

**T.C.**  
**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**  
**MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**UZAY-ZAMANDA KURT DELİKLERİ (WORMHOLES) VE**  
**OLASI BİR KURT DELİĞİ METRİĞİNİN EINSTEİN ALAN**  
**DENKLEMLERİ ÇÖZÜLEREK BULUNMASI**

**HURİYE ATEŞCAN**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GEBZE**  
**2014**

**T.C.**  
**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**  
**MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**UZAY-ZAMANDA KURT DELİKLERİ**  
**(WORMHOLES) VE OLASI BİR KURT**  
**DELİĞİ METRİĞİNİN EINSTEIN ALAN**  
**DENKLEMLERİ ÇÖZÜLEREK BULUNMASI**

**HURİYE ATEŞCAN**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMANI**  
**YRD. DOÇ. DR. YÜCEL ENGİNER**

**GEBZE**

**2014**



**GEBZE YÜKSEK  
TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**

## YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23.06.2014 tarih ve 2014/37 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 04/07/2014 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Huriye ATEŞCAN'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

### JÜRİ

ÜYE  
(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER

ÜYE : Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. H. Gülay ALGÜL

### ONAY

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

## ÖZET

Bu çalışmada, sırasıyla metrik tensör, kurt deliği ve Einstein Alan Denklemleri'nin oluşum aşamalarına değinilmiştir. Arkasından seçilen bir metrik tensör ile birlikte Christoffel sembolleri, Riemann tensörü elemanları, Ricci Skaler Eğriliği hesaplanmış ve böylece Einstein Alan Denklemleri'nin sağ yanını oluşturan Einstein tensörü elemanları elde edildi. Uzay-zamanın geometrisini veren bu elemanlara karşılık madde özellikleri hakkında bilgi veren Morris-Thorne Enerji-momentum tensör sınır şartlarında 2. mertebeden non-lineer kısmi diferansiyel denklem sistemi olan Einstein Alan Denklemleri'ne analitik çözüm aranmıştır.

**Anahtar Kelimeler: Kurt Deliği Metriği, Einstein Alan Denklemleri, Kurt Delikleri.**

## SUMMARY

In this work, respectively, metric tensor, wormhole and Einstein Field Equation are argued. After that, with a chosen metric tensor Christoffel symbols, Riemann tensor, Ricci scalar curvature are computed and so components of Einstein tensor which are right side of Einstein Field Equations are obtained. Under the Morris-Thorne boundary conditions which give information about material properties, an analytical solution to Einstein Field Equations which are a  $2^{nd}$  order partial differential equation system is searched.

**Key Words: Wormhole Metric, Einstein Field Equations, Wormholes.**

## TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca bana yardımcı olan çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER' e ve tez jüri üyesi olarak davetimizi kabul eden ve sundukları görüşlerle çalışmama geri bildirim sağlayan değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR ve Yrd. Doç. Dr. Gülay ALGÜL' e,

Çalışmalarımı devam ettirmemde gerekli her türlü desteği veren ve verecek olduğunu hissettiğim değerli Akdeniz Üniversitesi Alanya Eğitim Fakültesi personeline,

Ve ilk tanıdığım günden beri çok güzel anlar paylaştığım bir arkadaştan çok dahası Emel Ebru ERGİN'e teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa</u></b>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Metrik Tensör	1
1.2. Kurt Delikleri ve Seçilen Kurt Deliği Metriği	2
1.3. Einstein Alan Denklemlerinin Oluşturulması	4
2. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİNİN ELEMANLARI	8
2.1. Christoffel Sembollerinin Hesabı	8
2.2. Riemann Eğrilik Tensörü	11
2.3. Ricci Tensörü	14
2.4. Ricci Skaler Eğriliği	15
2.5. Einstein Tensörü	16
3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ	19
3.1. EAD'nin Diferansiyel Denklemler Şeklinde Yazılması	19
3.2. Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümü	20
4. SONUÇ	23
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	25

# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

## Simgeler ve Açıklamalar

### Kısaltmalar

'	: r 'ye göre kısmi (parçalı) türev
$\partial$	: Kısmi (parçalı) türev
$G_{ab}$	: Uzay-zamanın geometrisini veren Einstein tensörü
R	: Ricci skaleri ( $g^{ab}R_{ab}$ )
$R_{ab}$	: Ricci tensör
$R^a_{bcd}$	: Riemann eğrilik tensörü
$T_{ab}$	: Enerji-momentum tensörü
$\delta^a_b$	: Kronecker delta fonksiyonu ( $\delta^a_b = g^{ab}g_{ab}$ )
F	: Kuvvet
GT	: Görelilik Teorisi



# ŞEKİLLER DİZİNİ

## **Sekil No:**

## **Sayfa**

1.1: Einstein-Rosen köprüsü modellemesi.

1

# 1.GİRİŞ

## 1.1. Metrik Tensör

Uzay-zamanda  $(x, y, z, t)$  ve  $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$  iki nokta olmak üzere 3 boyutlu uzayda uzaklık kavramının bir genişlemesi olan  $ds$  uzay-zaman aralığı

• Kovaryant vektör  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

• Kontravaryant vektör  $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$

olmak üzere

$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \quad (1.1.1)$$

$$dx_\mu = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) \quad (1.1.2)$$

ifadelerinin iç çarpımından elde edilen

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi kovaryant ve kontravaryant vektör elemanlarının birinci bileşeni olan  $x$ -sıfırıncı bileşenleri zamanı, diğer  $x$ -birinci, ikinci ve üçüncü bileşenleri ise bildiğimiz 3 boyutlu uzay bileşenlerini temsil etmektedir. Bu 3 boyutlu uzaysal kısım bileşenleri *Kartezyen*  $(x, y, z)$  koordinatlarla ifade edilebileceği gibi *Silindirik*  $(r, \theta, z)$  veya *Küresel*  $(r, \theta, \varphi)$  koordinatlarla da ifade edilebilir. Yukarıdaki iç çarpım Einstein uzamsal toplam formundadır yani  $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$  simgesinde tekrar eden indeks  $\mu$ 'nün, vektör elemanların iç çarpım sırasında her indeks için elde edilen çarpımları toplamıdır.

Bu yazılışa göre uzay-zamanda aralık kavramı aşağıdaki gibi 3 ayrı kategoride düşünülebilir.

- $ds^2 > 0$  (zamanımsı aralık)
- $ds^2 < 0$  (uzayımsı aralık )
- $ds^2 = 0$  (ışık aralığı)

Kovaryant ve kontravaryant aralıklar ise

$$dx^\mu = g^{\mu\nu} dx_\nu \quad (1.3.1)$$

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu \quad (1.3.2)$$

şeklinde birbirine dönüşebilmekte ve bu dönüşümü sağlayan  $g^{\mu\nu}$  ve  $g_{\mu\nu}$  şeklinde belirtilmiş dizgelere *metrik tensör* adı verilmektedir. Metrik tensörle birlikte uzay-zamanda bir aralık aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.4)$$

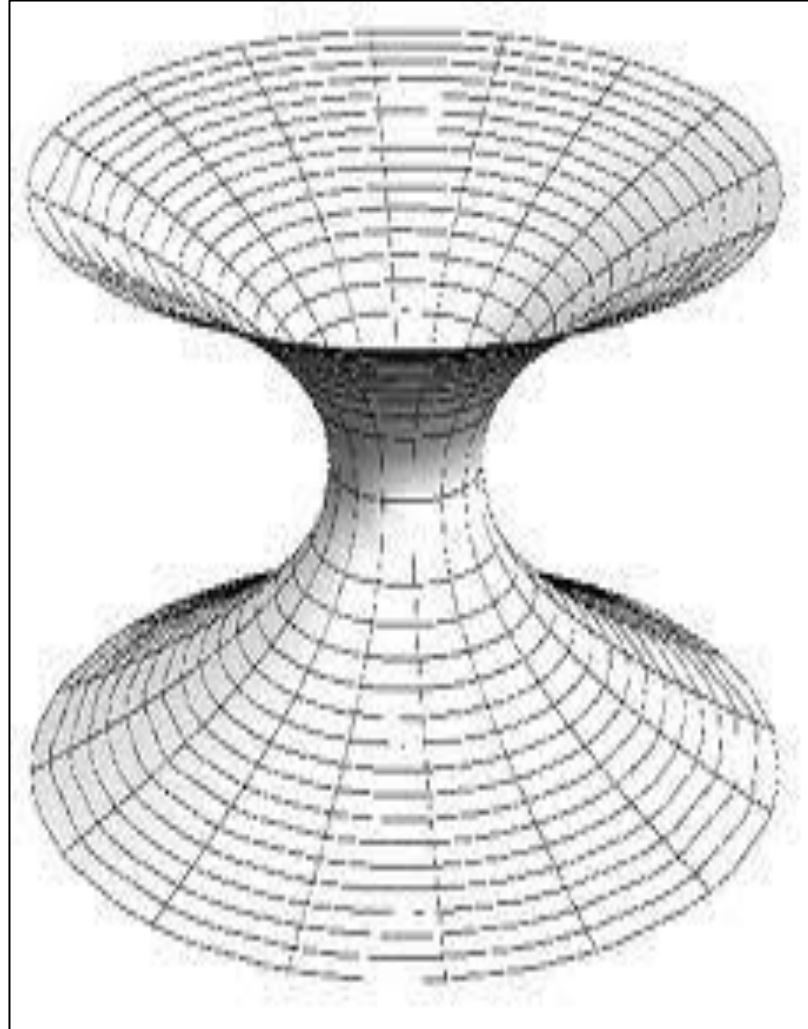
Görüldüğü gibi tanımlanan bu metrik aralık hacim, eğrilik, açı, gelecek ve geçmiş gibi kavramları tanımak için kullanılan uzay-zamanın tüm geometrik ve nedensel yapısını içermektedir.

## 1.2. Kurt Delikleri ve Seçilen Kurt Deliği Metriği

Kurt delikleri fenomeninin geçmişi Einstein ve Rosen tarafından Einstein Alan Denklemleri'nin Schwarzschild çözümünden doğan uzay-zamanın iki farklı parçasını birleştirebilen bir topolojik yapı tasarlanma ihtiyacına dayanmaktadır. [Einstein-Rosen, 1935] Daha sonra "Einstein-Rosen Köprüsü" adı verilen uzay-zamanın iki farklı parçasına açılan iki ağız ve bu ağızları birleştiren bir boğazdan oluşan bu yapıya ilk kez *kurt deliği* yani *wormhole* ismi Misner ve Wheeler tarafından 1957'de yapılan bir çalışmada verilmiştir [Misner and Wheeler, 1957].

Kurt delikleri uzay-zamanın farklı parçalarını birleştirebildiğinden farklı evrenlere gidebilmeye veya zamanda yolculuk yapabilmeye fırsat sağlayabilecekleri düşüncesi ile bilim ve bilim kurgu dünyasında oldukça ses getirmişlerdir.

Teoride evrende çok sayıda kurt deliği olduğu düşünölmekteyken bunlar Planck ölçeği boyutlarındadır [Lemos et al.,2003]. Dolayısıyla bu derece küçük bir yapıdan geçip farklı bir zamana veya mekana yolculuk yapmak mümkün değildir fakat Morris ve Thorne bu yapının egzotik maddelerce desteklenmesi halinde geçişlerin yapılabileceğini çalışmalarında göstermiştir [Morris and Thorne, 1988]. Karanlık enerji, hayalet enerji, domain wall, Chaplygin gaz ve takyon gibi pozitif enerji yoğunluklu ve negatif basınçlı maddelere egzotik madde denmektedir [Lobo, 2006].



Şekil 1.1: Einstein-Rosen köprüsü modellemesi.

En genel haliyle küresel simetrik kurt deliği metriği Lorentzian kurt deliği metriğidir ve aşağıdaki denklemle ifade edilir.

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.5)$$

Burada  $\Phi(r)$  kırmızıya kaymayı,  $b(r)$  ise kurt deliğinin şeklini belirleyen keyfi fonksiyonlardır ve kurt deliğinin geçilebilir olması için  $r$  koordinatı,  $r_0$  kurt deliğinin boğaz açıklığı olmak üzere  $r_0 \leq r < +\infty$  aralığında değerler almalıdır.  $\Phi(r)$  kırmızıya kayma fonksiyonu her yerde sonlu değerler alması gerekirken,  $b(r)$  şekil fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlaması gerekir [Morris and Thorne, 1988].

- $b(r_0) = r_0$
- $b'(r_0) < 1$
- $b(r) < r \quad r > r_0$

### 1.3. Einstein Alan Denklemlerinin Oluşturulması

Einstein'ın 1915'te ilk kez yayınladığı bir makalede Einstein Alan Denklemleri (EAD) ile, Newton kütle-çekim yasasına relativistik bir genelleştirme getirmiştir [Einstein, 1915]. Newton Teorisi'ne göre parçacıklar kütle-çekim kuvvetinin etkisi ile hareket etmesi temel prensip iken Einstein'ın ortaya attığı Genel Relavite Teorisi'nde cisimler eğri uzay-zamanda bir geodezik eğri boyunca serbest hareket eder.

Bu denklemler uzay-zamanın eğriliğini (Einstein Tensörü) enerji-momentum dağılımına (Baskı-Enerji Tensörü) eşleyen on denklemden oluşmaktadır. Einstein tensörü, metrik tensör ile bağıntılıdır. Bu yüzden problem verilen enerji-momentum dağılımı için metrik tensörü çözmek anlamını taşır.

Newton Kütle-Çekim Teorisi'nde, kütle-çekim potansiyelinin maddenin davranışını ne şekilde etkilediğine ve nasıl bir kütle-çekim potansiyeli oluşturduğuna  $\alpha$  cismin ivmesi,  $\phi$  kütle çekim potansiyeli olmak üzere aşağıdaki denklem açıklık getirir.

$$\alpha = -\nabla\varphi \quad (1.6)$$

$\rho$  madde yoğunluğu olmak üzere aşağıdaki Poisson diferansiyel denklemi

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \quad (1.7)$$

kovaryant tensörel bir şekilde ifade edildiğinde eşitlik Einstein Alan Denklemleri'ne dönüşür.

Bu denklemler madde ve enerjinin varlığında eğri uzay-zamanın yapısını verecek ve aynı zamanda enerji-momentumun korunumu yasasına uyacaktır. Enerji-momentum tensörü simetrik, iki indise sahip ve kovaryant türevi sıfır olan bir tensördür. Böylece bu tensörle orantılı, uzay-zamanın eğriliğini verecek bir tensörel ifadeye ihtiyaç duyulur [Grøn and Hervik, 2007].

(1.7) Poisson denkleminin sağ yanı madde yoğunluğu içerdiğinden, EAD'nin sağ yanı enerji-momentum tensörünü ve sol yanı kütle-çekim potansiyelini içermektedir.

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \cdot \frac{dx^c}{d\tau} = 0 \quad (1.8)$$

Geodezik eğri denkleminde,  $\Gamma_{\alpha\beta}^u$  katsayıları Christoffel sembolleri olmak üzere uzayın (Riemann uzayı) metriğine aşağıda belirtildiği şekilde bağlıdır.

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \quad (1.9)$$

Öklid uzayında iki nokta arasında en kısa mesafe olarak tanımlanan doğru parçası kavramı Riemann uzayında geodezikler olarak karşımıza çıkar.

Geodezik denklemi ile verilen serbest parçacığın hareketi ele alındığında Newton limitinde  $\frac{dx^i}{d\tau} \ll c$  (ışık hızı) olarak ele alındığında ve parametre olarak seçilen öz zaman yaklaşık olarak Newton zamanına eşit olduğundan (1.8) denklemi ile gösterilen ifade

$$\frac{dx^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i c \frac{dt}{dt} c \frac{dt}{dt} = 0 \quad (1.10)$$

$$g^i = -c^2 \Gamma_{00}^i \quad (1.11)$$

formunu alır. Elde edilen bu ifade Christoffel sembollerinin kütle-çekim ivmesi olarak ifade edilebileceği anlamını taşır. Newton kütle-çekim yasasında ivme, potansiyelin birinci türevinden elde edildiği gibi Christoffel sembolleri de metriğin birinci türevinden elde edilir.

(1.7) Poisson denkleminin sol tarafı potansiyelin ikinci türevini içerdiğinden EAD'de bu yanı ifade edecek tensör de metriğin ikinci türevi olmalıdır. İki indisli ve uzayın eğriliğini madde-enerji varlığında yansıtması gereken bu tensör Riemann tensöründen elde edilen Ricci eğrilik tensörüdür. Ricci tensörünün kovaryant türevi sıfır değildir. Bunu engelleme adına Einstein tensörü tanımlanmıştır. Einstein tensörü Ricci tensörünün lineer bir kombinasyonudur [Grøn and Hervik, 2007].

$$R_{ab} = R_{adb}^d \quad (1.12)$$

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (1.13)$$

$R_{adb}^d$  Riemann tensörünü,  $R_{ab}$  Ricci tensörünü,  $G_{ab}$  ise Einstein tensörünü ifade etmektedir.

Einstein Alan Denklemleri, yüksek hız ve büyük kütlelerde geçerli olan uzay-zaman geometrisi ile enerji-momentum dağılımını ilişkilendiren doğrusal olmayan diferansiyel denklemler kümesidir.

Bu denklemler, uzay-zamanın eğriliğini (Einstein tensörü) enerji-momentum dağılımına (baskı-enerji tensörü) eşdeğerlik ilkesi ile eşleyen denklemlerden oluşur ve en kapalı haliyle aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$G_{ab} = T_{ab} \quad (1.14)$$

Burada  $T_{ab}$  enerji-momentum tensörünü ifade etmektedir. Tensör hesabına dayanan en kapalı haliyle (1.14) denklemi ile ifade edilen Einstein Alan Denlemleri'nde sağ ve sol indislerinin dörder değeri olduğundan karşımıza 256 Riemann tensör elemanı ortaya çıkmaktadır. 2. mertebeden non-lineer kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan bu denklem sisteminin çözümüne ulaşmak denklemlerin yapısı gereği oldukça zordur.

Bu denklemlerin uzay-zaman geometrisi ile ilgili kısmına homojenlik, küresel, silindirik ve ya düzlemsel simetri gibi bazı matematiksel koşullar; madde ile ilgili olan diğer kısma da ısı akısı, elektromanyetik alan, ideal gaz veya vakum gibi fiziksel koşullardan seçilen bir kombinasyon yardımıyla çözüm yaklaşımlar yardımıyla bulunmaya çalışılır [Yakar, 2006].



## 2. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİNİN ELEMANLARI

### 2.1. Christoffel Sembollerinin Hesabı

(1.5) eşitliğinden ortaya çıkan kovaryant ve kontravaryant metrik tensörleri

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} -e^{-2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

olmak üzere kovaryant metrik tensörün bileşenlerini kolaylık açısından

- $g^{00} = -e^{-2\Phi(r)}$
- $g^{11} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)$
- $g^{22} = r^{-2}$
- $g^{33} = r^{-2}\sin^{-2}\theta$
- $i \neq j$  için  $g^{ij} = 0$

şeklinde ve kontravaryant metrik tensörü

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

olmak üzere kovaryant metrik tensör bileşenlerine benzer şekilde gösterelim.

- $g_{00} = e^{-2\Phi(r)}$
- $g_{11} = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1}$
- $g_{22} = r^{-2}$

- $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$
- $i \neq j$  için  $g_{ij} = 0$

Yukarıda ifade edildiği gibi Christoffel sembolleri metriğin birinci türevinden elde edildiğinden kapalı formda aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir.

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \quad (2.3)$$

Einstein toplam uzlaşımı yardımıyla Christoffel sembollerinin açık formu aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} \Gamma_{bc}^a = & \frac{1}{2} g^{a0} \partial_b g_{0c} + \frac{1}{2} g^{a1} \partial_b g_{1c} + \frac{1}{2} g^{a2} \partial_b g_{2c} + \frac{1}{2} g^{a3} \partial_b g_{3c} \\ & + \frac{1}{2} g^{a0} \partial_c g_{b0} + \frac{1}{2} g^{a1} \partial_c g_{b1} + \frac{1}{2} g^{a2} \partial_c g_{b2} + \frac{1}{2} g^{a3} \partial_c g_{b3} \\ & - \frac{1}{2} g^{a0} \partial_0 g_{bc} - \frac{1}{2} g^{a1} \partial_1 g_{bc} - \frac{1}{2} g^{a2} \partial_2 g_{bc} - \frac{1}{2} g^{a3} \partial_3 g_{bc} \end{aligned} \quad (2.4)$$

denkleminde kısmi türevler yerine aşağıdaki türev operatörleri uygulandığında

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.5.1)$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.5.2)$$

$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.5.3)$$

$$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2.5.4)$$

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a \quad (2.6)$$

(2.6) eşitliğinde görüldüğü gibi Christoffel sembolleri ikinci ve üçüncü bileşene göre simetriktir. Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı olanları aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma_{01}^0 = \Phi'(r) \quad (2.7.1)$$

$$\Gamma_{10}^0 = \Phi'(r) \quad (2.7.2)$$

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \partial_r (-e^{2\Phi(r)}) = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \Phi'(r) e^{2\Phi(r)} \quad (2.7.3)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \partial_r \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} = \frac{r \cdot b'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} \quad (2.7.4)$$

$$\Gamma_{22}^1 = b(r) - r \quad (2.7.5)$$

$$\Gamma_{33}^1 = (b(r) - r) \sin^2 \theta \quad (2.7.6)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad (2.7.7)$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (2.7.8)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad (2.7.9)$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad (2.7.10)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (2.7.11)$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad (2.7.12)$$

## 2.2. Riemann Eğrilik Tensörü

Metriğin ikinci türevlerini içeren, dört indisli aşağıdaki eşitlikle ifade edilen Riemann tensörünün

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a \quad (2.8)$$

üçüncü ve dördüncü bileşenler üzerinden anti-simetriktir ve sıfırdan farklı elemanları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= -\partial_1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 \quad (2.9.1) \\ &= -\Phi''(r) + \Phi'(r) \frac{1}{2r} \frac{r \cdot b'(r) - b(r)}{(r - b(r))} - (\Phi'(r))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{110}^0 &= \partial_1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 \quad (2.9.2) \\ &= \Phi''(r) - \Phi'(r) \frac{1}{2r} \frac{r \cdot b'(r) - b(r)}{(r - b(r))} + (\Phi'(r))^2 \end{aligned}$$

$$R_{202}^0 = \Gamma_{10}^0 \Gamma_{22}^1 = \Phi'(r)(b(r) - r) \quad (2.9.3)$$

$$R_{220}^0 = -\Gamma_{10}^0 \Gamma_{22}^1 = \Phi'(r)(r - b(r)) \quad (2.9.4)$$

$$R_{303}^0 = \Gamma_{10}^0 \Gamma_{33}^1 = \Phi'(r)(b(r) - r) \sin^2 \theta \quad (2.9.5)$$

$$R_{330}^0 = -\Gamma_{10}^0 \Gamma_{33}^1 = \Phi'(r)(r - b(r))\sin^2\theta \quad (2.9.6)$$

$$\begin{aligned} R_{001}^1 &= -\partial_1 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\ &= \Phi''(r) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \Phi'(r) \left(\frac{b(r) - rb'(r)}{r^2}\right) + (\Phi'(r))^2 \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

$$\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \Phi'(r) \left(\frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))}\right) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \Big] - e^{2\Phi(r)}$$

$$\begin{aligned} R_{010}^1 &= \partial_1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\ &= \left[ \Phi''(r) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \Phi'(r) \left(\frac{b(r) - rb'(r)}{r^2}\right) + (\Phi'(r))^2 \right] \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

$$\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \Phi'(r) \left(\frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))}\right) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \Big] e^{2\Phi(r)}$$

$$R_{212}^1 = \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 = \frac{rb'(r) - b(r)}{2r} \quad (2.9.9)$$

$$R_{221}^1 = -\partial_1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 = \frac{-rb'(r) + b(r)}{2r} \quad (2.9.10)$$

$$R_{313}^1 = \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 \quad (2.9.11)$$

$$= (b'(r) - 1)\sin^2\theta + (b(r) - r)\sin^2\theta \left[ \frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} + \frac{\sin^2\theta}{r} \right]$$

$$R_{331}^1 = -\partial_1 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 \quad (2.9.12)$$

$$= (1 - b'(r)) \sin^2 \theta - (b(r) - r) \sin^2 \theta \left[ \frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \right]$$

$$R_{002}^2 = -\Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 = \Phi'(r) \left( \frac{b(r)}{r} - 1 \right) \frac{e^{2\Phi(r)}}{r} \quad (2.9.13)$$

$$R_{020}^2 = \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 = -\Phi'(r) \left( \frac{b(r)}{r} - 1 \right) \frac{e^{2\Phi(r)}}{r} \quad (2.9.14)$$

$$R_{112}^2 = \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -\frac{2}{r^2} - \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^2(r - b(r))} \quad (2.9.15)$$

$$R_{121}^2 = -\partial_1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = \frac{2}{r^2} + \frac{rb'(r) - b(r)}{2r^2(r - b(r))} \quad (2.9.16)$$

$$R_{323}^2 = \Gamma_{12}^2 \Gamma_{33}^1 = \left( \frac{b(r)}{r} - 1 \right) \sin^2 \theta \quad (2.9.17)$$

$$R_{332}^2 = -\Gamma_{12}^2 \Gamma_{33}^1 = \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \sin^2 \theta \quad (2.9.18)$$

$$R_{003}^3 = -\Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 = -\Phi'(r) e^{2\Phi(r)} \frac{\sin^2 \theta}{r} \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (2.9.19)$$

$$R_{030}^3 = \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 = \Phi'(r) e^{2\Phi(r)} \frac{\sin^2 \theta}{r} \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \quad (2.9.20)$$

$$\begin{aligned}
R_{113}^3 &= \partial_1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= -\frac{\sin^2 \theta - \sin^4 \theta}{r^2} - \frac{(b'(r)r - b(r))\sin^2 \theta}{2r^2(r - b(r))}
\end{aligned} \tag{2.9.21}$$

$$\begin{aligned}
R_{131}^3 &= -\partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= \frac{\sin^2 \theta - \sin^4 \theta}{r^2} + \frac{(b'(r)r - b(r))\sin^2 \theta}{2r^2(r - b(r))}
\end{aligned} \tag{2.9.22}$$

$$R_{223}^3 = \partial_2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 = 1 - \frac{(b(r) - r)\sin^2 \theta}{r} \tag{2.9.23}$$

$$R_{232}^3 = -\partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 = -1 + \frac{(b(r) - r)\sin^2 \theta}{r} \tag{2.9.24}$$

### 2.3. Ricci Tensörü

$$R_{00} = R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \tag{2.10.1}$$

$$R_{11} = R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3 \tag{2.10.2}$$

$$R_{22} = R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 + R_{232}^3 \tag{2.10.3}$$

$$R_{33} = R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 + R_{333}^3 \tag{2.10.4}$$

Riemann tensörünün bileşenlerinin (2.10.1), (2.10.2), (2.10.3) ve (2.10.4) denklemlerinde yerine yazılması ile elde edilen Einstein tensörünün bileşenlerini ve Ricci skaler eğriliğinin hesaplanmasında kullanılacak olan Ricci tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$R_{00} = \left[ \Phi''(r) \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) + \Phi'(r) \left( \frac{b(r) - rb'(r)}{r^2} \right) + (\Phi'(r))^2 \right] \quad (2.11.1)$$

$$\left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) - \Phi'(r) \left( \frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} - \frac{1 + \sin^2\theta}{r} \right) \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \Big] e^{2\Phi(r)}$$

$$R_{11} = -\Phi''(r) + \Phi'(r) \frac{r \cdot b'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} + \frac{2 + \sin^2\theta - \sin^4\theta}{r^2} \quad (2.11.2)$$

$$-(\Phi'(r))^2 + \frac{(rb'(r) - b(r))(1 + \sin^2\theta)}{2r^2(r - b(r))}$$

$$R_{22} = \Phi'(r)(b(r) - r) + \frac{rb'(r) - b(r) - 2r + 2(b(r) - r)\sin^2\theta}{2r} \quad (2.11.3)$$

$$R_{33} = (b(r) - r)\sin^2\theta \left[ \Phi'(r) + \frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} + \frac{2\sin^2\theta}{r} \right] \quad (2.11.4)$$

$$+(b'(r) - 1)\sin^2\theta$$

## 2.4. Ricci Skaler Eğriliği

Metrik tensörün elemanları ve Ricci tensörünün elemanlarının çarpımıyla elde edilen Ricci skaler eğriliğin kapalı formu aşağıdaki gibidir.

$$R = g^{ab}R_{ab} \quad (2.12)$$

Metrik tensörün sıfır olan bileşenlerinden dolayı Ricci skaler eğriliğin açık formu aşağıdaki gibi sade bir şekilde yazılabilir.



$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \quad (2.13)$$

Gerekli elemanlar yerlerine yazılıp yapılan düzenlemelerle Ricci eğrilik tensörü aşağıdaki halini alır.

$$R = -2\Phi''(r)\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - 2(\Phi'(r))^2\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{rb'(r) - b(r)r^2\sin^4\theta}{2r(r - b(r))} + \frac{2 + \sin^2\theta}{r^3} \quad (2.14)$$

## 2.5. Einstein Tensörü

Einstein Alan Denklemleri'nin sağ yanını oluşturan ve tamamen geometrik bir büyüklük olan Einstein tensörünün kapalı formu aşağıdaki gibidir.

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \quad (2.15)$$

Einstein tensörünün bulunması ile uzay-zamanın yapısı yani geometrisi hakkında fikir sahibi olunacaktır.

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} \quad (2.16.1)$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} \quad (2.16.2)$$

$$G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} \quad (2.16.3)$$

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} \quad (2.16.4)$$

Yukarıdaki denklemlerde Ricci tensörü, Ricci skaler eğriliği ve metrik tensör elemanları yerine konduğunda Einstein tensörünün elemanları

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \left[ \Phi''(r) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \Phi'(r) \left(\frac{b(r) - rb'(r)}{r^2}\right) + (\Phi'(r))^2 \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - \Phi'(r) \left(\frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r-b(r))} - \frac{1 + \sin^2\theta}{r}\right) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \right] e^{2\Phi(r)} \\
&\quad + \left[ \Phi''(r) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - 2(\Phi'(r))^2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{rb'(r) - b(r)r^2\sin^4\theta}{2r(r-b(r))} \right] e^{-2\Phi(r)} \\
&= \frac{b'(r)}{r^2}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
G_{11} &= -\Phi''(r) + \Phi'(r) \frac{r \cdot b'(r) - b(r)}{2r(r-b(r))} + \frac{(rb'(r) - b(r))(1 + \sin^2\theta)}{2r^2(r-b(r))} \\
&\quad + \frac{2 + \sin^2\theta - \sin^4\theta}{r^2} - \left[ \Phi''(r) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - 2(\Phi'(r))^2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \right. \\
&\quad \left. - (\Phi'(r))^2 + \frac{rb'(r) - b(r)r^2\sin^4\theta}{2r(r-b(r))} \right] \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} \\
&= -\frac{b(r)}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \frac{\Phi'(r)}{r}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
G_{22} &= \Phi'(r)(b(r) - r) + \frac{rb'(r) - b(r) - 2r + 2(b(r) - r)\sin^2\theta}{2r} \\
&\quad + \left[ \Phi''(r) \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) - 2(\Phi'(r))^2 \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) + \frac{rb'(r) - b(r)r^2\sin^4\theta}{2r(r-b(r))} \right] \\
&= \left[ \Phi''(r) + (\Phi''(r))^2 - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r(r-b(r))} \Phi'(r) - \frac{b'(r)r - b(r)}{2r^2(r-b(r))} + \frac{\Phi'(r)}{r} \right] \\
&\quad \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
G_{33} = & +(b(r) - r)\sin^2\theta \left[ \Phi'(r) + \frac{rb'(r) - b(r)}{2r(r - b(r))} + \frac{2\sin^2\theta}{r} \right] \\
& + \left[ (\Phi''(r) - 2(\Phi'(r))^2) \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) + \frac{rb'(r) - b(r)r^2\sin^4\theta}{2r(r - b(r))} \right] r^2\sin^2\theta \quad (2.20) \\
& +(b'(r) - 1)\sin^2\theta = G_{22}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

### 3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

#### 3.1. EAD'nin Diferansiyel Denklemler Şeklinde Yazılması

(2.17), (2.18), (2.19) ve (2.20) denklemleri ile verilen Einstein tensör elemanlarının (2.15) denkleminde yerine konulması yani uzay-zaman geometrisinin madde dinamiğine eşitlenmesi ile

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab} \quad (3.1)$$

denklemini elde edilir. Metriğin sıfır olan elemanları denklemin sağ yanını sıfırlarken, sıfırdan farklı olan elemanları ile aşağıda ifade edildiği gibi 4 diferansiyel denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = T_{00} \quad (3.2.1)$$

$$R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} = T_{11} \quad (3.2.2)$$

$$R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} = T_{22} \quad (3.2.3)$$

$$R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} = T_{33} \quad (3.2.4)$$

ve sağ yan Morris ve Thorne'nun koymuş olduğu kriterlerle

$$T_{00} = \rho(r) \quad (3.3.1)$$

$$T_{11} = -\tau(r) \quad (3.3.2)$$

$$T_{22} = p(r) \quad (3.3.3)$$

$$T_{33} = T_{22} \quad (3.3.4)$$

(3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), ve (3.3.4) eşitlikleri ile verilen ve  $\rho(r)$  enerji yoğunluğu,  $\tau(r)$  yüzey gerilimi ve  $p(r)$  basınç fonksiyonları olmak üzere  $\rho(r)$  fonksiyonunun  $b(r)$  yardımıyla  $\tau(r)$  fonksiyonu  $b(r)$  ve  $\Phi'(r)$  yardımıyla ve  $p(r)$  basınç fonksiyonu ise bu iki fonksiyonun bileşenleri şeklinde tanımlanabilir.

### 3.2 Diferansiyel Denklem Sisteminin Çözümü

$G_{00} = T_{00}$  birinci nonlinear kısmi türevli denklemi için sağ yan enerji yoğunluğunu ifade eder.

$$\frac{b'(r)}{r^2} = \rho(r) \quad (3.4)$$

Morris ve Thorne'un şekil fonksiyonu ile ilgili sınır koşulları altında

$$\frac{b'(r)}{r^2} = \rho_0(r) \quad (3.5)$$

$$b(r) = \rho_0(r) \frac{r^3}{3} + c \quad (3.6)$$

sınır koşullarında empoze edildiğinde  $r = 0 \rightarrow b = 0$  için  $c = 0$  olduğu görülür ve

$$b(r) = \rho_0(r) \frac{r^3}{3} \quad (3.7)$$

sonucu elde edilir.

$G_{11} = T_{11}$  ikinci Einstein Alan Denklemi için sağ yan yüzey gerilimini ifade eder.

$$\frac{b(r)}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \frac{\Phi'(r)}{r} = \tau(r) \quad (3.8)$$

Öncelikle (3.8) denklemde birinci denklemde elde edilen  $b(r)$  şekil fonksiyonu yerine yazılır ve aşağıdaki gibi denklem elimine edildiğinde

$$\frac{\rho_0(r)}{3} - 2 \left( 1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3} \right) \frac{\Phi'(r)}{r} = \tau_0(r) \quad (3.9)$$

ve denklemin sol yanındaki sabit denklemin sağına atıldığında

$$\frac{\Phi'(r)}{r} = \frac{\rho_0(r) - 3\tau_0(r)}{6\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)} \quad (3.10)$$

$$\Phi(r) = \int \frac{\rho_0(r) - 3\tau_0(r)}{6\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)} r dr \quad (3.11)$$

$$a = \frac{-1}{2\rho_0(r)} \left( \frac{\rho_0(r) - 3\tau_0(r)}{2} \right) \quad (3.12)$$

olmak üzere  $\Phi(r)$  kırmızı kayma fonksiyonu

$$\Phi(r) = a \ln \left( 1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3} \right) \quad (3.13)$$

sonucu elde edilir.

$G_{22} = T_{22}$  üçüncü denklemi için sağ yan basıncı ifade eder.

$$\left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \left[ \Phi''(r) + (\Phi'(r))^2 + \frac{\Phi'(r)}{r} - \left( \frac{b'(r)r - b(r)}{2r(r - b(r))} \right) \left( \Phi'(r) - \frac{1}{r} \right) \right] = p(r) \quad (3.14)$$

(3.14) denkleminde aşağıdaki eşitliklerin yerlerine yazılması ile

$$\Phi'(r) = \frac{\left( -\frac{2}{3} a \rho_0(r) r \right)}{\left( 1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3} \right)} \quad (3.15)$$

$$\left( \Phi'(r) \right)^2 = \frac{4a^2 \rho_0^2(r) r^2}{9 \left( 1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3} \right)^2} \quad (3.16)$$

$$\Phi''(r) = a \left( \frac{\left( -\frac{2}{3} \rho_0(r) \right)}{\left( 1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3} \right)} - \frac{4\rho_0^2(r)r^2}{9 \left( 1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3} \right)^2} \right) \quad (3.17)$$

$$\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right) \left[ \frac{-2a\rho_0(r)}{3\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)} - \frac{4a\rho_0^2(r)r^2}{9\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)^2} + \frac{4a^2\rho_0^2(r)r^2}{9\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)^2} \right. \\ \left. + \frac{\frac{a}{2}\left(\frac{2}{3}\rho_0(r)r\right)^2}{\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)^2} - \frac{\rho_0(r)}{3\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)} - \frac{2a\rho_0(r)}{3\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)} \right] = p(r) \quad (3.18)$$

(3.18) denklemi elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında denklem aşağıdaki forma indirgenir.

$$\frac{(4a-1)\rho_0(r)}{3} + \frac{(4a^2+8a)\rho_0^2(r)r^2}{9\left(1 - \frac{\rho_0(r)r^2}{3}\right)} = p(r) \quad (3.19)$$

(3.19) denkleminde (3.12) eşitliği ile verilen  $a$  ifadesi yerine konulduğunda

$$p(r) = \tau_0(r) \quad (3.20)$$

sonucu elde edilir. Üçüncü denklemin koşulları  $G_{33} = T_{33}$  dördüncü Einstein Alan Denklemi'nin koşullarına eşit olduğundan yapılan çözüm  $G_{33} = T_{33}$  denklemi için de geçerlidir.

## 4. SONUÇ

Bu çalışmada Einstein Alan Denklemlerinin hangi bilimsel ihtiyaçlar sonucunda oluştuğuna değinilmiş ve Einstein Alan Denklemlerinin elemanları seçilen küresel simetrik Lorentzian kurt deliği metriği ile hesaplanmıştır. MORRIS ve THORNE'nun koymuş olduğu sınır şartları altında 4 denklemden oluşan bu denklem sistemine analitik çözüm aranmıştır.



## KAYNAKLAR

Aygün M., (2007), “Kurt Delikleri, Karanlık Enerji ve Madde İlişkisi”, Doktora Tezi, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi .

Einstein A., (1905), “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Annalen der Physik*, 17 (10) 891–921.

Einstein A., (1915), “Zur Allgemeinen Relativitätstheorie”, 1st Edition, *Sitzungsber. der Preuss.*

Einstein A., Rosen, N., (1935), “Particle Problem in Relativity”, *Physical Review*, 48, 73-77.

Grøn Ø., Hervik, S., (2007), “Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology”, 1st Edition, Springer.

Hawking S. W., (1988), “Wormholes in spacetime”, *Physical Review D*, 37 (12), 904-910.

Kim S. W., (2013), “Flare-out Condition of Morris-Thorne Wormhole and Finiteness”, *Journal of the Korean Physical Society*, 63 (15), 1887-1888.

Lemos J. P. S., Lobo, F. S. N., Oliveria S. Q., (2003), “Morris- Thorne Wormholes with a Cosmological Constant” *Physical Review D*, 68, 543-556.

Lobo F. S. N., (2006), “Energy Conditions, Traversable Wormholes and Dust Shells” *General Relativity and Gravity*, 37, 2023-2038.

Misner C. W., Wheeler, J. A., (1957), “Classical Physics as Geometry: Gravitation, Electromagnetism, Unquantized Charge and Mass as Properties of Curved Empty Space” *Annals of Physic*, 2, 525-603.

Morris, M. S. ve Thorne, K. S. (1988), “Wormholes in Space-time and Their Use of Intersellar Travel: A Tool for Teaching General Relativity” *American Journal of Physics*, 56 (19) 395-416.

Saltı M., (2012), “Kara Delikler, Solucan Delikleri ve Teleparalel Kütle Çekim Kuramı”, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi.

Visser M., (1996), “Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking, 1st Edition, AIP Press.

Yakar E., (2006), “İnhomojen Einstein Alan Denklemlerinin Bir Skaler Alanın Oluşturduğu Enerji-Momentum Tensörüne Göre Çözümü”, Yüksek Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü.

## ÖZGEÇMİŞ

Huriye ATEŞCAN 1988 yılında Denizli’de doğdu. 2006 yılında başladığı Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nı 2012 yılında başarıyla tamamlayarak, aynı yıl yüksek lisans eğitimine Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başladı. Şubat 2014’ten bu yana Akdeniz Üniversitesi Alanya Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.