T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

EUCLİD GEOMETRİ VE HİPERBOLİK GEOMETRİNİN MATEMATİK EĞİTİMİNDEKİ YERİ VE ÖNEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAHRİYE EDA YILGÖR

Balıkesir, Temmuz - 2007

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

EUCLİD GEOMETRİ VE HİPERBOLİK GEOMETRİNİN MATEMETİK EĞİTİMİNDEKİ YERİ VE ÖNEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAHRİYE EDA YILGÖR

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR

Sınav Tarihi : 23 -07-2007

Jüri Üyeleri :

Dr. H. Basri ÖZDEMİR **Prof. Hasan SOYDAN** **Y. Doç. Dr. Özden KORUOĞLU**

Balıkesir, Temmuz - 2007

ÖZ

EUCLİD GEOMETRİ VE HİPERBOLİK GEOMETRİNİN EĞİTİMDEKİ YERİ VE ÖNEMİ

Bahriye Eda YILGÖR
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
İlköğretim Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği

(Mat. Y.L. Tezi / Tez Danışmanı : Prof.Dr.Hasan Basri Özdemir)

Balıkesir, 2007

Bu çalışmanın ana amacı, Euclid geometri ile hiperbolik geometrinin temel benzer ve farklı yanlarını ortaya koymaktır. Hiperbolik geometrinin de matematik eğitimi açısından önemli olduğu ve mutlaka üzerinde durulması gerektiği savunulmuştur.

Bu açıdan ikinci bölümde; Euclid'in hayatından, Euclid geometrisinden, zaman içinde Euclid dışı geometrilerin oluşumundan ve bu konu ile ilgilenen matematikçilerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde; hiperbolik geometri ile ilgili temel kavramlar ve gerekli teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde; hiperbolik gösterimler tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde ise hiperbolik geometri ve Euclid geometrisi ile ilgili karşılaştırmalar verilmiştir.

Son olarakta altıncı bölümde ise hiperbolik geometrinin ve Euclid geometrisinin eğitimdeki yeri ve önemi üzerinde durulmuştur.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : hiperbolik üçgen / hiperbolik doğru /euclid postulatları / hiperbolik orta

ABSTRACT

THE PLACE AND IMPORTANCE OF EUCLID GEOMETRY AND HYPERBOLIC GEOMETRY IN EDUCATION

Bahriye Eda YILGÖR

Balıkesir University, Institute of Science , Department of Primary Education Mathematics Teaching

(Math. H.L.Thesis/ Supervisor : Prof.Dr. Hasan Basri ÖZDEMİR)

Balıkesir – Turkey , 2007

The main aim of this work is to express the main similar and different sides of Euclid geometry and hyperbolic geometry.

It has been defensed that hyperbolic geometry is also important in mathematics education and it must certainly be focused on.

So, in the first part life of Euclid geometry, the existance of non euclid geometries during the time and mathematicians who worked on this subject have been mentioned.

In the third part hyperbolic representations have been introduced.

And in the fourth part, comparisons about Euclid geometry and hyperbolic geometry have been mentioned.

KEY WORDS : hyperbolic triangle / hyperbolic line/ euclid postulates /hyperbolic middle

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge Adı	**Tanımı**
h- nokta	Hiperbolik Nokta
h- doğru	Hiperbolik Doğru
$\mathbb{H}^2$	$\{ x + iy \mid y > 0 \}$ – Üst yarı düzlem
$\mathbb{D}$	$\{ x + iy \mid x^2 + y^2 < 1 \}$- Birim disk
$PSL(2, \mathbb{C})$	$\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \}$
$PSL(2, IR)$	$\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in IR,\ ad - bc = 1 \}$
G^1	$\{ U \mid Uz = (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d), a, b, c, d \in IR, ab - bc = -1 \}$
G	$PSL(2, IR) \cup G^1$
I_Q	Q çemberine göre inversiyon
$h(\gamma)$	γ eğrisinin uzunluğu
$\mu(E)$	E bölgesinin hiperbolik alanı
$p(z, w)$	z ile w arasındaki hiperbolik uzunluk
$[z, w]$	z ile w noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçası
$p(z_0, z) = r$	z_0 merkezli, r yarıçaplı hiperbolik disk

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitü'sünce verilen, Euclid Geometri ve Hiperbolik Geometrinin Eğitimdeki Yeri ve Önemi konulu tezimi bulduğum kaynaklar çerçevesinde araştırmaya çalıştım. Karşılaştırma yapmadan önce hiperbolik geometri ile ilgili temel teoremleri ve tanımları araştırdım. Üniversite öğrenimim boyunca hiç görmediğim bir konu olmasından dolayı zorluklar yaşasamda yeni bir alanda çalışmanın ve öğrenmenin heyecanını yaşadım.

Tezimi hazırlarken, benden zamanını esirgemeyen, her sorunuma anlayışla çözüm bulan değerli hocam Prof.Dr.Hasan Basri ÖZDEMİR'e içtenlikle teşkkür ediyorum.

Tezimin yazımında yardımcı olan eşim Bekir YAĞMUR 'a , manevi desteklerinden dolayı aileme ve minik kızım Nehir'e teşekkürü bir borç biliyorum.

Balıkesir , 2007 **Bahriye Eda YILGÖR**

1.GİRİŞ

Bu çalışmada ilk önce Euclid'in hayatından ve Euclid geometrisinden bahsedilmiş, aksiyom ve postulatları tanıtılmıştır. Daha sonra Euclid dışı geometrilerin nasıl ortaya çıktığı ve ayrılma noktasının ne olduğu üzerinde durulmuş ve hiperbolik geometrinin de bu Euclid dışı geometrilerden biri olduğu belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde bazı ön bilgiler ve hiperbolik geometri ile ilgili teoremler verilmiştir. Buradaki bilgiler son bölümde yapılacak karşılaştırmalar için oldukça önem teşkil etmiştir.

Dördüncü bölümde hiperbolik gösterimler üzerinde durulmuştur. Bu bölümde şekillere ağırlık verilerek daha rahat anlaşılması sağlanmıştır.

Son bölümde ise Euclid geometrisindeki tanım, kavram ve teoremleri hiperbolik geometrideki karşılıkları üzerinde durulmuş, hiperbolik geometrinin temel özellikleri üzerinde durulmuştur.

BÖLÜM 2

EUCLİD VE EUCLİD OLMAYAN GEOMETRİLER

Şekil 2.1 Euclid

Euclid M.Ö. 330-275 senesinde İskenderiye'de yaşıyordu. Gelmiş geçmiş matematikçilerin içinde adı geometri ile en çok özdeşleşen kişidir. Euclid geometrisi 19. yüzyılın başına kadar rakipsiz kaldı. Euclid'in yaşamı konusunda çok az şey bilinmektedir. Önceleri bir yunan kenti olan Megara'da doğduğu sanıldıysa da sonradan Megaralı Euclid'in ondan yüzyıl kadar önce yaşamış olan bir felsefeci olduğu ortaya çıkmıştır.

Onun bu gün dahi öğretimimizin temelini teşkil eden Eleman'larında, Aritmetik ve Geometrinin esas kısımları, belirli sayıda bir takım hipotezlere dayanılarak, mantıki bir şekilde izah edilmektedir. İskenderiye'de yazılmış olan Elementler'in içeriğinden çok kapsamış olduğu konuların sunuluş biçimi önemlidir; önce bir takım tanımlar, aksiyomlar ve postülatlarla verilmiş ve teoremler, bunlara dayanarak kanıtlanmıştır. Böylece geometri, belirli tanım ve ilkeler çerçevesinde yapılandırılmış olmaktadır. Elementler de nokta, çizgi, yüzey ve cisim gibi geometrik kavramlar tanımlandıktan sonra aksiyomlara geçilmiştir. Aksiyom, doğruluğu açık ve seçik olan önerme demektir. Euclid'in aksiyomları şunlardır;

Aksiyomlar

1.Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittirler.
2.Eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, eşitlik bozulmaz.
3.Eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkartılırsa, eşitlik bozulmaz.
4.Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.
5.Bütün parçalardan büyüktür.

Aksiyomlardan sonra da postülatlar verilmiştir. Postülat ispat edilmeksizin doğru olarak benimsenen önerme demektir. Euclid'in postülatları şunlardır;

Postülatlar:

1.İki nokta arasını birleştiren en kısa yol bir doğru parçasının uzunluğudur.
2.Bir doğru, doğru olarak sonsuza kadar uzatılabilir.
3.Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.
4.Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5.İki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse içte meydana gelen açıların toplamının 180 dereceden küçük olduğu yönde bu iki doğru kesişir.

Euclid Elementler adlı 13 kitaptan oluşan eserinden ilk dört tanesi düzlem geometriyi incelemektedir. Beşincisi büyüklükler ve bunların oranları hakkında genel teoriyi ihtiva eder ve bu teori altıncı kitapta Düzlem Geometriye tatbik edilmiştir. Bunlardan sonraki üç kitap aritmetiğe, onuncusu ortak ölçümsüz sayıları tasnifine ve son üç kitapta Uzay Geometrisinden bahsetmektedir. 1143 yılında batı dillerine çevrildi ve okullarda gösterilmeye başlandı, halen de gösterilmektedir. Euclid geometrisinin dayandığı hipotezler üç türlüdür: tanımlar, postülatlar ve aksiyomlar. En önemlileri sayılabilen ve birinci kitapta bulunan postülatların sayısı beştir. Zaman içinde Euclid'in V. Postulatı playfair aksiyomu adıyla anılır "Başka iki doğruyu kesen bir doğru, bu iki doğru ile aynı tarafta, toplamları iki dik açıdan küçük iç açılar meydana getirirse, iki doğru veya bunların uzantıları, iç açıların toplamı iki dik açıdan küçük tarafta kesişirler" ifadesi tartışmalara sebep olmuştur. Euclid dönemi ve öncesinde bu ifadeye kesin olarak geçerli denemediğinden aksiyom olarak değil, postülat olarak ifade edilmiştir. [5]

Bugün herkesin ilkel (elementer) geometriden saydığı üç şeyi Euclid'in elementlerinde bulamıyoruz:

1. Uzunluk, alan ve hacim hesaplarını hiç vermemekte, başka bir deyişle aritmetiğin geometriye uygulanmasına gereksinim duymaktadır.
2. Geometrinin uygulanmasına girmemekte, cetvel ve pergelden hiç söz etmemektedir. Ama bunlar yardımıyla yapılabilen çizimleri kuramsal olarak var saymaktadır.
3. Kendisinden daha eskilerin bile bildikleri bazı eğriler, örneğin konikler, elementler de ele alınmamıştır. Ancak Euclid'in konikler üzerinde kaybolan ayrı bir kitap yazdığı bilinmektedir.

Aritmetik işlemlerinin Euclid'in Elementleri'ne girmeyişi anlaşılabilir bir durumdur. Çünkü Euclid bu kitapları geometri öğretimi amacıyla değil felsefe öğretimi amacıyla yazmıştır. Bu nedenle, Elementler metodik ders kitapları değil, sistematik akademik kitaplardır. Eskilerin bu geometri anlayışından günümüze dek ilkel(elementer) geometri üzerinde çok uğraşılan konulardan birisi olmuştur. Bir yandan pratik uygulama alanlarında çok yararlı bilgiler verirken bir yandan da bu geometrinin aksiyomatik temellere geniş ölçüde incelenmiştir. Hatta denilebilir ki eskilerin, yeni zaman başlangıcındakilerin, 19. yüzyılın başındakilerin ve sonundakilerin ilkel kapsadığı konuların çoğunda birleşebilen matematikçiler ilkel geometriyi tanımlamakta bugün bile anlayış birliği içinde değildirler.

Yine Euclid'in paraleller aksiyomu 19. yüzyıla kadar matematikçileri çok uğraştıran zorlu bir uğraş alanı olagelmiştir. Fransız matematikçi D' Alambert'in ''Geometri de skandal!... '' diye açıkladığı bu konunun aydınlığa çıkarılması 2000 yıldan uzun bir zaman almıştır. Gerçekte Euclid bile bu akiyomdan pek hoşnut değildi. Bu hoşnutsuzluk 19. yüzyılın en ünlü matematikçisi sayılan Karl Friedrich Gauss (1777-1855)'a dek süre gelmiştir. ''Euclid'in paraleller aksiyomu, öteki 9 aksiyomdan bağımsızdır.'' Sonucunu ortaya koyan Gauss, Euclid geometrisinin evrensel sayılan gerçeklerini yıkıyordu. Çünkü; paraleller aksiyomu değiştirilirse örneğin;“ bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel doğrular çizilebilir” denilse, Euclid’in öteki dokuz aksiyomu ile birlikte çelişkisiz bir sistem oluşur. Ama bu sistemin oluşturduğu geometri Euclid geometrisinden farklı olur. Böylece, Gauss’un değimiyle “Euclidyen olmayan” bir geometri kurulmuş olur. Gauss bu kadarla yetinmeyip, evrenin hem Euclid geometrisi ile hem de Euclidyen olmayan bir geometri ile temsil edilebileceğini söylüyor. Bunun anlamı şudur: bir geometri, içinde yaşadığımız uzay hakkındaki doğruları değil, kuramsal olarak mümkün uzaylar hakkındaki gerçekleri inceler. Farklı iki geometrinin aynı evreni temsil etmemesi için de hiçbir neden yoktur. Buna örnek olarak Gauss’un öğrencisi olan Riemann tarafından kurulan ve kendi adıyla anılan geometriyi düşünelim:

Riemann, Euclid’in paraleller aksiyomunu şöyle değiştiriyor. “Paralel doğrular yoktur.” Böylece Euclidiyen olmayan başka bir geometri ortaya çıkıyor. Bu geometri ile içinde yaşadığımız uzayı temsil edebiliriz. Örneğin dünyayı bir küre olarak düşünürsek, dünya üzerindeki büyük çemberler (yani merkezden geçen düzlemlerin yer yüzeyi ile ara kesitleri) Riemann geometrisinin doğrularını oluşturacaktır. Dolayısıyla bu geometride doğrular sınırlıdır. Oysa Euclid geometrisinde doğrular her iki uçlarından sonsuza uzanırlar. Şimdi yeryüzü üzerinde A,B,C noktalarını alalım. Euclid geometrisinde ABC üçgeni yerküresi içinde kalan düzlemsel ABC üçgenidir. Reiemann geometrisindeki ABC üçgeni ise, yer yüzeyi üzerindeki küresel ABC üçgenidir. Euclid geometrisinde ABC üçgeninin iç açıları toplamı 180 derecedir. Ama Reiemann geometrisinde ABC küresel üçgeninin iç açılarının toplamı 180 derece ile 540 derece arasında değişebilir. Görüldüğü gibi içinde yaşadığımız uzay bile değişik geometrilerle temsil edilebilir. Bu geometrilerde sonuçlar çelişik olabilir. Ama böyle olması birisinin ya da her ikisinin uzayı temsil yeteneğini yok etmez. Gerçekte geometriler evreni keşfetmekte birer araçtır. Euclid geometrisinin içinde yaşadığımız uzayda nedenli kullanışlı bir araç olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde Riemann geometrisi de çağdaş fizikte evrenin gizlerini ortaya çıkarmakta önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.

Euclidiyen olmayan geometrilerin kendi sistemleri içindeki değerleri evrenin değişik amaçlar için temsil etme yetenekleri yanında matematiğe devrimci bir görüş getirmişlerdir. 2000 yılda daha uzun bir süre içinde yaşadığımız evrene ait gerçeklerden, doğrulardan oluşan kalenin burcu diye biline matematik anlayışı yıkıldı. Bunun yerine evrenin gizlerini ortaya çıkarabilmek için insanoğlunun matematiği bir araç olarak kullandığı ve uygulana bildiği yerlerde mutlaka doğru sonuçlara ulaştırdığı görüşü geldi.

Gauss ve Riemann'dan sonra Euclidiyen olmayan geometrilerin gelişiminde Lobacevski, Bolyai, Ricci, Levi-Civita, Weyl gibi ünlülerin katkıları büyük olmuştur. [11]

BÖLÜM 3

ÖN BİLGİLER

3. 1. KARMAŞIK SAYILAR KÜMESİ:

IR gerçel sayılar kümesi olmak üzere;

$\mathbb{C} = \{(x,y) \mid x,y \in IR \}$ sıralı çiftlerin kümesini alalım. Bu küme üzerinde sırayla eşitlik, toplama ve çarpma diye adlandırdığımız kuralla

i) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 , x_2 = y_2$

ii) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

iii) $(x_1, y_1) . (x_2, y_2) = (x_1 . x_2 - y_1 . y_2 , x_1 . x_2 + y_1 . y_2)$

biçiminde tanımlanmış olsun. Üzerindeki bu kuralla birlikte düşünüldüğünde $\mathbb{C}$ ye karmaşık sayılar kümesi denir.

Bir $z = (x , y)$ karmaşık sayısı verildiğinde $x = Re (z)$ ve $y = İm (z)$ olarak tanımlanan sayılara sırayla bu karmaşık sayının gerçel ve sanal kısmı denir. [3]

3. 2. DOĞRUSAL DÖNÜŞÜM (MOBIUS DÖNÜŞÜMÜ)

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$T (z) = (az + b) / (cz + d)$

Biçiminde tanımlanan fonksiyona, kesirli doğrusal dönüşüm (mobius dönüşümü) denir.

Doğrusal dönüşümlerin kümesi PSL (2, $\mathbb{C}$) ile gösterilir ve bu küme fonksiyon bileşimi işlemine göre bir grup oluşturur.

- Bir doğrusal dönüşümün üst yarı düzlemi kendi üzerine resmetmesi için gerek ve yeter koşul a, b, c, d katsayılarının gerçel sayı olmasıdır.

$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ üst yarı düzlemi kendi üzerine resmeden doğrusal dönüşümlerin kümesi PSL (2, IR) simgesi ile gösterilir ve bu küme fonksiyon birleşimi işlemine göre PSL (2, $\mathbb{C}$)' nin bir alt grubudur.

$PSL(2, IR) = \{ T \mid Tz = (az + b) / (cz + d), a, b, c, d \in R, ad - bc = 1 \}$

Bu çalışmada;

$G' = \{ U \mid Uz = (a\bar{z} + b) / (c\bar{z} + d), a, b, c, d \in R, ab - bc = -1 \}$ olmak üzere ;

$G = PSL(2, IR) \cup G'$ grubu dikkate alınacaktır. [2]

3. 3. BİR DÖNÜŞÜMÜN SABİT NOKTALARI

3.3.1. TANIM

V, G nin bir öğesi olsun. V(z)= z yani z = (az + b) / (cz + d) eşitliğini gerçekleyen noktalara Vz dönüşümünün sabit noktaları denir. [2]

3.3.2 TEOREM

Bir doğrusal dönüşümün en fazla iki sabit noktası vardır.

İSPAT:

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

$$c \neq 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

$(a + d)^2 - 4$' ün değerine bağlı olarak denklemin en fazla iki sabit noktası vardır, çünkü bu durumda ∞ bir sabit nokta değildir.

$$c = 0 \Rightarrow T(z) = \frac{az+b}{d} \qquad \Delta = a.d \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, d \neq 0 \quad \text{olmalı.}$$

i) a = d iken T(z) = z + b olur, bu durumda tek sabit nokta, ∞ noktasıdır.

ii) $a \neq d$ iken $z = \dfrac{b}{d-a}$ ikinci bir sabit noktasıdır.

Bu şekilde $c \neq 0$ ve $c = 0$ olduğu her iki durumda, denkleminin en fazla iki sabit noktası vardır. İkiden çok sabit noktalı tek doğrusal dönüşüm birim dönüşümdür.

Bir $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünde a+d değerinin mutlak değerine bağlı olarak PSL(2,IR)'nin öğeleri üç gruba ayrılır.

1) $|a+d| > 2 \Rightarrow$ T dönüşümüne hiperbolik denir.

2) $|a+d| = 2 \Rightarrow$ T dönüşümüne parabolik denir.

3) $|a+d| < 2 \Rightarrow$ T dönüşümüne eliptik denir.

3.3.3 TEOREM: PSL(2,IR) grubu üst yarı düzlemi sabit bırakır. [1]

İSPAT : $T(z) = \dfrac{(az+b)}{(cz+d)}$

$$T(z) = \frac{(az+b)}{(cz+d)} \cdot \frac{c\bar{z}+d}{c\bar{z}+d} = \frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

$$\text{İm}\left(T(z)\right) = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

$|cz+d|^2 > 0$, $y > 0$ olduğundan;

İm $T(z) > 0$ dır.

3.3.4 TEOREM: Bir doğrusal dönüşümün en fazla iki sabit noktası vardır. [1,2]

İSPAT : $\dfrac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$

$$c \neq 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{(a-d) \mp \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{(a-d) \mp \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

$(a+d)^2 - 4$' ün değerine bağlı olarak

$cz^2 + (d-a)z - b = 0$ denkleminin en fazla iki sabit noktası vardır.

$c = 0 \Rightarrow T(z) = \dfrac{az+b}{d}$ $\quad\quad \Delta = a.d \neq 0 \Rightarrow a \neq 0, \ d \neq 0$ $\quad\quad$ olmalıdır.

i) $a = d$ iken $T(z) = z + b$ olur. Bu durumda tek sabit nokta ∞ noktasıdır.

ii) $a \neq d$ iken $z = \dfrac{b}{d-a}$ ikinci bir sabit noktasıdır. Bu şekilde c≠0 ve c=0 olduğu her iki durumda denklemin en fazla iki sabit noktası vardır. $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ denklemi özdeş olarak sıfıra eşit olursa sonsuz kökü olur, bu ise b=0, c=0, a=d yani T(z)= z birim dönüşümü ile mümkündür.

Sonuç: İkiden çok sabit noktalı tek doğrusal birim dönüşümdür.

3.3.5 TANIM (GEÇİŞLİLİK)

Eğer Gx= X ise yani tek bir yörünge varsa [G,X] topolojik dönüşüm grubu geçişli (transitive) dir denir. [2]

3.3.6 ÖNERME

G, IR∪{∞} üzerindeki farklı noktaların sıralı çiftlerinin oluşturduğu küme üzerinde geçişlidir. [2]

İSPAT: Eğer p, q sonlu (p > q) iseler;

$T_1 z = (z - p) / (z - q)$ dönüşümü p noktasını 0, q noktasını ∞' a resmeder.

$T_2 z = z + p$ ise { 0, ∞ } kümesini { p, ∞ } kümesinin üzerine resmeder. Böylece (0, ∞) çiftinin yörüngesi bütün sıralı çiftleri bulundurur.

3.3.7 TEOREM: PSL (2, IR) grubu üst yarı düzlemde geçişlidir. [1]

İSPAT: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$T_1(z) = \frac{z - x_1}{y_1} \quad , \quad T_2(z) = y_2 z + x_2$$

Dönüşümlerinin bileşkesi olan $T_2 o T_1$ dönüşümü z_1 noktasını z_2 noktasına götüren dönüşümdür.

$$T_2 o T_1 = y_2 \left(\frac{z - x_1}{y_1}\right) + x_2 = \frac{y_2 z - x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1}$$

Bu dönüşümün belirteci $\Delta = y_2 . y_1 > 0$ olduğundan $T_2 o T_1 \in$ PSL (2, IR)' dir.

3.3.8 TEOREM: PSL(2,IR) grubu çemberi çembere resmeder. [1]

İSPAT: $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ çemberine T(z) = $\dfrac{az+b}{cz+d}$

Dönüşümünü uygulayalım.

$$A\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right)\left(\frac{-\bar{d}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}-\bar{a}}\right) + B\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right) + \bar{B}\left(\frac{-\bar{d}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}-\bar{a}}\right) + C = 0$$

$$(Ad\bar{d} - Bd\bar{c} - \bar{B}c\bar{d} + Cc\bar{c})z\bar{z} + (-Ad\bar{b} + B\bar{a}d + B\bar{b}c - C\bar{a}c)z +$$
$$(-A\bar{d}b + Bb\bar{c} + \bar{B}\bar{d}\bar{a} - Ca\bar{c})\bar{z} + (A\bar{b}b - Bb\bar{a} - \bar{B}\bar{b}a + Ca\bar{a}) = 0$$

Yukarıdaki denklem bir çember denklemidir. Çünkü; $z\bar{z}$'in katsayısı ile sabit terimin katsayısı reel sayılardır ve z ile $\bar{z}$ nin katsayıları birbirinin eşleniğidir.

3.3.9 TEOREM: PSL(2, IR)'nin öğeleri, reel eksene dik olan çemberi yine reel eksene dik olan çembere dönüştürürler. [1]

İSPAT: $Az\bar{z} + B(z + \bar{z}) + C = 0$ reel eksene dik olan çembere

$T = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünü uygulayalım.

$$A\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right)\left(\frac{-d\bar{z}+b}{c\bar{z}-a}\right) + B\left(\frac{-dz+b}{cz-a} + \frac{-d\bar{z}+b}{c\bar{z}-a}\right) + C = 0$$

$$Ad^2 - 2Bcd + Cc^2)z\overline{z} + (-Adb + Bad + Bbc + Cac)z +$$
$$(-Abd + Bbc + Bad - Cca)\overline{z} + (Abb - Bba - Bba + Ca^2) = 0$$

Denklemi, yine reel eksene dik çember denklemidir. Çünkü; z ile $\overline{z}$'in katsayıları reel ve birbirine eşittir.

3.3.10 TEOREM: PSL (2, IR) grubu, reel eksene dik olan çemberlerin (hiperbolik doğruları) kümesi üzerinde geçişlidir. [1]

İSPAT: Q_1 ve Q_2 reel eksene dik iki çember olsun;

Q_1 çemberinin reel ekseni kestiği noktalara a, b

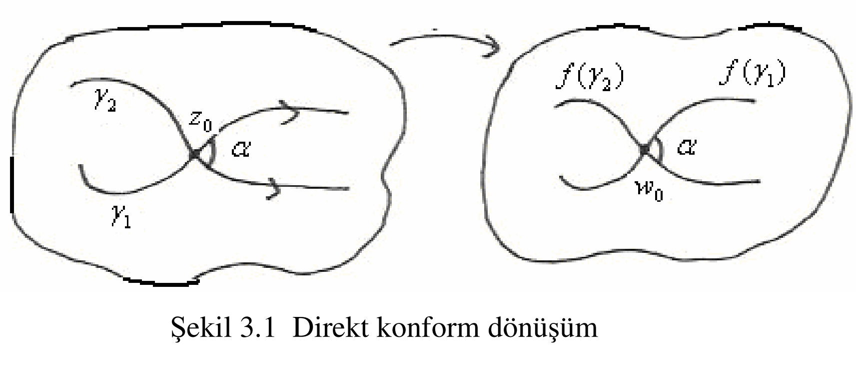
Q_2 çemberinin reel ekseni kestiği noktalara da c, d diyelim.

Teorem 3.3.6'ya göre a, b noktalarını c, d noktalarına resmeden bir T∈ PSL (2, IR) öğesi vardır. Yine teorem 3.3.9' a göre reel eksene dik olan Q_1 çemberinin T altındaki resmi, yine reel eksene dik başka çemberdir. T(Q_1) çemberi ve c ve d noktalarından geçtiğinden T(Q_1) = Q_2 olur.

3.4 KONFORM VE TERS KONFORM DÖNÜŞÜMLER

B, ℂ de bir bölge olmak üzere f: B → ℂ sürekli dönüşüm olsun. Eğer bir $z_0 \in$ B noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi γ_1, γ_2 eğrilerinin;

f (γ_1) , f (γ_2) resimleri de f (z_0) = w_0 da büyüklük ve yön bakımından α ile eşit olan bir açı yapıyor ise f fonksiyonu z_0 noktasında bir direkt konform dönüşümdür denir.

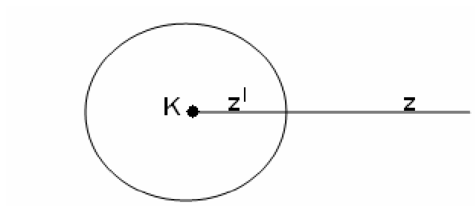


Şekil 3.1 Direkt konform dönüşüm

Eğer f B nin her noktasında konform ise f, B'de konformdur denir. Açıyı büyüklük bakımından koruyan fakat yönünü değiştiren dönüşümlere de ters konform dönüşümler denir. [2]

3.5 İNVERSİYON DÖNÜŞÜMÜ

TANIM: k merkezli, r yarıçaplı bir Q çemberini ele alalım. z düzlemde herhangi bir nokta olsun. kz yarı doğrusu üzerinde $|z-k|\,|z'-k| = r^2$ şartını sağlayan z' noktasına z noktasının Q çemberine göre inverse noktası denir. Bu şekilde düzlemdeki her noktaya verilen bir çembere göre invers olan noktasını karşılık getiren dönüşüme inversiyon denir. [1]



$\bar{z}-\bar{k}z^1$

Şekil 3.2 İnversiyon Dönüşüm

$|z-k|\,|z'-k| = r^2$

$|\bar{z}-\bar{k}|\,|z'-k| = r^2 \quad (|z-k| = |\bar{z}-\bar{k}|)$

$|\bar{z}-\bar{k}|\,|z'-k| = r^2 \quad \left(\arg(z-k) = \arg(z^1-k) = Q,\ \arg(\bar{z}-\bar{k}) = -Q\right)$

$$\boxed{z' = k + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{k}}}$$

Merkezi ve yarı çapı bilinen çemberin inversiyon denklemi.

Çember $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ denklemi ile verildiği zaman inversiyon denklemini bulalım.

Bu çemberin merkezi = $-\dfrac{\bar{B}}{A}$, yarı çapı = $\sqrt{\dfrac{B\bar{B}-AC}{A^2}}$

$z' = k + \dfrac{r^2}{\bar{z}-\bar{k}}$ denkleminde yerine konulursa;

$$= \frac{-A\overline{B}\overline{z} - B\overline{B} + B\overline{B} - AC}{A(A\overline{z} + B)} = \frac{-\overline{B}\overline{z} - C}{A\overline{z} + B}$$ deklemi düzenlendiğinde ;

$Az'\overline{z} + Bz' + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0$ denklemi elde edilir.

Verilen bir çembere göre inversiyon deklemini elde etmek için çember denkleminde z yerine z' koyup , z' çekilir.

3.5.1 ÖRNEK : $2z'\overline{z} + (3 + i)z + (3 + i)\overline{z} + 5 = 0$

Çemberine göre inversiyon denklemini yazıp $2 + i$ noktasının inversini bulalım.

$2z'\overline{z} + (3 + i)z' + (3 - i)\overline{z} + 5 = 0$

$z'(2\overline{z} + 3 + i) = (-3 + i)\overline{z} - 5$

$$T(z) = z' = \frac{(-3+i)\overline{z} - 5}{2\overline{z} + 3 + i}$$

$$T(2+i) = \frac{(-3+i)(2-i) - 5}{2(2-i) + 3 + i} = \frac{(-10+5i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} = \frac{75+25i}{50}$$

Bir Q çemberine göre inversiyon $|_q$ ile gösterilir.

Bir çembere göre inversiyonun sabit noktaları bu çember üzerindeki noktalardır. [1]

3.5.2 TANIM.

Çember denkleminde A = 0 olduğunda bir Euclid doğrusu elde edilir.

$Bz + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0$

$Bz' + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0$

$$z' = \boxed{\frac{-\overline{B}\overline{z} - C}{B}}$$ doğruya göre yansımanın denklemidir. [1]

Doğruya göre yansımanın sabit noktaları, doğrunun üzerindeki noktalardır.

3.5.3 TEOREM: Bir nokta ile verilen bir doğruya göre invers olan noktası bu doğrudan eşit uzaklıktadırlar.

İSPAT: q ∈ Q olsun;

$$| Iq(z) - q | = | Iq(z) - Iq(p) |$$

$$= \left| \frac{-\overline{B}\overline{z}-C}{B} - \frac{-\overline{B}\overline{q}-C}{B} \right| = | \overline{z}-\overline{q} | = | z-q |$$

Şimdi de reel eksene göre yansımanın denklemini bulalım.

$y = 0 \qquad \frac{z-\overline{z}}{zi} = 0 \qquad z^1 = \overline{z}$ olur.

Çembere göre inversiyon $T_2(z) = \overline{z}, \quad T_1(z) = \frac{-\overline{B}z + C}{Az + B}$ şeklindeki iki dönüşümün bileşkesidir. Bunlardan ilki reel eksene göre bir yansıma, ikinci ise bir doğrusal dönüşümdür. Birincisi açıların büyüklüğünü korurken yönünü değiştirir, ikinci ise hem büyüklüğünü hem de yönünü korur. Çembere göre inversiyon bu ikisinin bileşkesi olduğundan sadece açıların büyüklüğünü korur, yani ters (indirekt) konformal bir dönüşümdür.

3.6 TANIM (İZOMETRİ):

Uzaklığı koruyan fonksiyonlara izometri (eşmetri) fonksiyonları denir. [2]

3.6.1 TANIM:

Bir w = f(z) , f: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için;

$| f(z_1) - f(z_2) | = | z_1 - z_2 |$ oluyorsa f'ye Euclid eşmetri (izometri) fonksiyonudur, denir. [2]

3.6.2 ÖRNEK:

$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve ad-bc = 1

Dönüşümü $|cz+d| = 1$ çemberinin noktaları için bir izometridir. Bu çemberi $Ç_1$ ile gösterelim. [1]

$z_1, z_2 \in Ç_1 \Rightarrow |c z_1 + d| = 1$, $|c z_2 + d| = 1$

$$|T(z_1) - T(z_2)| = \left| \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \right|$$

$$= \left| \frac{(ad - bc) z_1 - (ad - bc) z_2}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \right|$$

$$= \frac{|z_1 - z_2|}{|cz_1 + d||cz_2 + d|} = |z_1 - z_2|$$

3.6.3 ÖRNEK: Euclid doğrusuna göre yansıma bir Euclid izometridir.

$Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$ Euclid doğrusuna göre yansımanın denklemi;

$T(z) = \dfrac{-\overline{B}\overline{z} - C}{B}$ dir. [1]

$$|T(z_1) - T(z_2)| = \left| \frac{-\overline{B}\overline{z}_1 - C}{B} - \frac{-\overline{B}\overline{z}_2 - C}{B} \right|$$

$$= \left| \frac{-\overline{B}}{B} \right| |z_1 - z_2|$$

$$= |z_1 - z_2|$$

3.6.4 TEOREM:

Bir lineer dönüşüm kendi izometri çemberini ters dönüşümün izometri çemberine dönüştürür. [1]

İSPAT: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün tersi $T^{-1}(z) = \dfrac{-dz+b}{cz-a}$ dır.

$|cz + d| = 1$ çemberine $T(z)$ dönüşümünü uygulayalım.

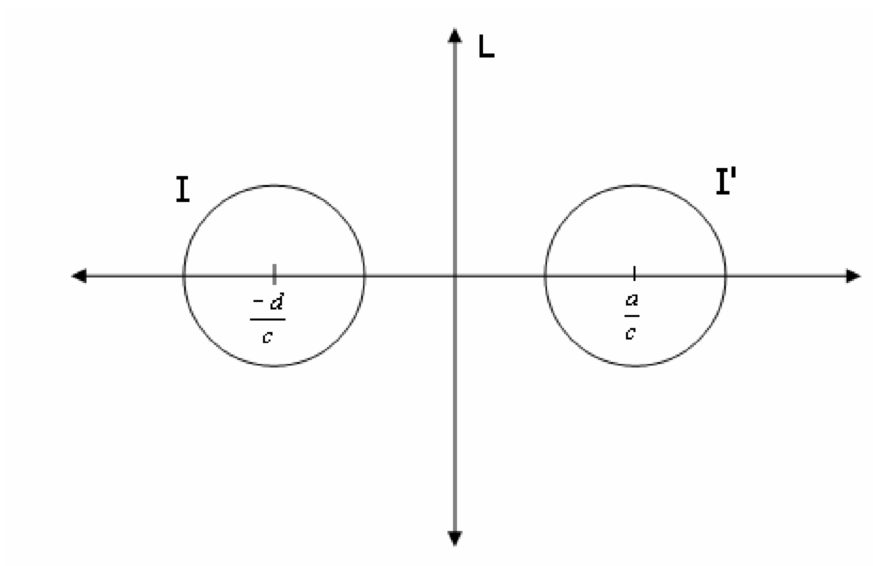
$$\left| c\,\frac{-dz^1 + b}{cz^1 - a} + d \right| = 1 \quad , \quad \left| \frac{-dcz^1 + bc + dcz^1 - ad}{cz^1 - a} \right| = 1$$

$$\left| \frac{-(ad-bc)}{cz^{1}-a} \right| = \frac{1}{\left| cz^{1}-a \right|} = 1 \Leftrightarrow \left| cz^{1}-a \right| = 1$$

3.6.5 TEOREM:

PSL (2, IR)'nin her öğesi kendi izometri çemberine göre bir inversiyon ile L doğrusuna göre bir yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir.

Buradaki L doğrusu, dönüşümün izometri çemberinin merkezi ile ters dönüşümün izometri çemberinin merkezini birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir. [1]



Şekil 3.3 İzometri Çemberi

İSPAT: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün izometri çemberi;

$$\left| cz + d \right| = 1' dir . \quad \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{\left| c \right|}$$

$$T_1(z) = z^1 = -\frac{d}{c} + \frac{1}{\left| c \right|^2 (\overline{z} + \frac{d}{c})} \qquad (7)$$

(7) izometri çemberine göre inversiyon denklemidir.

L: $x = \dfrac{a-d}{2c}$ $\qquad \dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{a-d}{2c}$

L: $z + \overline{z} + \dfrac{d-a}{c} = 0$

$$T_2(z) = z = -\overline{z} + \frac{a-d}{c} \qquad (8)$$

(8) L doğrusuna göre yansımanın denklemidir.

$$T_2 o T_1(z) = \frac{d}{c} - \frac{1}{c^2(\frac{d}{c} + z)} + \frac{a-d}{c}$$

$$= \frac{-1 + ac(z + \frac{d}{c})}{c^2(z + \frac{d}{c})} = \frac{-1 + acz + ad}{c^2(z + \frac{d}{c})}$$

$$= \frac{bc + acz}{c^2(\frac{cz+d}{c})} = \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$T_2 T_1(z) = T(z)$$

3.7 BİRİM ÇEMBER İZOMETRİLERİ

3.7.1 TEOREM: Birim çemberi sabit bırakan ve birim çemberin içini içine resmeden en genel lineer dönüşüm:

T(z) = $\dfrac{az + \overline{c}}{cz + \overline{a}}$, $\qquad a\overline{a} - c\overline{c} = 1$ şeklindedir. [1]

İSPAT: $z\bar{z}=1$ çemberine $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünü uygulayalım.

$$\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right)\left(\frac{-\bar{d}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}-\bar{a}}\right)=1$$

$$d\bar{d}-c\bar{c})z\bar{z}+(-\bar{b}d+c\bar{a})z+(-b\bar{d}+a\bar{c})\bar{z}+b\bar{b}-a\bar{a}=0$$

Çemberinin birim çember olması için;

$$d\bar{d}-c\bar{c}=-b\bar{b}+a\bar{a}\neq 0 \qquad \text{ve} \qquad -\bar{b}d+c\bar{a}=-b\bar{d}+a\bar{c}=0$$

olmalıdır.

$$\frac{b}{c}=\frac{a}{d}=\lambda \Rightarrow b=\lambda\bar{c},\, a=\lambda\bar{d}$$

$$d\bar{d}-c\bar{c}=\lambda d\bar{\lambda}\bar{d}-\lambda c\bar{\lambda}\bar{c}=\lambda\bar{\lambda}(d\bar{d}-c\bar{c})\neq 0$$

$$|\lambda|^2=1 \quad \text{-------} \; (9)$$

$$ad-bc=\lambda d\bar{d}-\lambda c\bar{c}=\lambda(d\bar{d}-c\bar{c})=1\Rightarrow d\bar{d}-c\bar{c}\in R,$$

$$\lambda\in R \quad \text{------} \; (10)$$

(9) ve (10) $\Rightarrow \lambda=\pm 1$ olmalıdır.

Birim çemberin içinin içine resmedilmesi isteniyor. Bu durumda $T(-\frac{d}{c})=\infty$ olduğundan $-\frac{d}{c}$ çemberin dışında olmalıdır.

$$\left|-\frac{d}{c}\right|>1 \qquad |d|>|c|\Rightarrow d\bar{d}-c\bar{c}>0$$

(10) denkleminden $d\overline{d} - c\overline{c} > 0 \Rightarrow \lambda = 1$ olmalıdır.

$b = \overline{c}$ ve $a = \overline{d} \Rightarrow d = \overline{a}$

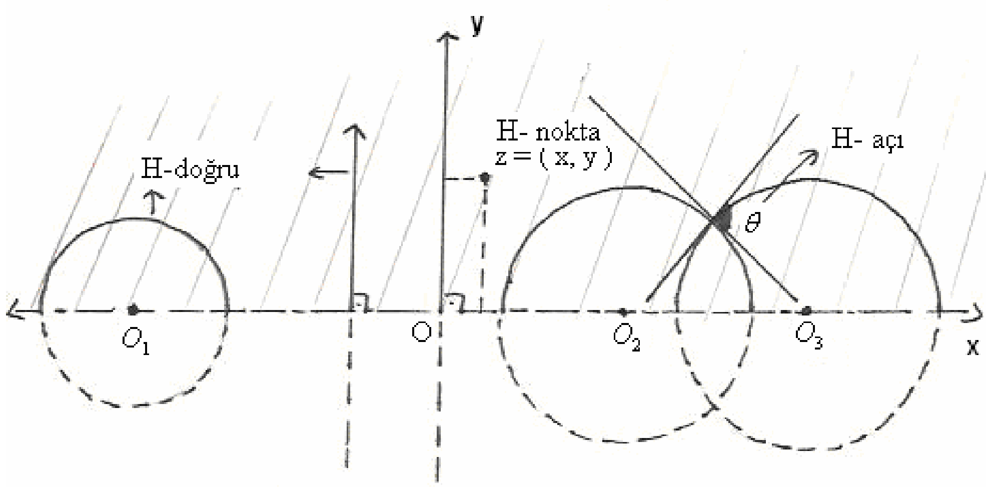
$$T(z) = \frac{az + \overline{c}}{cz + \overline{a}} \quad , \quad a\overline{a} - c\overline{c} = 1 \text{ ------ } (11)$$

(11)' verilen T dönüşümü birim çemberin içini içine birebir ve direkt konformal olarak dönüştürür. Bu dönüşümler birim çemberin hiperbolik izometrileridir.

BÖLÜM 4
HİPERBOLİK GÖSTERİMLER

4.1. ÜST YARI DÜZLEM GÖSTERİMİ

Üst yarı düzlem gösterimi Poincare tarafından verilmiştir.



Şekil 4.1 Üst Yarı Düzlem Gösterimi

4. 1.1 TANIM:

$H^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid im(z) > 0 \} = \{ x + iy \,/\, y > 0 \}$ kümesine üst yarı düzlem denir. [1]

4. 1.2. TANIM:

H^2 nin noktalarına hiperbolik nokta denir. [1]

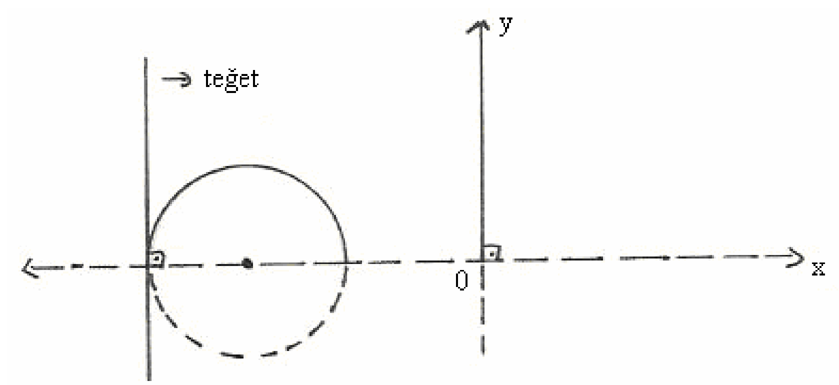
4.1.3 TANIM:

R eksenine dik olan çemberin H^2 de kalan yay parçalarına hiperbolik doğru denir. Özel olarak R eksenine dik olan Euclid doğrularının H^2 de bulunan kısımları da hiperbolik doğrudur. [2]

4.1.4 TANIM:

Hiperbolik açı ise Euclid anlamında ölçülen açıdır. [1]

Dikkat edilirse Hiperbolik çemberler merkezi R üzerinde bulunan çemberlerdir. Şöyle ki;

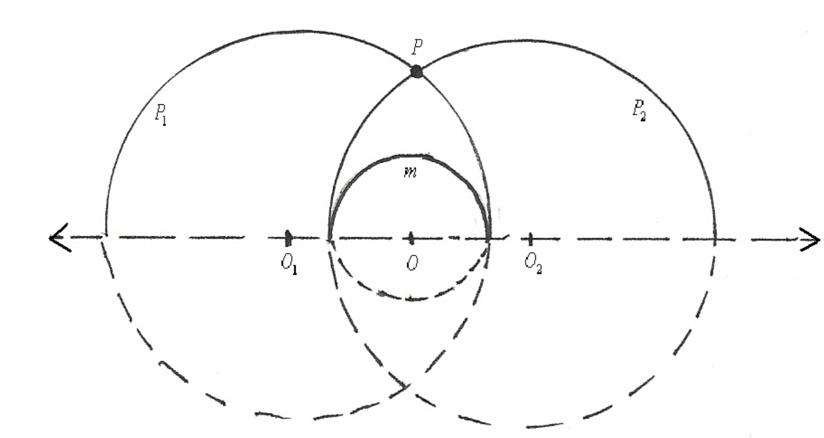


Şekil 4.2 Reel Eksene Dik Çember

Reel eksene dik herhangi bir çember alalım. Çembere reel ekseni kestiği noktada bir teğet çizelim. Bir merkezden geçen doğrunun teğete değme noktasında dik olduğunu biliyoruz. Çizdiğimiz teğet değme noktasında reel eksene dik olduğundan merkez reel eksen üzerindedir. [2]

4.1.5 TANIM:

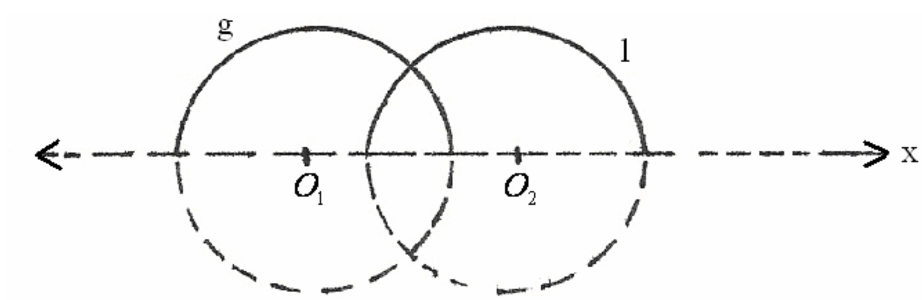
Ortak bir uç noktası olan iki hiperbolik doğruya paralel doğrular denir. Buna göre hiperbolik bir doğruya dışındaki bir noktadan şekilde olduğu gibi m doğrusuna bir P noktasından P_1 ve P_2 gibi iki paralel çizilmiştir. [2]



Şekil 4.3 H^2 de Paralel doğrular

4.1.6 TANIM:

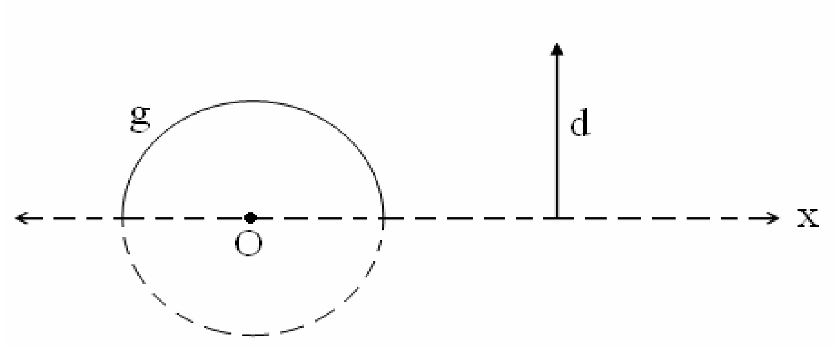
Ortak bir hiperbolik noktası olan (uç noktalar hariç) iki doğruya, kesişen doğrular denir. Şekil deki g ve 1 doğruları, kesişen doğrulardır. [1]



Şekil 4.4 H^2 de Kesişen Doğrular

4.1.7 TANIM:

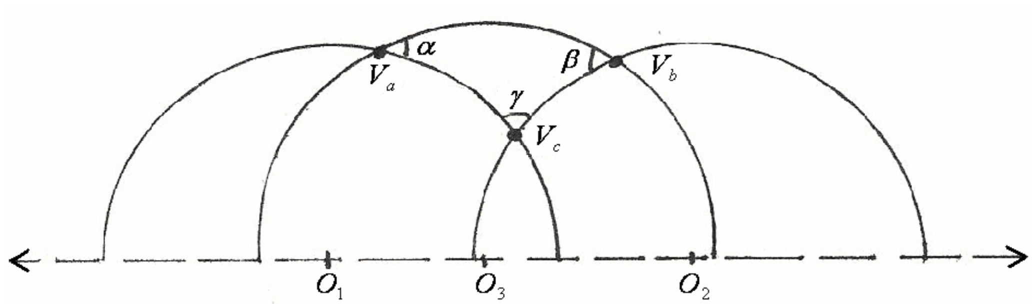
Uç noktaları da dahil hiç ortak noktası olmayan doğrulara kesişmeyen doğrular denir. Şekildeki doğrular g ve d kesişmezler. [1]



Şekil 4.5 H^2 de Kesişmeyen Doğrular

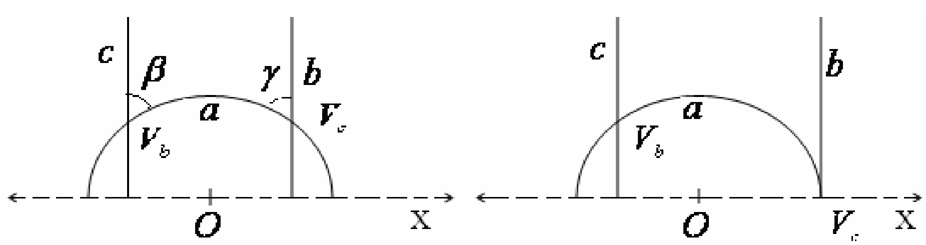
4.1.8 TANIM:

Doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçalarının birleşiminden oluşan şekil ile bu şeklin iç bölgesinin birleşimine hiperbolik üçgen denir. [1]



Şekil 4.6 Hiperbolik Üçgen

.Üçgenin köşeleri Va, Vb, Vc ile gösterilir.

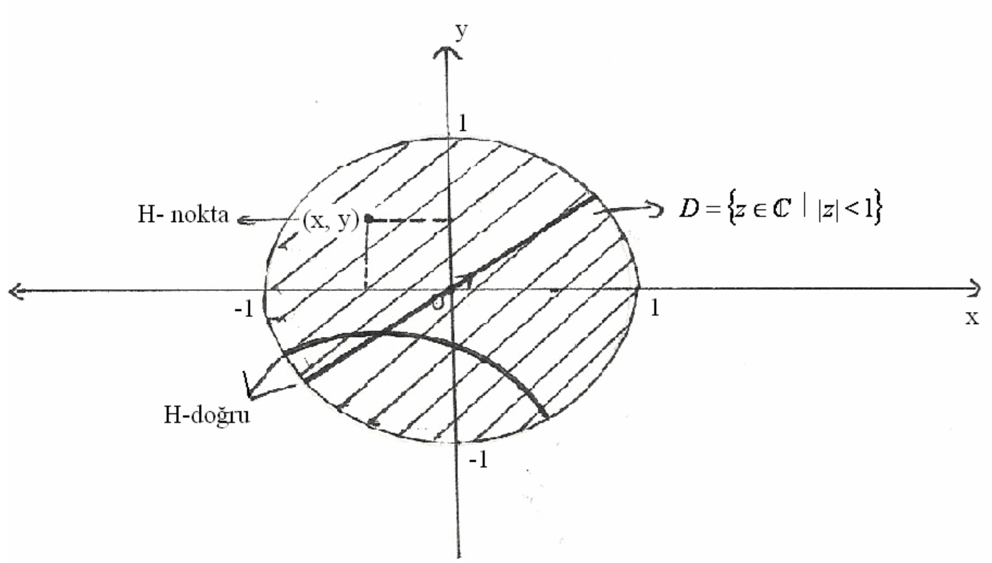


Şekil 4.7.a Şekil 4.7.b

Köşeleri Sonsuzda Olan H-Üçgen

Hiperbolik üçgenin köşeleri şekildeki gibi olabilir.

4.2 BİRİM DİSK GÖSTERİMİ



Şekil 4.8 Birim Disk Gösterimi

Birim disk gösterimi yine üst yarı düzlem gösterimi gibi Poincare tarafından verilmiştir.

4.2.1 TANIM : Bu gösterimde hiperbolik düzlem olarak birim çemberin iç bölgesi alınmıştır. [1]

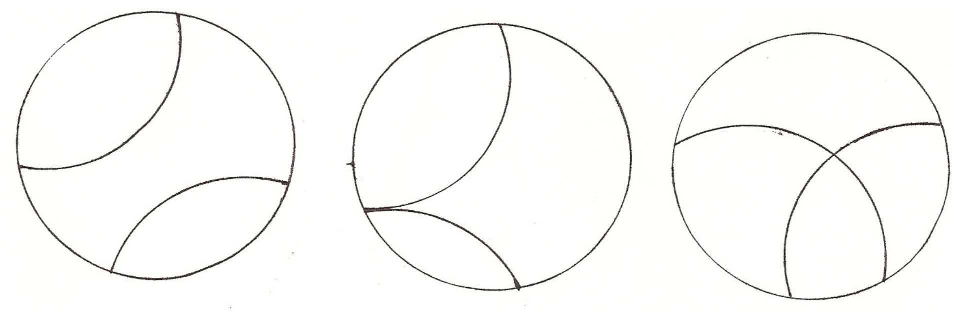
Hiperbolik düzlem D = $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ şeklinde ifade edilir.

4.2.2 TANIM : Birim çemberin iç bölgesindeki noktalara hiperbolik noktalar denir. [1]

4.2.3 TANIM : Birim çembere dik olan çemberlerin D'de kalan yay parçalarına hiperbolik doğrular denir. Özel olarak merkezden geçen kirişler yani birim çemberin çapları da birer hiperbolik doğrudur. [1]

4.2.4 TANIM : Bu gösterimde açı; kesişen iki eğrinin kesim noktalarındaki teğetler arasındaki açı olarak tanımlanır. [1]

Birim disk içindeki iki hiperbolik doğrunun birbirine göre üç değişik durumu vardır.



a b c

Şekil 4.9.a Şekil 4.9.b Şekil 4.9.c

D'de Kesişmeyen Doğrular D'de Paralel Doğrular D'de Kesişen Doğrular

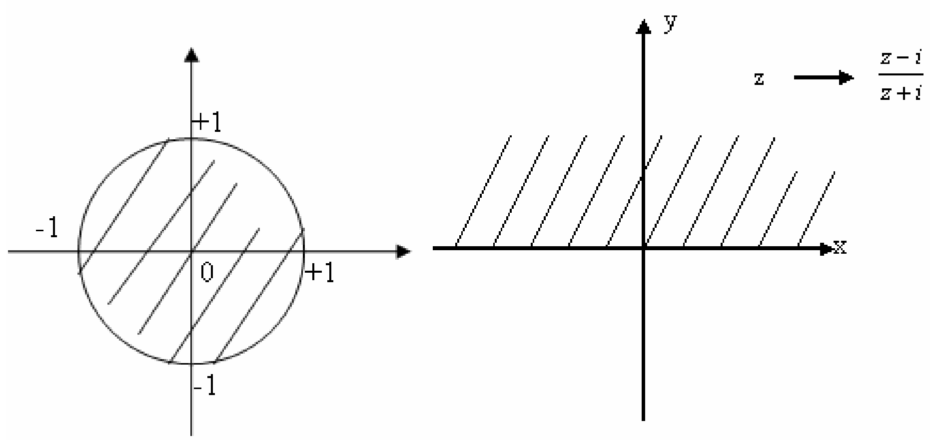
4.2.5 TANIM : İki doğrunun uç noktası dahil hiçbir ortak noktası yok ise bunlara kesişmeyen doğrular denir. (Şekil 4.9.a) [1]

4.2.6 TANIM : İki doğrunun ortak bir uç noktası var ise bu doğrulara paralel doğrular denir. (Şekil 4.9.b) [1]

4.2.7 TANIM : İki doğrunun bir hiperbolik ortak noktası var ise, bunlara kesişen doğrular denir. (Şekil 4.9.c) [1]

4.2.8 TEOREM: Üst yarı düzlem gösterimi ve birim çember gösterimi birbirine denktirler.

İSPAT: k(z) = $\frac{z-i}{z+i}$ dönüşümü alınırsa bu üst yarı düzlemi birim çembere dönüştürür.



Şekil 4.10 Şekil 4.11

Birim Çember Gösterimi $|w|=1$ Çemberine Dik Olan Çember

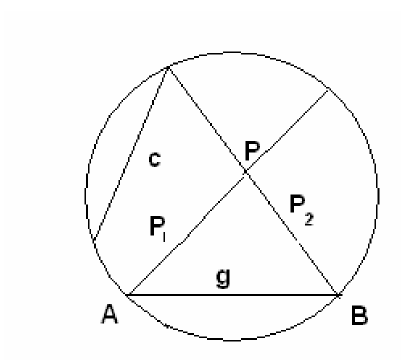
$H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}$ $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

k konform ve topolojik eş yapı dönüşümü olduğundan üst yarı düzlem gösterimindeki bütün özellikler çember gösterimi içinde elde edilir.

Bu dönüşümle H^2 deki hiperbolik doğrular $|w| = 1$ çemberine dik olan çembere dönüşürler. [2]

4.3 KLEIN GÖSTERİMİ

Hiperbolik geometri için ilk gösterim 1870 yılında Klein tarafından verilmiştir. [1]



Şekil 4.12

Klein Gösterimi

4.3.1 TANIM : Hiperbolik düzlem olarak herhangi bir çemberin iç bölgesi alınır. [1]

4.3.2 TANIM: Hiperbolik noktalar herhangi bir çemberin iç bölgesindeki noktalardır. [1]

4.3.3 TANIM: Hiperbolik doğrular verilen çemberlerin kirişleridir. [1]

4.3.4 TANIM: Eğer hiperbolik doğruların ortak bir uç noktası varsa iki doğruya paralel denir. [1]

5. BÖLÜM
HİPERBOLİK GEOMETRİ VE ÖKLİD GEOMETRİSİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

5.1 Nokta

5.1.1 E - Nokta:

Kısımları olmayan şeydir. [5]

5.1.2 H - Nokta :

$H^2 = \{ x + iy \mid y > 0 \}$ olmak üzere H^2 deki noktalara hiperbolik nokta denir. [1]

- Hiperbolik geometride düzlem tanımı açıkça verildiğinden bu düzlem üzerinde bulunan her noktada hiperbolik nokta olarak açıkça tanımlanabilir. Euclid geometrisinde ise nokta tanımı yeterince belirgin değildir.

5.2 Düzlem

5.2.1 E - Düzlem:

Üzerinde bulunan bütün doğrulara göre aynı kalan yüzeydir. [5]

5.2.2 H - Düzlem :

$H^2 = \{ x + iy \mid y > 0 \}$, üst yarı düzlem hiperbolik düzlemdir. [1]

- İki tanımdan da anlaşılacağı gibi Euclid düzlemi çok daha soyut kalmaktadır. Hiperbolik düzlemde sınırlandırılmış bir alan mevcuttur. Üst yarı düzlem tanımından yola çıkarak y>0 olan bölge düzlem olarak kabul edilirken $y \leq 0$ olan bölgeyi düzlem tanımı içine almamaktadır.

5.3 Doğru

5.3.1 E- Doğru:

Her noktasında kendisinin aynı kalan çizgidir. [5]

5.3.2 H- Doğru:

Hiperbolik doğrular verilen çemberin kirişleridir. (gösterim 4.3 e göre)

5.3.3 E-Doğru Denklemi:

d: { (x,y) $|ax + by + c = 0$, a,b,c,x,y $\in$ IR }

5.3.4 H-Doğru Denklemi:

H: { (x,y) $|(x-a)^2 + y^2 = r^2$, a,x,r $\in$ IR, y $\succ 0$ }

- Hiperbolik doğru tanımında da belirttiği gibi iki tanımında ortak olan noktası R eksenine dik olan Euclid doğrularının da üst yarı düzlemde kalan kısımları birer hiperbolik doğru olmaktadır. Bunun dışında hiperbolik doğrular R eksenine dik olan çemberin üst yarı düzlemde kalan yay parçalarıdır. Doğru denklemlerinede dikkat edilirse hiperbolik doğru bir yay parçası olduğundan çember denkleminden yararlanılmıştır.

5.4 Paralel Doğru

5.4.1 H-Paralel Doğru:

Üst yarı düzlem gösterimini baz alırsak, ortak uç noktası olan iki hiperbolik doğru paraleldir. [1]

5.4.2 E- Paralel Doğru:

Aynı düzlemde bulunan ve hiçbir ortak noktası olmayan doğrulara paralel doğrular denir. [5]

- Burada Euclid geometrisi ile hiperbolik geometri arasında ki önemli farklardan biri görülmektedir.Euclid geometrisinde paralel doğruların hiçbir şekilde kesişmeleri ve ortak noktaları olmamasına rağmen hiperbolik geometride iki doğrunun paralelliğinden söz etmemiz için ortak bir uç noktası olması gerektiğini görüyoruz. Doğru tanımında IR eksenine dik olan Euclid doğrularının üst yarı düzlemde kalan kısımları da birer hiperbolik doğrudur şeklinde belitmiştik. Bu tanımdan yola çıkarsak R eksenine dik olan iki doğru Euclid geometrisine göre paralelken, hiperbolik geometride ortak uç noktaları olmadığından dolayı paralel olarak kabul edilemez.

5.5 Kesişen Doğrular

5.5.1 E- Kesişen Doğrular:

Aynı düzlemde bulunan ve paralel olmayan doğrulara kesişen doğrular denir. [5]

5.5.2 H- Kesişen Doğrular:

Uç noktaları hariç ortak bir hiperbolik noktası olan iki doğruya denir. [6]

- Kesişen doğruların tanımında gerek Euclid geometrisinde gerekse hiperbolik geometride ortak bir noktadan bahsedilmektedir. Bu iki tanımın benzer tarafının olması yanında hiperbolik geometride bu ortak noktanın uç noktası olması hariç tutulmuştur çünkü bir önceki tanımda ortak uç noktası olan doğrular paralel olarak tanımlanmıştır. Euclid geometrisinde iki noktadan yalnız bir tek doğru geçer halbuki hiperbolik kesişen doğru tanımına bakılırsa iki noktadan faklı iki hiperbolik doğru geçebilir.

5.6 Kesişmeyen Doğrular

5.6.1 E- Kesişmeyen Doğrular:

Aynı düzlemde bulunan ve hiçbir ortak noktası olmayan doğrulara kesişmeyen doğrular denir.

5.6.2 H- Kesişmeyen Doğrular:

Uç noktası dahil hiçbir ortak noktası olmayan doğrulara kesişmeyen doğrular denir.

- Euclid geometrisinde paralel doğrular kesişmeyen doğrulardır şeklinde bir genellemeye gidilebilirken hiperbolik geometride görülüyor ki uç noktası dahil hiçbir ortak noktası olmayan doğrular kesişmeyen doğrulardır şeklindeki tanımdan paralel olarak kabul edilen doğru ile kesişmeyen doğru net bir şekilde farklıdır.

5.7 Doğru Parçası

5.7.1 E- Doğru Parçası:

Şekil 5.1 Doğru Parçası

Bir doğrunun A ve B gibi farklı noktaları ile bu noktalar arasında kalan tüm noktaların kümesine AB doğru parçası denir. [6]

5.7.2 H- Doğru Parçası:

z ile w gibi iki noktayı birleştiren hiperbolik doğrusunun bu noktalar arasında kalan yay parçasına hiperbolik doğru parçası denir ve $\{ z, w \}$ ile gösterilir.

- Euclid geometrisi ile hiperbolik geometri tanımında aslında büyük benzerlikler olmasına karşın hiperbolik doğru parçası tanımında bir yay parçasından bahsedilmektedir.

5.7.3 E- Bir Doğru Parçasının Uzunluğu:

Bir (x, d) metrik uzayında $x, y \in X$ alalım.

$d (x, y) = \min \{ d (x, y) \mid x, y \in X \}$

5.7.4 H- Doğru Parçasının Uzunluğu:

$\{ z, w \}$ doğru parçasının uzunluğuna z ile w arasındaki hiperbolik uzaklık denir ve $p(z, w)$ ile gösterilir. [1]

5.7.5 TEOREM:

H^2 de z ve w herhangi iki nokta olsun. Bunlar arasındaki hiperbolik uzaklık bu iki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. [1,2]

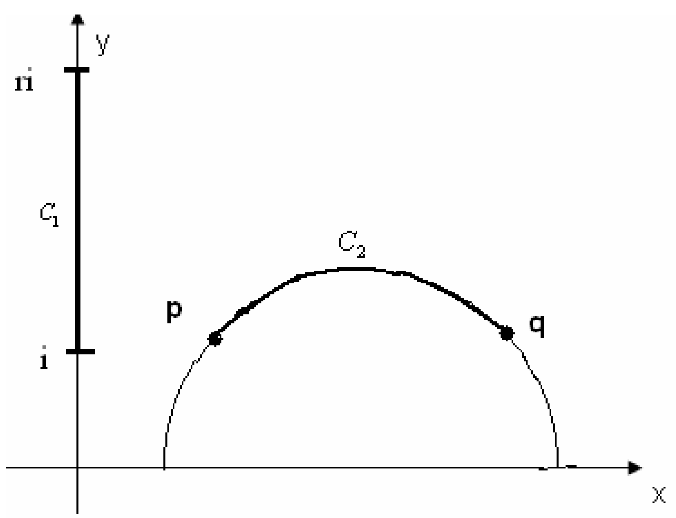
İSPAT:

PSL (2, IR) grubunun hiperbolik doğruların kümesi üzerinde geçişli olduğunu ve hiperbolik uzunlukların PSL(2, IR)' nin altında değişmeyeceğini I. Bölümde ispatlamıştık.

Böylece p ve q yu birleştiren hiperbolik C_1 doğru parçasını sanal eksen üzerinde alabiliriz. C_2 de p ve q' yu birleştiren x = x(t), y = y(t), $t_0 \leq t \leq t_1$ şeklinde herhangi bir parçalı sürekli diferansiyellenebilir eğri olsun.

$\left(x(t_0) \quad , y(t_0) \right)$, (0,k) ve

$\left(\gamma(t_1) , \gamma(t_1) \right)$ ise (0,k) noktası olsun.



Şekil 5.2 H İki Nokta Arasındaki En Kısa Uzaklık

C_2 eğrisinin uzunluğu;

$$L(C_2) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}}{y(t)} \right] dt$$

$$\geq \int_{t_0}^{t_1} \left[\left| \frac{dy(t)}{dt} \Big/ y(t) \right| \right] dt$$

$$\geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} \big(y(t)\big) dt = \left[\log y(t)\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$= \log y(t_1) - \log y(t_0) = \log \frac{y(t_1)}{y(t_0)} = \log \frac{k_1}{k_0} = L(C_1)'dir.$$

Bu eşitlik için gerek ve yeterli koşul $\frac{dx}{dt} = 0$ ve $\frac{dy}{dt}$ nin değişmez işarete sahip olması, yani $C_2 = C_1$ olmasıdır.

- Doğru parçası tanımlarında önemli benzerlikler bulunmaktadır. Gerek Euclid geometrisinde gerekse hiperbolik geometride iki nokta arasındaki uzaklık bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğuna eşittir.

5.8 İki Nokta Arası Uzaklık

5.8.1 E_ İki Nokta Arasındaki Uzaklık:

IR üzerinde x ve y iki nokta olmak üzere, bu iki nokta arasındaki uzaklık $|x-y|$'dir.

d : IR x IR $\rightarrow$ IR d(x, y) = $|x-y|$ fonksiyonu bir metriktir ve bu metriğe Euclid metriği denir.

IR^2 de ise $\forall$ x = (x_1, x_2) , y = (y_1, y_2) $\in$ IR^2 için;

d(x, y) = $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ şeklindeki metrik IR^2 deki doğal metriktir (Euclid metriği). [8]

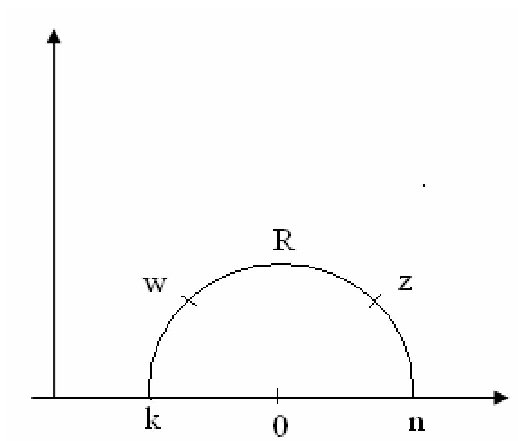
5.8.2 H- İki Nokta Arasındaki Uzaklık:

{ z, w } doğru parçasının uzunluğuna z ile w arasındaki hiperbolik uzaklık denir ve p(z,w) ile gösterilir. [1]

5.8.3 TEOREM:

z, w $\in H^2$ için p(z,w) = ln $\dfrac{|z - \overline{w}| + |z - w|}{|z - \overline{w}| - |z - w|}$

İSPAT:



Şekil 5.3 İki Nokta Arası Hiperbolik Uzaklık

z ile w noktalarını birleştiren hiperbolik doğruya Q diyelim. Bu doğrunun reel ekseni kestiği noktalara k ve n diyelim.

S(z) = $\dfrac{z-n}{z-k}$ dönüşümü Q doğrusunun imajiner eksene dönüştürür. S(z) = pi, S(w)= qi bu şekilde bulunan pi ve qi noktalarına $U_{1/q} = 1/p \bullet z$ dönüşümünü uygulayalım.

$$U_{1/p}(\text{ip}) = \frac{1}{p} ip = i \qquad \text{U}_{1/q}(\text{qi}) = \frac{\text{q}}{\text{p}}\text{i} = \text{ri}$$

US(z) = i , US(w) = ri $\Rightarrow$ g(z, w) = g(i, ri) = lnr

T(z, w) = T(i, ri) = $\left|\frac{1-r}{r+1}\right| = \frac{r-1}{r+1}$ (T fonksiyonu invariant)

lnr denkleminden r = $e^{P(z,w)}$ bulunur.

$$T(z, w) = \frac{e^{p(z,w)} - 1}{e^{p(z,w)} + 1}$$

$$e^{p(z,w)} = \frac{T(z,w)+1}{1-T(z,w)} = \frac{1 + \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|}$$

$$= \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|}$$

p(z, w) = ln $\frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|}$ bulunur. [1]

- Örnekte de görüldüğü gibi iki nokta arasındaki Euclid doğrusu boyunca ölçülen uzunluk hiperbolik doğru boyunca ölçülen uzunluktan faklıdır.

5.9 Bir Yay Uzunluğu

5.9.1 E- Bir Yay Uzunluğu:

Euclid geometrisinde bir yay elemanının difaransiyeli $d_s = |d_z|$ olarak tanımlanır.

$\beta : I \to R^2$, $\beta(t) = (x(t),\ y(t))$, x ve y sürekli parçalı diferansiyellenebilir olsunlar. β nın uzunluğu;

$$\ell(\beta) = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \text{dir. [1]}$$

5.9.2 H- Bir Yay Uzunluğu:

Üst yarı düzlem gösteriminde;

$$ds = \frac{|dz|}{y} \quad dir .$$

$\gamma : I \to H^2$ parçalı sürekli diferansiyellenebilir eğrisinin uzunluğu:

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \ dt}}{y} \ . \ dt \qquad \text{dir.}$$

5.9.3 AÇIKLAMA:

Hiperbolik düzlemde z değişken, z_0 sabit noktalar olmak üzere; z, IR eksenine yaklaşırken $d(z_0, z) \to \infty$ olur. Şöyle ki;

$ds = \dfrac{|dz|}{y}$ *idi* z'nin IR eksenine yaklaşması demek y nin sıfıra gitmesi demektir. Dolayısıyla;

$$\lim_{y \to 0} ds = \lim_{y \to 0} \frac{|dz|}{y} = \infty \qquad \text{olup } d(z_0, z) \to \infty \text{ olur.}$$

Bu nedenle Euclid uzunlukları eşit olan iki doğru parçasından gerçel eksene daha yakın olanın hiperbolik uzunluğu daha büyüktür. [1,2,14]

5.10 Metrik

5.10.1 E- Metrik:

R^n deki $\forall$ xi = x, yi = y, i = 1,2,3…………,n

Noktaları için $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (xi - yi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlanan

$d: R^n \times R^n \rightarrow R^+$ fonksiyonu metriktir ve bu metriğe R^n deki doğal veya Euclid metriği denir. [8]

5.10.2 ÖRNEK:

IR üzerinde $\forall$ x, y $\in$ IR için $d(x, y) = |x-y|$ $d: IR \times IR \rightarrow IR^+$ fonksiyonu bir metriktir. Buna R deki Euclid metriği denir. [8]

1) $\forall$ x, y $\in$ IR için $|x-y| \geq 0$ dır. (mutlak değer özelliği)

2) $d(x, y) = 0 = |x-y| \Leftrightarrow x = y$ dir.

3) $\forall$ x, y $\in$ IR için $d(x, y) = |x-y| = |y - x| = d(y, x)$ (mutlak değer özelliği)

4) $\forall$ x, y, z $\in$ IR için;

$d(x, y) \leq d(x, z) + (z, y)$

$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

5.10.3 ÖRNEK:

IR^2 üzerinde $\forall\, x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in IR^2$ için;

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Şeklinde tanımlanan $d: IR^2 \times IR^2 \rightarrow IR^+$ fonksiyonu IR^2 deki Euclid metriğidir.

1) $\forall\, x, y \in IR^2$ için $d(x, y) \geq 0$ dır. Çünkü;

$(x_1 - y_1)^2 \geq 0$, $(x_2 - y_2)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0$ dır.

2) $d(x, y) = 0 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \Leftrightarrow$

$$(x_1 - y_1)^2 = 0 \qquad x_1 = y_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x_2 - y_2)^2 = 0 \qquad x_2 = y_2$$

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

$$x = y$$

3) $\forall\, x, y \in IR$ için;

$(x_1 - y_1)^2 = (y_1 - x_1)^2$

$(x_2 - y_2)^2 = (y_2 - x_2)^2$ Olduğundan;

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

4) $\forall\, x\, y, z \in IR$ için;

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dir.

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} \quad [8]$$

5.10.3 H- Metrik:

TEOREM: Hiperbolik H^2 düzlemi hiperbolik uzaklık altında bir metrik uzaydır.

$$p(z, w) = \ln \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|}$$

1) $p(z, w) \geq 0 \iff \dfrac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|} \geq 1$

$$|z-\overline{w}| + |z-w| \geq |z-\overline{w}| - |z-w|$$

$$2|z-w| \geq 0$$

$$|z-w| \geq 0$$

2) $p(z, w) = 0 \iff 2|z-w| = 0 \iff z - w = 0 \iff z = w$

3) $p(z, w) = p(w, z)$

$$\ln \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|} = \ln \frac{|w-\overline{z}| + |w-z|}{|w-\overline{z}| - |w-z|} = p(w, z)$$

4) $p(z, w) \leq p(z, w^1) + p(w^1, w)$ dir. Çünkü z ile w arasındaki en kısa uzaklık bunları birleştiren hiperbolik doğru boyunca ölçülendir. p(z, w) en kısa uzaklıktır. 1, 2, 3 ve 4'ten dolayı (H^2, p) metrik uzaydır. [2]

5.11 Açık Yuvar

5.11.1 E_Açık Yuvar:

(x, d) metrik uzayı ile bir $x \in X$ ve $r > 0$ sayısını göz önüne alalım.

$\beta(x, r) = \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}$ kümesine x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar denir. Her metrik uzay bir topolojik uzaydır. $\mathcal{T}_d$ topolojisine d metriğinin ürettiği topoloji denir. [1]

5.11.2 H- Açık Yuvar:

(H^2, p) bir metrik uzay olmak üzere $z, z_0 \in H^2$

$S(z_0, r) = \{ z \mid p(z_0, z) < r \}$ kümesine açık hiperbolik yuvar denir.

Bu açık yuvarların kümesinin taban olduğu bir topoloji tanımlanır. Bu topoloji hiperbolik metrikle elde edilen topolojidir.

- Hiperbolik metrik ile elde edilen topoloji Euclid metriği ile elde edilen topoloji ile aynıdır.

İki topolojinin aynı olduğunu göstermek için birinci topoloji için taban oluşturan kümelerin ikinci topoloji için de taban oluşturduğunu göstermek yeterlidir. Yani her hiperbolik diskin bir Euclid diski olduğunu göstermek yeterlidir. [1]

5.11.3 TEOREM:

Bir hiperbolik yuvar, bir Euclid yuvarıdır. [1]

İSPAT: $\{ z \mid p(z_0, z) = r \}$, z_0 merkezli, r yarıçaplı bir hiperbolik disk olsun.

$p(z_0, z) = r$

$\mathrm{Sin}\ h^2 \frac{1}{2} \quad p(z_0, z) = Sin\ h^2 \frac{1}{2} r$

$$\frac{|z - z_0|^2}{4\, im\,(z).im\,(z_0)} = Sin\ h^2 \frac{1}{2} r$$

$$|z - z_0| = 4y.y_0 \bullet \mathrm{Sin}\ h^2 \frac{1}{2} r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4y.y_0 \bullet \mathrm{Sin}\ h^2 \frac{1}{2} r$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 + y_0^{\ 2} = 4yy_0 \bullet \mathrm{Sin}\ h^2 \frac{1}{2} r + 2yy_0$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 + y_0^{\ 2} = 2yy_0 \bullet \underbrace{(2\,\mathrm{Sin}\ h^2 \frac{1}{2} r + 1)}_{\mathrm{Cos\ hr}}$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 \bullet \mathrm{Coshr} + (y_0 . \mathrm{Coshr})^2 = (y_0 . \mathrm{Coshr})^2 - y_0^{\ 2}$$

$$(x - x_0) + (y - y_0 . \text{Coshr})^2 = y_0^2 \underbrace{(\text{Cosh}^2 r - 1)}_{\text{Sinh}^2 r}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 . \text{Coshr})^2 = y_0^2 \, \text{Sinh}^2 r$$

$(x_0 , y_0 . \text{Coshr})$ merkezli, $y_0 . \text{Sinhr}$ yarıçaplı bir Euclid diskidir.

- Hiperbolik diskin merkezi, Euclid diskinin merkezine göre reel eksene daha yakındır.

Şimdi bunları anlatabilmek için bazı örnekler üzerinde duralım.

5.11.4 ÖRNEK:

$\{ z \mid p(z, 1 + 4i) = 0{,}5 \}$ hiperbolik diskin Euclid merkezi ve yarıçapını bulunuz. [1]

$x_0 = 1 \qquad y_0 = y_0 . \text{Coshr} = 4. \text{Cosh } 0{,}5$

$= 4. 1{,}2 = 4{,}8$

R(yarıçap) $= y_0 . \text{Sinhr} = 4 . \text{Sinh } 0{,}5 = 4 . 0{,}52 = 2{,}08$

$R = 2{,}08$

(1, 4, 8) merkezli ve 2,08 yarıçaplı Euclid diskidir.

5.11.5 TEOREM: $d(z_0^*, z) = R$ Euclid diskinin hiperbolik merkezi:

$$z_0^* = (x_0^*, \sqrt{y_0^{*2} - R^2}) \quad \text{ve} \quad \text{yarıçapı} \quad r = \ln \frac{y_o^* + R}{\sqrt{y_0^{*2} - R^2}} \text{, dir. [1]}$$

İSPAT : $x_0^* = x_0 \quad , \quad y_0^* = y_0 . \text{Coshr} \quad , \quad R = y_0 . \text{Sinhr}$

$y_0^{*2} = y_0^2 . \text{Cosh}^2 r$

$R^2 = y_0^2 . \text{Sinh}^2 r$

---

(12) $$y_0^{*2} - R^2 = y_0^2 . \underbrace{(\text{Cosh}^2 r + \text{Sinh}^2 r)}_{1}$$

$$\sqrt{y_0^{*2} - R^2} = \sqrt{y_0^2}$$

$$y_0 = \sqrt{y_0^{*2} - R^2}$$

$$y_0^{*2} = y_0 \,.\, \text{Coshr}$$

$$y_0^{*2} = y_0 \,.\, \left(\frac{e^r + e^{-r}}{2}\right) = 2y_0^{*2} = y_0 \,(e^r + e^r) \,.\, \frac{e^r}{e^r}$$

$$2.y_0^{*2} \,.\, e^r = y_0 \,.\, e^{2r} + y_0$$

$$0 = y_0 \,.\, e^{2r} - 2y_0^{*2} \, e^r + y_0$$

$$0 = y_0 \, t^2 - 2y_0^{*2} \, t + t$$

$$t_{1/2} = \frac{2.y_0^* \mp \sqrt{4y_0^* - 4y_0^2}}{2y_0} = \frac{y_0^* \mp R}{y_0} \qquad \text{(12) den.}$$

$$e^r = \frac{y_0^* + r}{y_0} = r = \ln \frac{y_o^* + R}{y_0} = \ln \frac{y_0^* + R}{\sqrt{y_0^* - R^2}} \qquad \text{(12) den.}$$

5.11.6 TEOREM: D de orjin merkezli bir hiperbolik disk yine orjin merkezli Euclid diskidir ve $R = \tanh \frac{1}{2} r$ dir. [1]

İSPAT: $z \in D$ olmak üzere $\{ z \mid p(0, z) = r \}$ orjin merkezli r yarıçaplı bir hiperbolik disktir.

$$\frac{1}{2} p(0, z) = \frac{1}{2} r$$

$$\text{Cosh}^2 \frac{1}{2} p(0, z) = \text{Sinh}^2 \frac{1}{2} r$$

$$| 0\text{-}z |^2 = \text{Sinh}^2 \frac{1}{2} r$$

$$\frac{|0 - z|^2}{(1 - |0|^2)(1 - |z|^2)} = Sinh^2 \frac{1}{2} r$$

$$|z|^2 = (1 - |z|^2) = Sinh^2 \frac{1}{2} r$$

$$|z|^2 (1 + Sinh^2 \frac{1}{2} r) = Sinh^2 \frac{1}{2} r$$

$$|z|^2 .Cosh^2 \frac{1}{2} r = Sinh^2 \frac{1}{2} r$$

$$|z|^2 = \frac{Sinh^2 \frac{1}{2} r}{Cosh^2 \frac{1}{2} r} \Rightarrow |z|^2 = \tanh^2 \frac{1}{2} r$$

$|z| = \tanh\frac{1}{2} r$ Bu da orjin merkezli $R = \tanh\frac{1}{2} r$ yarıçaplı

bir Euclid diskidir.

5.11.7 ÖRNEK: p(0, z) = 3 hiperbolik diskin Euclid yarıçapını bulunuz.

$$R = \tanh\frac{1}{2} r = \tanh\frac{1}{2} 3 = \tanh 1{,}5 = 0{,}90 \qquad [1]$$

5.11.8 TEOREM: $|z| = R$ Euclid çemberinin hiperbolik yarıçapı

$r = \ln\frac{1+R}{1-R}$ dir. [1]

İSPAT: Bir önceki teoremden $R = \tanh\frac{1}{2} r$ idi.

$$R = \tanh\frac{1}{2} r = \left(\frac{e^{1/2 r} - e^{-1/2 r}}{e^{1/2 r} + e^{-1/2 r}}\right) \bullet \frac{e^{1/2 r}}{e^{1/2 r}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = R.e^r + R = e^r - 1$$

$$= R.e^r - e^r = -1 - R$$

$$= \frac{e^r(R-1)}{(R-1)} = \frac{-1-R}{R-1}$$

$$e^r = \frac{1+R}{1-R}$$

$$r = \ln\frac{1+R}{1-R} \; (olur)$$

5.11.9 TEOREM: D' de z_0 merkezli bir hiperbolik disk k. z_0 merkezli bir Euclid diskidir. [1]

İSPAT: $\{z \mid p(z_0, z) = r\}$

$$p(z_0, z) = r$$

$$Sinh^2\frac{1}{2}p(z_0, z) = Sinh^2\frac{1}{2}r$$

$$\frac{|z-z_0|^2}{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)} = Sinh^2\frac{1}{2}r$$

$$|z-z_0|^2 = (1-|z_0|^2)(1-|z|^2) \bullet Sinh^2\frac{1}{2}r$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (1-|z_0|^2).(1-x^2-y^2).Sinh^2\frac{1}{2}r$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_o^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = (1-|z_0|^2)(1-x^2-y^2).Sinh^2\frac{1}{2}r$$

$$x^2(1+Sinh^2\frac{1}{2}r - |z_0|^2.Sinh^2\frac{1}{2}r) + y^2(1+Sinh^2\frac{1}{2}r - |z_0|^2.Sinh^2\frac{1}{2}r) - 2xx_0 - 2yy_0 + |z_0|^2$$

$= (1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r$ bu denklemde;

$1+Sinh^2\frac{1}{2}r - |z_o|^2.Sinh^2\frac{1}{2}r = A$ diyelim ve bu eşitliğin iki tarafını A ya bölelim.

$$x^2 + y^2 - 2x\frac{x_0}{A} - 2y\frac{y_0}{A} = \frac{(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r - |z_0|^2}{A}$$

$$x^2 - \frac{2xx_0}{A} + (\frac{x_0}{A})^2 + y^2 - \frac{2yy_0}{A} + (\frac{y_0}{A})^2 =$$

$$\frac{(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r - |z_0|^2}{A} + \frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{A^2}$$

$$(x - \frac{x_0}{A}) + (y - \frac{y_0}{A}) = \frac{A(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r - |z_0|^2 A + |z_0|^2}{A^2}$$

İkinci tarafın payını düzenlersek;

$$\left\{1 + (1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r\right\}(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r - |z_0|^2.\left\{1 + (1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r\right\}.|z_0|^2$$

$$= (1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r + (1-|z_0|^2)^2.Sinh^4\frac{1}{2}r - |z_0|^2 - |z_0|^2(1+|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r + |z_0|^2$$

$$= (1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r(1+|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r$$

$$= (1-|z_0|^2)^2.Sinh^2\frac{1}{2}r.Cosh^2\frac{1}{2}r$$

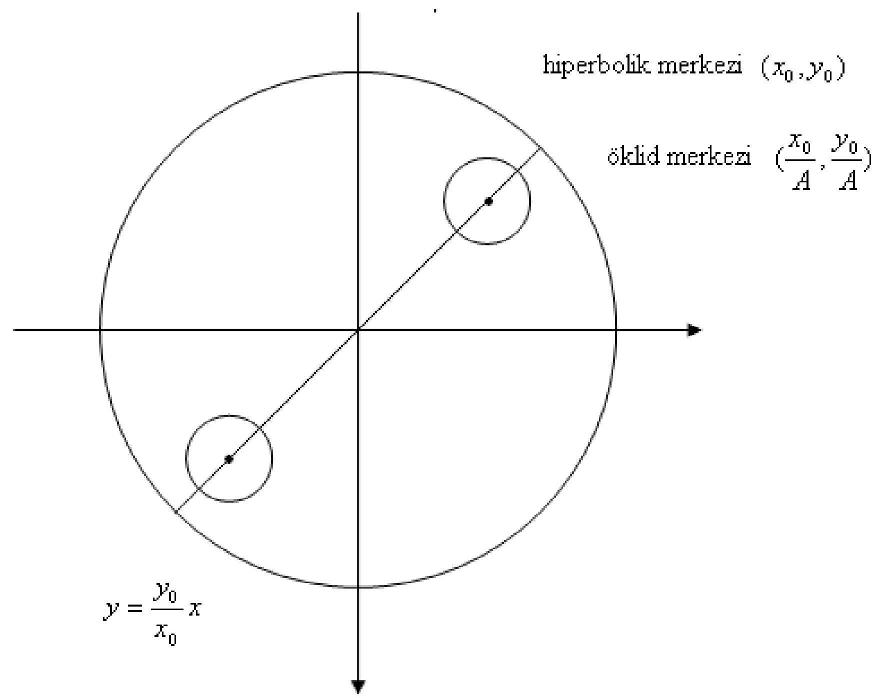
$$= \frac{1}{4}(1-|z_0|^2)^2.Sinh^2 r$$

$$(x - \frac{x_0}{A})^2 + (y - \frac{y_0}{A})^2 = \frac{(1-|z_0|^2)^2.Sinh^2 r}{4A^2}$$

$$A = 1 + (1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r$$

$$\left(\frac{x_0}{1+(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r}\ ,\ \frac{y_0}{1+(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r}\right) \qquad \text{Euclid merkezi}$$

$$R = \frac{(1-|z_0|^2).Sinhr}{2\left\{1+(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{2}r\right\}} \qquad \text{Euclid yarıçapı}$$



Şekil 5.4 D' de Bir Hiperbolik Diskin

Hiperbolik ve Euclid Merkezi

$$A = 1+(1-|z_0|^2).Sinh^2\frac{1}{A}r > 1\ ,\quad x_0 > 0,\quad y_0 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x_0}{A} < x_0\ ,\quad \frac{y_0}{A} < y_o \Rightarrow \quad A > 1,\ x_0 < 0,\ y_0 < 0$$

$$\frac{x_0}{A} > x_0\ ,\quad \frac{y_0}{A} > y_0 \qquad \text{dır.}$$

Her iki durumda şekilden de görüldüğü gibi bir hiperbolik diskin hiperbolik merkezi ile Euclid merkezi $y = \frac{y_0}{x_0}x$ doğrusu üzerindedirler ve Euclid merkezi orjine daha yakındır. [1,2,13]

5.11.10 ÖRNEK:

p{ z, (0.5 , 0.3) } hiperbolik diskinin Euclid merkezi ve yarıçapını bulalım.

z_0 = (0.5 , 0.3) $\Rightarrow |z_0|^2 (0.5)^2 + (0.3)^2 = 0.25 + 0.09$

$= 0.34$

$A = 1 + (1-|z_0|^2).Sinh^2 \frac{1}{2}r = 1 + (1 - 0.34) = 1 + 2.99 = 3.99$

$x_0^* = \frac{x_0}{A} = \frac{0.5}{3.99} = 0.12$ $\qquad$ $y_0^* = \frac{y_0}{A} = \frac{0.3}{3.99} = 0.8$

$z_0^* = (0.12 \ , \ 0.07)$

$$R = \frac{(1 - |z_0|^2).Sinhr}{2A} = \frac{0.66\,x10}{2x3.99} = \frac{6.6}{7.98} = 0.8 \quad [1]$$

5.12 Diskin Çevresi

5.12.1 H- Geometride Çevre Hesabı:

r yarıçaplı bir hiperbolik diskin hiperbolik çevresi 2π.Sinhr' dir. [1]

İSPAT:

$$h(c) = \int_c \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} = \int_c \frac{2\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}}{1 - |z|^2}.d\theta$$

Her hiperbolik diskin Euclid diski olduğunu biliyoruz.

P(0, z) = r , | z | = R , $R = \tanh\frac{1}{2}r$

x = R.Cosθ $\qquad \dfrac{dx}{d\theta}$ = -R.Sinθ

y = R.Sinθ $\qquad \dfrac{dy}{d\theta}$ = R.Cosθ

$$h(c) = \int_0^{2\pi} \frac{2.\sqrt{R^2.(Sin^2\theta + Cos^2\theta)}}{1-R^2} = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1-R^2}.d\theta = \frac{2.2\pi R}{1-R^2} = \frac{4\pi R}{1-R^2}$$

$$= \frac{4\pi.\tanh\frac{1}{2}r}{1-\tanh^2\frac{1}{2}r} = \frac{4\pi\dfrac{Sinh\frac{1}{2}r}{Cosh\frac{1}{2}r}}{\dfrac{Cosh^2\frac{1}{2}r - Sinh^2\frac{1}{2}r}{Cosh^2\frac{1}{2}r}}$$

$$= 4\pi\frac{Sinh\frac{1}{2}r}{Cosh\frac{1}{2}r} \cdot \frac{Cosh^2\frac{1}{2}r}{\underbrace{Cosh^2\frac{1}{2}r - Sinh^2\frac{1}{2}r}_{1}}$$

$$= 4\pi.Sinh\frac{1}{2}r \;.\; Cosh\frac{1}{2}r$$

$$= 4\pi.\frac{1}{2}.\text{Sinr} = 2\pi.\text{Sinr}$$

5.12.2 E- Diskinin Çevresi

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2} = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-R.Sin\theta)^2 + (R.Cos\theta)^2}.d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2.\underbrace{(Sin^2\theta + Cos^2\theta)}_{1}}.d\theta = R.\theta\,\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

(x = R.Cosθ , y = R.Sinθ)

5.12.3 ÖRNEK: r = 0.7 olan hiperbolik çemberin çevresini bulunuz. [1]

$$Ç = 2\pi.Sinr = 2\pi.Sin0.7 = 4.76$$

5.12.4 ÖRNEK: r =0.7 olan Euclid çemberinin çevresini bulunuz.

$Ç=2\pi r = 2.3,14.0,7 = 4,40$

- Görüldüğü gibi yarıçapı aynı olan Euclid diski ile hiperbolik diskin çevreleri faklıdır.

5.13 Dairenin Alanı

5.13.1 E-Dairenin Alanı

r yarıçaplı dairenin alanı πr^2 şeklinde bulunur. [6]

5.13.2 H-Dairenin Alanı

r yarıçaplı bir hiperbolik dairenin alanı;

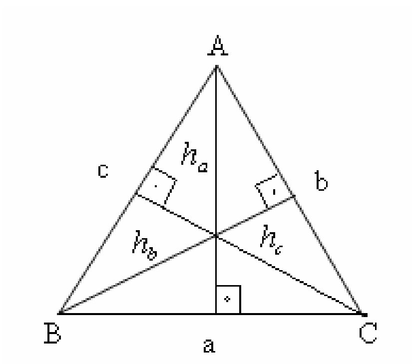
4π Sinh($\frac{1}{2}$) r dir. [1,2]

- Formüllerden de anlaşılacağı gibi Euclid dairesinin alanın ile hiperbolik dairenin alanları birbirinden farkıdır.

5.14 Üçgenin Alanı

5.14.1 E-Üçgenin Alanı

Euclid geometrisinde üçgenin alanı, şu şekilde bulunur: [6]



$$\frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} = A(\widehat{ABC}) \text{ dir.}$$

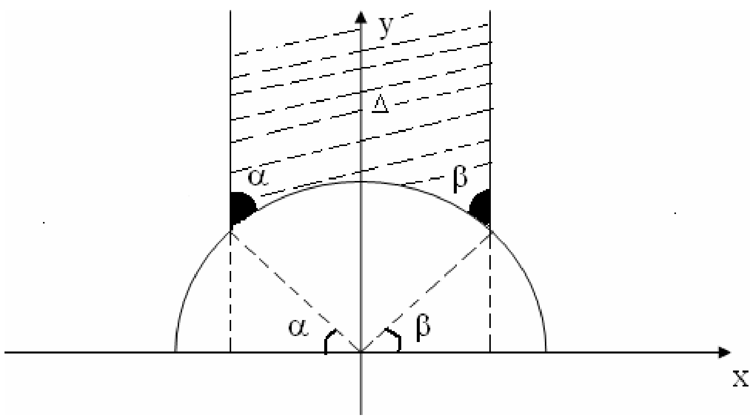
Şekil 5.5 Euclid Üçgeninin Alanı

5.14.2 H-Üçgenin Alanı

5.14.3 TEOREM: Açıları α, β, γ olan bir hiperbolik üçgenin hiperbolik alanı;

$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ formülü ile bulunur. [2]

İSPAT: Δ hiperbolik üçgen olsun. İlk önce Δ nın iki kenarının düşey hiperbolik doğruları olduğu durumunu göz önüne alalım.



Şekil 5.6 H^2 Hiperbolik Üçgen

Δ nın tabanı Euclid yarı çemberinin bir parçasıdır.

$z \rightarrow z + k \quad , \; k \in R$

$z \rightarrow \lambda . z \quad , \; \lambda > 0$

Dönüşümlerini uyguladığımızda bir yarım çemberin O merkezli ve 1 yarıçapına sahip olduğunu farz edebiliriz.

Bu dönüşümler hiperbolik alanı değiştirmez.

Düşey doğrular hala düşeydir ve sıfır açılar korunur.

Δ üçgeni birim çember ve $x = p$, $q = x$ $(-1 \leq p \leq q \leq 1)$ doğruları ile sınırlanmış olsun.

$P = -\text{Cos}\alpha = \text{Cos}(\pi - \alpha)$ (1)

$q = \text{Cos}\beta$

Üçüncü açı ise sıfırdır.

$$\mu(\Delta) = \iint_{\Delta} \frac{dx \;-\; dy}{y^2} \;=\; \int_p^q dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2}$$

Çember birim çember olduğundan $\quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \sqrt{1-x^2}$

$$\mu(\Delta) = \int_p^q dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} y^{-2}\, dy = \int_p^q -\frac{1}{y}\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_p^q \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx \\
&= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -\frac{\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Sin}\theta}.d\theta \\
&= -\theta \Big|_{\pi-\alpha}^{\beta} = -\beta - (-\pi + \alpha) \\
&= -\beta + \pi - \alpha \\
&= \pi - \alpha - \beta
\end{aligned}$$

($x = \operatorname{Cos}\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$ olup)

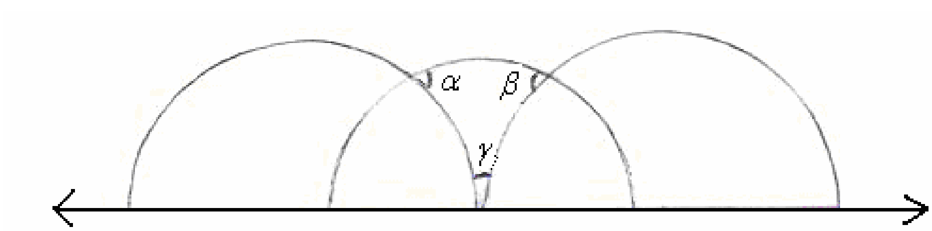
$x = \operatorname{Cos}\theta$

$dx = -\operatorname{Sin}\theta \,.\, d\theta$

$\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sin}^2\theta = 1$

$1 - \operatorname{Cos}^2\theta = \operatorname{Sin}^2\theta$

II.DURUM:



Şekil 5.7 H^2 Hiperbolik Üçgen

PSL(2,IR) dönüşümlerini uyguladığımızda bu reel eksen üzerindeki köşe ∞ a resmeder.

$T_z = \dfrac{z+c}{z-c}$ dönüşümünü uygularsak;

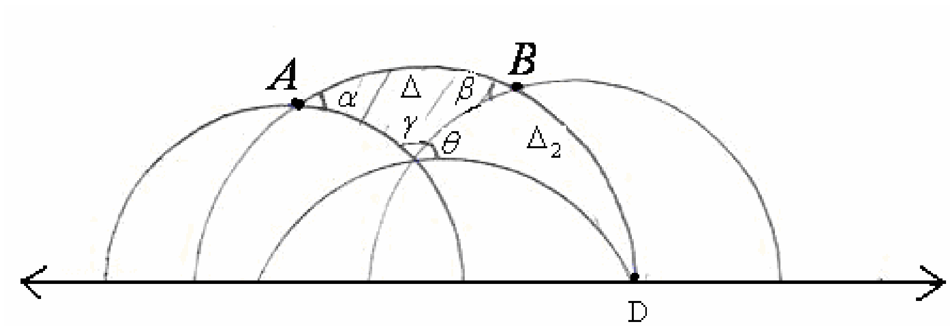
$Tc = \dfrac{c+c}{c-c} = \dfrac{2c}{0} = \infty$ olur.

Alan ve açıların değişmediğini biliyoruz. γ açısı ve 0^0 ve 0^0 olmayan açılar α ve β dır.

Birinci duruma dönüşür.

Alan = π-α-β olur.

III.DURUM



Şekil 5.8 H^2 Hiperbolik Üçgen

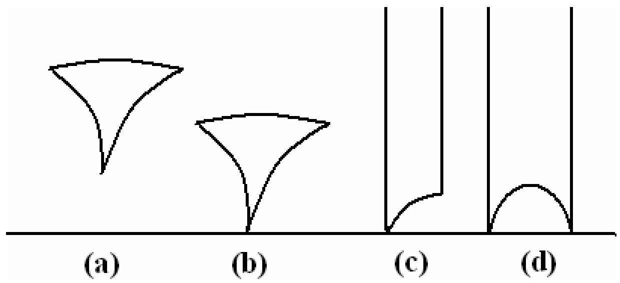
$\mu(\Delta_1) = \pi-\alpha-(\gamma+\theta)$	$\mu(\Delta)=\pi-\alpha-\gamma-\theta-\pi-\theta-\pi-\beta$
$\mu(\Delta_2) = \pi-\theta-(\pi-\beta)$	$\mu(\Delta)=\pi-\alpha-\beta-\gamma$
$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1)-\mu(\Delta_2)$	$\mu(\Delta)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ olur.

- Euclid geometrisinde üçgen alanı hesaplanırken bir kenar uzunluğu ve bu kenara ait yüksekliğe ihtiyaç vardır. Hiperbolik geometride ise üçgenin açıları üzerinden alan hesabına gidilmektedir.

5.15 Poligon

5.15.1 H-Poligon : n tane doğru parçası ile sınırlanan H^2 nin $\mathbb{C}_\infty$ daki kapanışında bulunan bir kapalı kümeye n kenarlı hiperbolik poligon denir.

Eğerki doğru parçası kesişirse kesışimin ortak noktasına poligonun köşesi denir.Hiperbolik üçgenin 4 türünü gösterelim.Üçgenin köşeleri IR $\cup$ $\{\infty\}$ da duruma göre 0,1,2,3 tane olabilir. [4]



Şekil 5.9 Hiperbolik Üçgen Türleri

5.15.2 E-Poligon

$n \geq 3$ olmak üzere, herhangi üçü doğrusal olmayan, faklı $A_1, A_2, \ldots, A_n$ noktaları verilsin.

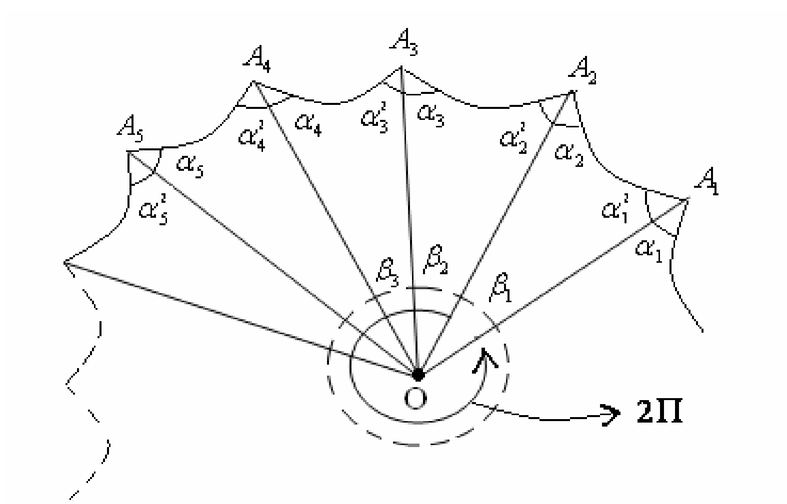
$[A_1A_2],[A_2A_3],.....,[A_{n-1}A_n],[A_nA_1]$ doğru parçalarının uçları dışında ortak noktaları yoksa,

$[A_1A_2]\cup[A_2A_3]\cup.....\cup[A_{n-1}A_n]\cup[A_nA_1]$ kümesine bir çokgen denir.

5.15.3 H-Poligonun Alanı

Açıları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\alpha_n$ olan n kenarlı bir hiperbolik poligonun alanı ;

$(n-2).\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)$ dir. [2]



Şekil 5.10 Hiperbolik Poligon

$$\mu\,(\Delta_1) = \pi - (\,\alpha_1^1 + \alpha_2 + \beta_1)$$

$$\mu\,(\Delta_2) = \pi - (\,\alpha_2^1 + \alpha_3 + \beta_2)$$

$$\vdots$$

$$\mu\,(\Delta) = \sum_{\imath=1}^{n} \mu\,(\,\Delta_{\,1}\,)$$

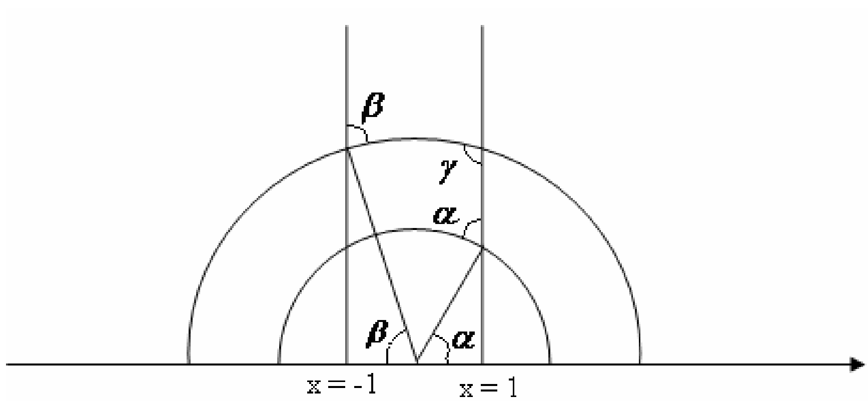
$$= n.\pi - (\,\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

$$= n.\pi - 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots. + \alpha_4)$$

$$= (n\text{-}2).\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) \text{ dir.}$$

5.15.4 ÖRNEK :

x=-1, $x = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$ hiperbolik doğruları ile oluşturulan hiperbolik dörtgenin alanını hesaplayınız.



Şekil 5.11 Hiperbolik Dörtgen

$$\mu\,(P) = (\,n\,\text{-}2\,).\,\pi - (\,\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots. + \alpha_n\,)$$

Gauss- Bonnet teoremi

$$Sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha = 60^{o}$$

$$\gamma = 180^{o} - 70{,}5^{o} = 109{,}5^{o}$$

$$Sin\beta = \frac{\sqrt{8}}{3} = \beta = 70{,}5^{o}$$

$$\mu\,(P) = (4\text{-}2)\,.\,180^{0} - (2 \text{ x } 109{,}5^{0} + 2 \text{ x } 60^{0}) = 21$$

- Euclid geometrisinde çokgenler düzgün ve düzgün olmayan olarak ikiye ayrılır. Kenar uzunlukları eşit ve açıları eş olan çokgenlere, düzgün çokgen diyoruz. Düzgün çokgenlerde alan hesaplamasını üçgenlere ayırarak yapıyoruz. Fakat düzgün olmayan çokgenleri alan hesaplaması yapılabilecek dörtgenlere yada üçgenlere ayıramasak genel bir alan formülleri bulunmamaktadır.

5.16 Çember

5.16.1 H-Çember

Merkezi w_0 ve yarıçapı r olan bir hiperbolik çember w_0 dan hiperbolik uzaklığı r olan hiperbolik noktaların kümesidir. [2]

5.16.2 E- Çember

Euclid uzayında merkezi O ve yarıçapı r olan bir çember, O'dan uzakliğı r olan noktaların kümesidir.

5.17 Orta Nokta

5.17.1 H- Orta Nokta

[z, w] , z ile w arasındaki hiperbolik doğru parçasını göstermek üzere, $\varepsilon \in [z, w]$ ve $p(z, \varepsilon) = p(\varepsilon, w)$ şartını sağlayan ε noktasına [z, w] doğru parçasının orta noktası denir. [1]

5.17.2 E- Orta Nokta

C, A ile B arasında bir nokta olmak üzere, $|AC| = |CB|$ ise C noktasına, [AB] nın orta noktası denir.

A(a), B(b) ve [AB] nın orta noktası C ise, $C\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olur.

5.17.3 TEOREM: p , q > 0 olmak üzere pi ile qi noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta noktası $\sqrt{pq}$ i dir. [1]

İSPAT: pi ile qi noktalarını birleştiren hiperbolik doğru imajiner eksen olduğundan hiperbolik noktası ki gibi bir noktadır. (k > 0)

$$p(\,pi, ki\,) = p(\,ki, qi\,) \rightarrow \ln(p/k) = \ln(k/q)$$

$$\frac{p}{k} = \frac{k}{p} \rightarrow k^2 = pq \;, k = \sqrt{pq}$$

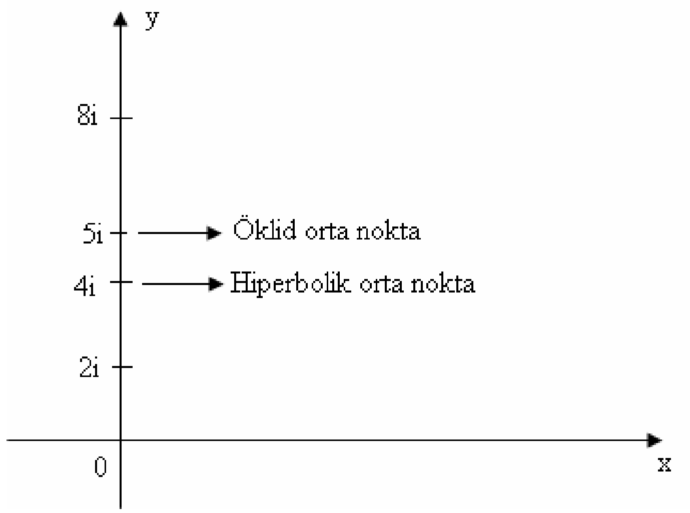
5.17.4 TANIM : Dikkat edilirse iki pozitif reel sayının Euclid anlamında geometrik ortalamasına bu iki sayının hiperbolik ortalaması denir. [1,14]

5.17.5 ÖRNEK: $z_1 = zi, z_2 = 8i$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta noktasını ve Euclid anlamında orta noktasını bularak karşılaştırınız. [1]

Hiperbolik orta noktası $z_0 = \sqrt{2x8}\,i = \sqrt{16}\,i = 4i \quad dir.$

Euclid orta noktası $z_3 = \frac{2i + 8i}{2} = \frac{10\,i}{2} = 5i \quad dir\;.$

- Görülüyor ki hiperbolik orta nokta ile Euclid anlamında orta nokta farklıdır.



Şekil 5.12 Hiperbolik Orta Nokta

5.17.6 ÖRNEK: $z_1 = (1, 3)$, $z_2 = (8, 4)$ noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta noktasını bulunuz. [1]

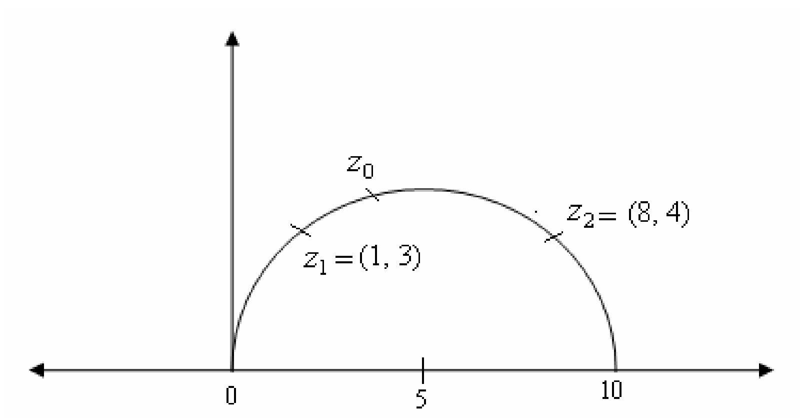
AÇIKLAMA:

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ gibi herhangi iki noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçasının orta noktasını bulmak için, bu noktaları birleştiren hiperbolik doğru bir $T \in PSL(2, IR)$ ile imajiner eksene dönüştürülür. $T(z_1)$ *ile* $T(z_2)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının hiperbolik orta noktası bulunur. Bulunan bu noktanın T^{-1} altındaki resmi verilen z_1 *ile* z_2 noktalarını birleştiren hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta noktasıdır.

ÇÖZÜM:

$$
\begin{aligned}
|z_1 - k| &= |z_2 - k| \\
|1 + 3i - k| &= |8 + 4i - k| \\
(1-k)^2 + 9 &= (8-k)^2 + 16 \\
1 - 2k + k^2 + 9 &= 64 - 16k + k^2 \\
k &= 5 \quad \textit{bulunur} .
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde $|z_1 - k| = r$, $|1+3i-5| = r$ den r = 5 bulunur. (1, 3) ve (8, 4) noktalarından geçen hiperbolik doğru, merkezi k = (5, 0) noktası, yarıçapı
r = 5 olan çemberdir.



Şekil 5.13

Hiperbolik Doğru Parçasının Hiperbolik Orta Noktası

Şekilde görüldüğü gibi z_1 *ve* z_2 noktalarından geçen hiperbolik doğrunun reel ekseni kestiği noktalar (0, 0) ve (10, 0) noktalarıdır.

T(z) $= \dfrac{z-10}{z}$ dönüşümü verilen hiperbolik doğruyu imajiner eksene resmeder.

$$z_1' = T(z_1) = \frac{1+3i-10}{1+3i} = 3i$$

$$z_2' = \frac{8+4i-10}{8+4i} = \frac{1}{2}i$$

$[z_1', z_2']$ doğru parçasının hiperbolik orta noktası $z_0' = 1.22\,i$ noktası olur.

$$T^{-1}(z) = \frac{10}{1-z} \quad , \quad T^{-1}(z_0') = z_0 \qquad z_0 = (4, 4.88i) \qquad \text{bulunur.}$$

5.17.7 TEOREM: Birim diskte reel eksen üzerinde alınan iki x_1 *ve* x_2 noktaları için $[x_1, x_2]$ doğru parçasının hiperbolik orta noktası:

$$x_0 = \frac{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}} \quad dir. \ [1]$$

İSPAT: $x_2 > x_1$ olsun.

$U(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ dönüşümü üst yarı düzlemi birim diske resmeder. İmajiner ekseni de reel eksene dönüştürür.

$U^{-1}(z) = \dfrac{z+1}{-z+1}$ ters dönüşümü ile x_1 *ve* x_2 noktalarını imajiner eksen üzerindeki z_1 *ve* z_2 noktalarına resmedelim.

$$z_1 = U^{-1}(x_1) = \frac{1+x_1}{1-x_1} i$$

$$z_2 = \frac{1+x_2}{1-x_2} i \quad \text{bulunur.}$$

Teorem 5.17.3 e göre $[z_1, z_2]$ doğru parçasının hiperbolik orta noktası:

$$z_0 = \sqrt{\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}} \quad \text{noktalarıdır.}$$

$x_0 = U(z_0)$ olduğundan yerine konarak istenen bulunur.

5.18 Orta Dikme

5.18.1 H- Orta Dikme: $[z_1, z_2]$ hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta noktasından geçen ve bu hiperbolik doğruya dik olan hiperbolik doğruya verilen doğru parçasının orta dikmesi denir.

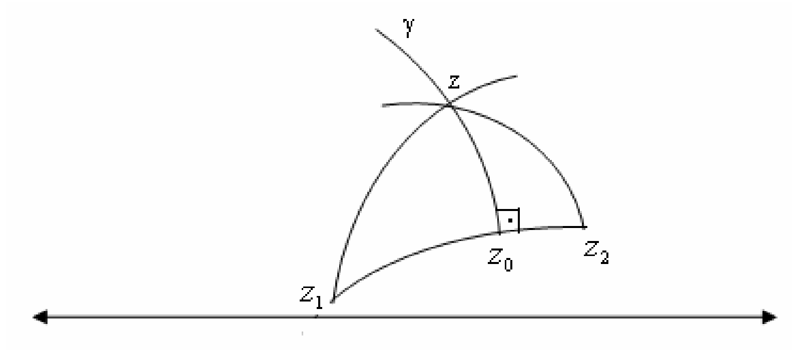
5.18.2 E- Orta Dikme **:**

[AB] doğru parçasının orta noktasından geçen ve bu doğru parçasına dik olan doğruya verilen doğru parçasının orta dikmesi denir.

5.18.3 TEOREM:

γ , $[z_1, z_2]$ hiperbolik doğru parçasının orta dikmesi olsun. γ üzerinde alınan her z noktası için $p(z, z_1) = p(z, z_2)$

İSPAT:



Şekil 5.14

Hiperbolik Doğru Parçasının Hiperbolik Orta Dikmesi

Şekildeki T_1 *ve* T_2 üçgenleri birer dik hiperbolik üçgendir. Hiperbolik geometrideki pisagor bağıntısına göre;

$$Coshp(z, z_1) = Coshp(z_1, z_0) \quad Cosh(z_0, z)$$
$$Coshp(z, z_2) = Cosp(z_2, z_0) \quad Cosp(z_0, z)$$

z_0 , $[z_1, z_2]$ nin hiperbolik orta noktası olduğundan $p(z_0, z_1) = p(z_0, z_2)$ dir.

Yerine yazarsak; $\text{Coshp}(z,z_1) = Coshp(z, z_2)$ *olur*.

Buradan , $p(z, z_1) = p(z, z_2)$ *bulunur.*

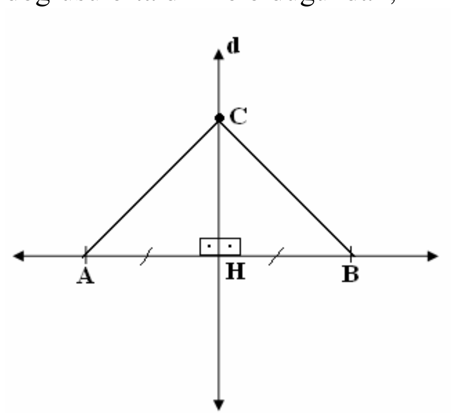
5.18.4 TEOREM:

Orta dikme doğrusu üzerinde alınan bir noktanın doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklıkları eşititr. [6]

İSPAT:

[AB] doğru parçası ve bu doğru parçasının orta dikmesi d olmak üzere, d üzerinde bir C noktası seçersek; $|AC| = |CB|$ dir.

d doğrusu orta dikme olduğundan;



Şekil 5.15

Bir Doğru Parçasının Orta Dikmesi

(1) $|AH| = |HB|$ dir.

(2) $|HC| = |HC|$ (özdeşlik)

(3) m(C$\hat{H}$A) = (C$\hat{H}$B)

(1), (2), (3) den dolayı;

$\overset{\triangle}{AHC} \cong \overset{\triangle}{BHC}$ (K.A.K benzerlik teoremi.) buradan ;

$|AC| = |CB|$ dir.

5.18.5 TEOREM: H^2 de $[z_1, z_2]$ hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta dikmesinin denklemi;

$$y_2 |z - z_1|^2 = y_1 |z - z_2| \quad \text{dir. [1]}$$

İSPAT: Bir önceki teoreme göre, orta dikmesi üzerinde alınan her z noktası için;

$$p(z, z_1) = p(z, z_2)$$

$$Coshp\ (z, z_1) = Coshp\ (z, z_2)$$

$$1 + \frac{|z - z_1|^2}{2imz . imz_1} = 1 + \frac{|z - z_2|^2}{2imz . imz_2}$$

$$\frac{|z - z_1|^2}{2y . y_1} = \frac{|z - z_1|^2}{2y . y_2}$$

$$y_2 |z - z_1|^2 = y_1 |z - z_1|^2 \quad elde \quad edilir .$$

5.18.6 ÖRNEK: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + i$ ise $[z_1, z_2]$ hiperbolik doğru parçasının orta dikmesini bulalım. [1]

$$y_2|z-z_1|^2 = y_1|z-z_2|^2$$
$$1.|z-1-2i|^2 = 2.|z-3-i|^2$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 2.[(x-3)^2+(y-1)^2]$$
$$(x-5)^2+y^2 = 10$$
$$|z-5| = \sqrt{10}$$

5.18.7 TEOREM: Birim diskte $[z_1, z_2]$ hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta dikmesinin denklemi;

$$(1-|z_2|^2)|z-z_1|^2 = (1-|z_1|^2)|z-z_2|^2 \quad dir.$$ [1]

İSPAT:

$$p(z,z_1) = p(z,z_2)$$
$$Coshp\ (z,z_1) = Coshp\ (z,z_2)$$
$$1+\frac{2|z-z_1|^2}{(1-|z|^2)(1-|z_1|^2)} = 1+\frac{2|z-z_2|^2}{(1-|z|^2)(1-|z_2|^2}$$

$$(1-|z_2|^2)|z-z_1|^2 = (1-|z_1|^2)|z-z_2|^2$$

5.19 Hiperbolik Üçgenin Kenarları İle Açıları Arasındaki Bağıntılar

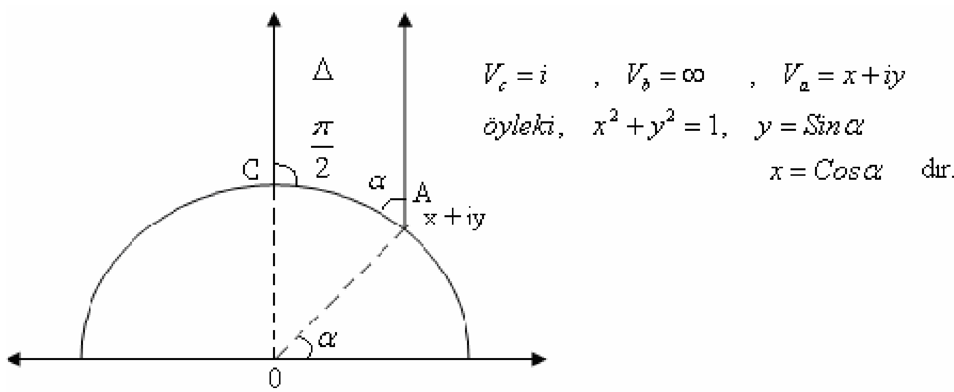
5.19.1 TEOREM: Açıları α, 0, $\frac{\pi}{2}$ olan bir hiperbolik üçgende aşağıdaki bağıntılar geçerlidir. [1]

i) Sinhb . Tanα = 1

ii) Coshb . Sinα = 1

iii) Tanhb . Secα = 1

İSPAT: İspat üst yarı düzlemde yapılacaktır.



Şekil 5.16

Açıları α, 0, $\frac{\pi}{2}$ Olan Hiperbolik Üçgen

i) Sinhb = Sinhp(i, x + iy)

$$= \frac{|i - x - iy|.|i - x + iy|}{2\,\dot{I}m\,(i).\dot{I}m\,(x + iy)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + (1 - y)^2 . x^2 (1 + y)^2}}{2y}$$

$$= \frac{\sqrt{2.(1 - y).2.(1 + y)}}{2y} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} = \frac{\sqrt{x^2}}{y} = \frac{x}{y}$$

Tanα $= \frac{y}{x}$ → Sinhb . Tanα $= \frac{x}{y}.\frac{y}{x} = 1$ olur.

ii) Coshb = Coshp(i, x + iy) $= 1 + \frac{|i - x - iy|^2}{2.y}$

$$= 1 + \frac{x^2 + (1 - y)^2}{2y} = 1 + \frac{2 - 2.y}{2y} = \frac{y + 1 - y}{y} = \frac{1}{y}$$

Sinα = y → Coshb . Sinα $= \frac{1}{y}.y = 1$ olur.

iii) $\frac{Sinhb\ .Tan\,\alpha}{Cosh\ .Sin\,\alpha} = 1 \rightarrow Tanhb\ .\ \left({}^{1}\!/_{Cos\,\alpha}\right) = 1$

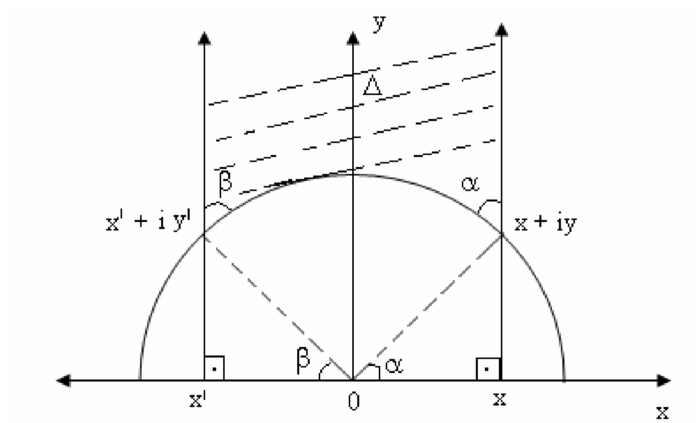
$$Tanhb\ .\ Sec\,\alpha = 1 \quad olur.$$

5.19.2 TEOREM: Açıları α, β 0 olan bir hiperbolik üçgende aşğıdaki bağıntılar geçerlidir. [1]

i) $\text{Coshc} = \dfrac{1 + Cos\ \alpha . Cos\ \beta}{Sin\ \alpha . Sin\ \beta}$

ii) $\text{Sinhc} = \dfrac{Cos\,\alpha + Cos\,\beta}{Sin\,\alpha . Sin\,\beta}$

İSPAT:



Şekil 5.17

Açıları α, 0, β Olan Hiperbolik Üçgen

$V_c = \infty \quad , \quad V_b = x' + iy' , \quad V_a = x + iy$

$(x')^2 + (y')^2 = 1 \quad ve \quad x^2 + y^2 = 1$

İspat H^2 de yapılacaktır.

i) Coshc = Coshp(x + iy , x' + iy')

$$= 1 + \frac{|x + iy - x' - iy'|^2}{2\,yy'}$$

$$= \frac{2yy' + x^2 + (x')^2 - 2xx' + y^2 + (y')^2 - 2y(y')^2}{2yy'}$$

$$= \frac{2(1 - x.x')}{2y.y'} = \frac{1 - x.x'}{y.y'}$$

$\text{Cos}\alpha = x$, $\text{Cos}\beta = x'$, $\text{Sin}\alpha = y$, $\text{Sin}\beta = y'$ olduğundan;

$$\text{Coshc} = \frac{1 - Cos\alpha.Cos\beta}{Sin\alpha.Sin\beta} \qquad \text{olur.}$$

ii) $\text{Sinhc} = \text{Sinhp}(x + iy \ , \ x' + i\,y')$

$$= \frac{\left|(x - x^1) + (y - y^1).i\right|.\left|(x - x^1) + (y + y^1).i\right|}{2y.y^1}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 - x.x^1)^2 - (y.y^1)^2}}{y.y^1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

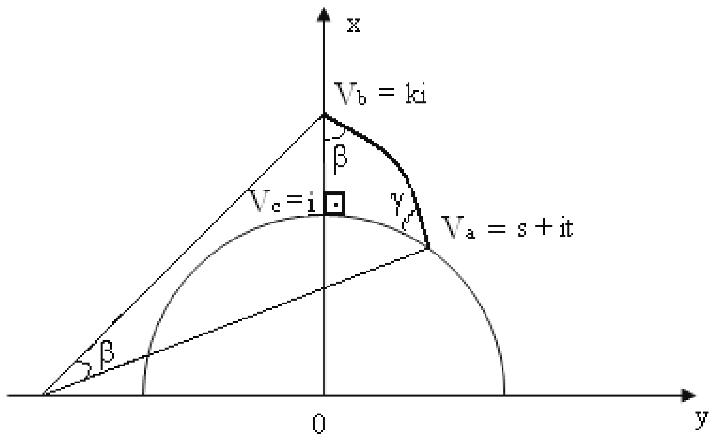
$$(1 - x.x^1)^2 - (y.y^1)^2 = (1 + \text{Cos}\alpha.\text{Cos}\beta)^2 - (\text{Sin}\alpha.\text{Sin}\beta)^2$$
$$= (\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

(14) değerini (13) de yerine koyduğumuzda;

$$\text{Sinhc} = \frac{Cos\alpha + Cos\beta}{Sin\alpha.Sin\beta} \qquad \text{denklemi bulunur.}$$

5.19.3 TEOREM: α, β, $\frac{\pi}{2}$ açıları olan bir hiperbolik üçgenin kenarları arasında aşağıdaki bağıntı vardır. [1]

İSPAT:



Şekil 5.18

Açıları α, β, $\frac{\pi}{2}$ Olan Hiperbolik Üçgen

Vc = i , Vb = ki , Va = s + it

$s^2 + t^2 = 1$ olacak şekilde seçilir ve ispat H^2 de yapılır. Bu şekilde seçmemizin hiçbir sakıncası yoktur. Çünkü herhangi bir dik üçgen bir $T \in PSL(2, IR)$ öğesi ile yukarıdaki gibi bir dik üçgene resmedilir. PSL(2, IR) nin öğeleri, açıları ve uzunlukları değiştirmediğinden, burada bulduğumuz sonuçlar herhangi bir dik üçgen içinde geçerlidir.

$$\text{Coshc} = \text{Coshp}(ki, s+it) = 1 + \frac{|ki - s - it|^2}{2.k.t} = \frac{1+k^2}{2kt} \ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

$$\text{Coshb} = \text{Coshp}(i, s+it) = 1 + \frac{|i - s - i.t|^2}{2.t} = \frac{1}{t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

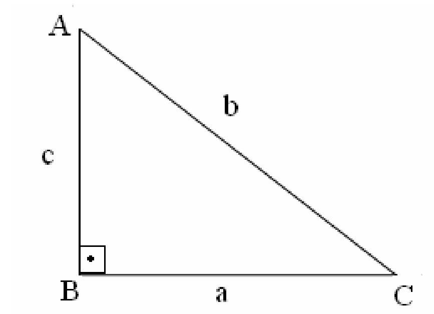
$$\text{Cosha} = \text{Coshp}(i, ki) = 1 + \frac{|1 - ki|^2}{2k} = \frac{1+k^2}{2k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

(15), (16) ve (17) den Coshc = Cosha . Coshb denklemi bulunur.

- Coshc = Cosha . Coshb denklemi Euclid geometrisindei Pisagor bağıntısının hiperbolik şeklidir.

5.19.4 E- Pisagor Bağıntısı:

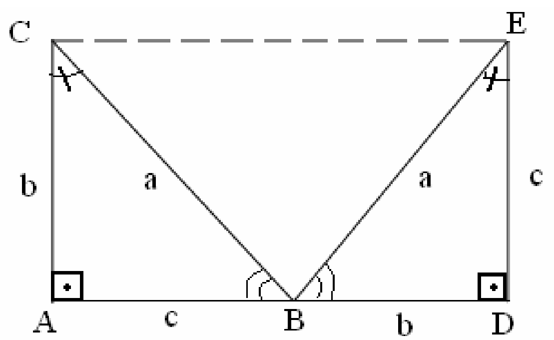
Bir dik üçgende, dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüsün uzunluğunu karesine eşittir.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Şekil 5.19 Dik Üçgen

İSPAT:



$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEB}$

$s(\widehat{CBE}) = 90$ dır

BCE ikizkenar üçgendir.

$A(\overset{\Delta}{BCE}) = \dfrac{a \,.\, a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

Şekil 5.20

ADCE Dikdörtgeni

$$A(ADEC) = A(\overset{\Delta}{ABC}) + A(\overset{\Delta}{DEB}) + A(\overset{\Delta}{BCE})$$

$$A(ADEC) = \frac{(b+c)(b+c)}{2} \qquad (dik \quad yamuk \quad alan \quad formülünden)$$

$$\frac{(b+c^2)}{2} = \frac{b.c}{2} + \frac{b.c}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \quad = \quad b^2 + 2bc + c^2 \quad = \quad 2bc + a^2$$

$$= \quad b^2 + c^2 = \quad a^2 \quad \text{olur.}$$

5.19.5 TEOREM: Açıları α, β, $\frac{\pi}{2}$ olan bir hiperbolik üçgenin iki açısı ile bir kenarı arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir. [1]

i) Cosha . Sinβ = Cosα

ii) Coshc = Cotα . Cotβ

İspat: Bir önceki teorem gereği $Cos\alpha = \frac{Tanhb}{Tanhc}$

$Sin\beta = \frac{Sinhb}{Sinhc}$ $dı$.

$$\frac{Cos\alpha}{Sin\beta} = \frac{Tanhb}{Tanhc} \cdot \frac{Sinhb}{Sinhc} = \frac{Coshb}{Coshc} = \frac{1}{Cosha}$$

$$Cos\alpha = Cosha \;\; Sin\beta$$

iii) Bir önceki teoremden $Cos\beta = \frac{Tanha}{Tanhc}$ dir.

$$Cot\,\beta = \frac{Tanha}{Tanhc} \cdot \frac{Sinhc}{Sinhb} = \frac{Sinha\;.Cosh}{Sinhb}$$

$$\left.\begin{array}{l} Cot\;\beta = Sinha\;.Cothb \\ Cot\;\alpha = Sinhb\;.Cotha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Cot\alpha.Cot\beta = Cosha.Coshb \\ \qquad\qquad\quad = Coshc \end{array}$$

5.20 Hiperblik Geometride Sinüs ve Cosinüs Teoremleri

5.20.1 TEOREM (Cosinüs Teoremi) :

Açıları $\alpha, \beta, \gamma \succ 0$ ve kenarları a, b, c olan bir hipebolik üçgende aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

i) Cosh c = Cosh a . Cosh b – Sinh a . Sinh b . Cosn γ

ii) Cosn c = $\frac{Cos\alpha.Cos\beta + Cos\gamma}{Sin\alpha.Sin\beta}$

5.20.2 TEOREM (Sinüs Teoremi) :

Açıları $\alpha, \beta, \gamma \succ 0$ ve kenarları a, b, c olan bir hiperbolik üçgende aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$\frac{Sinha}{Sin\alpha} = \frac{Sinhb}{Sin\beta} = \frac{Sinhc}{Sin\gamma}$$

5.20.3 E-Sinüs Teoremi:

Bir üçgende her kenar, karşısındaki açının sinüsü ile orantılıdır. Bu değeri, o üçgenin çevrel çemberinin çapına eşittir.

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = 2R \quad dir.$$

5.20.4 E- Cosinüs Teoremi:

Bir üçgende bir kenarın karesi, diğer iki kenarın kareleri toplamından, bu iki kenar ile bunlar arasındaki açının kosinüsü çarpımının iki katı eksiğine eşittir. [13]

$a^2 = b^2 + c^2$ - 2bc CosA

$b^2 = a^2 + c^2$ - 2ac CosB

$c^2 = a^2 + b^2$ - 2ab CosC

BÖLÜM 6

EUCLİD GEOMETRİ VE HİPERBOLİK GEOMETRİNİN EĞİTİMDEKİ YERİ VE ÖNEMİ

Olayların algılanmasında resim, fotoğraf, grafik gibi şekillerin önemi yadsınamaz. Bir anlamda şekil bilgisi de demek olan geometri matematik öğretiminde yerine hiçbir şey konulamayacak seçkin bir role ve öneme sahiptir. Matematikte hiçbir kavram yoktur ki uygun bir şekille anlatılamasın. Eğer bir konuyu iyi biliyorsanız onu uygun bir şekille açıklayabilirsiniz. Şekille açıklayamadığınız yani, geometrik yorumunu yapamadığınız bir konuyu iyi bilmiyorsunuz demektir! Ülkemizde ilk ve orta öğretimde (hatta birkaçı hariç üniversitelerimizde) Euclid geometrisi ve onun uzantıları olan afin uzaylar ve differensiyel geometri konuları incelenir. Euclid dışı geometrilerin de sadece varlığından bir kaç cümle ile söz edilir. Oysa benzerlik, farklılık, aykırılık ve zıtlığın öğretimdeki büyük rolü inkar edilemez. Çünkü kötüyü bilmeden iyiyi, çirkini bilmeden güzeli, kısa kavramını belirlemeden uzun kavramını anlamlandıramazsınız. Yine birbirine çok benzeyen iki şeyi ayırabilmek için farklılıklarını ortaya koymak gerekir. Gelelim Euclid dışı geometrilere. Kanatimce Euclid dışı geometrilerin sadece varlığından söz edip bırakmak oldukça sakıncalıdır. Nitekim, ABD ve bazı uzak doğu ülkelerinde orta öğretim programları Euclid dışı geometrilerden bazı örneklemelerle basitleştirilerek donatılmaktadır. Öğretmen yetiştiren öğretim kurumlarında Euclid dışı geometriler ve Elementer projektif geometri mutlaka okutulmaktadır. Burada şu sorular sorulabilir: Euclid dışı geometrilerin orta öğretimle ilgisi nedir? Bunlar hangi kapsamda ve nasıl anlatılabilir? Mevcut eksiklikler nasıl giderilir?

Soruların kısa cevabı kanaatimce şöyle özetlenebilir:

Son sorudan başlarsak, eksikliklerin giderilmesi için öğretmen yetiştiren yüksek öğretim kurumlarında Euclid geometrisi ve Euclidyen olmayan geometrilerin okutulması gerekir.

Euclid düzleminin istenilen kadar büyük yarıçaplı fakat gerektiğinde sınırlı bir bölgede yaşam uygulaması mümkün kılan Klein Modeli tanıtılarak Euclid dışı geometri kolayca anlatılabilir.

- Bu modelde paralellik nasıl tanımlanır?
- Paralel olmayan ve kesişmeyen doğrular var mı?
- Paralellik aksiyomu dışındaki aksiyomlar sağlanır mı?

gibi sorulara cevap aranabilir.

Poincare'nin yarı düzlem hiperbolik geometrisi tanıtılır. Paralellik aksiyomunun sağlanmadığı, üçgenin iç açıları toplamının 180 den küçük olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Böylelikle öğrenci farklı geometrilerin olduğunu ve buna bağlı olarak da tanım ve teoremlerin farklılık gösterebileceğini bilir, ezberci yaklaşımdan uzaklaşarak, bakış açısını ve düşünme yeteneğini geliştirebilir.[15]

KAYNAKÇA

[1] Mutlu M., Euclidyen Olmayan Geometri, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1995.

[2] Ertaş P., Hiperbolik Geometri, Bitirme Çalışması, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1991.

[3] Başkan T., Gögüs M., Kompleks Analiz, Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları, 1992.

[4] Şahin R., Fuchsian Gruplar, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1997.

[5] Godeaux L., Çeşitli Geometriler, Türk Matematik Derneği Yayınları Sayı 17, 1965.

[6] Kaaçaran S., Kaçaran Ş., Geometri , Oran Yayıncılık, İzmir- 2002

[7] Kılıç S.A., Erdem M., Metrik Uzaylar ve Topoloji, Vipaş AŞ, Bursa-1999.

[8] Zeyrekli Ü., Metrik Uzaylar, Bitirme Çalışması, Balıkesir Üniversitesi N.E.F Matematik Bölümü, 1997.

[9] Deniz A., Ratiu V.A., Hiperbolik Uzayda Bazı İdeal Çokyüzlülerin Hacimleri Üzerine, Araştırma Makalesi, Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi Cilt : 3, Sayı:3, Sayfa:369-376, 2002.

[10] Hacısalihoğlu H. , Dönüşümler ve Geometriler , Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 1998.

[11] Milli Eğitim Bakanlığı Komisyonu , Lise 3 Matematik Öğretmen Kılavuzu, Milli Eğitim Basımevi, Sayfa:348-353, İstanbul 1980.

[12] Kaplan E., Lise Geometri Ders Kitabı, Etkin Yayıncılık

[13] Özdemir H.B., Mutlu M. Hiperbolik Disk ve Hiperbolik uzaklık üzerine, 1. Spil Fen Bilimleri Kongresi, 04-05 Eylül Bildiriler Kitabı (333-343), 1995 Manisa, Turkey.

[14] Özdemir H.B., Hiperbolik Mean And Middle, B.a.Ü. Mühendislik-Mimarlık Dergisi(100-104) , Balıkesir 1995/1.

[15] Kaya R., Geçmişten Günümüze Geometri Öğretimi Ve Euclid Dışı Geometrinin Öğretimdeki Yeri Ve Önemi, Matder.org, 2004.