bir alan birimi terimiyle herhangi bir bölgenin alanının tanımlanması sağlanır. Eğer birim bölge, verilen bir bölgenin içinde her biri eşit olan n bölgeye (n pozitif tam sayı olmak üzere) ayrılabilirse, bir bölgenin 1/n alanlı olduğu söylenir ve eğer 1/n alanlı bir bölgenin m ye eşit kopyasını yan yana koyarsak bir bölgenin m/n alanlı olduğu söylenir. Bir doğal sınırlama yöntemiyle, verilen herhangi bir bölgenin alanı bir reel sayı olarak elde edilir [9].

3.1.2.7.2 Birimin Seçimi

Euclidean geometride alan birimi, kenar biriminin karesidir. Euclidean olmayan geometride sadece kare değil, aynı zamanda açıları dik olmayan "düzenli bir dörtgendir". Bu şeklin köşegenleri çizildiğinde, dik açılı dört ikizkenar üçgene ayrılır. (Taban açıları $\frac{1}{4}\pi$ den farklı olan) A = B olan böyle bir ABC üçgeni için;

$$\cos c=\cos^2 a=\cot^2 A \quad \text{(Eliptik)} \tag{3.97}$$

$$\cosh c = \cosh^2 a = \cot^2 A \quad \text{(Hiperbolik)} \tag{3.98}$$

formülleri verilir. Eğer a sıfıra yaklaşıyorsa, $c^2 = 2a^2$ ve $A = \frac{1}{4}\pi$ olan bir Euclidean üçgene gitgide daha çok benzer. Birim, Euclidean olmayan üçgenin alanı olan Δ yapmak için ayarlanırsa şöyle olur:

$$\lim_{a \to 0} \frac{\Delta}{\frac{1}{2}a^2} = 1 \ . \tag{3.99}$$

Hiperbolik geometride alan, birim yayın bir horocycle cinsinden parçasının alanı iken, eliptik geometride birimin aslında iki dik açılı bir üçgenin üçüncü açısının alanı olduğu sonradan görülür. (En son figürün sonsuza doğru uzatılması dezavantajdır; fakat tümüne ulaşılan diğer figürlerle yerine kolaylıkla konulabilir.) [9].

3.1.2.7.3 Eliptik Geometride Bir Üçgenin Alanı

İki doğru reel projektif düzlemi, içinde iki açısal bölgeye ayırdığında "yaylar" olarak isimlendirilir. (Her bir yay, yüzey üzerindeki bir yaya benzemez, sadece bir tek zirvede iki kenarı vardır.) Eliptik geometride, eğer doğrular birbirine dikse, iki bütünler yay eşleniktir. Bir dik açılı yayın böyle ikiye bölünmesi tekrarlanırsa, *bir yayın alanı, açısıyla orantılı olur* [9].

Eğer $\mu\theta$, θ açısının bir yayının alanı ise, tüm düzlemin alanı:

$$\mu\theta + \mu(\pi - \theta) = \mu\pi \, . \tag{3.100}$$

Herhangi bir ABC üçgeninin alanları $\Delta, \Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ ile gösterilsin ve bunlar yardımcı yay üçgenleri olsun. O halde;

$$\Delta + \Delta_a = \mu A, \tag{3.101}$$

$$\Delta + \Delta_b = \mu B, \tag{3.102}$$

$$\Delta + \Delta_c = \mu C. \tag{3.103}$$

$$\Delta + \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = \mu\pi. \tag{3.104}$$

$$2\Delta = \mu\left(A + B + C - \pi\right). \tag{3.105}$$

Bu iddia alternatif olarak ünlü eşitsizliğin en basit ispatını sağlar:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} > \pi\,. \tag{3.106}$$

μ yü değerlendirmek amacıyla,

$$\cos a = \cot A = \left(1 - \tan\varepsilon\right)/\left(1 + \tan\varepsilon\right) \tag{3.107}$$

$$\sin^2 a = 4\tan\varepsilon/\left(1 + \tan\varepsilon\right)^2 \tag{3.108}$$

için $A = B = \dfrac{1}{4}\pi + \varepsilon$ olan bir dik açılı üçgen dikkate alınır [9].

Eşit a kenarlı bir Euclidean dik açılı üçgene, bu üçgenin alanının oranı:

$$\frac{\mu\varepsilon}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2 \frac{\varepsilon}{\tan\varepsilon}\left(1 + \tan\varepsilon\right)^2. \tag{3.109}$$

ε, 0 a yaklaşırken a için limit μ / 2 dir. Buradan μ = 2 dir ve

Teorem 3.27: *Eliptik geometride, herhangi bir ABC üçgeninin alanı A + B + C -* π *dir* [9].

Teorem 3.28: *Hiperbolik geometride, herhangi bir ABC üçgeninin alanı* $\pi - A - B - C$ *dir* [9].

İspat:

L, M, N, Şekil 3.40'taki gibi B/C, C/A, A/B üzerinde sonsuzdaki noktalar olsun. O halde üçlü-asimptotik üçgen LMN, dört parçaya ayrılır: Orijinal ABC üçgeni, açıları sırasıyla π-A, π-B, π-C olan AMN, BNL, CLM ikili-asimptotik üçgenleri. Buradan alan:

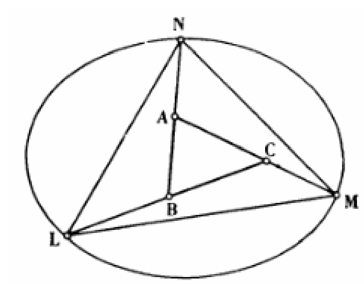
$$ABC = \mu\pi - \mu A - \mu B - \mu C = \mu(\pi - A - B - C). \tag{3.110}$$

μ yü değerlendirmek amacıyla:

$$\cosh a = \cot A = (1 + \tan\varepsilon)/(1 - \tan\varepsilon) \tag{3.111}$$

$$\sinh^2 a = 4\tan\varepsilon/(1 - \tan\varepsilon)^2 \tag{3.112}$$

için $A = B = \frac{1}{4}\pi - \varepsilon$ olan bir dik açılı üçgen dikkate alınır [9].



Şekil 3.40: L, M, N; B/C, C/A, A/B üzerinde sonsuzdaki noktalar

(3.99) durumunda;

$$\lim \mu \left(\frac{\sinh a}{a} \right)^2 \frac{\varepsilon}{\tan\varepsilon} (1 - \tan\varepsilon)^2 = 1 \tag{3.113}$$

Bundan dolayı $\mu = 1$ olur [9].

3.1.2.7.4 Uzaklığın Diferansiyeli

“Sürekli bir eğri”, koordinatları bir t parametresinin sürekli fonksiyonları olan bir noktanın odağı gibi tanımlanabilir. Ayrıca fonksiyonların sürekli türevli olduğu varsayılır. Eğer ΔS, (x) ve (x + Δx) noktaları arasındaki uzaklıksa, onun parametreleri t ve t + Δt dir. Bir eğri, kırık bir doğru veya çokgenin bir dizisinin limiti gibi dikkate alınır, kirişleri daha küçük ve daha küçük oluşturulur ve onların “uzunluğu” $\dot{s} = \lim\left(\Delta s / \Delta t\right)$ iken;

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum \Delta s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum \frac{\Delta s}{\Delta t} \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \dot{s} dt \,. \tag{3.114}$$

Diferansiyel geometrideki düzenlemeye göre, onu (xx) = 1 yapan koordinatlara normalleştirmek uygundur. Bunun için *(x) ve (y) arasındaki uzaklık* basitçe:

$$\arccos(xy) \text{ veya } \arg\cosh(xy)\,. \tag{3.115}$$

Teorem 3.29: *Koordinatların normalleştirilmesi açısından, herhangi bir sürekli eğri boyunca uzaklığın diferansiyeli*;

$$ds^2 = \pm\left(dxdx\right) = \pm c_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{3.116}$$

ile hiperbolik geometri için alt simgeyle, eliptik geometri için üst simgeyle verilir [9].

İspat:

Eliptik geometride (x) ten (x + Δx) e uzaklık;

$$\cos \Delta s = \left(xx + \Delta x\right) = \left(xx\right) + \left(x\Delta x\right) = 1 + \left(x\Delta x\right). \tag{3.117}$$

$\left(x + \Delta x x + \Delta x\right) = 1 = (xx)$ olduğundan,

$$2\left(x\Delta x\right)+\left(\Delta x\Delta x\right)=0 \tag{3.118}$$

olur. Buradan,

$$4\sin^2\frac{1}{2}\Delta s=2\left(1-\cos\Delta s\right)=-2\left(x\Delta x\right)=\left(\Delta x\Delta x\right). \tag{3.119}$$

Δt^2 ile bölündüğünde ve limite geçildiğinde, $\dot{s}^2=\left(\dot{x}\dot{x}\right)$ veya diferansiyellerle gösterimiyle:

$$ds^2=\left(dxdx\right). \tag{3.120}$$

Hiperbolik geometride, benzer olarak:

$$\cosh\Delta s=1+\left(x\Delta x\right), \tag{3.121}$$

$$4\sinh^2\frac{1}{2}\Delta s=2\left(\cosh\Delta s-1\right)=2\left(x\Delta x\right)=-\left(\Delta x\Delta x\right), \tag{3.122}$$

$$ds^2=-\left(dxdx\right). \tag{3.123}$$

Böylece terimlerle kuralsal biçimde mutlak geometri ile koordinatların normalleştirilmesi yapılır. *Düzlemde*;

$$ds^2=\pm dx_0^2+dx_1^2+dx_2^2. \tag{3.124}$$

Uzayda:

$$ds_2=\pm dx_0^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2. \tag{3.125}$$

3.1.2.7.5 Çemberlerin Alanları ve Yayları

Bir çember:

$$x_1^2 + x_2^2 = \sin^2 R \text{ veya } \sinh^2 R \tag{3.126}$$

şeklindedir. Parametrik simgelerle ise sırasıyla iki geometride;

$$x_0 = \cos R,\ \ x_1 = \sin R \cos t,\ \ x_2 = \sin R \sin t \quad \text{(Eliptik)} \tag{3.127}$$

veya

$$x_0 = \cosh R,\ \ x_1 = \sinh R \cos t\ ,\ \ x_2 = \sinh R \sin t \quad \text{(Hiperbolik)} \tag{3.128}$$

dir. Buradan,

$$\dot{x}_0 = 0,\ \ \dot{x}_1 = -x_2,\ \ \dot{x}_2 = x_1, \tag{3.129}$$

ve

$$\dot{s} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{3.130}$$

$$= \text{sinR veya sinhR.} \tag{3.130-a}$$

t = 0 dan t = θ ya integral alındığında;

R yarıçaplı bir çemberin θ açılı bir yayının uzunluğu:

$$s(R) = \theta \sin R \text{ veya } \theta \sinh R\ . \tag{3.131}$$

Euclidean geometri gibi integrasyonla alanların hesaplanması sağlanır [9]. Böylece, *R yarıçaplı bir çemberin θ açılı bir bölümünün alanı*;

$$\int_0^R s(r)dr = \theta(1-\cos R) \quad \text{veya} \quad \theta(\cosh R - 1). \tag{3.132}$$

Özellikle (Bolyai) *R yarıçaplı bir çemberin çevresi*;

$$2\pi \sin R \quad \text{veya} \quad 2\pi \sinh R, \tag{3.133}$$

R yarıçaplı bir çemberin alanı;

$$2\pi(1-\cos R) \quad \text{veya} \quad 2\pi(\cosh R - 1). \tag{3.134}$$

$R = \frac{1}{2}\pi$ konulursa, eliptik düzlemin alanı 2π olur (13.3 kabulüyle).

(3.131) ve (3.132) ile, *s yaylı bir bölümün alanı (hiperbolik geometride)*;

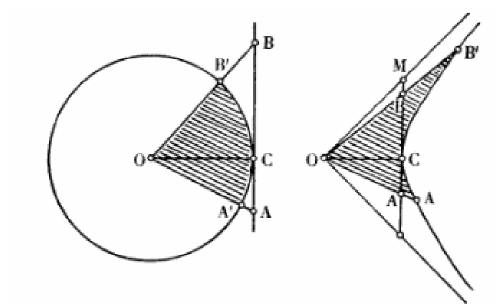
$$s(\cosh R - 1)/\sinh R = s \tanh \frac{1}{2} R. \tag{3.135}$$

3.1.2.8 Euclidean Modeller

3.1.2.8.1 "Eliptik" ve "Hiperbolik"in Anlamı

Sıradan Euclidean geometride merkezil bir konik, bir elips veya bir hiperbolden herhangi biri olabilir. Herhangi merkezil bir konik için eşlenik çapların çifti bir involusyona (merkezden geçen doğruların karışıklığına) ait olabilir; fakat sadece hiperbol kendine eşlenik çaplara sahiptir. (Başka bir deyişle, hiperbolün iki asimptotu vardır.). Bundan dolayı, herhangi bir karışıklık (ve böylece uygun olarak herhangi bir boyutlu projektiflik), eğer kendine karşılık gelen iki elemanı varsa "hiperbolik", yoksa "eliptik" olarak isimlendirilir. Benzer olarak bir kutupsallık, kendine eşlenik elemanları içerip içermemesine göre hiperbolik veya eliptik olarak adlandırılır. Sonuç olarak, bir Euclidean olmayan geometri, mutlak kutupsallığının doğasına göre, hiperbolik veya eliptik olarak isimlendirilir [9].

Elipsler ve hiperbollerin daha doğrudan bir ilişkisi Şekil 3.41'de görülebilir [9].



Şekil 3.41: Elipsler ve hiperbollerin ilişkisi

(x, 0) veya (1, x, 0) noktası orijinden; x Euclidean uzaklıkta, $\arctan x$ eliptik uzaklıkta ve $\arg\tanh x$ hiperbolik uzaklıktadır. Bu metriklerin karşılaştırılması, Klein'ın bir boyutlu Euclidean geometri olmayan modelini kurar [9].

Basitçe bir köşede teğet olan bir doğruyla, elips bir çember ve hiperbol bir dikdörtgen olarak alınabilir [9].

Eğer x, x_e, x_h sırasıyla Euclidean, eliptik ve hiperbolik uzaklıklar olmak üzere;

$$x_e = \arctan x, \qquad (3.136)$$

$$x_h = \arg\tanh x. \qquad (3.137)$$

3.1.2.8.2 Uzaklıkların Diferansiyeli

Beltrami'nin modelinde; $(x_1/x_0, x_2/x_0)$ Kartezyen koordinatlarıyla bir nokta tarafından, (x_0, x_1, x_2) kanunsal koordinatlarıyla bir nokta temsil edilir. $x_0 = 1$

konulursa; bu ifade (x_1, x_2), (y_1, y_2) noktaları arasındaki eliptik ve hiperbolik uzaklıklar olur:

$$\arccos\frac{1+x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)}\sqrt{\left(1+y_1^2+y_2^2\right)}} = \arcsin\sqrt{\frac{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)\left(1+y_1^2+y_2^2\right)}} \quad (3.138)$$

ve

$$\operatorname{arg\,cosh}\frac{1-x_1y_1-x_2y_2}{\sqrt{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)}\sqrt{\left(1-y_1^2-y_2^2\right)}} = \operatorname{arg\,sinh}\sqrt{\frac{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2-\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)\left(1-y_1^2-y_2^2\right)}} \quad (3.139)$$

Böylece $\left(x_1, x_2\right)$ ve $\left(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2\right)$ arasındaki *eliptik uzaklık*:

$$\sin^2\Delta s = \frac{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\left(x_2\Delta x_1-x_1\Delta x_2\right)^2}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)\left\{1+\left(x_1+\Delta x_1\right)^2+\left(x_2+\Delta x_2\right)^2\right\}} \quad (3.140)$$

ile verilir ve *eliptik uzaklığın diferansiyeli*:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2+dx_2^2+\left(x_2dx_1-x_1dx_2\right)^2}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^2} = \frac{\left(1+x_2^2\right)dx_1^2-2x_1x_2dx_1dx_2+\left(1+x_1^2\right)dx_2^2}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^2} \quad (3.141)$$

ile verilir ve benzer olarak *hiperbolik uzaklık*:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2+dx_2^2-\left(x_2dx_1-x_1dx_2\right)^2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^2} = \frac{\left(1-x_2^2\right)dx_1^2+2x_1x_2dx_1dx_2+\left(1-x_1^2\right)dx_2^2}{\left(1-x_1^2-x_2^2\right)^2} \quad (3.142)$$

Üç boyutlu uzay için benzer formüller kolayca elde edilir. O halde hiperbolik mutlak bir küre tarafından, düzlemlerin kirişleri tarafından temsil edilir. Bu model hiperbolik geometrinin tutarlılığının en erken yeterli ispatını sağlar. (Böylece Euclid'in 5. Postulatı, onun diğer varsayımlarından ortaya çıkamaz.) [9].

3.1.2.8 Hiperbolik Geometri

Hiperbolik Geometri, Eucleides Geometrisinin aksiyomlarından (Sıralama, Bağ, Paralellik, Denklik, Süreklilik ve Tamlık aksiyomlarından) paralellik aksiyomu değiştirilerek elde edilmiştir. Şöyle ki;

Düzlem hiperbolik geometri; düzlem Eucleides geometrisindeki paralellik aksiyomu yani; "Bir doğru ve dışındaki bir nokta verildiğinde bu noktadan geçen ve doğruyu kesmeyen bir tek doğru vardır." yerine "Bir doğru ve dışında bir nokta verildiğinde bu noktadan geçen ve doğruyu kesmeyen en az iki doğru vardır." aksiyomunu almakla ede edilir. Diğer Eucleides aksiyomları hiperbolik geometride de aynı olduğundan arada benzerlikler de vardır [4].

Eucleides geometrisinde, paralellik aksiyomuna bağlı olmayan tüm sonuçlar hiperbolik geometri için de geçerlidir. Bu ikisi arasındaki en önemli fark; hiperbolik geometrideki bir üçgenin iç açıları ölçüleri toplamının π' den küçük olmasıdır [5].

Hiperbolik geometri için çeşitli gösterimler vardır. Bunlardan bazıları üst yarı düzlem, birim disk (birim çember) ve Klein gösterimidir [5].

Hiperbolik geometri, hiperbolik düzlemde bulunan kümelerin, katı hareketlerin (döndürme ve öteleme gibi) oluşturduğu bir özel dönüşümler grubu altında değişmez kalan özelliklerini incelemektir [4].

Tanım 3.1: Aşağıdaki koşulları gerçekleyen her IH = (IN,D,o) geometrik yapısına bir *hiperbolik düzlem* ya da *Bolyai-Lobatschewsky düzlemi* denir:

H1: Herhangi iki noktadan geçen bir doğru vardır.

H2: Her doğru üzerinde aynı sayıda nokta bulunur.

H3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

H4: Bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olan iki ya da daha çok (belli bir sayıda) doğru vardır.

H5: (Sınırlayıcı Aksiyom) IN'$\subset$N, D' $\subset$ D ve o' $\subset$ o olmak üzere eğer

a) $M, N \in IN', M \neq N \Rightarrow MN \in D'$ ve

b) $No'd \in D' \Rightarrow N \in IN'$

ise $(IN', D', o') = IH$ dır [2].

Hiperbolik düzlemin ayırıcı aksiyomu H4 tür. Oysaki bu aksiyomu 3 boyutlu Eucleides uzayı da sağlar. İşte bu ve benzeri uzayları hiperbolik sıfatı altında "düzlem" olarak düşünmek sakıncasını ortadan kaldırmak için H5 kısıtlayıcı aksiyomu konulur. Bu arada sonlu hiperbolik düzlemi belirleyen birçok eşdeğer aksiyom sistemlerinin varlığı da söz konusudur. Ayrıca, buradaki *hiperbolik* sözcüğünün bildiğimiz *hiperbol* ile bir ilişkisi yoktur. Yalnız tarihsel nedenlerle bir sıfat olarak kullanılmaktadır [2].

3.1.2.9.1 Sonlu Bir Hiperbolik Düzlem Modeli

Büyük harfler noktaları ve her biri üç büyük harften oluşan üçlüler doğruları göstermek üzere aşağıdaki sistemi düşünelim. Burada bir noktanın bir doğru üzerinde olması, bu doğruyu gösteren üçlü içinde noktayı gösteren harfin bulunması biçiminde tanımlanmaktadır:

ABC	BDE	CDM	DFH	EFL	FJK	IKM
ADJ	BGH	CEJ	DGK	EİG	GJM	
AHİ	BKL	CFİ	DİL	EHM	HJL	
AEK	BFM	CHK				
AFG	BİJ	CGL				
ALM						

Sistemin bütün aksiyomları sağladığı kolaylıkla görülebilir. Ayrıca her noktadan 6 doğru geçmekte, her doğru üzerinde 3 nokta bulunmakta ve bir noktadan dışındaki bir doğruya 3 paralel çizilebilmektedir [2].

3.1.2.9.2 Gerçel Bir Hiperbolik Düzlem Modeli

Eucleides düzleminde bir eğri ile sınırlanmış konveks bir bölge, örneğin bir dairenin iç noktalarından oluşan bölge düşünülsün. Dairenin içinde kalan (çevre üzerindekiler hariç) noktalar yine nokta olarak; dairenin kirişlerinden her biri birer doğru olarak alınsın [2].

Dairenin çevresi üzerinde kesişen herhangi iki kiriş paralel doğrular olarak tanımlansın. Böylece her doğruya dışındaki bir noktadan geçen iki paralel doğru çizilebilir. Kolayca gösterilebilir ki bu sistem bir hiperbolik düzlemdir [2].

Dikkat edilirse bu modelde her d doğrusuna dışındaki bir N noktasından çizilen $d_1$ve d_2 paralelleri arasındaki bölgede bulunan çok sayıda doğrular da d yi kesmez. Ama bunlar yukarıdaki paralellik tanımına uymazlar. Eğer "ortak noktası olmayan iki doğru paraleldir" diye tanımlanacak olursa böyle doğrular da d ye paralel olur ve hiperbolik düzlem aksiyomları yine sağlanır. [2, s. 55-57.].

3.1.2.9.3 Hiperbolik Uzaklık ve Hiperbolik Disk

Hiperbolik düzlem, yani üst yarı düzlem;

$$U = (\{z \mid z=x+iy,\ y>0\}) \tag{3.143}$$

ile gösterilir. U nun otomorfizmaları grubu, yani elemanları U nun hiperbolik izometrileri olan grup;

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ T \mid T(z)=\frac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}. \tag{3.144}$$

Eucleides geometrisinde bir yay elemanının diferansiyeli;

$$ds = |dz| \tag{3.145}$$

olarak tanımlanır. $\left(\gamma : [0,1] \to U\,,\, z \in U\,,\, z = x + iy, \gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)\right)$. γ nin Euclid uzunluğu;

$$|\gamma| = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \tag{3.146}$$

olarak tanımlanır. Euclid geometrisinde olduğu gibi hiperbolik geometride de (H-geometri) bir yay elemanının hiperbolik uzunluğunun ds diferansiyeli

$$ds = \frac{|dz|}{y} \tag{3.147}$$

olarak tanımlanır (z = x + iy, y>0). Buna göre, bir parçalı sürekli diferansiyellenebilir *C eğrisinin hiperbolik uzunluğu (H-uzunluğu)*;

$$\ell(C) = \int ds = |\gamma| = \int_0^1 \frac{|dz|}{y} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt \tag{3.148}$$

olur. ρ ile gösterilecek olan *hiperbolik metrik (H-metrik)*

$$\rho : U \to \mathbb{R}, \rho(z,w) = Inf\,|\gamma| \tag{3.149}$$

olur. ρ nun, z ile w yu birleştiren H-doğru üzerinden hesaplandığı bilinir. Ayrıca

$$\rho(z,w) = \ln \frac{|z - \overline{w}| + |z - w|}{|z - \overline{w}| - |z - w|} \tag{3.150}$$

olduğu da bilinmektedir.

$$f : U \to D, f(z) = \frac{z-i}{z+i} \tag{3.151}$$

dönüşümü U yu D birim diskine resmeder ($D = \{ z | \; |z| < 1 \}$).

Birim diskte bir yay elemanının diferansiyeli;

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \tag{3.152}$$

ve *birim diskteki H-metrik* yani *iki nokta arasındaki H-uzaklık:*

$$\rho(z,w) = \ln \frac{|1 - z\overline{w}| + |z-w|}{|1-z\overline{w}| - |z-w|} \tag{3.153}$$

olur. $T, T_1 \in PSL(2,\mathbb{R})$ için;

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, T_1(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{3.154}$$

$$AB^t = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta & c\gamma + d\delta \end{pmatrix}, \; [A,B] = Tr\left(AB^t\right) = a\alpha + b\beta + d\delta \tag{3.155}$$

dır ve $[A,B]$ bir reel iççarpımdır. Bu iççarpımdan A nın $\|A\|$ normu, $\|A\|^2 = [A,A]$ ve T nin $\|T\|$ normu, $\|T\|^2 = \|A\|^2 = [A,A] = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ şeklindedir. ρ *hiperbolik metrik (H-metrik)* olur ve

$$\rho(z,w) = \ln \frac{|z - \overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|} \tag{3.156}$$

olduğu görülür [10].

Tanım 3.2:

D bir kompleks üst yarı düzlem olsun. $\gamma:[a,b]\to D$ eğrisi için, $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ olduğunda, *hiperbolik uzaklık:*

$$\|\gamma\|=\left|\int\frac{\gamma(t)}{y(t)}dt\right| \tag{3.157}$$

şeklinde tanımlanır. *Hiperbolik metrik (H-metrik)* ρ ile gösterilmek üzere:

$$\rho: D^2\to\mathbb{R}, \rho(z,w)=Inf\,\|\gamma\| \tag{3.158}$$

gibi tanımlanır [11].

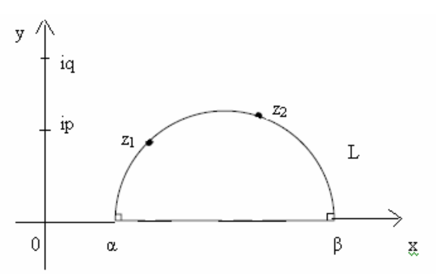
Teorem 3.30:

Her $g\in PSL(2,\mathbb{R})$, bir hiperbolik izometridir.

Teorem 3.31:

$z_1,z_2\in D$ için, $p=g(z_1), q=g(z_2), g(z)=\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ olduğunda,

$$\rho(z_1,z_2)=\rho(ip,iq)=\ln\frac{q}{p}. \tag{3.159}$$



Şekil 3.42: Teorem 3.31’in gösterimi

Sonuç 3.1:

Bir $\left[z_1, z_2\right]$ parçasının bir *hiperbolik orta noktası* (H-orta nokta), *Euclidean orta nokta* ile aynı değildir.

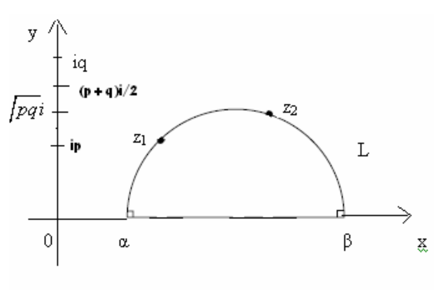
İspat:

Bir $\left[ip, iq\right]$ parçasının Euclidean orta noktası, $\dfrac{p+q}{2}i$ noktasıdır. Fakat $\left[ip, iq\right]$ parçasının H-orta noktası, $\sqrt{pq}i$ nokasıdır. Çünkü $\ln\dfrac{q}{\sqrt{pq}} = \ln\dfrac{\sqrt{pq}}{p}$ dir. Örneğin p ve q, sırasıyla 1 ve 4 olarak alınsın. O halde, Euclidean orta 2.5 iken, hiperbolik orta (H-orta) 2 dir. Böylece yeni bir tanım verilebilir:

Tanım 3.3:

p ve q sayılarının aritmetik ortalaması, p ve q nun *Euclidean ortalaması* olarak isimlendirilir. p ve q sayılarının geometrik ortalaması, p ve q nun *hiperbolik ortalaması* (H-ortalama) olarak isimlendirilir.

Geometrik ortalama, aritmetik ortalamadan daha küçük olduğundan; Euclidean orta nokta, hiperbolik orta noktanın daha üzerindedir.



Şekil 3.43: Euclidean ve hiperbolik orta

Tanım 3.4:

r yarıçaplı ve $z_0 \in U$ merkezli

$$\left\{ z \in U \middle| \rho(z, z_0) < r \right\} \tag{3.160}$$

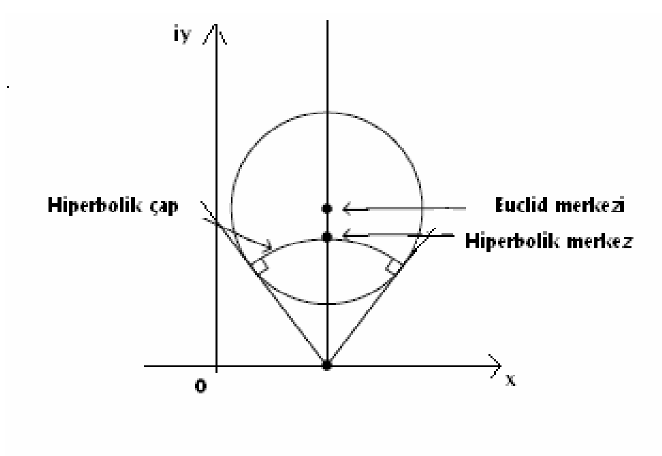
kümesine, z_0 merkezli r yarıçaplı *hiperbolik disk* denir [10].

Teorem 3.32:

Her H-disk bir Euclid diskidir.

z_0 merkezli ve r yarıçaplı H-diskin, Euclid merkezi $w_0 = x_1 + iy_1$ ve Euclid yarıçapı r_1 olmak üzere;

$$x_1 = x_0\,,\; y_1 = y_0 \cosh r\,,\; r_1 = y_0 \sinh r\,. \tag{3.161}$$



Şekil 3.44: Euclid merkezi ve H-merkez

Şekil 3.44'te de görüldüğü gibi bu diskin Euclid merkezi, H-merkezden daima daha yukarıdadır. Çünkü $\cosh r > 1$ dir [10].

Teorem 3.33:

Birim diskte $\sqrt{pqi}$ $\left(D=\{z \mid |z|<1\}\right), z\in D$ olmak üzere,

$$\{z \mid \rho(0,z)=r\} \tag{3.162}$$

hiperbolik diski yine orijin merkezli bir Euclid diskidir [10]. Bu diskin *Euclid yarıçapı*:

$$R=\tanh\frac{1}{2}r\,. \tag{3.163}$$

Sonuç 3.2:

$$\{z \mid |z|<R, R\in\mathbb{R}\} \tag{3.164}$$

Euclid diskinin hiperbolik yarıçapı [10]:

$$r=\ln\frac{1+R}{1-R}\,. \tag{3.165}$$

Teorem 3.34:

Birim diskte (D), z_0 merkezli ve r yarıçaplı bir hiperbolik disk, kz_0 merkezli ve R yarıçaplı bir Euclid diskidir [10].

$$k\in\mathbb{R}\text{ve k sabit}, A=1+\sinh\frac{1}{2}r-|z_0|^2\sinh^2\frac{1}{2}r, k=\frac{1}{A}, R=\frac{\left(1-|z_0|^2\right)\sinh r}{2\left[1+\left(1-|z_0|^2\right)\sinh^2\frac{1}{2}r\right]}\,. \tag{3.166}$$

Euclid merkezi:

$$w_0 = \left(\frac{x_0}{1+\left(1-|z_0|^2\right)\sinh^2 \frac{1}{2} r}, \frac{y_0}{1+\left(1-|z_0|^2\right)\sinh^2 \frac{1}{2} r} \right) \tag{3.167}$$

noktası, *Euclid yarıçapı*:

$$R = \frac{\left(1-|z_0|^2\right)\sinh r}{2\left[1+\left(1-|z_0|^2\right)\sinh^2 \frac{1}{2} r\right]}. \tag{3.168}$$

3.1.2.10 Riemann Geometrisi

3.1.2.10.1 Tanıtım

Tarihsel olarak**,** Riemann geometrisi $\mathbb{R}^3$ teki yüzeylerin diferansiyel geometrisinin doğal bir gelişimidir. Verilen bir yüzey $S \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere, S ye teğet olan vektörlerin uzunluklarının ölçümünün doğal bir yolu vardır; yani: S ye bir p noktasında teğet olan iki vektörün iç çarpımı $\langle v, w \rangle$, basitçe $\mathbb{R}^3$ teki bu vektörlerin iç çarpımıdır. Bu tanımla, bir eğrinin uzunluğunu hesaplamanın yolu, onun hız vektörünün integralini almaktır. $\langle , \rangle$ nın tanımı, sadece S deki eğrilerin uzunluklarının ölçülmesine izin vermekle kalmaz, iki eğrinin arasındaki açının ölçülmesi kadar aynı zamanda S deki bölgelerin alanlarının ölçülmesine de izin verir ve diğer tüm "metrik" fikirleri geometride kullanılır. Daha genel olarak, bu kavramlar "geodezik" olarak isimlendirilen, S üzerinde belli özel eğrilerin tanımlanmasına yol açar. Geodezikler aşağıdaki özelliklere sahiptir; yeterli kapalı bir geodezik üzerinde herhangi iki p ve q noktaları verilsin. Böyle bir eğrinin uzunluğu, p yi q ya birleştiren herhangi diğer bir eğrinin uzunluğundan ya küçüktür ya da eşittir. Böyle eğriler pek çok durumda sanki S nin "düz doğruları" gibi hareket eder ve geometrinin gelişmesinde önemli bir rol oynar [12].

İleri sürülen bir $p \in S$ noktasındaki iç çarpım tanımı, ürünler, bir ikinci dereceden I_p şekli eşit olarak p deki S nin temel şekli olarak isimlendirilir, T_pS teğet düzleminde $I_p(v) = \langle v, v \rangle, v \in T_pS$ ile tanımlanır [12].

Bu gelişmenin kritik noktası, Gauss'un 1827'de yayımlanan ünlü çalışmasında yaptığı bir gözlemdir. Bu çalışmada Gauss, bir $p \in S$ noktasında S nin p deki teğet düzleminden sapma miktarını ölçer, yüzeyler için eğriliğin bir gösterimini tanımlamıştır. Modern gösterimde, Gauss'un tanımı aşağıdaki terimlerle ifade edilir. $g : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$; S den $\mathbb{R}^3$ ün S^2 birim alanı içine bir eşleme ile her $p \in S$ için T_pS'ye dik olan bir $N(p) \in S^2$ birim vektörüne birleşimi tanımlansın. Eğer S yöneltilebilirse, o halde g iyi tanımlanmış olur ve S üzerinde diferansiyellenebilir. Gauss'un zamanı boyunca, yüzeylerin yöneltilmesinin gösterimi iyi anlaşılmamıştır (aslında, bugün Möbius takımı olarak iyi bilinen Möbius'un ünlü örneğinde sunulan, 1865'e kadar iyi anlaşılamamıştır) ve bu yüzden g, S nin "parçaları" üzerinde tanımlanır. Herhangi bir durumda, g diferansiyellenebilir ve onun diferansiyelinin $dg_p : T_pS \to T_{g(p)}S^2$ olarak konuşulması olasıdır. N(p), T_pS'ye dik olduğunda, T_pS ve $T_{g(p)}S^2$ iki vektör uzayı tespit edilebilir ve böylece dg_p lineer eşinin determinantının konuşulması mantıklı olur. Gauss eğrisini $K(p) = \det(dg_p)$ gibi tanımlamıştır ve 1760'ta Euler tarafından ilk olarak getirilen büyük eğriliğin ürünüyle anlaşıldığı gösterilmiştir [12].

Belki, p deki S ye dik olan düzlemlerle S nin kesişimi ve $k_1 = \max k_n$ ve $k_2 = \min k_n$ alınmasıyla elde edilen eğrilerin k_n eğriliği göz önünde tutulduğunda, bir S yüzeyinin k_1 ve k_2 büyük eğriliklerini Euler tanımlamıştır. Gauss zamanında bir fonksiyonun veya diğer k_1 ve k_2 nin eğriliğinin yeterli bir tanımının yapıldığı açık değildir. Gauss, S nin eğriliğine göre, $K = k_1k_2$ seçimini doğrulayarak yaklaşık K yı elde etmiş olması gerçeğini dikkate alır [12].

Gauss'un ima ettiği gerçekler aşağıda verilmiştir. İlk durumda, eğrilik üstteki gibi tanımlandığında sadece S deki ölçümlerin çeşidine bağlıdır. Bu sade ilk temel I şekline bağlıdır. İkinci olarak, geodezikler tarafından şekillendirilmiş olan bir üçgenin iç açılarının toplamının 180° den farklı oluşu deyimiyle, sadece üçgenin eğriliği ve alanına bağlıdır [12].

Tüm bunlar Gauss'un buluşunun çok derin anlamlarını açıkça fark ettiğini gösterir. Aslında Gauss'un zamanı boyunca temel problemlerin biri, Euclid'in 5. Postulatı'nın geometrinin diğer postulatlarından bağımsız olup olmadığına karar vermektir. ("Bir doğru üzerinde olmayan düz bir doğru ve bir nokta verilsin. O halde verilen doğruda kesişmeyen bir noktadan geçen düz bir doğru vardır.") Şimdiki uygulamalarının olmamasına rağmen bu soru felsefi anlamların asıl önemine yol gösterir. Daha önceleri Euclid'in 5. Postulatı, bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° ye eşit olduğu gerçeğine eşit olarak kurulmuştur. Gauss'un keşfi, diğer fikirler arasında keyfi bir çeşitte (uzayı çevrelemesi dikkate alınmaksızın) verilen ikinci dereceden bir temel şekle bağlı olan olası bir geometrinin varsayılmasını içerir. Böyle bir geometride, geodeziklere göre düz doğruları tanımlayan bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı eğriliğe bağlıdır ve Gauss'a göre aslında onun 180° den farklı oluşu, üçgenin üzerindeki eğriliğin integraline eşit olmasını doğrulamaktadır. Gauss bununla birlikte onun fikirlerinin gelişimine uygun gerekli matematiksel araçlara sahip değildi. (Gauss aslında diferansiyellenebilir bir manifoldun fikrine ihtiyaç duymuştur.) ve bu konuyu açıkça tartışmamayı tercih etmiştir. Bağımsız olarak bir Euclidean olmayan geometrinin meydana çıkması gerçeği Lobatschewsky (1829) ve Bolyai (1831)'ye aittir [12].

Eucleides postulatı hakkında üç hipotez ileri sürülebilir. Bir düzlemde bir d doğrusu ile buna ait olmayan bir A noktası verildiğinde;

1. A noktasından d yi kesmemek üzere bir ve yalnız bir doğru geçirilebilir (Eucleides).

2. A noktasından d yi kesmemek üzere sonsuz doğru geçirilebilir (Lobatschewsky).

3. A noktasından d yi kesmemek üzere hiçbir doğru geçirilemez [13].

Doğrunun sınırsız olarak uzatılabileceği kabul edildiğinde, bu sonuncu hipotezin bir kenara bırakılması gerekir. Başka bir deyişle, üçüncü hipotez kabul edilirse, doğrunun da sonlu bir uzunluğu olduğunu kabul etmek gerekir. İşte Riemann da bu hipotezi ileri sürmüştür [13].

Riemann geometrisinde; paraleller kavramı yoktur ve doğrunun sonlu bir uzunluğu vardır, yani doğru bir nevi kapalı bir eğridir. Bir üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı iki dik açıdan daima büyüktür. Bu geometriyi geliştirdiğimizde çelişmeler yaşanmaz. Çünkü yazılış tarzlarında yapılan bir değişimle bu geometri Eucleides geometrisine dönüştürülebilir [13].

Verilen bir O noktasından geçen doğru ve düzlemler topluluğunu ele alalım ve aşağıdaki "sözlük" yardımıyla bu topluluğu bir düzlem şeklinde yorumlayalım:

O merkezli demet	İdeal düzlem
O dan geçen doğru	Nokta
O dan geçen düzlem	Doğru
İki doğru arasındaki açı	İki nokta arasındaki uzaklık
İki yüzlü açı	İki doğru arasındaki açı
Üç yüzlü	Üçgen

Bu ideal düzlemde dik olan ve yine O dan geçen düzlemlerin ilk düzleme O da dik olan ortak bir doğruları vardır. Bu özellik gösterir ki, Riemann geometrisinde bir doğrunun dikmeleri aynı bir noktadan geçerler [6, 13].

Gauss'un fikirleri, hala bir manifoldun yeterli bir tanımının yapılamamış olmasına rağmen, tekrar 1854'te Riemann tarafından kabul edilmiştir. Riemann sezgisel bir dil kullanarak ve ispatsız olarak bugün "n boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold" olarak adlandırılan bir tanıtımı yapmıştır. Ayrıca ikinci dereceden temel bir manifold şeklinin her noktasını birleştirmiştir ve sonra bu durum Gaussian eğrilik fikri olarak genelleştirilmiştir. Bundan başka, ispatından sadece on yıl sonra ilk temel ikinci dereceden şekil ve eğrilik arasındaki pek çok bağıntıyı belirtmiştir. Euclidean olmayan geometrilerin gelişimindeki temel sorunun, yeni fizik ve geometri arasındaki ilişkinin dolaylı olarak kavranmasına Riemann'ın neden olduğu onun çalışmasından açıkça anlaşılır [12].

Riemann yüzeyleri olarak adlandırılan Riemann'ın cüretli kavramlarının diğer tam anlamını H. Weyl'in 1913'teki çalışmasında sadece açıkça ortaya koyduğu, Riemann'ın çalışmasının şekillenmesi için gerekli diferansiyellenebilir manifold kavramını ileri sürmek gariptir. Bu konu bu çalışmada ele alınmayacaktır [12].

Yeterli araçlara ihtiyaç duyulmasından dolayı, Riemann geometri aslında çok yavaş gelişmiştir. Teşvikin bir önemli dış kaynağı, bu fikrin 1916'da rölativite teorisine uygulanması olmuştur. Bir başka temel adım Levi-Civita'nın paralellik tanıtımıdır. Riemann geometrisinin tarihinin yazımı burada tamamlanmamıştır, fakat basitçe onun orijini izlenmiş ve ne anlama geldiğinden hareket edilmiştir [12].

Bu geometrinin hareket noktası, her bir noktasında teğet vektörlerinin uzunluk ölçümünün bir yöntemine götüren diferansiyellenebilir bir manifoldun oluşudur. Bu ölçüm noktadan noktaya değişebile bir diferansiyellenebilmedir [12].

Diğer kısımda diferansiyellenebilir manifoldlar, sayılabilirlik esasıyla Hausdorff uzaylarının olduğunun varsayılmasıyla dikkate alınmıştır. "Diferansiyellenebilir", "C^∞ sınıfı" sembolü ile $M^n = M$ olduğunda diferansiyellenebilir bir manifold; n ile M nin boyutu gösterilmiştir [12].

3.1.2.10.2 Riemann Metrikleri

Tanım 3.5: Bir diferansiyellenebilir M manifoldu üzerinde "Riemann metriği" (veya Riemann yapısı), aşağıdaki biçimde diferansiyellenebilmesi değişen T_pM teğet uzayı üzerindeki bir iç çarpım $\langle , \rangle$ (bu iç çarpım bir simetrik, çift doğrusal, pozitif-tanımlı şekildir) M nin her bir p noktasına ortak olan bir benzerliktir [12].

Eğer $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, $x\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = q \in x(U)$ ve $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q\left(0, ..., 1, ..., 0\right)$ ile p etrafındaki bir koordinat sistemi ise; o halde

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}\left(x_1,...,x_n\right), \tag{3.169}$$

U üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur [12].

Bu tanımın koordinat sisteminin seçimine bağlı olmadığı açıktır. Riemann metriğinin diferansiyellenebilirliğini ifade etmenin diğer bir yolu, M nin bir V komşuluğunda diferansiyellenebilen X ve Y vektör alanlarının herhangi bir çifti için $\langle X, Y \rangle$ fonksiyonu V üzerinde diferansiyellenebilir demektir. Bu tanım diğer tanıma eşdeğerdir [12].

Genel olarak hiçbir karışıklık olasılığı olmadığında $\langle , \rangle_p$ fonksiyonunda p sembolü silinir. $g_{ij}(= g_{ji})$ fonksiyonu, $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$, koordinat sisteminde Riemann metriğinin (veya "metriğin g_{ij} si"), "yerel temsilcisi" olarak isimlendirilir. Verilen bir Riemann metriği ile diferansiyellenebilen bir manifold "Riemann manifoldu" olarak isimlendirilebilir [12].

Matematiksel yapının herhangi bir çeşidinin tanımından sonra, iki objenin aynı olması durumundaki bir gösterimi tanıtılsın [12].

Tanım 3.6:

M ve N, Riemann manifoldları olsun. Bir $f : M \to N$ difeomorfizmi (bu f, diferansiyellenebilir bir tersiyle diferansiyellenebilir bir bire-bir içine fonksiyondur), eğer:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(u) \rangle_{f(p)}, \forall p \in M, u, v \in T_pM \text{ için} \tag{3.170}$$

bir "izometri" olarak adlandırılır [12].

Tanım 3.7:

M ve N, Riemann manifoldları olsun. Bir $f : M \to N$ bir diferansiyellenebilir eşlemesi, eğer p nin bir $U \subset M$ komşuluğu $f : U \to f(U)$ ya bir difeomorfizm ((3.170)'ten) oluyorsa, $p \in M$ deki bir "yerel izometri" olur [12].

Genel olarak bir M manifoldu, M deki her p için M deki p nin bir U komşuluğu ve bir $f : U \to f(U) \subset N$ yerel manifoldu varsa, bir N Riemann manifolduna "yerel izometriktir" denir [12].

Örnek 3.1:

$M = \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ile $e_i(0,...,1,...,0)$ özdeşleştirilir. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ile bir metrik verilir. $\mathbb{R}^n$, "n boyutlu Euclidean uzay" olarak isimlendirilir ve bu uzayın Riemann geometrisi, Euclidean geometri metriğidir [12].

Örnek 3.2 (Çarpım Metriği):

M_1 ve M_2, Riemann manifoldları olsun ve çarpım yapısıyla $M_1 \times M_2$ kartezyen çarpımı göz önünde tutulsun. $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ ve $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ doğal izdüşümler olsun. $M_1 \times M_2$ üzerinde bir Riemann metriği aşağıdaki gibi ortaya konur:

$\forall (p,q) \in M_1 \times M_2, u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ için;

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1.u, d\pi_1.v \rangle_p + \langle d\pi_2.u, d\pi_2.v \rangle_q . \tag{3.171}$$

Çarpım üzerindeki bir Riemann metriğini doğrulamak kolaydır. Örneğin; $S^1 \times ... \times S^1 = T^n$ kabartısı $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ çemberi üzerindeki $\mathbb{R}^2$ den Riemann metriğini oluşturan seçimiyle ve çarpım metriğinin alınmasıyla elde edilen bir Riemann yapısıdır. Bu metrikle T^n kabartısına "düz kabartı" denir [12].

Bir Riemann metriğinde eğrilerin uzunluklarının nasıl hesaplandığını gösterelim:

Tanım 3.8:

Bir $I \subset R$ açık aralığından diferansiyellenebilir bir M manifoldu içine bir $c: I \to M$ diferansiyellenebilir eşlemesi, parametrize edilmiş bir"eğri" olarak isimlendirilir [12].

Bir parametrize edilmiş eğrinin "köşeler" kadar kendisiyle kesişimi olduğunun kabul edilebildiği ileri sürülür [12].

Tanım 3.9:

Bir V vektör alanı boyunca bir eğri $c: I \to M$ olmak üzere, $V(t) \in T_{c(t)}M$ teğet vektörüne her $t \in I$ ile bağlanan, bir diferansiyellenebilir eşlemedir. V'nin diferansiyellenebilir olması; M üzerindeki herhangi bir diferansiyellenebilir f fonksiyonu için, $t \to V(t)f$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur, demektir [12].

$dc\left(\dfrac{d}{dt}\right)$ vektör alanı $\dfrac{dc}{dt}$ ile gösterilir ve "hız alanı" (veya "teğet vektör alanı") olarak adlandırılır. c boyunca bir vektör alanının bir M açık kümesinin üzerindeki bir vektör alanına ister istemez genişletilemediği ileri sürülür [12].

Bir c eğrisini kapalı bir $[a,b] \subset I$ alanına sınırlama bir "parça" olarak isimlendirilir. Eğer M bir Riemann manifoldu ise, *bir parçanın uzunluğu*:

$$l_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt \ . \qquad (3.172)$$

ile tanımlanır [12].

3.1.2.10.3 Afin Bağıntılar ve Riemann Bağıntıları

3.1.2.10.3.1 Tanıtım

Kovaryant türevin gösterimi çok önemli sonuçlara sahiptir. Geodezik ve eğrinin temel iki görüşü, Riemann manifoldlarından daha genel durumları tanımlamış olur. Bunun sonucuna göre, birinin belirli özelliklerle vektör alanlarının türevinin bir gösterimini tanımlayabilmesi yeterlidir. Riemann geometriden daha genel olan (diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde) çok farklı "geometrik yapıların" oluşturulması teşvik edilmiştir. Aynı şekilde, Euclidean geometri metriği afin geometrinin, daha genel olarak projektif geometrinin özel bir durumudur. Yani; Riemann geometri, daha genel geometrik yapıların özel bir durumudur [12].

Afin bağıntılar, M üzerinde eşsiz olarak belirli bir afin bağıntı tanımlayan bir M manifoldunun üzeindeki bir Riemann metriğinin seçimini sağlar [12].

3.1.2.10.3.2 Afin Bağıntılar

M üzerindeki C^∞ sınıfının tüm vektör alanlarının kümesi X(M) ve M üzerinde tanımlı C^∞ sınıfının reel değerli fonksiyonlarının halkası D(M) ile gösterilsin [12].

Tanım 3.10:

Diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerindeki $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ bir ∇ afin bağıntısı, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f, g \in D(M)$ aşağıdaki özellikleri sağlayan $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ ile gösterilen bir eşlemedir:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$. (3.173)

ii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$. (3.174)

iii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$. (3.175)

Bu tanım Riemann yapısı kadar açık değildir. Yine de aşağıdaki önerme bu durumu az da olsa açıklar:

Önerme 3.1:

M, bir ∇ afin bağıntısı ile diferansiyellenebilen bir manifold olsun. c boyunca V nin kovaryant türevi olarak isimlendirilen, $c : I \rightarrow M$ ye diferansiyellenebilen eğri boyunca bir V vektör alanını c boyunca diğer bir $\frac{DV}{dt}$ vektör alanına birleştiren eşsiz bir benzerlik vardır, öyle ki:

a) $\frac{D}{dt}(v+w) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fv) = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}$; w, c ve f boyunca bir vektör alanı olduğunda I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur [12].

c) Eğer V, bir $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanıyla ortaya çıkıyorsa (örneğin, $V(t) = Y(c(t))$ ise), o halde $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$ dir [12].

Açıklama 3.1:

$\nabla_X Y(p)$, $X(p)$nin değeri ve p deki X e teğet olan bir eğri boyunca Y değerine bağlı olduğunda (c) nin en son doğrusu anlam ifade eder. Aslında Tanım 3.10 (iii), gerçekten bir yerel kavram olan afin bağıntı kavramını göstermeye izin verir. p etrafındaki bir koordinat sistemi $\left(x_1,...,x_n\right)$ olarak seçilip $\mathrm{X}_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olduğunda,

$$\mathrm{X} = \sum_i x_i X_i, \qquad Y = \sum_j y_j X_j \tag{3.176}$$

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i}\left(\sum_j y_j X_j\right) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_i) X_j \tag{3.177}$$

$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ yazılarak Γ_{ij}^k nin diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu sonucu çıkarılır ve buradan $\nabla_X Y(p)$ nin $x_i(p), y_k(p)$ye bağlı olduğu ve y_k nın $X(y_k)(p)$ olarak X ile türevlenebildiğini ispatlayan ifade:

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)\right) X_k . \tag{3.178}$$

Açıklama 3.2:

Yukarıdaki önerme, M üzerindeki bir afin bağıntının seçiminin, eğriler boyunca vektör alanların bir türevi olduğu gerçeğine (örneğin, (a) ve (b) nin sağlanması) sebep olduğunu gösterir. Bağıntı kavramı eğriler boyunca bir türeve dönüştürülen vektörlerin bir çeşidini sağlar. Özel olarak M deki bir eğrinin ivmesinden konuşmak olasıdır [12].

Önerme 3.1'in İspatı:

Başlangıçta bir benzerliği sağlayan (a), (b) ve (c) olduğu varsayılsın. $c(I)\cap x(U)\neq\phi$ ile $x:U\subset R^n\to M$ bir koordinat sistemi olsun ve $\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)$ ise $0=\dfrac{dv^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k v^j\dfrac{dx_i}{dt}\; c(t), t\in I$ nın yerel bir ifadesi ve $x_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olsun. O halde V alanı $v^j=v^j(t)$ ve $x_j=x_j\left(c(t)\right)$ olduğundan $V=\sum_j v^j X_j,\; j=1,...,n$ için yerel olarak ifade edilebilir [12].

a) ve b) ile

$$\frac{DV}{dt}=\sum_j\frac{dv^j}{dt}x_j+\sum_j v^j\frac{DX_j}{dt} \tag{3.179}$$

c) ve Tanım 3.10 (i) ile

$$\frac{DX_j}{dt}=\nabla_{dc/dt}X_j=\nabla_{\left(\Sigma\frac{dx_i}{dt}X_i\right)}X_j$$

$$=\sum\frac{dx_i}{dt}\nabla x_i X_j,\quad i,j=1,...,n\,. \tag{3.180}$$

Buradan

$$\frac{DV}{dt}=\sum_j\frac{dv^j}{dt}X_j+\sum_{i,j}\frac{dx_i}{dt}v^j\nabla_{X_i}X_j \tag{3.181}$$

olur. (3.181) ifadesi, eğer Önerme 3.1'in koşulları sağlandığında bir benzerlik ise, o halde böyle bir benzerlik eşsizdir [12].

Varlığını göstermek için (1) ile x(U) da $\dfrac{DV}{dt}$ tanımlanır. (1) in istenen özelliklere sahip olduğunu doğrulamak kolaydır. Eğer y(W), $y(W)\cap x(U)\neq\phi$ ile diğer bir koordinat komşuluğu ise, (1) ile y(W) de $\frac{DV}{dt}$ tanımlanır. $y(W) \cap x(U)$ daki bu tanımlar x(U) daki $\frac{DV}{dt}$ nin eşsizliği ile kabul edilir. Bu tanım ile M nin tümünün üzerinde genişletilebildiği anlaşılır ve burada ispat sonuçlanır [12].

Günümüzdeki paralellik kuramı doğal bir şekilde anlaşılır [12].

Tanım 3.11:

M bir ∇ afin bağıntısıyla diferansiyellenebilen bir manifold olsun. Bir c: $I \to M$ ye eğrisi boyunca bir V vektör alanı, tüm $t \in I$ için $\frac{DV}{dt} = 0$ olduğunda "paralel" olarak isimlendirilir [12].

Önerme 3.2:

M bir ∇ afin bağıntısıyla diferansiyellenebilen bir manifold olsun. c: $I \to M$, M üzerinde diferansiyellenebilen bir eğri ve V_0 ise $c(t_0)$ da $(t_0) \in I$ M ye teğet olan bir vektör olsun. (Örneğin $V_0 \in t_{c(t_0)}M$). O halde c boyunca bir V eşsiz paralel vektör alanı vardır, öyle ki $V(t_0) = V_0$, $(V(t)$, c boyunca $V(t_0)$ a paralel dönüşüm olarak isimlendirilir) [12].

İspat:

c(I) daki durum için teoremin ispatlanmış olduğu varsayımı, bir yerel koordinat komşuluğunu içerir. $c([t_0, t_1]) \subset M$ parçası, herhangi bir $t_1 \in I$ için yoğunlukla, hipotezlerle tanımlanabilen her bir V deki koordinat komşuluklarının sınırlı bir sayısıyla kapsanabilir. Arakesitler boş olmadığında eşsizlik için tanımlar çakışır. Böylece $[t_0, t_1]$ in tümü boyunca V nin tanımına izin verilir [12].

Sadece bu yüzden c(I) olduğunda teoremi ispatlamak bir $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ koordinat sisteminin bir x(U) koordinat komşuluğunu içerir.

$x^{-1}\left(c\left(t\right)\right)=\left(x_1\left(t\right),...,x_n\left(t\right)\right)$ ifadesi c(t) içn genel bir ifade ve $X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c\left(t_0\right)\right)$ olduğundan $V_0=\sum_j v_0^j X_j$ olsun [12].

$V\left(t_0\right)=V_0$ ile c boyunca paralel olan x(U) daki bir V vektör alanının olduğu varsayılır. O halde, $V=\sum v^j X_j$,

$$0=\frac{DV}{dt}=\sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j+\sum_{i,j}\frac{dx_i}{dt}v^j\nabla x_i X_j \tag{3.182}$$

sağlar.

$\nabla x_i X_j=\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ konulup ve ilk toplamda jile k yer değiştirildiğinde

$$\frac{DV}{dt}=\sum_k\left\{\frac{dv^k}{dt}+\sum_{i,j}v^j\frac{dx_i}{dt}\Gamma_{ij}^k\right\}X_k=0 \tag{3.183}$$

elde edilir [12].

$v^k\left(t\right)$ deki n diferansiyel denklem sistemi:

$$0=\frac{dv^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k v^j\frac{dx_i}{dt}\ ,\ \text{k=1,…,n} \tag{3.184}$$

Başlangıçtaki

$$\left\langle\frac{DV}{dt},W\right\rangle+\left\langle V,\frac{DW}{dt}\right\rangle=\sum_i\left\{\frac{dv^i}{dt}w^i+\frac{dw^i}{dt}v^i\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\sum_i v^i w^i\right\}=\frac{d}{dt}\left\langle V,W\right\rangle,$$

$$v^k\left(t_0\right)=v_0^k \tag{3.185}$$

durumlarını sağlayan eşsiz bir çözüme sahiptir. O halde, eğer V varsa, eşsizdir. Dahası sistem lineer olduğunda herhangi bir çözüm istenen özelliklerle V nin varlığı (ve eşsizliği) ispatlandığında tüm $t \in I$ için tanımlanır [12].

3.1.2.10.3.3 Riemann Bağıntılar

Tanım 3.12:

M, ∇ bir afin bağıntı ve $\langle , \rangle$ bir Riemann metriği ile diferansiyellenebilen bir monifold olsun. Bir bağıntının herhangi bir düzgün c eğrisi ve c boyunca herhangi p ve p' paralel vektör alanları çifti iken $\langle , \rangle$ metriği ile uyumlu olduğu söylenir. $\langle p, p' \rangle =$ sabittir [12].

Tanım 3.13:

"∇ eğer $\langle , \rangle$ ile uyumluysa, o halde genel "çarpım kuralı" ile iç çarpımına ayrılabilir" olduğunu gösteren aşağıdaki önerme ile doğrulanır [12].

Önerme 3.3:

M bir Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki bir ∇ bağıntısı, $c : I \to M$ diferansiyellenebilen eğrisi boyunca sadece ve sadece herhangi V ve W vektör alanları için bir vektörle uyumludur [12].

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \ t \in I \text{ için} \tag{3.186}$$

elde edilir [12].

İspat:

Denklem (3.186) nın ∇ nın $\langle , \rangle$ ile uyumlu olduğunu gösterdiği açıktır. Bu yüzden tersi ispatlansın. $T_{x(t_0)}(M), t_0 \in I$ nın $\{P_1(t_0),...,P_n(t_0)\}$ bir otonormal (yani her biri birim vektör uzunluğundaki herhangi iki vektörün dik olması durumu) temeli seçilsin. Paralel dönüşümler tarafından c boyunca $P_i(t_0), i = 1,...,n$ vektörleri genişletilebilir. Çünkü ∇, herhangi bir $t \in I$ için $T_{c(t)}(M)$ nin bir otonormal temeli olan $\{P_1(t),...,P_n(t)\}$ metriği ile uyumludur. Bu yüzden v^i ve w^i, I üzerinde diferansiyellenebilen fonksiyonlar olduğunda [12].

$$V = \sum_i v^i P_i ,$$
$$W = \sum_i w^i P_i , \quad i = 1,...,n \tag{3.187}$$

yazılabilir. Buradan;

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i ,$$
$$\frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i \tag{3.188}$$

olduğu anlaşılır. Bu yüzden;

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle \tag{3.189}$$

olur [12].

Sonuç 3.3:

Bir M Riemann manifoldu üzerindeki bir ∇ bağıntısı sadece ve sadece $X, Y, Z \in X(M)$ için;

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_x Y,Z\rangle+\langle Y,\nabla_x Z\rangle \qquad (3.190)$$

metriği ile uyumludur [12].

İspat:

∇ nın metrikle uyumlu olduğu varsayılsın. $p\in M$ ve $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$ $c(t_0)=p, t_0\in I$ ile bir diferansiyellenebilen $c: I\to M$ eğrisi olsun ve $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0}=X(p)$ ile diferansiyellensin. O halde;

$$X(p)\langle Y,Z\rangle=\frac{d}{dt}\langle Y,Z\rangle\Big|_{t=t_0}=\left\langle\nabla_{x(p)}Y,Z\right\rangle_p+\left\langle Y,\nabla_{x(p)}Z\right\rangle_p .$$

P keyfi olduğunda (3.190) anlaşılır. Tersi açıktır [12].

Tanım 3.14:

Bir M düzgün manifoldu üzerindeki bir ∇ afin bağıntısının $X,Y\in \mathrm{X}(M)$ için;

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y] \qquad (3.191)$$

olduğunda “simetrik” olduğu söylenir [12].

Açıklama 3.3:

Bir (U,x) koordinat sisteminde her $i,j=1,...,n$ için ∇ nın simetrik olduğunun ispatı, terminolojiyi doğruladığında

$$\frac{DV}{dt}=\sum_k\left\{\frac{dv^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k v^j\,\frac{dx_i}{dt}\right\}X_k\ \nabla_{X_i}X_j-\nabla_{X_j}X_i=\left[X_iX_j\right]=0 \qquad (3.191\text{-a})$$

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.191-b}$$

ile gösterilir (ileri sürülen (3.191-a) denklemi gerçekte $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ dır) [12].

Teorem 3.35(Levi-Civita):

Verilen bir M Riemann manifoldu aşağıdaki koşulları sağladığında M üzerindeki ∇ bir eşsiz afin bağıntısı vardır [12].

a) ∇ bir simetriktir

b) ∇, Riemann metriği ile uyumludur [12].

İspat:

Başlangıçta böyle bir ∇ nın var olduğu varsayılır. O halde;

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{3.192}$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{3.193}$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \tag{3.194}$$

(3.192) ve (3.193) eklenip (3.194) çıkarıldığında ∇ nın simetrik olduğunu kullanarak;

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z,\nabla_Y X\rangle \tag{3.195}$$

dır [12]. Buradan ;

$$\langle Z,\nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z]Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\} \tag{3.196}$$

olur.

Bu ifade ∇ nın $\langle , \rangle$ metriğinden eşsiz olarak tanımlanmış olduğunu gösterir. Bu yüzden, o eğer varsa eşsizdir. Varlığı ispat etmek için (3.196) ile ∇ tanımlanır. ∇ nın iyi tanımlanmış ve istenen durumları sağladığını doğrulamak kolaydır [12].

Açıklama 3.4:

Teoremle verilen bağıntıdan M üzerindeki "Levi-Civita (veya Riemann) Bağıntısı" olarak söz edilsin [12].

Bir (U,x) koordinat sistemi üzerindeki gösterimi ele alınsın. $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ ile U üzerinde tanımlanmış Γ_{ij}^k fonksiyonlarının "U üzerindeki ∇ bağıntısının katsayıları" veya bağıntı üzerindeki "Christoffel Sembolleri" olarak söylenmesi alışılagelmiştir. (3.196) dan $g_{ij} = \left\langle X_i, X_j \right\rangle$ olduğunda [12].

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} \tag{3.197}$$

olduğu anlaşılır.

(g_{km}) matrisine bir ters (g^{km}) eklendiğinde,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} . \tag{3.198}$$

(3.198) denklemi, g_{ij} (verilen metrikle) açısından Riemann bağıntısının Christoffel Sembolleri için klasik bir ifadesidir. $\mathbb{R}^n$ Euclidean uzayı için $\Gamma_{ij}^k = 0$ elde edilir. Christoffel Sembolleri açısından, kovaryant türev (3.181) den anlaşılan;

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k$$

klasik ifadesine sahiptir [12].

$\frac{DV}{dt}$, Christoffel Sembollerini içeren terimlerle Euclidean uzaydaki genel türev farklılık gösterir. Bu yüzden Euclidean uzayda kovaryant türev genel türevle çakışır [12].

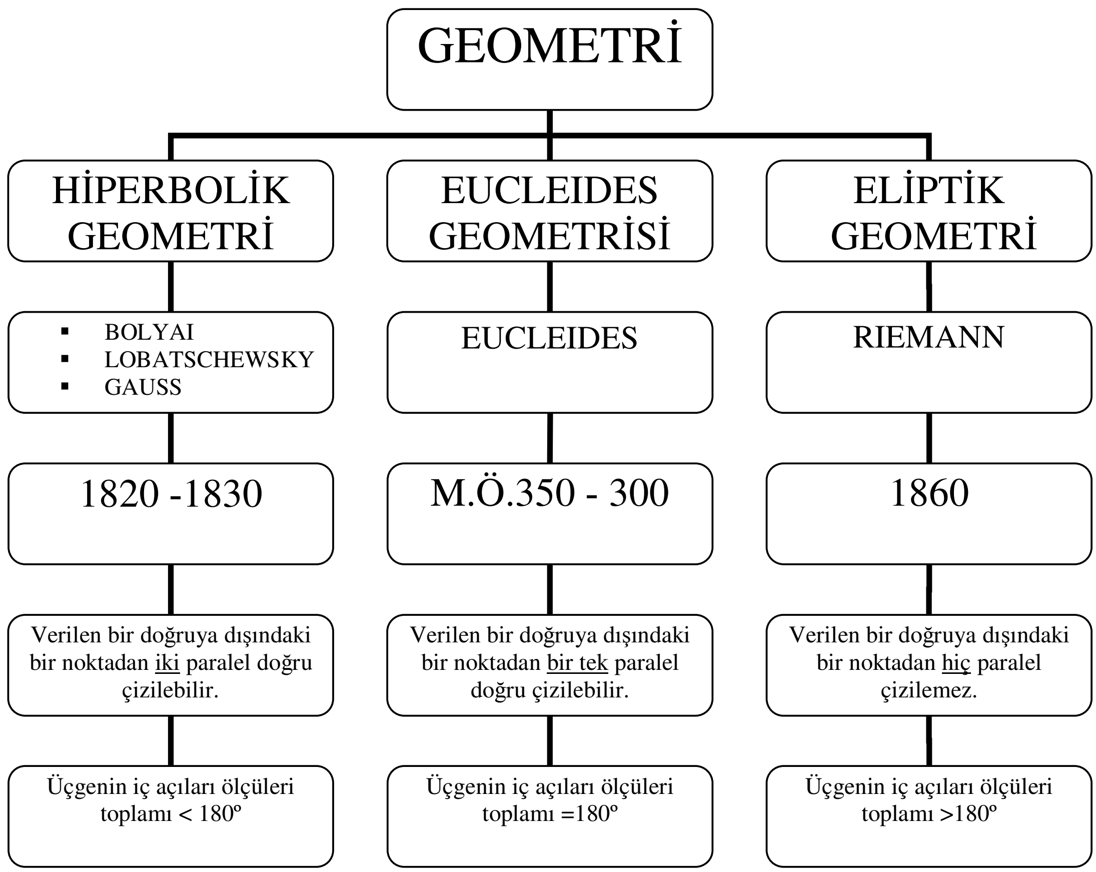
Buraya kadar; Euclidean geometri, projektif geometri, eliptik geometri, tanımlayıcı geometri, hiperbolik geometri, afin geometri ve Riemann geometrisi ele alınmıştır. Bu bağlamda zaman zaman ikili veya çoklu karşılaştırmalarda bulunulmuştur.

Genel çerçevede bu geometri çeşitleri bir sonraki bölümde tablo halinde karşılaştırılacaktır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1 Sonuç

Geometri çeşitleri; kurucuları, yaklaşık kuruluş tarihleri, temelde "5.Postulat" bakımından ayrıldıkları noktalar bakımından kısaca aşağıdaki tabloda karşılaştırılmıştır:



Şekil 4.1: Hiperbolik, Euclidean ve eliptik geometrinin karşılaştırılması

Bu tabloda; "projektif geometrinin" diğer tüm geometrileri, özel olarak da "eliptik geometrinin" Riemann geometrisini ve "afin geometrinin" Euclidean geometriyi kapsaması sebebiyle, adı geçen projektif, Riemann ve afin geometriler bu tabloda gösterilmemiştir. Özellikle hiperbolik geometri, Euclidean geometri ve eliptik geometrinin bu tabloya alınması, Eucleides'in 5. Postulatı'na getirdikleri bu üç farklı varsayım sebebiyledir.

4.2 Öneriler

Türkiye'de ilköğretim ve ortaöğretim kurumlarında program olarak okutulan geometri öğretiminin sadece Euclidean geometri sınırlarında kalışı, çağımızın bilime "şüpheci" bakış açısı karşısında çaresiz kalmaktadır. Bilgiye erişimin çok kolaylaştığı ve bilgiyi özümsemiş toplumların güçlü olduğu günümüz dünyasında; karşılaştırmalı, analiz-senteze dayalı, yaratıcı ve analitik düşünmeyi desteklemesi arzu edilen öğretim sitemi içinde, geometri öğretiminin tekdüzelikten kurtarılması gerekmektedir. Basmakalıp bilgi yüklemesi yapılmayan; sorgulayıcı, çok yönlü bakış açılarıyla olaylara yaklaşabilen bireyler yetiştirebilmenin önemi açıktır. Bu kapsamda, Euclidean olmayan geometrilerin öğrencilere tanıtıldığı ve böylece ufuklarını geniş tutmalarının sağlandığı programlar uygulamalıdır.

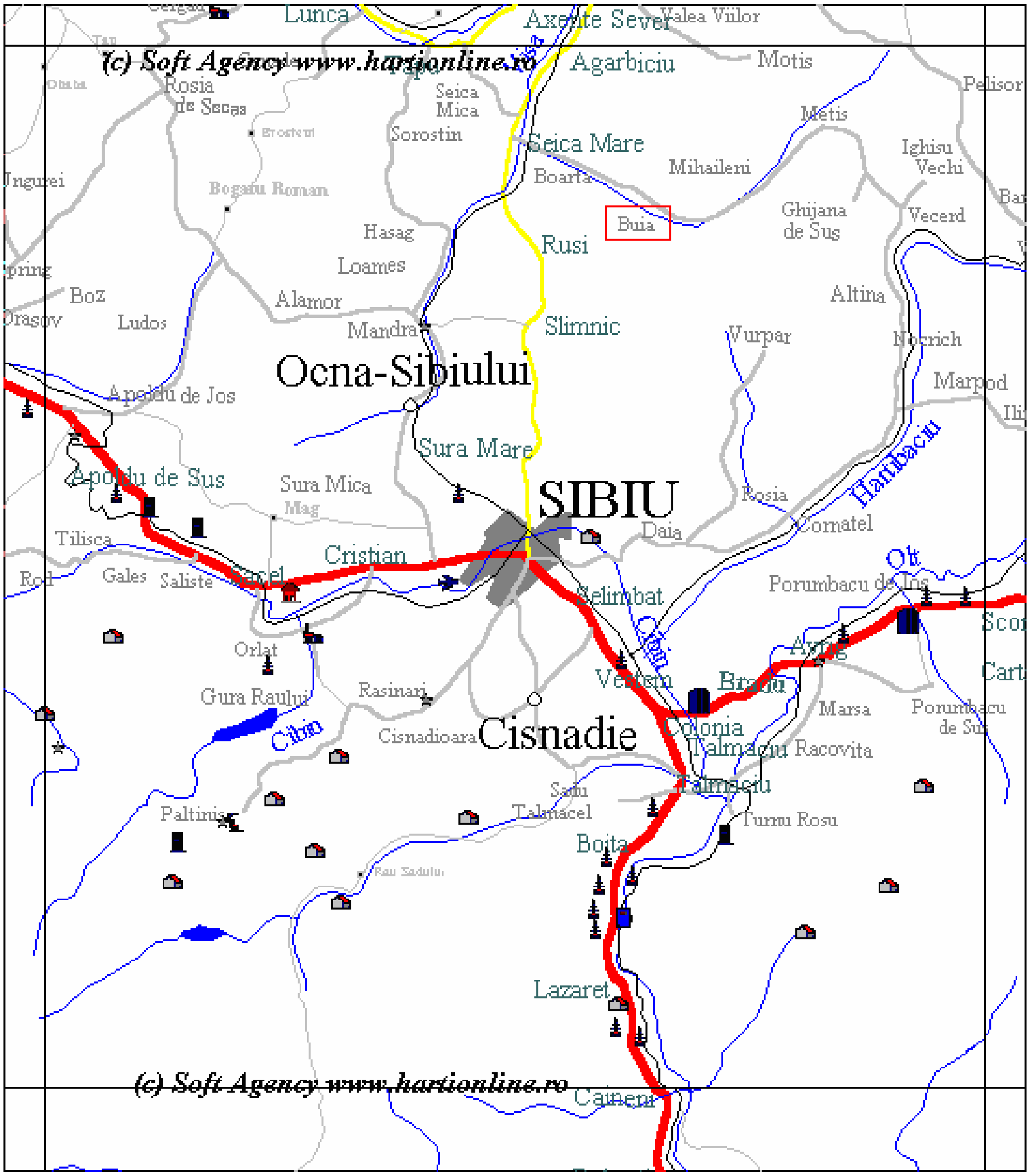
Sonuçta; matematik ve geometrinin aksiyomlarına yeni bir bakış açısı kazandıran bu çeşitliliğin yer aldığı kaynak sayısının arttırılması gerekmektedir.

5. EKLER

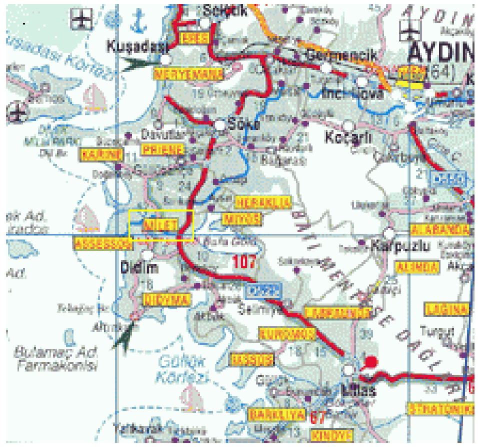
EK A “Ünlü Geometricilerin Yaşadığı Şehirlerin Haritaları”

Şekil A.1: Megara-Yunanistan (Eucleides), Miletus-Türkiye (Thales), Samos-Yunan Adaları (Phytagoras), Chios-Yunan Adaları (Hipokrates), Atina-Yunanistan (Plato) Haritası [14].

Şekil A.2: Hannover-Almanya (Riemann) Haritası [15].

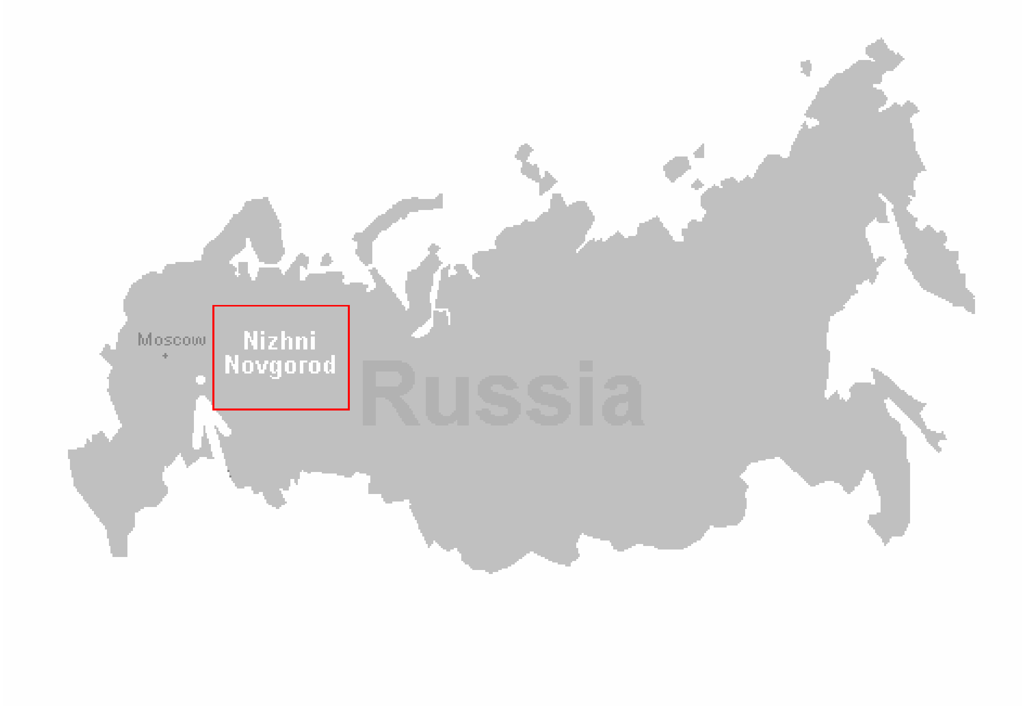


Şekil A.3: Buia-Macaristan (Bolyai) Haritası [16].



Şekil A.4: Milet-Türkiye (Thales) Haritası [17].

Şekil A.5: Cnidus-Yunan Adaları (Eudoxus) Haritası [18].



Şekil A.6: Nizhni-Nogvorod-Rusya (Lobatschewsky) Haritası [19].

Şekil A.7: Braunschweig-Almanya (Gauss) Haritası [20].

6. KAYNAKÇA

[1] Toluk, Z., Olkun, S. ve Durmuş, S., "Problem merkezli ve görsel modellerle destekli geometri öğretiminin sınıf öğretmenliği öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine etkisi", V. Ulusal fen bilimleri ve matematik eğitimi kongresi, Ankara, (2002), 1118.

[2] Kaya, R., Projektif Geometri, c.I, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları Matematik:1, Ankara, (1978).

[3] Altun, M., Matematik Öğretimi, Alfa Yayınları, Bursa, (2004), s.217-222.

[4] http://mustafayagci.com/makale/AN-GEOMETRI.pdf (16.07.2006)

[5] http://mustafayagci.com/makale/MY-OKLID.pdf (16.07.2006)

[6] http://www.tdk.org.tr/tdksozluk/sozbul.asp?kelime=nokta (07.2006)

[7] http://www.tdk.org.tr/tdksozluk/sozbul.asp?kelime=boyut (07.2006)

[8] AKSOY, Y., *Dünya Matematikçileri,* Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi Matbaası, İstanbul, (2000).

[9] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean Geometry, Sixth Edition, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., (1998), p.16-26, 48-65, 95-106, 157-174, 179-197, 242-243, 252, 258-264.

[10] Özdemir, H.B. , Mutlu, M, Hiperbolik Disk ve Hiperbolik Uzaklık Üzerine, 1.Sipil Fen Bilimleri Kongresi Bildiriler Kitabı, 333-343, 4-5 Eylül 1995, Manisa.

[11] Özdemir, H.B. , Hyperbolic Mean and Middle, Balıkesir Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi, 1, 100-104, 1995.

[12] Carmo, M., Riemannian Geometry, Boston, (1993), p.35-56.

[13] Godeaux, B., Çeşitli Geometriler, Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı 17, İstanbul, (1965), s.110-111.

[14] http://homepage.mac.com/cparada/GML/MapGreece.html (06.2006)

[15] http://bbsnews.net/bbsn_photos/Maps-and-Charts/germany_sm05?full=1 (06.2006)

[16] http://www.hartionline.ro/ro/harta/f5.html (06.2006)

[17] http://www.turkish-media.com/y_h/c1.htm (06.2006)

[18] http://members.datafast.net.au/sggram/f754.htm#Map5 (06.2006)

[19] http://www.unn.runnet.ru/nn/whereis.htm (06.2006)

[20]http://www.braunschweig.de/english/city/townmap/location_in_europe.html (06.2006)