

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK  
ANABİLİM DALI**

**DUHEM HİSTERİSİS GİRİŞLİ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN ORANSAL  
İNTEGRAL KONTROLÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Beyza Billur İSKENDER**

**Balıkesir, Ağustos-2007**

T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK  
ANABİLİM DALI

DUHEM HİSTERİSİS GİRİŞLİ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN ORANSAL  
İNTEGRAL KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Beyza Billur İSKENDER

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

Sınav Tarihi: 16.08.2007

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (BAÜ) 

Doç. Dr. Hakan KÖÇKAR (BAÜ) 

Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (Danışman-BAÜ) 

Balıkesir, Ağustos-2007

## ÖZET

### DUHEM HİSTERİSİS GİRİŞLİ DOĞRUSAL SİSTEMLERİN ORANSAL İNTEGRAL KONTROLÜ

**Beyza Billur İSKENDER**  
**Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,**  
**Matematik Anabilim Dalı**

**(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR)**

**Balıkesir, 2007**

Bilim ve teknolojinin birçok alanında meydana gelen histerisis olgusu son zamanlarda uygulamaları açısından oldukça önem kazanmıştır. Bu uygulamalar beraberinde histerisisin istenmeyen etkilerinden kurtulmayı getirmiş ve dolayısıyla uygun kontrol mekanizmalarının tasarımı problemi ortaya çıkmıştır.

Histerisis yapısına sahip sistemlerden birisi olan histerisis girişli doğrusal sistemlerin integral kontrolörüne (I) dair çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalarda kullanılan histerisis tipleri değiştirme (relay), durma (stop) operatörleri ile Prandtl-Ishlinskii ve Preisach modelleridir. Bu tezde ise özellikle elektromanyetik uygulamalar açısından önemli olan Duhem histerisis girişli sistemlerin oransal-integral kontrolü (PI) incelenmiş ve sistemin verilen koşullar altında kararlı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca değiştirme (relay) operatörü girişli doğrusal bir sistemin girişine I ve PI kontrolü uygulanarak mevcut çalışmalarla karşılaştırılması yapılmıştır. Sonuç olarak PI kontrolörün daha avantajlı olduğu gözlemlenmiştir.

Sistem cevabının grafiksel olarak elde edilmesi için MATLAB programı kullanılmıştır.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER :** Histerisis / Duhem Histerisis / Oransal-İntegral (PI) Kontrolör / Kararlılık

## **ABSTRACT**

### **PROPORTIONAL PLUS INTEGRAL CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH INPUT DUHEM HYSTERESIS**

**Beyza Billur İSKENDER**

**Balikesir University, Institute of Science, Department of Mathematics**

**( M. Sc. Thesis / Supervisor : Assist. Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR )**

**Balikesir - Turkey, 2007**

Hysteresis which is encountered in many area of science and technology, has recently got quite importance in terms of its applications. These applications bring along to get out of undesirable hysteresis effect and thus problem of suitable control design has been occurred.

There are some works on integral control (I) of linear system with input hysteresis which is one of the system that has hysteresis structure. Hysteresis types which have been used in these works are relay, stop operators, Prandtl-Ishlinskii and Preisach models. In this thesis, proportional plus integral (PI) control of linear systems with input Duhem hysteresis, which is specially important for electromagnetic applications, has been investigated and it has been proved that this system is stable under given conditions. In addition, I and PI control of a linear system with input relay hysteresis has been studied and this work has been compared with the other works. As a result, it has been observed that PI controller has more advantage.

MATLAB has been used to obtain the response of the system as graphically.

**KEY WORDS :** Hysteresis / Duhem Hysteresis / Proportional Plus Integral Controller / Stability.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER</b>	ii
<b>ABSTRACT, KEY WORDS</b>	iii
<b>İÇİNDEKİLER</b>	iv
<b>SEMBOL LİSTESİ</b>	vi
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	viii
<b>ÖNSÖZ</b>	ix
<b>1. GİRİŞ</b>	1
<b>2. HİSTERİSİS</b>	3
2.1 Histerisis Nedir?	3
2.2 Histerisisin Matematiksel Tanımı	8
2.3. Temel Histerisis Operatörleri	14
2.3.1 Değişirme (relay) Histerisis	14
2.3.2 Durma (stop) Operatörü	15
2.3.3 Hareket (play) Operatörü	17
2.4 Histerisis Modelleri	18
2.4.1 Duhem Histerisis Modelleri	18
2.4.2 Prandtl-Ishlinskii Modeli	20
2.4.3 Preisach Model	20
2.4.3.1 Preisach Modelin Geometrik Yorumu	21
2.4.3.2 Preisach Modelin Genel Özellikleri	25
2.4.3.3 Silme Özelliği	26
2.4.3.4 Eşlik Özelliği	27
<b>3. KARARLILIK</b>	29
3.1 Denge Noktası	29
3.2 Doğrusal Sistemler İçin Kararlılık Koşulu	30
3.3 Sınırlı Girdi-Sınırlı Çıktı Kararlılık	31
3.4 Lyapunov Kararlılık Teorisi	32
3.5 Doğrusal Sistemler İçin Lyapunov Teorisi	38
<b>4. KARARLILIK YARIÇAPI</b>	40
4.1 Spektral Teori, Temel Tanımlar	40
4.2 Kararlılık Yarıçapı	41
4.3 Karmaşık Kararlılık Yarıçapının Özellikleri	42
4.4 Ötelenmiş Sistemlerin Kararlılık Yarıçapı	43

	<u>Sayfa</u>
4.5 Parametrelendirilmiş Cebirsel Riccati Denkleminin $r_c(A; B, C)$ nin Karakterizasyonu	45
<b>5. ORANSAL İNTEGRAL KONTROL EDİLEBİLİRLİK</b>	<b>47</b>
5.1 Doğrusal Sistemler İçin Kontrol Edilebilirlik	47
5.2 İntegral (I) Kontrol Edilebilirlik	47
5.3 Oransal (P) Kontrol Edilebilirlik	55
5.4 Oransa-İntegral (PI) Kontrol Edilebilirlik	56
<b>6. DUHEM HİSTERESİS GİRİŞİNE SAHİP DOĞRUSAL SİSTEMLERİN PI KONTROLÜ</b>	<b>57</b>
6.1 Duhem Histeresis Modeli	57
6.1.2 Duhem Operatörünün Monotonluk Özelliği	62
6.2 $N(\ell)$ Histeresis Sınıfı	63
6.3 Duhem Histeresis Girişine Sahip Sonlu Boyutlu Doğrusal Sistemler	67
6.4 Duhem Histeresis Girişine Sahip Sistemlerin PI Kontrolü	69
<b>7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME</b>	<b>83</b>
<b>8. EKLER</b>	<b>85</b>
Ek A	85
Ek B	85
Ek C	85
<b>9. KAYNAKLAR</b>	<b>87</b>

## SEMBOL LİSTESİ

<b><u>Simge</u></b>	<b><u>Tanımı</u></b>
$\mathbb{R}_+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_+$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\alpha$	Reel kısmı $\alpha$ dan büyük olan karmaşık sayılar
$\mathbb{C}_+$	Reel kısmı 0 dan büyük olan karmaşık sayılar.
$\mathbb{C}_-$	Reel kısmı 0 dan küçük olan karmaşık sayılar.
$IK$	$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$
$F(X, \mathbb{R})$	Fonksiyonlar kümesi
$C(X, \mathbb{R})$	Sürekli fonksiyonlar uzayı
$AC(X, \mathbb{R})$	Mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^0(X, \mathbb{R})$	Güçlü sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^1([0, T])$	Sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_{pm}(X, \mathbb{R})$	Sürekli, parçalı monoton fonksiyonların kümesi
$C_{pm}^{ns}(X, \mathbb{R})$	Nihai sabit, sürekli, parçalı monoton fonksiyonlar kümesi
$F^{ns}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R})$	$\mathbb{Z}_+$ üzerinde tanımlı nihai sabit fonksiyonların kümesi
$L^p(X)$	$1 < p < \infty$ olmak üzere mutlak değerinin $p$ . kuvveti $X$ üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$W^{k,p}(X)$	$k$ . mertebeden türevi ve kendisi $L^p(X)$ uzayında olan fonksiyonların uzayı
$M_\alpha$	$\mathbb{C}_\alpha$ üzerinde tanımlı meromorfik fonksiyonların alanı
$M_-$	$\alpha < 0$ olmak üzere $M_\alpha$ ların birleşimi
$H_\alpha^\infty$	$\mathbb{C}_\alpha$ üzerinde tanımlı tüm analitik ve sınırlı fonksiyonların cebri
$H_-^\infty$	$\alpha < 0$ olmak üzere $H_\alpha^\infty$ ların birleşimi
$H$	Histerisisin iç bölgesi
$\Phi$	Histerisis operatörü
$R$	Değiştirme (relay) histerisis operatörü
$\tau(t)$	Eşik değerine en son ulaşılan zamanın değeri
$S_h$	Durma (stop)operatörü
$P_h$	Hareket (play) operatörü
$p$	Prantdl Ishlinskii modelin yoğunluk fonksiyonu
$\Sigma$	Prantdl Ishlinskii histerisis operatörü
$\mu(\alpha, \beta)$	Preisach yoğunluk fonksiyonu
$P$	Preisach histerisis operatörü

<b><u>Simge</u></b>	<b><u>Tanımı</u></b>
$Q_r$	İzdüşüm operatörü
$\mathfrak{R}$	Kısıtlama operatörü
$A^T$	$A$ matrisinin transpozu
$A^H$	$A$ matrisinin Hermitian'ı
$\pi(A)$	$A$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi
$D(A)$	$A$ doğrusal operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	$A$ doğrusal operatörünün değer kümesi
$\rho(A)$	$A$ operatörünün çözücü (resolvent) küme
$\sigma(A)$	$A$ operatörünün spektrumu küme
$s_n(A)$	$A$ matrisinin singüler değerlerinin kümesi
$J_n(IK)$	kararlı olmayan matrislerin kümesi.
$r_{IK}(A)$	$A$ matrisinin kararlılık yarıçapı
$r_{\mathbb{C}}(A; B, C)$	$(A; B, C)$ sisteminin karmaşık kararlılık yarıçapı
$N(\ell)$	Histerisis sınıfı
$M \prec N$	$N - M$ pozitif tanımlı Hermitian matrisler
$M \succ N$	$N - M$ negatif tanımlı Hermitian matrisler
$M \preceq N$	$N - M$ pozitif yarı tanımlı Hermitian matrisler
$M \succeq N$	$N - M$ negatif yarı tanımlı Hermitian matrisler
$\tilde{\sigma}(G)$	$G$ transfer fonksiyonunun en büyük tekil değeri
$\Phi^\diamond$	$\Phi$ nin türevi
$\Upsilon$	Tüm zaman dönüşümlerinin kümesi
max	Maksimum
min	Minimum



## ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil</u> <u>Numarası</u>	<u>Adı</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1	Histerisis çevrimi	4
Şekil 2.2	Küçük histerisis çevrimi	5
Şekil 2.3	Histerisis dönüştürücüsü	6
Şekil 2.4	<b>(a) ve (b):</b> Ekstreum değerleri aynı başlangıç değerleri farklı girişler. <b>(c):</b> Bu girişlere ait histerisis çevrimi.	6
Şekil 2.5	Yerel Hafızalı histerisis	7
Şekil 2.6	Yerel olmayan hafızalı histerisis	8
Şekil 2.7	Değiştirme histerisis çeşitleri	14
Şekil 2.8	<b>(a)</b> Yay kütlesi, <b>(b)</b> Yay kütlesinin histerisis diyagramı	16
Şekil 2.9	Piston	17
Şekil 2.10	Piston hareketinin histerisis diyagramı	18
Şekil 2.11	Duhem histerisis	19
Şekil 2.12	Preisach modelin blok diyagramı	21
Şekil 2.13	Limit üçgeni	22
Şekil 2.14	Negatif doyum durumunda hafıza davranışı	23
Şekil 2.15	Artan $u$ girişine karşılık gelen limit üçgeni	23
Şekil 2.16	Azalan $u$ değerine karşılık gelen limit üçgeni	23
Şekil 2.17	Periyodik giriş değişimlerine karşılık gelen limit üçgenleri	27
Şekil 2.18	Eş çevrimler	28
Şekil 3.1	Kararlı denge noktasının geometrik yorumu	30
Şekil 3.2	2.4.1 Teoremin ispatında geçen kümelerin geometrik yorumu	36
Şekil 3.3	Lyapunov fonksiyonunun seviye yüzeyleri	37
Şekil 5.1	Genel olarak kontrol edilen bir sistemin blok diyagramı	48
Şekil 6.1	Duhem girişli bir sistem blok diyagramı	68
Şekil 6.2	PI ile kontrol edilen Duhem girişli bir sistemin blok diyagramı	70
Şekil 6.3	$r = 1, k_I=0.3, k_p=0.7$ değerleri için sistemin cevabı	81
Şekil 6.4	$r = 1, k_I=0.1, k_p=0.7$ değerleri için sistemin cevabı	81
Şekil 6.5	'-': I kontrolör, $k_I=0.244$ , '--o': PI kontrolör $k_I=0.244$ ve $k_p=0.6$ .	82

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışma süresince değerli vaktini ayırıp, bilgi ve tecrübeleri ile beni yönlendiren, her türlü kaynağını, ilgisini, desteğini ve yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Necati Özdemir'e;

Çalışmanın temellerini oluştururken bilgilerine sık sık başvurma imkanı bulduğum kıymetli hocam Doç. Dr. Hakan Köçkar'a;

Bu günlere gelmemi sağlayan, sevgisi ve ilgisi ile hep yanımda olan canım aileme teşekkür ederim...

**Balıkesir, 2007**

**Beyza Billur İSKENDER**

## 1. GİRİŞ

Histerezis olgusu; mekanik (plastik histerezis), fizik (ferromanyetik histerezis), faz geçişleri, hidroloji (soil-moisture histerezis), ekonomi (şok analizi) v.b. gibi bilim ve teknolojinin çok çeşitli alanlarında meydana gelir [27,s.14]. Buna rağmen histerezis üzerine yapılan matematiksel çalışmalar son otuz yıla dayanmaktadır. Bu anlamda temel teşkil eden matematiksel çalışmalar ilk olarak Krosnosel'skii ve Pokrovskii tarafından gerçekleştirilmiştir [15]. Daha sonra Macki ve diğerleri [25], Brokate ve Sprekels [1], Visintin [31] ve Mayergoyz [23] yer almaktadır.

Histerezis üzerine çalışmalar uygulamaları ile ilişki kurularak yapılmış ve dolayısıyla histerezisin istenmeyen etkilerinin nasıl kontrol edileceği problemi ortaya çıkmıştır. Bu problemi çözmek için değişik metotlar içeren birçok çalışma yapılmıştır. Örnek olarak Belbas and Mayergoyz [2], Sain and Spencer [28], Tao and Kokotoviç [30], verilebilir. Yine özel olarak histerezis girişine sahip doğrusal sistemlerin integral kontrolü üzerine mevcut çalışmalar ise Fliegner, Logemann ve Ryan [8], Logemann ve Mawby [19], Logemann ve Ryan [20], Haddad, Chellaboina ve Oh [9] dur. Bu çalışmalarda kullanılan histerezis tipleri değiştirme (relay),durma (stop), Prandtl ve Preisach' tır. Bu çalışmada ise özellikle elektromanyetik uygulamalar açısından önemli olan Duhem histerezis girişli doğrusal sistemlerin oransal-integral kontrolü (PI) incelenmiştir. Hodgdon [12,13], Hodgdon ve Colemann [5,6] çalışmaları Duhem modelinin elektromanyetik uygulamalarda kullanışlı olduğunu gösterir.

Tez altı ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, histerisis olgusu ile ilgili temel tanım ve teoremler, mevcut histerisis operatörleri ve modelleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, kararlılık teorisine değinilmiştir. Sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlılık yöntemi ile Lyapunov kararlılık teorisi üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, kararlılık yarıçapı tanımlanmış ve kontrol sistemlerine genelleştirilmiştir. Ayrıca parametrelendirilmiş cebirsel Riccati denkleminde göre kararlılık yarıçapının karakterizasyonu verilmiştir.

Beşinci bölümde, kontrol edilebilirlik, I, P ve PI kontrol edilebilirlik kavramları tanımlanmış ve bu kontrolörlerin kazançlarının belirlenmesi ile ilgili teoremler verilmiştir.

Altıncı bölümde ise diğer bölümlerde oluşturulan alt yapı yardımıyla Duhem histerisis girişli doğrusal sistemlerin PI kontrolör ile kararlılığını ifade eden teoremin ispatı verilmiştir.

Yedinci bölümde, elde edilen sonuçlara değinilmiştir.

## 2. HİSTERİSİS

Bu bölümde histerisis kavramının ne olduğu, matematiksel alt yapısı ve mevcut histerisis modelleri üzerinde durulacaktır.

### 2.1 Histerisis Nedir?

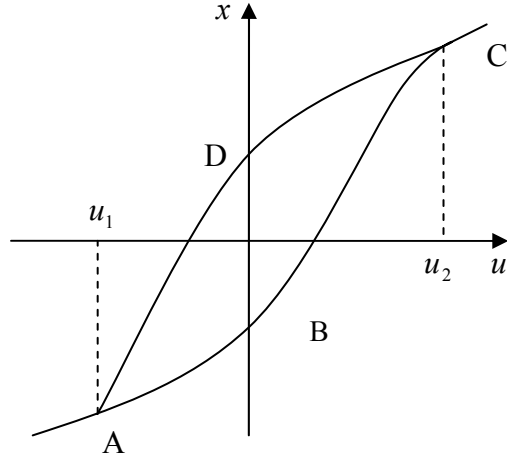
Kökeni antik Yunanca olan histerisis ( $\upsilon\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\tilde{\sigma}\upsilon\sigma$ ) teriminin kelime anlamı “geride kalan” veya “sonradan gelen” dir. Bu terimi ilk kez Ewing 1882 de ferromanyetizma üzerine yaptığı çalışmalarda kullanmıştır. Kavramın tarihçesi ile ilgili geniş bilgi [31] numaralı kaynakta bulunabilir.

Histerisis olgusu çeşitli alanlarda meydana gelir. Örnek olarak mekanik (plastik histerisis), fizik (ferromanyetik histerisis), faz geçişleri, hidroloji (soil-moisture histerisis), ekonomi (şok analizi) alanları vb. verilebilir [27,s.14].

Histerisisin matematiksel modellemesi ve histerisis kavramının matematiksel teorisi üzerine mevcut literatür son otuz yıla dayanmaktadır. Bu anlamdaki ilk çalışmalar Krosnosel'skii ve Pokrovskii tarafından gerçekleştirilmiştir [15]. Daha sonra Macki ve diğerleri [21], Brokate ve Sprekels [1], Visintin [31] ve Mayergoyz [23] yer almaktadır.

Alandan alana, çalışmadan çalışmaya değişen histerisis olgusu en genel anlamda girdi ile çıktı arasında hafızaya dayalı doğrusal olmayan bir ilişkidir [21].

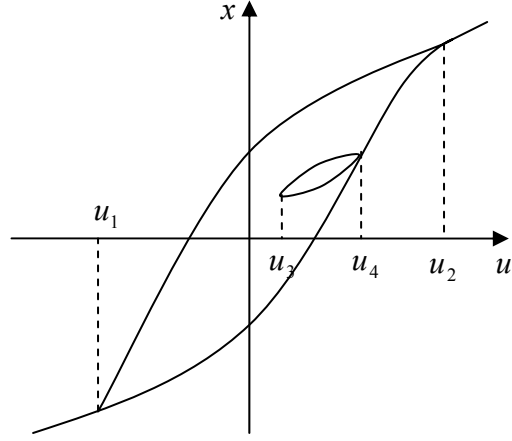
Söz konusu olan girdi ve çıktı ifadeleri sistem teorisi terminolojisinde yer alan kavramlardır. Hafıza kavramı ile kastedilen ise, çıktının herhangi bir andaki değerinin sadece o andaki girdi değeri ile değil önceki girdi değerlerine de bağlı olarak hesaplanmasıdır.



**Şekil 2.1** Histerisis çevrimi.

Yukarıda bahsedilen girdi ile çıktı arasındaki ilişki uygun fonksiyon uzaylarında tanımlanan operatörler aracılığıyla anlaşılır. Girdi ile çıktının farklı farklı fiziksel anlamları olabilir, mesela ferromanyetik histerisiste girdi manyetik alan iken buna bağlı olarak çıktı manyetizasyon veya manyetik indüksiyondur, ya da mekanikte girdi güç iken çıktı yer değiştirir.

Histerisisin çalışma mantığı Şekil 2.1 yardımıyla verilebilir. Şekil 2.1 de sistem girdisi  $u$  ve çıktısı  $x$  olmak üzere  $u$  girişinin değeri  $u_1$  den  $u_2$  ye kadar arttırılırsa  $(u, x)$  çifti ABC eğrisini takip edecek, tersine eğer  $u$  değeri  $u_2$  den  $u_1$  e kadar azaltılırsa  $(u, x)$  çifti CDA eğrisini takip edecektir.  $u_1 < u(t) < u_2$  iken  $u$  nun hareketinin yönü değiştirilirse (mesela artan durumdayken azalan duruma getirilirse)  $(u, x)$  çifti ABCDA ana çevrimi tarafından sınırlandırılmış H iç bölgesinde (histerisis bölgesi) hareket eder. Bu davranış özel modeller tarafından tanımlanır. Girişin  $u_1$  ve  $u_2$  değerleri arasındaki iki değer arasında gidip gelmesi ile oluşan çevrimlere ise küçük (minör) çevrimler denir. Küçük çevrimlere bir örnek Şekil 2.2 de verilmiştir. [21]'de oluşturulmaya çalışılan terminolojide küçük çevrimlere izin veren histerisis ilişkilerine aktif (negatif) histerisis, diğerlerine ise pasif (pozitif) histerisis adları verilmiştir.



**Şekil 2.2** Küçük histerisis çevrimi.

**2.1.1 Tanım** (Genel Histerisis Operatörü) : Histerisis olgusu matematiksel olarak  $u$  girdisini  $x$  çıktısı ile ilişkilendiren

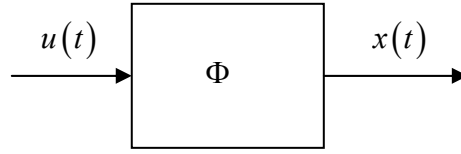
$$x(t) = (\Phi(u))(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \quad (2.1)$$

operatör denklemleri ile ifade edilir.  $\Phi$  operatörüne histerisis dönüştürücüsü de denir [15]. Şekil 2.3 de bu dönüştürücünün blok diyagramı verilmiştir.

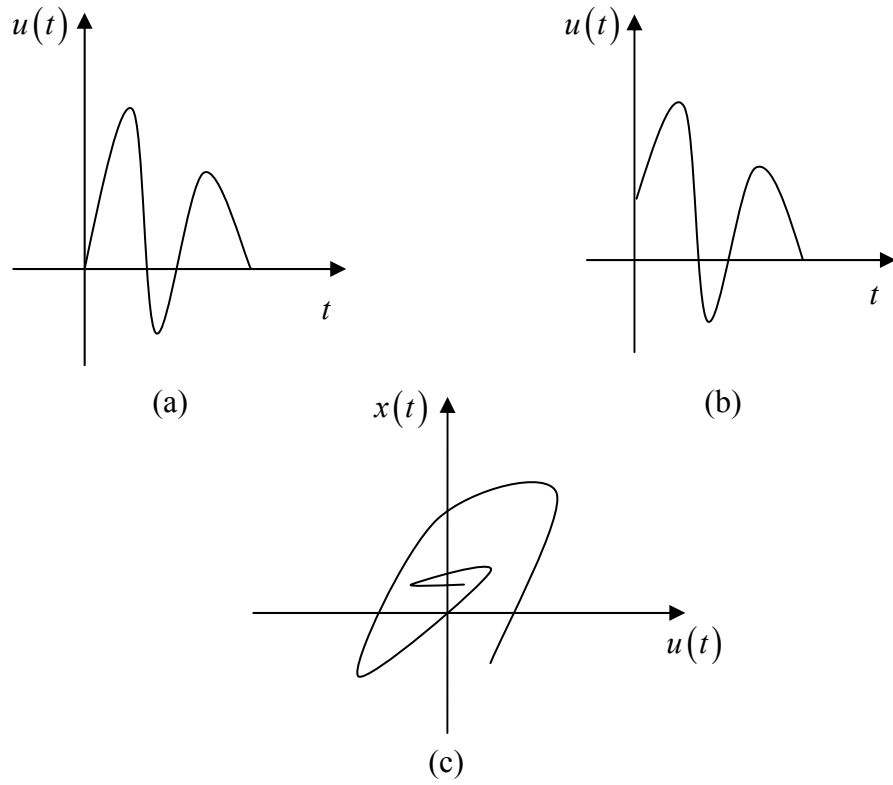
Dikkat edilirse  $\Phi$  dönüştürücüsü bir fonksiyon değildir, çünkü girdinin aynı  $u(t_*)$  değerine karşılık farklı  $x(t_*)$  çıktı değerleri gözlenebilir [27]. (Geometrik olarak, Şekil 2.2 de dikey olarak çizilen herhangi bir doğru girdi-çıkı diyagramındaki eğrinin birden fazla noktasından geçer.)

Bütün histerisis operatörleri hızdan bağımsızdır (rate independence) ve hafıza davranışları girdi fonksiyonunun yerel ekstremum değerleri ile tamamen hesaplanabilir.

Hızdan bağımsızlık; girişin ekstremum noktaları arasındaki değişim hızının kollanma üzerinde bir etkiye sahip olmaması durumunda histerisis kollarının sadece geçmiş girişlerin ekstremum değerleri ile belirlenmesidir (Şekil 2.4).

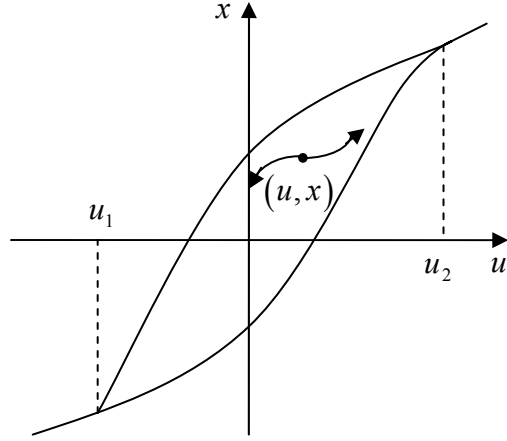


**Şekil 2.3** Histerisis dönüştürücüsü.



**Şekil 2.4 (a) ve (b):** Ekstremum değerleri aynı başlangıç değerleri farklı girişler.  
**(c):** Bu girişlere ait histerisis çevrimi.





**Şekil 2.5** Yerel Hafızalı histerisis.

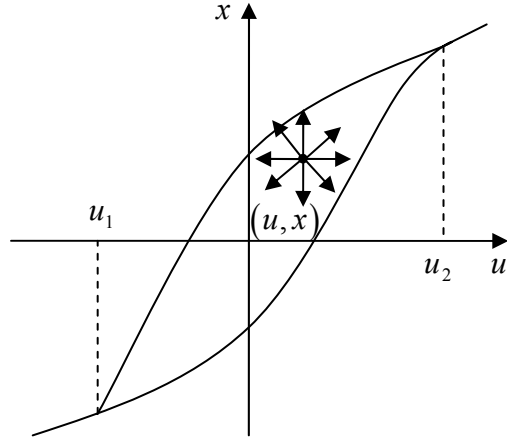
Hızdan bağımsız bütün histerisisler iki genel sınıfa ayrılır:

- i. Yerel hafızalı histerisisler,
- ii. Yerel olmayan hafızalı histerisisler.

Yerel hafızalı histerisisler aşağıdaki gibi tanımlanır:

Her  $t \geq t_0$  için  $x(t)$  çıkışının değeri,  $t_0$  anındaki  $x(t_0)$  çıkışı ve  $t \geq t_0$  dan sonraki tüm  $u(t)$  giriş değerleri ile tek olarak belirlenir. Dolayısıyla sistemin bütün geçmişi  $x(t_0)$  çıktısı tarafından tutulur.

Yerel hafızalı histerisislerde kollara ayrılma giriş  $u_2$  değerini aştıktan sonra veya  $u_1$  değerinin altına düştükten sonra oluşur. Hareket (play) ve durma (stop) histerisis operatörleri yerel hafızalı histerisis tiplerine örnektirler. Yerel hafızalı dönüştürücülerin ortak özelliği ise, girdi-çıkı diyagramında ulaşılabilen her noktanın tek olarak tanımlanan bir duruma karşılık gelmesidir (Şekil 2.5).



**Şekil 2.6** Yerel olmayan hafızalı histerisis.

Yerel olmayan hafızalı histerisislerde  $x(t)$  nin gelecek değerleri,  $(t \geq t_0)$  sadece  $x(t_0)$  in değerine değil girişin geçmişteki ekstremum değerlerine de bağlıdır. Böyle dönüştürücülerde girdi-çıkı diyagramındaki her bir nokta iki veya belki de sonsuz tane eğrinin içindedir, dolayısıyla bu şekildeki bir histerisis tipi çıktının sadece o anki değeri ile önceden belirlenemez (Şekil 2.6) [23].

## 2.2 Histerisisin Matematiksel Tanımı

Aşağıda öncelikle histerisisin matematiksel tanımı için gerekli olan bazı kavramlar ve gösterimler verilmiştir.

Boştan farklı herhangi bir  $X$  kümesi için  $F(X, \mathbb{R})$ ,  $X$  üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesini gösterebiliriz.  $[0, t_E] \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  için  $u \in F([0, t_E], \mathbb{R})$  fonksiyonu her  $t, \tau \in [0, t_E]$  için

$$\tau < t \text{ iken } u(\tau) \leq u(t)$$

koşulunu sağlıyorsa  $u$  fonksiyonu  $[0, t_E]$  üzerinde artan bir fonksiyondur. Eğer

$$\tau < t \text{ iken } u(\tau) < u(t)$$

oluyorsa  $u$  fonksiyonu  $[0, t_E]$  üzerinde kesinlikle artandır.

$u$  veya  $-u$  fonksiyonlarından herhangi biri  $[0, t_E]$  üzerinde artan ise  $u$  fonksiyonu  $[0, t_E]$  üzerinde monotondur.

$u \in F([0, t_E], \mathbb{R})$  fonksiyonu  $\Delta = \{t_i\}_{0 \leq i \leq n} : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_E$  parçalanışının her bir  $[t_i, t_{i+1}]$  alt aralığında monoton ise  $u$  ya parçalı monoton fonksiyon ve  $\Delta$  parçalanışına da  $u$  fonksiyonunun bir monotonluk parçalanışdır denir.

Herhangi bir  $u \in F([0, t_E], \mathbb{R})$  için  $u$  nun standart monotonluk parçalanışı  $t_0 = 0$  ve  $0 \leq t_i \leq t_E$  olmak üzere

$$t_{i+1} = \max \{t \in [t_i, t_E] : u [t_i, t] \text{ üzerinde monotondur} \} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

$[0, t_E]$  üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı  $C([0, t_E], \mathbb{R})$  ile, sürekli ve parçalı monoton fonksiyonların kümesi ise  $C_{pm}([0, t_E], \mathbb{R})$  ile gösterilir.  $C_{pm}([0, t_E], \mathbb{R})$  bir vektör uzayı değildir. (Ters örnek için bkz. [22,s.151]).

**2.2.1 Tanım** (zaman dönüşümü):  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  sürekli, azalmayan  $f(0) = 0$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$  koşullarını sağlayan bir dönüşüm ise  $f$  ye bir zaman dönüşümü

denir. Diğer bir deyişle sürekli, artan ve örten bir  $f$  fonksiyonu bir zaman dönüşümüdür.

**2.2.2 Tanım** (Hızdan bağımsız operatör): Uygun her  $f$  zaman dönüşümü için

$$(\Phi(u \circ f))(t) = (\Phi(u))(f(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.3)$$

özelliğini sağlayan  $\Phi$  operatörüne hızdan bağımsızdır denir.

**2.2.3 Tanım** (Nedensel operatör):  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bir operatör olsun. Eğer her  $u, v \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ve her  $\tau \in \mathbb{R}_+$  için her  $t \in [0, \tau]$  de  $u(t) = v(t)$  iken her  $t \in [0, \tau]$  için  $(\Phi(u))(t) = (\Phi(v))(t)$  oluyorsa  $\Phi$  ye nedensel operatör denir.

**2.2.4 Tanım** (Hızdan bağımsız fonksiyonel): Bir  $\varphi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonelinin hızdan bağımsız olması için gerekli ve yeterli koşul her  $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ve uygun her  $f$  zaman dönüşümü için

$$\varphi(u \circ f) = \varphi(u) \quad (2.4)$$

**2.2.5 Tanım** (Histerisis operatörü) :  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  operatörü nedensel ve hızdan bağımsız ise  $\Phi$  ye histerisis operatörü denir.

**2.2.6 Tanım** (İzdüşüm operatörü) :  $\alpha \in (0, \infty]$  ve  $I = [0, \alpha] \subset \mathbb{R}_+$  bir aralık olsun.  $\tau \in [0, t]$  için  $Q_\tau : F(I, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$$(Q_\tau u)(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ u(\tau), & t > \tau. \end{cases}$$

şeklinde bir operatör tanımlansın. Eğer  $I = \mathbb{R}_+$  ise  $Q_\tau$  operatörüne izdüşüm operatörü denir.

**2.2.7 Tanım** (Nihai sabit fonksiyon) :  $u \in F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  fonksiyonu için bir  $T \in \mathbb{R}_+$  var öyle ki  $u, [T, \infty) \cap \mathbb{R}_+$  üzerinde sabit ise  $u$  fonksiyonuna nihai sabit fonksiyon denir.

**2.2.8 Teorem** :  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bir histerisis operatörü olsun ve her  $t \in \mathbb{R}_+$  için  $Q_\tau(C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})) \subset C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  koşulu sağlansın. Bu durumda

i. Her  $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ve her  $\tau \in \mathbb{R}_+$  için

$$(\Phi(Q_\tau u))(t) = \Phi(u)(\tau), \quad \forall t \geq \tau \quad (2.5)$$

ii.  $C_{pm}^{ns}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : u \text{ nihai sabit}\}$  olarak tanımlansın bu durumda  $\varphi : C_{pm}^{ns}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı  $\varphi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t)$  fonksiyoneli hızdan bağımsızdır ve

$$(\Phi(u))(t) = \varphi(Q_\tau u), \quad \forall u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.6)$$

özelliğini sağlar. Tersine olarak eğer  $\varphi : C_{pm}^{ns}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  hızdan bağımsız bir fonksiyon ise (2.6) ile verilen  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  operatörü bir histerisis operatörüdür ve

$$\varphi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) \quad (2.7)$$

özelliğini sağlar.

Burada tanımlanan hızdan bağımsız  $\varphi$  fonksiyoneline,  $\Phi$  histerisis operatörünün fonksiyonel gösterimi denir [22].

**İspat:**  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bir histerisis operatörü olsun.  
 $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  ve  $s > \tau$  olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \tau \\ \tau & \tau \leq t \leq s \\ t + \tau - s & t > s \end{cases}$$

zaman fonksiyonu tanımlansın.  $\Phi$  nin nedensellik ve hızdan bağımsızlık özellikleri kullanılarak  $t \in [\tau, s]$  için

$$(\Phi(Q_\tau u))(t) = (\Phi(u \circ f))(t) = (\Phi(u))(f(t)) = (\Phi(u))(\tau)$$

bulunur.  $s > \tau$  keyfi olduğundan son eşitlik **i** durumunu verir. **ii** Durumunda (2.7) in limiti nihai sabit  $u$  girişleri için vardır ve **i** durumundan  $\Phi(u)$  da nihai sabittir. Her  $u \in C_{pm}^{ns}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ve her  $f$  zaman dönüşümü için  $\Phi$  nin hızdan bağımsızlığı kullanılarak

$$\varphi(u \circ f) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u \circ f))(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(f(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) = \varphi(u)$$

elde edilen eşitlik  $\varphi$  nin hızdan bağımsız olduğunu verir. **i** durumu kullanılarak her  $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ve  $t \in \mathbb{R}_+$  için

$$(\Phi(u))(t) = (\Phi(Q_t u))(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(Q_t u))(s) = \varphi(Q_t u)$$

dir, bu ise (2.6) yı verir.

Tersine olarak  $\varphi : C_{pm}^{ns}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  hızdan bağımsız olsun ve  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  (2.6) ile tanımlansın. Dolayısıyla  $\Phi$  nedenseldir. Ayrıca her  $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , her  $f$  zaman dönüşümü ve  $t \in \mathbb{R}_+$  için

$$(\Phi(u \circ f))(t) = \varphi(Q_t(u \circ f)) = \varphi((Q_{f(t)}u) \circ f) = \varphi(Q_{f(t)}u) = (\Phi(u))(f(t)),$$

elde edilir dolayısıyla  $\Phi$  hızdan bağımsızdır. Son olarak (2.7) yi göstermek için  $u \in C_{pm}^{ms}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  alınır ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(Q_t u) = \varphi(u)$  elde edilir. Böylece (2.7) elde edilmiş olur.

### 2.2.9 Tanım (Kısıtlama operatörü) :

$F^{ns}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}) = \{u \in F(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}) : u \text{ nihai sabit}\}$  olarak tanımlansın ve  $u$  nun standart monotonluk parçalanışı  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$  olmak üzere

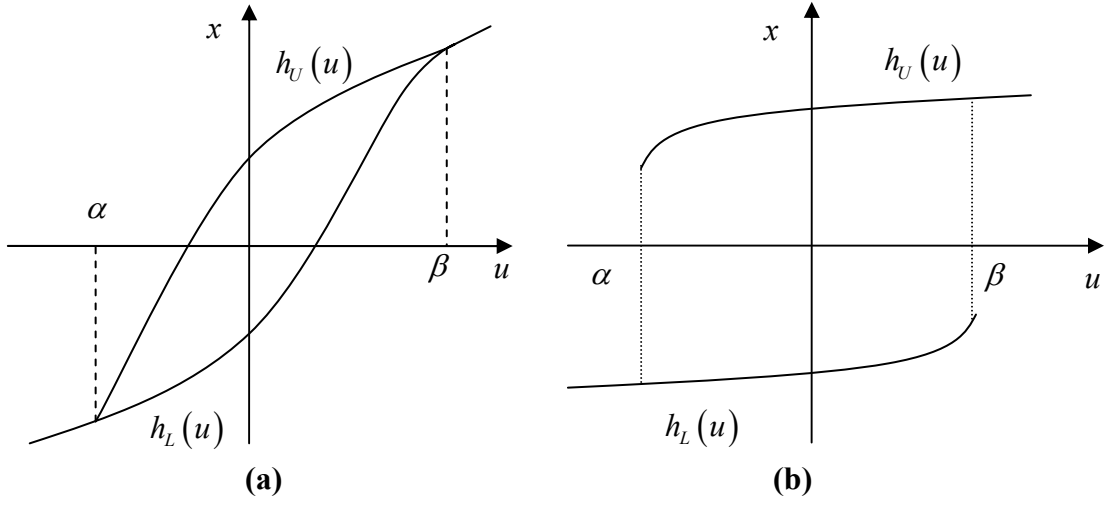
$$\mathfrak{R} : C_{pm}^{hs}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F^{hs}(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}), \quad (\mathfrak{R}(u))(k) = \begin{cases} u(t_k), & k \in [0, m] \cap \mathbb{Z}_+ \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) & k \in \mathbb{Z}_+ \setminus [0, m] \end{cases}$$

ile tanımlanan operatöre kısıtlama operatörü denir.

**2.2.10 Yardımcı Teorem :**  $u, v \in C_{pm}^{hs}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  olsun.  $\mathfrak{R}(u) = \mathfrak{R}(v)$  olması için gerekli ve yeterli koşul tüm zaman fonksiyonlarının kümesi  $\Upsilon$  olmak üzere  $u \circ f = v \circ g$  olacak şekilde  $f, g \in \Upsilon$  fonksiyonlarının var olmasıdır.

Aşağıdaki önerme histerisisin herhangi bir andaki değerinin girişin ekstremum değerleri ile hesaplanabileceğini ifade eder.

**2.2.11 Önerme :**  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bir histerisis operatörü  $u, v \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ve  $t \in \mathbb{R}_+$  olsun. Bu durumda  $\mathfrak{R}(Q_t u) = \mathfrak{R}(Q_t v)$  ise  $(\Phi(u))(t) = (\Phi(v))(t)$  dir.



Şekil 2.7 Değişirme histerisis çeşitleri.

Parçalı monoton fonksiyonların uzayı uygun bir norma göre tam olmadığından parçalı monotonluk kavramı çok kısıtlayıcı bir koşuldur. Bu durumun aşılması için [31] histerisis operatörünü  $C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  den  $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ye ve [22] ise  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ye genişletmiştir.

## 2.3 Temel Histerisis Operatörleri

### 2.3.1 Değişirme (Relay) Histerisis

Pasif histerisis örneği olan değişirme histerisis, verilen sürekli, parçalı monoton  $u(t)$  girdisi için sırası ile  $[\alpha, \infty)$  ve  $(-\infty, \beta]$  aralıklarında tanımlanan  $h_U(u)$  ve  $h_L(u)$  çıktı eğrilerini  $x(t) = (R(u))(t)$  ilişkisi ile takip eder. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$  değerleri  $\alpha < \beta$  özelliğindeki eşik değerleridir ve  $R$  ilişkisi için bu değerler en son atanır.  $u \rightarrow \infty (-\infty)$  için doyumdan dolayı  $h_U (h_L)$  asimptotik olarak sabittir (Şekil 2.7).



Değiştirme histerisiste çıktının hafızaya dayalı davranışı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(R(u))(t) = \begin{cases} h_L(u(t)) & u(t) \leq \alpha; \\ h_U(u(t)) & u(t) \geq \beta; \\ h_L(u(t)) & u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ ve } u(\tau(t)) = \alpha; \\ h_U(u(t)) & u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ ve } u(\tau(t)) = \beta; \end{cases} \quad (2.8)$$

Burada  $\tau(t) = \sup\{s : s \leq t, u(s) = \alpha \text{ veya } u(s) = \beta\}$  (yani  $\tau(t)$  eşik değerine en son ulaşılan zamanın değeridir) olarak verilir. Eğer  $\tau(t) = \emptyset$  ( yani her  $s < t$  için  $u(s) \in (\alpha, \beta)$ ) ise, modellenen fiziksel probleme bağlı olarak  $(R(u))(t)$  özel olarak tanımlanmalıdır. Yani herhangi bir eşik değerine ulaşılmamışsa  $(R(u))(t) = h_U(u(t))$  veya  $h_L(u(t))$  şeklinde gerektiği gibi tanımlanır.

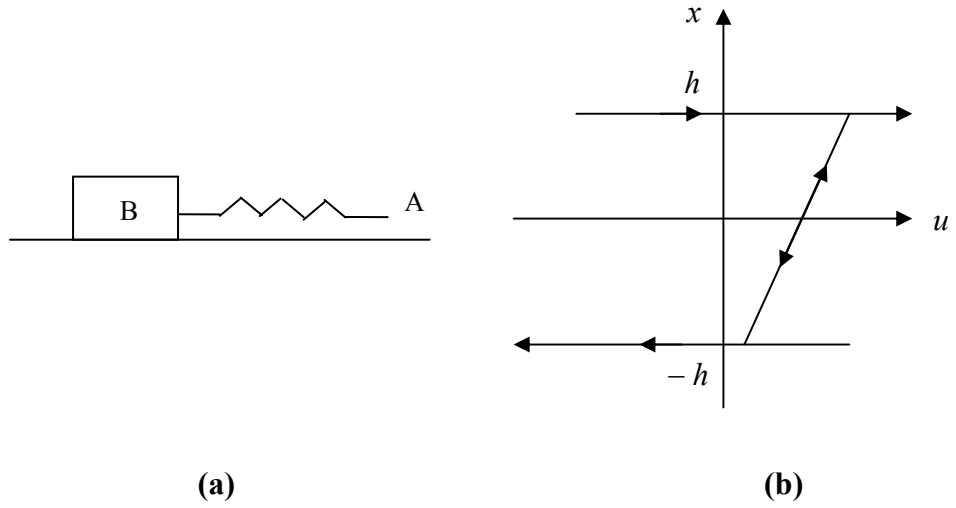
Değiştirme histerisinin histerisis bölgesi H aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$H = \{(u, x) : \alpha < u < \beta, h_L(u) < x < h_U(u)\} \quad (2.9)$$

[21].

### 2.3.2 Durma (Stop) Operatörü

Durma operatörü  $S_h$ , ideal elastik-plastik bir materyalin bağıntısı olarak düşünülebilir ve bu yüzden genellikle elastik-plastik operatör olarak adlandırılır. Operatöre durma (stop) adı Krasnosel'skii ve Pokrovskii tarafından verilmiştir.  $x$  çıktısı gerilim ve  $u$  girdisi gerginlik olmak üzere bu ikisi arasındaki ilişki, gerilimin modülü belli bir  $h$  gerilim veriminden (eşik değeri) küçük olduğu sürece, doğrusal olarak Hooke kanunu ile ilişkilendirilir. Fakat gerilim bu verim değere ulaştığında, azalan bir gerginliğin etkisinde bile, sabit kalır. Doğrusal elastik davranış gerginlik



**Şekil 2.8. (a) Yay kütlesi, (b) Yay kütlesinin histerisis diyagramı.**

arttırıldığında tekrar elde edilir. Bu özellik analitik olarak durma operatörü ile açıklanır.

Durma operatörünün histerisis bölgesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

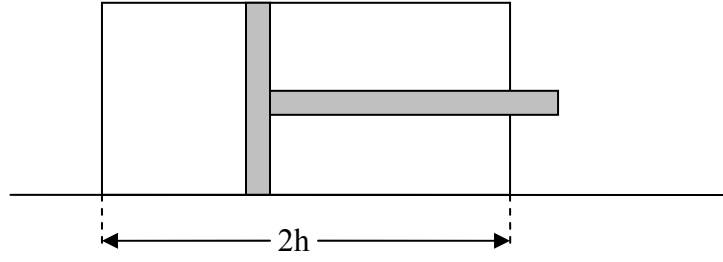
$$H = \{(u, x) : -\infty < u < \infty, -h < x < h\} \quad (2.10)$$

$x(t) = (S_h(u))(t)$  durma operatörünü tanımlamak için öncelikle parçalı monoton sürekli bir  $u$  girdisi için  $s_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$s_h(u) = \min\{h, \max\{-h, u\}\} \quad (2.11)$$

fonksiyonunu tanımlanır.  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_E$ ,  $[0, t_E]$  aralığının monotonluk parçalanışı ve  $x_0$  başlangıç koşulu olmak üzere  $S_h(u)$  durma operatörü  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır [4]:

$$\begin{aligned} S_h(u, x_0)(0) &= s_h(u(0) - x_0) \\ S_h(u, x_0)(t) &= s_h(u(t) - u(t_i)) + S_h(u, x_0)(t_i), \quad t_i < t \leq t_{i+1} \end{aligned} \quad (2.12)$$



Şekil 2.9 Piston.

### 2.3.3 Hareket (Play) Operatörü

Hareket operatörü  $P_h$  tamamen iki element arasındaki mekanik hareket ile ilişkilendirilir. Bir boyutlu hareket bir piston olarak düşünülebilir. Uzunluğu  $2h$  olan bir piston şekilde gösterilmiştir.  $x(t)$  çıktısı pistonun merkezinin konumudur,  $u(t)$  girişi ise plançerin (hareketli göbek) konumudur. Şekil 2.9 hareketi gösterir. Her zaman için  $|x-u| \leq h$  dir. Verilen bir  $u(\cdot)$  girişi için  $x(\cdot) = (P_h(u))(\cdot)$  hareket operatörünün çıktısı

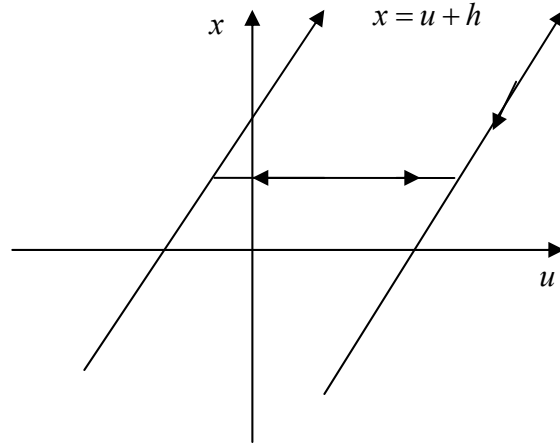
$$(P_h(u))(t) = u(t) - (S_h(u))(t) \quad (2.13)$$

şeklindedir. Burada  $S_h$  Şekil 2.8' deki stoptur.  $P_h$  için doğrudan bir formül vermek için

$$g_h(u, x) = \min[u + h, \max(u - h, x)]$$

olarak tanımlansın. Parçalı monoton sürekli  $u(\cdot)$  girişi için başlangıç koşulu  $x_0$  ve  $[0, t_E]$  aralığının monotonluk parçalanışı  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_E$  olmak üzere hareket operatörü aşağıdaki ifade ile verilir [1].

$$(P_h(u, x_0))(t) = g_h(u(t), x(t_{i-1})), \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (2.14)$$



Şekil 2.10 Piston hareketinin histerisis diyagramı.

## 2.4 Histerisis Modelleri

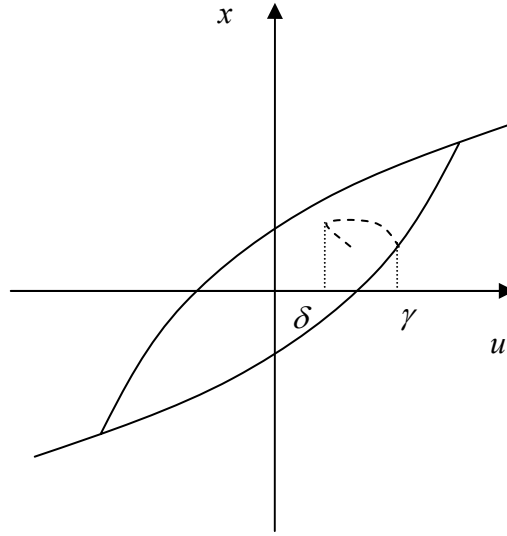
### 2.4.1 Duhem Histerisis Modeli

Bu kısımda Duhem modeli hakkında genel bir bilgi verilecektir. Modelin ayrıntılarına ise son bölümde değinilecektir.

Duhem modeli, çıkışın karakterini değiştirmesinin sadece girişin yön değiştirmesine bağlı olduğu gerçeği üzerinde durur ve olgusal bir yaklaşım kullanır. Model bir integral operatörü veya diferansiyel denklem aracılığı ile tanımlanır.

Babuska modeli tanımlamak için aşağıdaki diferansiyel denklemi kullanmıştır.

$$\dot{x}(t) = f_1(u, x)\dot{u}_+(t) + f_2(u, x)\dot{u}_-(t) \quad (2.15)$$



**Şekil 2.11** Duhem histerisis.

Burada  $\dot{u}_+(t) = \max[0, \dot{u}(t)]$  ve  $\dot{u}_-(t) = \min[0, \dot{u}(t)]$  Şekil 2.11 deki eğrileri üretir.

Bauc ise bu denklemin özel bir durumu olan bir integral operatörü kullanır.

$$\frac{dx}{dt} + a \left| \frac{du}{dt} \right| g(u, x) = b \frac{du}{dt} \quad (2.16)$$

$g$  için tipik bir seçim  $\phi$  parçalı doğrusal olarak seçilen bir fonksiyon olmak üzere  $g(u, x) = x - b\phi(u)$  şeklindedir, dolayısıyla  $u(\cdot)$  sinüzoidal iken  $x(\cdot)$  klasik histerisisi biçimlendirir.

Macki ve diğerleri Duhem modelini girdi ile çıktısı parçalı monoton olan

$$x = \Phi(u) : \frac{dx}{dt} = \phi(x, u, \dot{u}) \quad (2.17)$$

denklemini ile tanımlamışlardır.  $\phi$  fonksiyonu genellikle aşağıdaki şekilde kabul edilir:

$$\phi(x, u, \dot{u}) = \begin{cases} f_D(x, u)\dot{u}, & \dot{u}(t) \leq 0 \\ f_I(x, u)\dot{u}, & \dot{u}(t) \geq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

$f_D$  ve  $f_I$  süreklidir ('D' notasyonu azalan girişler için 'I' ise artan girişler için kullanılmıştır); bu ifade Babuska'nın versiyonuna denktir [21].

### 2.4.2 Prandtl-Ishlinskii Modeli

Bu model ilk olarak Prandtl tarafından tanıtılmıştır, fakat ondan bağımsız olarak 15 yıl sonra 1944 de Ishlinskii tarafından formüle edilmiştir. Bu yüzden modeli literatürde her iki isimle de görmek mümkündür. Ishlinskii modeli elastisite-plastisite için önerilen bir modeldir. Model Şekil 2.8 (b)' de gösterilen durma operatörü üzerinde durur.

Ishlinskii histerisis operatörünün en basit ifadesi aşağıdaki gibidir:

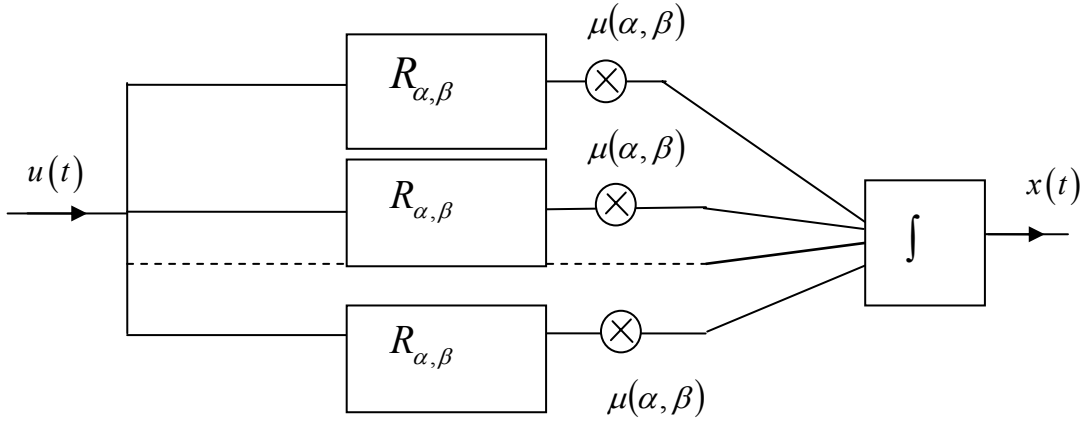
$$x(t) = (\Sigma(u))(t) \equiv \int_0^{\infty} p(h)(S_h(u))(t) dh. \quad (2.19)$$

Buradaki  $S_h$  operatörü 2.3.2 kısımda verilen durma operatörüdür.  $p(\cdot)$ , ise yoğunluk fonksiyonudur.

### 2.4.3 Preisach Model

Preisach modelinde  $u$  manyetik alanına bağlı  $x$  manyetizasyonu değiştirme histerisisin doğrusal kombinasyonu ile aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$x(t) = (P(u))(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta)(R_{\alpha, \beta}(u))(t) d\alpha d\beta \quad (2.20)$$



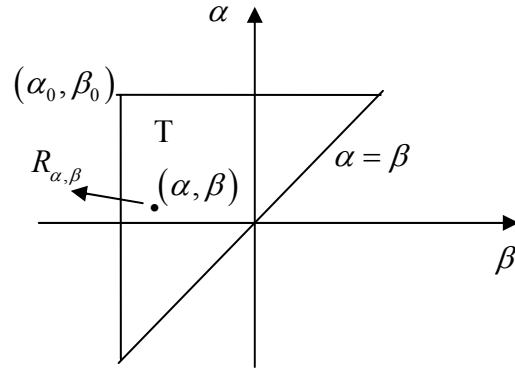
Şekil 2.12 Preisach modelin blok diyagramı.

(2.20) ifadesinde  $(R_{\alpha, \beta}(u))(t)$  2.3.1. kısımda tanımlanan, eşik değerleri  $\alpha$  ve  $\beta$ , çıkış değerleri ise  $\pm 1$  olan, değiştirme histerisidir.  $\mu(\alpha, \beta)$  fonksiyonu genellikle Preisach fonksiyonu veya ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılan bir yoğunluk fonksiyonudur. Bu fonksiyon deneysel verilere bağlı olarak hesaplanır.  $x(t) = (P(u))(t)$  ilişkisindeki  $P$  operatörüne ise Preisach operatörü denir. Preisach modeli, paralel bağlı değiştirme operatörlerini ileten bir sistemin sürekli örnekleycisi olarak yorumlanabilir.

Preisach, modelini tanımlarken matematiksel bir ifade vermemiş geometrik bir yaklaşım ile kullanmıştır. Şimdi Preisach modelin hafıza etkisinin geometrik yorumu verilecektir:

#### 2.4.3.1 Preisach Modelin Geometrik Yorumu

Preisach modeli, yerel hafızalı  $R_{\alpha, \beta}$  değiştirme histerisinin doğrusal kombinasyonu ile ifade edilmesine rağmen yerel olmayan hafızaya sahiptir.



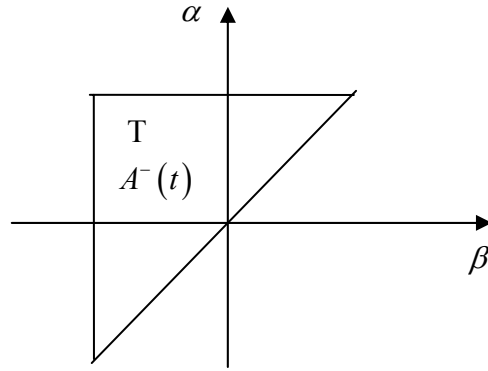
**Şekil 2.13** Limit üçgeni.

Hafıza etkisinin geometrik yorumu,  $R_{\alpha, \beta}$  operatörleri ile  $\alpha \geq \beta$  düzlemindeki  $(\alpha, \beta)$  noktaları arasında birebir bir uyuşma olduğu gerçeğine dayanır. Yani  $\alpha \geq \beta$  yarı düzlemindeki her bir  $(\alpha, \beta)$  noktası, eşik değerleri bu noktanın koordinatları  $\alpha$  ve  $\beta$  olan özel bir  $R_{\alpha, \beta}$  operatörü ile özdeşlenir. Bu durum Şekil 2.13’ de görülür. T ile gösterilen üçgene limit üçgeni denir.  $\mu(\alpha, \beta)$  fonksiyonunun T üçgeni dışında sıfır olduğu kabul edilir.

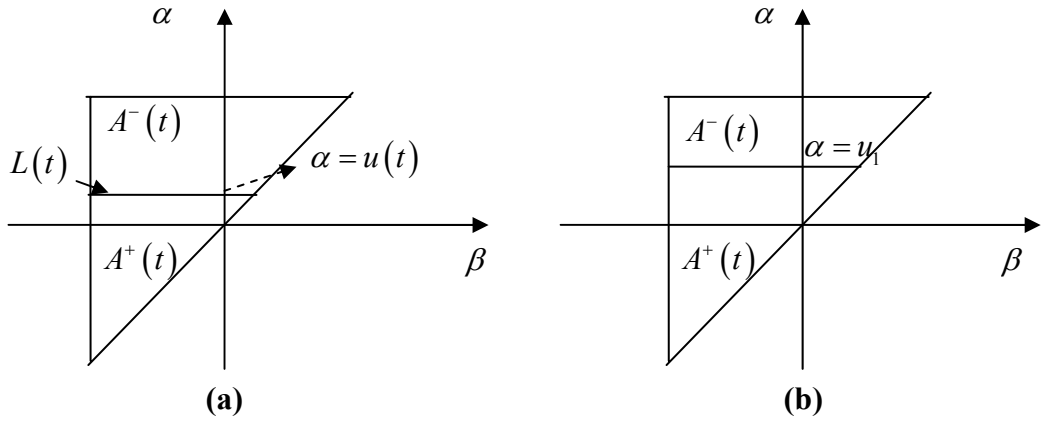
Şimdi  $u$  girişi değişirken hafıza davranışının geometrik olarak nasıl yapılandığını incelenecektir. Bunun için öncelikle  $t_0$  anındaki  $u(t)$  girişi  $\beta_0$  dan daha küçük bir değere sahip olsun. Dolayısıyla T üçgeninin noktalarına karşılık gelen bütün  $R_{\alpha, \beta}$  değiştirme operatörlerinin çıkışları -1 e eşittir. Bu ise (2.24) ifadesi ile tanımlanan histerisisin “negatif doyum” durumuna karşılık gelir (Şekil 2.14).

Daha sonra girişin  $t_1$  anındaki maksimum  $u_1$  değerine ulaşınca kadar monoton olarak arttırıldığı varsayılır.  $u(t)$  girişi arttırılırken eşik değeri  $u(t)$  nin ulaştığı değer altında olan tüm  $R_{\alpha, \beta}$  değiştirme operatörlerinin çıktısı +1 olur. Bu durum geometrik olarak T limit üçgeninin iki kümeye parçalanmasına yol açar (bkz. Şekil 2.15):

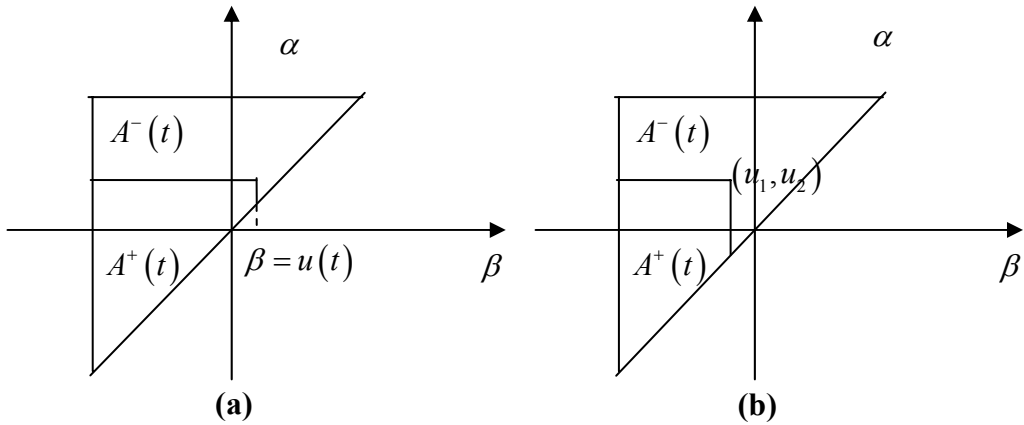




Şekil 2.14. Negatif doyum durumunda hafıza davranışı.



Şekil 2.15 (a): Artan  $u$  girişine karşılık gelen limit üçgeni, (b): Giriş yerel maksimum değerine ulaştığında limit üçgeninin parçalanışı



Şekil 2.16 (a), (b): Azalan  $u$  değerine karşılık gelen limit üçgeni.

Bu kümeler şu şekilde ifade edilebilir:

$$A^+(t) = \{(\alpha, \beta): R_{\alpha, \beta} \text{ operatörü yukarı pozisyonda}\}$$

$$A^-(t) = \{(\alpha, \beta): R_{\alpha, \beta} \text{ operatörü aşağı pozisyonda}\}$$

$A^+(t)$  ve  $A^-(t)$  bölgelerinin arasındaki sınır  $L(t)$  ile gösterilir.

Bundan sonra giriş,  $t_2$  anındaki minimum  $u_2$  değerine ulaşıncaya kadar monoton azalsın. Giriş azaltılıyorken eşik değeri  $u(t)$  girişinin ulaştığı değerin üstündeki bütün  $R_{\alpha, \beta}$  operatörleri geri döndürülür yani çıkışları yeniden  $-1$  olur. Bu durum T limit üçgeninin parçalanışını değiştirir (bkz. Şekil 2.16).

$A^+(t)$  ve  $A^-(t)$  bölgelerini birbirinden ayıran  $L(t)$  sınırının köşeleri girişin yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına karşılık gelir.

Bu bölgelere göre (2.20) integralini aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür:

$$x(t) = (P(u))(t) = \iint_{A^+(t)} \mu(\alpha, \beta)(R_{\alpha, \beta}(u))(t) d\alpha d\beta + \iint_{A^-(t)} \mu(\alpha, \beta)(R_{\alpha, \beta}(u))(t) d\alpha d\beta$$

Burada

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \in A^+(t) &\Rightarrow (R_{\alpha, \beta}(u))(t) = +1 \\ (\alpha, \beta) \in A^-(t) &\Rightarrow (R_{\alpha, \beta}(u))(t) = -1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

olduğundan, integral

$$x(t) = \iint_{A^+(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{A^-(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.22)$$

şeklinde düzenlenir. Buradan  $x(t)$  nin T limit üçgeninin  $A^+(t)$  pozitif ve  $A^-(t)$  negatif kümelerine ayrılmasına bağlı olduğu görülür. Yani  $x(t)$ ,  $L(t)$  sınırı ile belirlenir.  $L(t)$  sınırı ise geçmiş ekstremum noktalarına göre şekillenir. Yani Preisach modelinin geçmişe bağlı olduğu sonucuna ulaşılır.

Aşağıda Preisach histerisis modelinin yerel olmayan hafızaya sahip olduğu gösterilir.

$t > t'$  için farklı ekstremum noktalarına sahip  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  girişleri göz önüne alınsın. (2.22) den bu girişlere karşılık gelen  $x(t)$  çıkışları:

$$x_1(t) = \iint_{A_1^+(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{A_1^-(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.23)$$

$$x_2(t) = \iint_{A_2^+(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{A_2^-(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.24)$$

$A_1^+(t)$ ,  $A_1^-(t)$  bölgeleri  $A_2^+(t)$ ,  $A_2^-(t)$  bölgelerinden farklı olduğundan  $t > t'$  için  $x_1(t) \neq x_2(t)$  elde edilir.  $t'$  anında  $x_1(t') = x_2(t')$  olsa bile bu eşitsizlik geçerlidir. Böylece Preisach Modeli yerel hafızalı olmayan bir histerisis modelidir.

#### 2.4.3.2 Preisach Modelin Genel Özellikleri

Preisach modelin ilk özelliği, pozitif doyum durumunda  $x^+$  çıkış değerinin, negatif doyum durumundaki  $x^-$  çıkışının negatif değerine eşit olduğudur, yani

$$x^+ = -x^- \quad (2.25)$$

dur. Pozitif doyumda  $u(t)$  girişi  $\alpha_0$  dan daha fazladır ve bütün  $R_{\alpha, \beta}$  operatörlerinin çıkışları +1 dir. Dolayısıyla (2.20) den pozitif durumda

$$x^+ = \iint_{\Gamma} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.26)$$

ve benzer olarak negatif doyumda

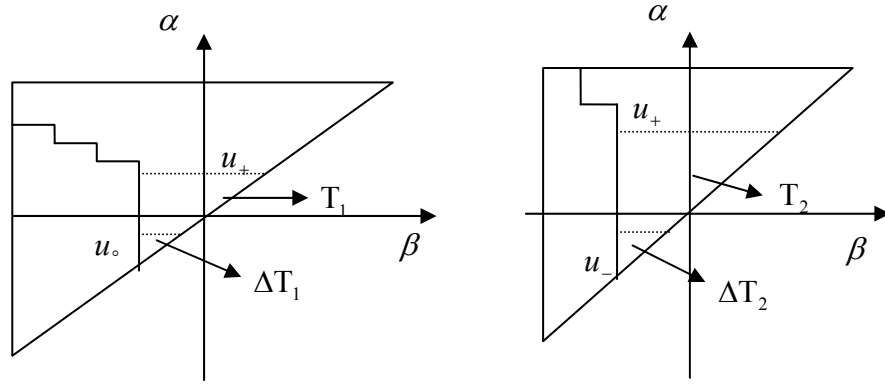
$$x^- = -\iint_{\Gamma} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.27)$$

bulunur. Buradan  $x^+ = -x^-$  olduğu görülür. Ayrıca  $x^+$  ve  $x^-$  doyum değerleri  $u(t)$  girişi  $\alpha_0$  dan üstte veya  $\beta_0$  in altında ise sabit kalır. Yani  $x^+$  ve  $x^-$  noktaları yukarı çıkan ve aşağı inen kollar birleştikten (doyuma ulaşma) sonra yapılıdır.

Preisach modelin hafıza biçimlendirme mekaniğinde bütün geçmiş ekstremum değerleri toplanmaz. Bu ekstremum değerlerinden bazıları ardışık giriş değişimleri tarafından silinebilir.

### 2.4.3.3 Silme Özelliği

Girişin her bir yerel maksimum değeri,  $\alpha$  koordinatı bu maksimum değerinin altında olan  $L(t)$  nin köşelerini ve her bir yerel minimum değeri ise  $\beta$  koordinatı bu minimumun üstünde olan  $L(t)$  nin köşelerini siler.

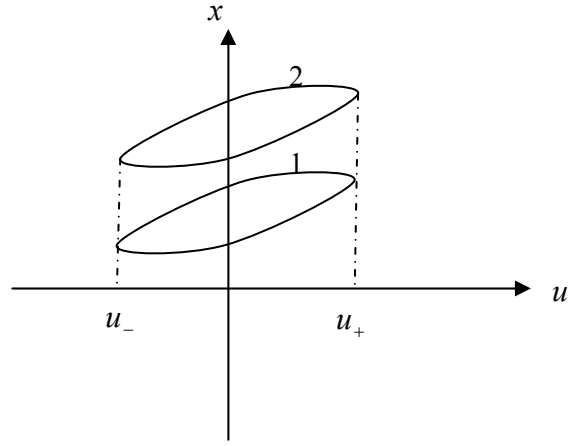


Şekil 2.17 Periyodik giriş değişimlerine karşılık gelen limit üçgenleri.

#### 2.4.3.4 Eşlik Özelliği

$u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  farklı geçmişlere sahip iki giriş olsun. Belli bir  $t_0$  anından sonra bu iki girişin ardışık  $u_+$  ve  $u_-$  ekstremum değerleri arasında gidip geldiği varsayalım. Bu periyodik giriş değişimi küçük histerisis çevrimleri oluşturur.  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  giriş değişimleri Şekil 2.17' deki gibidir.

$t_0$  anından sonra  $u(t)$  girişinin aynı ekstremum değerlerine karşılık gelen  $x_1$  ve  $x_2$  çıktılarının grafikleri aynıdır. Fakat  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  nin geçmiş girişlerinin farklılığından bu iki küçük çevrim  $x$  eksenine göre farklı konumdadırlar. Yani  $x_1$  ve  $x_2$  çıktı değerleri farklıdır. Bununla birlikte bu iki histerisis çevriminin eş olduğu ispatlanabilir. Bunun için  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  girişlerinin eşit olan tüm artışlarının  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  nin eşit artışına sebep olduğunu gösterilmelidir.  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  girişleri  $u_-$  minimum değerinden sonra aynı oranda artsın. Yani  $\Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u$  olsun. Bu durumda  $\Delta T_1$  ve  $\Delta T_2$  kümeleri pozitif  $A_1^+(t)$  ve  $A_2^+(t)$  kümelerine eklenir ve negatif  $A_1^-(t)$  ve  $A_2^-(t)$  kümelerinden çıkarılır.



**Şekil 2.18** Eş çevrimler.

(2.20) formülü kullanılarak buna karşılık gelen çıkış artışları:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= 2 \iint_{\Delta T_1} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ \Delta x_2 &= 2 \iint_{\Delta T_2} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta\end{aligned}\tag{2.28}$$

olarak bulunur.  $\Delta T_1 = \Delta T_2$  olduğundan  $\Delta x_1 = \Delta x_2$  elde edilir.

Sonuç olarak eşlik özelliği; girişin aynı ardışık iki ekstremum değeri arasında gidip gelmesi ile oluşan değişimine karşılık gelen bütün küçük çevrimler eşitir [23].

### 3. KARARLILIK

#### 3.1 Denge Noktası

$D \subset \mathbb{R}^n$  bir bölge ve  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  yerel Lipschitz özelliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

otonom (zamanla değişmeyen) sistemi göz önüne alınsın.  $f(x_e) = 0$  şartını sağlayacak biçimde bir  $x_e \in D$  varsa  $x_e$  ye (3.1) sisteminin denge noktası (sabit nokta) denir.

Buradaki amaç denge noktasının kararlılığını araştırmaktır.

**3.1.1 Tanım:** Her  $\varepsilon > 0$  için

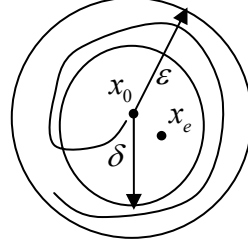
$$\|x_0 - x_e\| < \delta \text{ iken } \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

olacak şekilde bir  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  bulunabiliyorsa  $x_e$  ye kararlı denge noktası denir.

**3.1.2 Tanım:**  $x_e$  denge noktası kararlı ve her  $x_0$  başlangıç koşulu için

$$\|x_0 - x_e\| < \eta \text{ iken } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$$

olacak şekilde bir  $\eta > 0$  varsa  $x_e$  ye asimptotik kararlı denge noktası denir.



**Şekil 3.1** Kararlı denge noktasının geometrik yorumu.

İspatlarda kolaylık sağlaması açısından denge noktası genellikle orijin noktasında alınır. Denge noktasının orijinde olmadığı durumlarda ise bu nokta orijine ötelenir.  $x_e \neq 0$  olsun ve  $z = x - x_e$  değişken dönüşümü yapılsın. Buradan

$$\dot{z} = \dot{x} = f(z + x_e) = g(z)$$

elde edilir ve  $g(0) = f(0 + x_e) = 0$  eşitliğinden orijinin denge noktası olduğu görülür.

### 3.2 Doğrusal Sistemler İçin Kararlılık Koşulu

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{3.2}$$

doğrusal sistemi ve bu sistemin  $x(t) = e^{At}x^0$  çözümü göz önüne alınsın.

#### 3.2.1 Tanım:

i.  $v \neq 0$  olmak üzere  $Av = \lambda v$  denklemini sağlayan  $\lambda \in \mathbb{C}$  değerlerine  $A$  matrisinin özdeğerleri denir.

ii.  $\lambda$  özdeğerlerini  $Av = \lambda v$  denkleminde yerine yazarak bulduğumuz  $v$  değerlerine  $A$  matrisinin özvektörleri denir.



iii.  $v$  özvektörü

$$(A - \lambda I)v \neq 0, (A - \lambda I)^2 v \neq 0, \dots, (A - \lambda I)^{m-1} v \neq 0, (A - \lambda I)^m v = 0, \quad m > 1$$

özelliğini sağlıyorsa  $v$  ye  $A$  matrisinin  $m$ . dereceden genelleştirilmiş özvektörü denir.

**3.2.2 Teorem:**  $\pi(A)$ ,  $A$  matrisinin özdeğerlerinin kümesi olmak üzere her  $\lambda \in \pi(A)$  için  $\text{Re}(\lambda) < \omega$  olsun. Bu durumda  $\omega$  bağlı öyle bir  $M > 0$  vardır ki

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

**İspat:**  $x$ ,  $A$  matrisinin  $m$ . dereceden genelleştirilmiş özvektörü olmak üzere

$$e^{At}x = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}x = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(A-\lambda I)^k t^k}{k!} x.$$

Her  $\varepsilon > 0$  için herhangi bir  $t$  anında  $t^k e^{-\varepsilon t}$  sınırlı olduğundan

$$\|e^{At}x\| \leq \bar{M} e^{\text{Re}(\lambda)t} \left| \cos((\text{Im}\lambda)t) + i \sin((\text{Im}\lambda)t) \right| e^{\varepsilon t} \|x\| \leq Me^{\omega t} \|x\|$$

elde edilir.

**3.2.3 Teorem:** Her  $\lambda \in \pi(A)$  için  $\text{Re}(\lambda) < 0$  ise orijin asimptotik kararlıdır.

**İspat:** Her  $\lambda \in \pi(A)$  için  $\text{Re}(\lambda) < 0$  olsun. Bu durumda her  $\lambda \in \pi(A)$  için öyle bir  $\omega < 0$  vardır ki  $\text{Re}(\lambda) < \omega$  dir ve yukarıdaki teoremden

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}$$

yazılabilir. Verilen bir  $\varepsilon > 0$  için  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$  seçilirse  $\|x_0\| < \delta$  için  $\|e^{At}x_0\| \leq M\|x_0\| < M\delta = \varepsilon$  bulunur. Yani orijin noktası kararlı bir denge noktasıdır. Şimdi bir  $\eta > 0$  seçilirse  $\|x_0\| < \eta$  için  $\|e^{At}x_0\| \leq Me^{o\eta}\|x_0\| < M\eta e^{o\eta}$  elde edilir ve limit alınır  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x_0 = 0$  bulunur. Dolayısıyla orijin kararlı denge noktasıdır [7].

### 3.3 Sınırlı Girdi-Sınırlı Çıktı Kararlılık

**3.3.1 Tanım:** Her  $t \geq 0$  için  $\|u(t)\| \leq u_m < \infty$  olacak şekilde bir  $u_m > 0$  sabiti varsa  $u$  ya sınırlı girdi denir.

**3.3.2 Tanım:** Sınırlı her bir girdi için sınırlı çıktılar veren bir sisteme sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır veya sadece girdi-çıkıtı kararlıdır denir. Bu kararlılık tanımı sıfır-durum cevabı için tanımlanır ve başlangıç anında duran bir sistem için uygulanır.

Girdi çıktı kararlılıkta sistemin çıktısı da değerlendirildiğinden bu tip kararlılığa dış (external) kararlılık denir.

**3.3.3 Teorem:**  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  doğrusal sisteminin transfer fonksiyonunun tüm kutupları sol yarı düzlemde ise sistem sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır.

**İspat:**  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  doğrusal sisteminin transfer fonksiyonu  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  şeklindedir. Transfer fonksiyonunda  $(sI - A)^{-1} = \frac{ek(sI - A)}{\det(sI - A)}$  yazarak elde edilen

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} C[ek(sI - A)]B + D \quad (3.3)$$

eşitliğinden  $G(s)$  transfer fonksiyonunun her bir kutbunun  $(sI - A)$  nın bir özdeğerine karşılık geldiği görülür. Dolayısıyla eğer  $A$  matrisinin her bir özdeğeri negatif düzlemde ise sistem sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır. Diğer yandan (3.3) eşitliğindeki mümkün bazı sadeleşmeler yüzünden  $A$  matrisinin her bir özdeğeri transfer fonksiyonunun bir kutbuna karşılık gelmez. Yani  $A$  matrisinin özdeğerlerinden bazıları sağ yarı düzlemde olsa bile sistem kararlı olabilir [3].

### 3.4 Lyapunov Kararlılık Teorisi

Yeniden (3.1) otonom sistemi göz önüne alınsın ve  $D \subset \mathbb{R}^n$  bölgesinin orijinin bir komşuluğu olduğu varsayılınsın.  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.  $V$  nin (3.1) sisteminin yörüngeleri boyunca türevi aşağıdaki şekilde verilir:

$$\dot{V} = \langle \text{grad}V, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x).$$

Sistemin yörüngeleri boyunca türevi sistemin denkleminde bağlıdır.  $\varphi(t, x_0)$  sistemin  $t = 0$  anındaki  $x_0$  başlangıç koşuluna karşılık gelen çözümü ise

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(\varphi(t, x_0)) \Big|_{t=0}$$

şeklindedir. Dolayısıyla eğer  $\dot{V}(x)$  negatif ise  $V$  (3.1) in çözümü boyunca azalacaktır.

**3.4.1 Teorem:**  $x = 0$  noktası (3.1) sistemi için denge noktası olsun ve  $D \subset \mathbb{R}^n$  bölgesi  $x = 0$  noktasını kapsasın.  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere eğer

$$V(0) = 0 \text{ ve } x \in D - \{0\} \text{ için } V(x) > 0 \quad (3.4)$$

$$\text{her } x \in D \text{ için } \dot{V}(x) \leq 0 \quad (3.5)$$

ise sistem  $x = 0$  noktasında kararlıdır. Ayrıca eğer

$$\text{her } x \in D - \{0\} \text{ için } \dot{V}(x) < 0 \quad (3.6)$$

ise sistem  $x = 0$  noktasında asimptotik kararlıdır.

**İspat:** Verilen bir  $\varepsilon > 0$  için bir  $r \in (0, \varepsilon]$  seçilsin öyle ki

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\} \subset D.$$

$\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$  olsun. (3.4) den  $\alpha > 0$  dır.  $\beta \in (0, \alpha)$  ve

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r : V(x) \leq \beta\}$$

olsun.  $\Omega_\beta$  nin  $B_r$  nin içinde olmadığı kabul edilsin. Bu durumda bir  $p \in \Omega_\beta$  noktası vardır öyle ki bu nokta  $B_r$  nin sınırındadır. Bu noktada  $V(p) \geq \alpha > \beta$  olur fakat bütün  $x \in \mathbb{R}^n$  noktaları için  $V(x) \leq \beta$  dır. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla  $\Omega_\beta$  kesinlikle  $B_r$  nin içindedir.  $t = 0$  noktasında  $\Omega_\beta$  kümesinden başlayan her yörünge tüm  $t \geq 0$  anlarında  $\Omega_\beta$  de kalır. Bu durum (3.5) özelliğini kullanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \forall t \geq 0.$$

$\Omega_\beta$  tıkız (kompakt) bir küme olduğundan ( $\Omega_\beta \subset \mathbb{R}^n$  tanımı gereği kapalı ve  $B_r$  ile sınırlı olduğundan) Ek A teoremden (3.1) sisteminin tüm  $x(0) \in \Omega_\beta$  başlangıç koşulları ve her  $t \geq 0$  için tek bir çözümü vardır.  $V(x)$  sürekli ve  $V(0) = 0$  olduğundan bir  $\delta > 0$  vardır öyle ki

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

dır. Buradan

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

dir ve

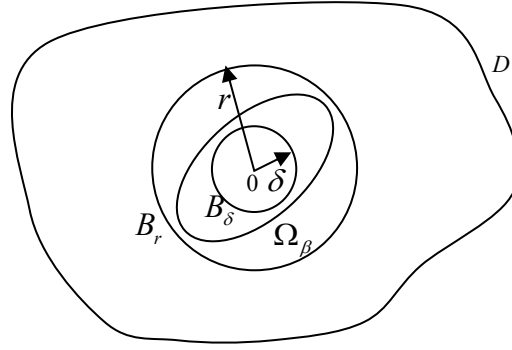
$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_r$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \forall t \geq 0$$

elde edilir ve bu ifade  $x = 0$  denge noktasının kararlı olduğunu gösterir. Şimdi (3.6) ifadesinin sağlandığı kabul edilsin. Asimptotik kararlılığı göstermek için her  $\alpha > 0$  için her  $t > T$  için  $\|x(t)\| < \alpha$  olacak şekilde bir  $T > 0$  ın varlığını ve  $t \rightarrow \infty$  için  $x(t) \rightarrow 0$  olduğu gösterilmelidir. Önceki kısmın ispatından, her  $\alpha > 0$  için  $\Omega_b \subset B_\alpha$  olacak şekilde bir  $b > 0$  olduğu biliniyor. Dolayısıyla  $t \rightarrow \infty$  için  $V(x(t)) \rightarrow 0$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $V(x(t))$  monoton azalan ve alttan sıfır noktası ile sınırlı olduğundan

$$t \rightarrow \infty \text{ için } V(x(t)) \rightarrow c \geq 0.$$



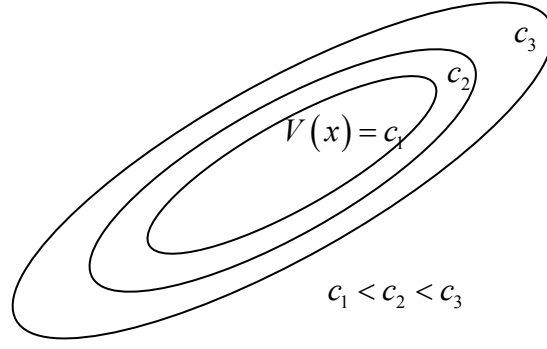
**Şekil. 3.2** 3.4.1 Teoremin ispatında geçen kümelerin geometrik yorumu.

$c = 0$  olduğunu göstermek için  $c > 0$  olduğu varsayalım.  $V(x)$  sürekli olduğundan  $B_d \subset \Omega_c$  olacak şekilde bir  $d > 0$  vardır.  $V(x(t)) \rightarrow c > 0$  limiti her  $t \geq 0$  için  $x(t)$  yörüngesinin  $B_d$  yuvarının dışında kaldığını gösterir.  $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$  olarak tanımlansın (böyle bir  $\gamma$  vardır çünkü sürekli  $\dot{V}(x)$  fonksiyonu  $d \leq \|x\| \leq r$  tıkız kümesi üzerinde maksimum bir noktaya sahiptir). (3.6) dan  $-\gamma < 0$ . Buradan

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

sağ taraf negatif kalacağından eşitsizlik  $c > 0$  varsayımı ile çelişir [14].

**3.4.2 Tanım:** (3.4)-(3.6) koşullarını sağlayan sürekli diferansiyellenebilen  $V(x)$  fonksiyonuna Lyapunov fonksiyonu denir.  $c > 0$  için tanımlanan  $V(x) = c$  yüzeyine ise Lyapunov yüzeyi denir.



**Şekil 3.3** Lyapunov fonksiyonunun seviye yüzeyleri.

Şekil 3.3’ deki Lyapunov yüzeyleri kullanılarak ispat daha anlaşılır bir hale gelir.  $\dot{V} < 0$  koşulu herhangi bir yörünge için  $V(x) = c$  yüzeyinden geçmesi durumunda bu yörünge için  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$  kümesinin içinde hareket edeceğine ve bir daha kesinlikle dışarı çıkamayacağına işaret eder.  $\dot{V} < 0$  olduğunda yörünge bir Lyapunov yüzeyinden daha içte olan bir Lyapunov yüzeyine ilerler.  $c$  azaldığından  $V(x) = c$  Lyapunov yüzeyi orijine doğru büzülür. Bu ise yörünge zamanla orijine yakınsadığını gösterir. Sadece  $\dot{V} < 0$  olduğunun bilinmesi yörünge için orijine yakınsayacağını söylemek için yeterli değildir, fakat bu durumda orijinin kararlı olduğunun söylenmesi için yeterlidir.

Lyapunov kararlılıkta sistemin çıktısı hesaba katılmadığı için bu tip kararlılığa iç (internal) kararlılık denir.

**3.4.3 Tanım:**  $x \neq 0$  için  $V(x) > 0$  ve  $V(0) = 0$  koşulunu sağlayan fonksiyona pozitif tanımlı denir. Eğer  $x \neq 0$  için  $V(x) \geq 0$  ise fonksiyon pozitif yarı tanımlıdır.  $-V(x)$  pozitif tanımlı veya yarı pozitif tanımlı ise  $V(x)$  negatif veya negatif yarı tanımlıdır.

Bu tanım yardımıyla Lyapunov teorisi aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir.

**3.4.4 Teorem:** Sürekli diferansiyellenebilen pozitif tanımlı bir  $V(x)$  fonksiyonu var ve  $\dot{V}(x)$  negatif yarı tanımlı ise orijin noktası kararlıdır,  $\dot{V}(x)$  negatif tanımlı ise orijin noktası asimptotik kararlıdır [14].

### 3.5 Doğrusal Sistemler İçin Lyapunov Teorisi

$\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = 0$  sistemi göz önüne alınsın.  $P$  simetrik bir matris ve iç çarpım  $\mathbb{R}^n$  nin genel iç çarpımı olmak üzere  $V = \langle x, Px \rangle$  fonksiyonu tanımlansın.

$$\dot{V}(x) = \langle \dot{x}, Px \rangle + \langle x, P\dot{x} \rangle$$

denkleminde  $\dot{x}$  ifadesi yerine yazılır ve iç çarpımın özellikleri kullanırsa  $-Q = AP + A^T P$  olmak üzere her  $x \neq 0$  için

$$\dot{V}(x) = -\langle x, Qx \rangle$$

elde edilir. Buradan  $Q$  simetriktir.  $-Q = AP + A^T P$  denklemi ise Lyapunov denklemi olarak adlandırılır.

**3.5.1 Teorem:** Verilen bir  $Q > 0$  için Lyapunov denklemini sağlayan bir  $P$  pozitif matrisi var olması için gerekli ve yeterli koşul  $A$  nın asimptotik kararlı olmasıdır.

**İspat:**  $Q > 0$  verilsin ve Lyapunov denklemini sağlayan bir  $P > 0$  matrisi var olsun. Bu durumda tam bir Lyapunov fonksiyoneli elde edilir. Dolayısıyla  $A$  matrisi asimptotik kararlı olur. Tersine  $A$  asimptotik kararlı olsun ve  $P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$  olarak seçilsin.  $P$  iyi tanımlıdır ve  $P^T = P > 0$  dır ve son olarak



$$\begin{aligned}
PA + A^T P &= \int_0^{\infty} \left[ e^{A^T t} Q e^{At} A + A^T e^{A^T t} Q e^{At} \right] dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ e^{A^T t} Q e^{At} A \right] dt \\
&= -Q,
\end{aligned}$$

eşitliğinden  $P$  nin Lyapunov denklemini sağladığı görülür [7].

## 4. KARARLILIK YARIÇAPI

### 4.1 Spektral Teori, Temel Tanımlar

$X$  karmaşık bir doğrusal vektör uzayı olsun.  $D(A) \subset X$  tanım kümesi ve  $R(A) \subset X$  değer kümesi olmak üzere  $A: D(A) \rightarrow R(A)$  tanımlı doğrusal operatörü verilsin.  $\lambda \in \mathbb{C}$  ve  $I$  özdeşlik operatörü olmak üzere

$$A_\lambda = \lambda I - A$$

operatörler demeti göz önüne alınsın. Bu demet incelenerek  $A$  operatörünün yapısı hakkında geniş bilgi elde edinilebilir.

Doğrusal operatörlerin spektral teorisi  $\lambda$  sayılarının,  $A_\lambda$  operatörünün sınırlı bir tersinin bulunmasına olanak sağlayan çözücü kümesinin, bu küme ve spektrum adı verilen tümleyeni ile  $A$  ve varsa  $A_\lambda^{-1}$  operatörü arasındaki ilişkinin aydınlatılması ile uğraşır.

**4.1.1 Tanım** (Çözücü Küme) :  $A_\lambda = \lambda I - A$  operatörünün  $R_\lambda = R(A_\lambda)$  değer bölgesini  $X$  normlu uzayında yoğun kılan  $A_\lambda$  operatörünün sürekli bir tersinin var olmasını sağlayan  $\lambda$  karmaşık sayılarının oluşturduğu  $\rho(A) \subset \mathbb{C}$  kümesine  $A$  operatörünün çözücü kümesi (resolvent set) adı verilir.

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \bar{R}_\lambda = X, A_\lambda^{-1} \text{ var ve sürekli} \}$$

**4.1.2 Tanım (Spektrum) :**  $\sigma(A) = \rho(A)' \subset \mathbb{C}$  kümesine  $A$  operatörünün spektrumu denir. Bu durumda  $\lambda \in \sigma(A)$  ise  $A_\lambda^{-1}$  yoktur veya  $A_\lambda^{-1}$  vardır fakat sürekli değildir ya da  $\bar{R}_\lambda \neq X$  dir [29].

## 4.2 Kararlılık Yarıçapı

Bu kısımdaki bilgiler [10] numaralı kaynaktan alınmıştır.

$IK = \mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  olmak üzere kararlı olmayan  $n \times n$  boyutlu matrislerin kümesi

$$J_n(IK) = \{A \in IK^{n \times n} : \sigma(A) \cap \bar{\mathbb{C}}_+ \neq \emptyset\}$$

ile tanımlansın.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\mathbb{C}^n$  de tanımlanan standart iç çarpım ve

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

bu iç çarpım ile tanımlanan normdur.

$A$  operatörünün normu

$$\|A\| = \max \{\|Az\| : z \in IK^n, \|z\| = 1\}$$

ile tanımlanır.  $A$  matrisinin singüler değerleri  $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \dots \geq s_n(A)$  ile gösterilsin.  $\det A \neq 0$  olduğunda bu değerler

$$s_n(A) = \min \{\|Az\| : z \in IK^n, \|z\| = 1\} = \|A^{-1}\|^{-1},$$

ile tanımlanır. Bu tanımlamalar  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$  için de geçerlidir, yani reel  $A$  matrisi için  $\|A\|$  ve  $s_j(A)$ ,  $j=1,2,\dots,n$  özellikleri  $\mathbb{R}^n$  veya  $\mathbb{C}^n$  üzerinde tanımlanan  $A$  operatörünün özellikleri ile aynıdır.

Kararlılık yarıçapındaki amaç kararsızlık durumuna olan uzaklığın hesaplanmasıdır.

$$r_{IK}(A) = \inf \{ \|A - U\| : U \in J_n(IK) \}, \quad A \in IK^{n \times n}. \quad (4.1)$$

$\sigma(A)$  spektrumu  $A$  ya bağlı olduğundan  $J_n(IK)$  kapalıdır ve  $\partial J_n(IK)$  en az bir öz değeri sanal (imajiner) eksen üzerinde olan matrisleri kapsar. Dolayısıyla herhangi bir kararlı  $A$  matrisi için bir  $P \in IK^{n \times n}$  minimum norm ‘destabilizing’ öteleme matrisi vardır öyle ki  $U = A + P \in J_n(IK)$ :  $\|A - U\| = \|P\| = r_{IK}(A)$  ve  $\sigma(A + P) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$ . Bu tanım yardımıyla aşağıdaki özellikler elde edilir:

$$\begin{aligned} r_{IK}(A) = 0 &\Leftrightarrow A \in J_n(IK), \\ r_{IK}(\alpha A) &= \alpha r_{IK}(A), \alpha \geq 0, \\ A &\rightarrow r_{IK}(A), \quad IK^{n \times n} \text{ üzerinde tanımlıdır.} \end{aligned}$$

Reel  $A$  matrisi için kararsızlıktan uzaklık iki türdür; ilki karmaşık kararlılık yarıçapı  $r_{\mathbb{C}}(A)$  ve diğeri reel kararsızlık yarıçapı  $r_{\mathbb{R}}(A)$  dır.

### 4.3 Karmaşık Kararlılık Yarıçapının Özellikleri

$$s_n(A) = \min \{ \|A - S\|, S \in \mathbb{R}^{n \times n}, 0 \in \sigma(S) \}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (4.2)$$

Buradan aşağıdaki özellik elde edilir:

$$0 \leq r_{\mathbb{C}}(A) \leq r_{\mathbb{R}}(A) \leq s_n(A), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

#### 4.4 Ötelenmiş Sistemlerin Kararlılık Yarıçapı

(4.1) denklemi ile verilen karmaşık kararlılık yarıçapının ötelenmiş sistemlere genişletilmiş hali aşağıda verilmiştir [11].

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  olmak üzere  $\dot{x} = Ax$  sistemi göz önüne alınsın. Sisteme  $A \rightarrow A + KBC$  formundaki bir afin parametre ötelemesi uygulansın.  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$ , verilen matrisler ve  $K \in \mathbb{C}^{m \times p}$  bilinmeyen bir matristir. Ötelenmiş sistem

$$\dot{x} = (A + BKC)x$$

şeklindedir ve bu bilinmeyen statik doğrusal geri besleme ile oluşturulan bir kapalı çevrim sistemi olarak yorumlanabilir.

Sistemin karmaşık kararlılık yarıçapı:

$$r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{C}}(A; B, C) = \inf \{ \|K\|; \sigma(A + BKC) \cap \bar{\mathbb{C}}_+ \neq \emptyset \}.$$

**4.4.1 Önerme :**  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  olsun. Bu durumda

$$r_{\mathbb{C}} = \begin{cases} \frac{1}{\max \|G(i\omega)\|}; & G \neq 0 \text{ ise,} \\ \infty; & G \equiv 0 \text{ ise.} \end{cases} \quad (4.3)$$

**İspat:** Öncelikle bir  $K \in \mathbb{C}^n$ ,  $x \neq 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  için

$$(A + BKC)x = i\omega x \quad (4.4)$$

olsun. Bu durumda

$$x = (i\omega I - A)^{-1} BKCx.$$

$A$  kararlı olduğundan  $Cx \neq 0$ .  $u = Cx$  olsun. Böylece

$$u = G(i\omega)Ku. \quad (4.5)$$

$G \equiv 0$  ise bu durum bir çelişkiye yol açar ve buradan  $r_c = \infty$  olur. Eğer  $G \neq 0$  ise (4.5) den  $\|G(i\omega)\| \|D\| \geq 1$  bulunur ve dolayısıyla

$$r_c \geq \frac{1}{\max_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(i\omega)\|}.$$

$\omega \rightarrow \|G(i\omega)\|$  nin maksimum değeri  $\omega_0$  da meydana gelsin.

$G(i\omega_0)$  matrisinin singüler değer ayrışımı aşağıdaki gibidir.

$$G(i\omega_0) = \sum_{j=1}^m s_j u_j \bar{v}_j$$

Burada  $u_j \in \mathbb{C}^p, v_j \in \mathbb{C}^m$ ,

$$\|u_j\|_{\mathbb{C}^p} = \|v_j\|_{\mathbb{C}^m} = 1 \text{ ve } s_1 = \|G(i\omega_0)\| \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$$

dir. Şimdi  $K = s_1^{-1} v_1 \bar{u}_1$ , olsun, böylece  $G(i\omega_0)Ku_1 = u_1$ , veya

$$C(i\omega_0 I - A)^{-1} BKu_1 = u_1.$$

Eğer

$$x = (i\omega_0 I - A)^{-1} BKu_1$$

olursa  $Cx = u_1$ , dolayısıyla  $x \neq 0$  ve

$$x = (i\omega_0 I - A)^{-1} BKCx$$

veya

$$(i\omega_0 I - A)x = BKCx.$$

elde edilir. Buradan

$$\sigma(A + BKC) \cap \bar{\mathbb{C}}_+ \neq \emptyset$$

ve

$$\|K\| = \frac{1}{\|G(i\omega_0)\|} = \frac{1}{\max_{\omega \in \mathbb{R}} \|G(i\omega)\|}.$$

#### 4.5 Parametrelendirilmiş Cebirsel Riccati Denklemine Göre $r_c(A; B, C)$ nin Karakterizasyonu

Parametrelendirilmiş cebirsel Riccati denklemi:

$$A^T P + PA - \rho C^T C - PBB^T P = 0.$$

[11] göstermiştir ki bu denklemin  $P$  gibi bir çözümü  $\sigma(A - BB^T P) \subset \mathbb{C}_-$  sağlarsa  $P$  kararlılaştırıcı bir çözümdür.

**4.5.1 Teorem:**  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ ,  $r_c < \infty$ ,  $\rho \in (-\infty, r_c^2)$  olsun. Bu durumda cebirsel Riccati denkleminin  $P_\rho$  şeklinde kararlı tek bir çözümü vardır. Ayrıca

$\rho = r_c^2$  olduğunda cebirsel Riccati denkleminin  $P_{r_c^2}$  şeklinde tek bir çözümü vardır ki bu çözüm

$$\sigma(A - BB^T P_{r_c^2}) \subset \bar{\mathbb{C}}_-$$

özelliğini sağlar.

Her  $\rho \in (-\infty, r_c^2)$  için  $P_\rho = P_\rho^T$  dir.

**4.5.2 Önerme:**  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ ,  $\rho \in (0, r_c^2]$  ve  $\sigma(A - BB^T P_\rho) \subset \bar{\mathbb{C}}_-$  özelliğini sağlayan  $P_\rho$  cebirsel Riccati denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda  $V(x) = -\langle x, P_\rho x \rangle$  fonksiyonu  $\|K\|^2 < \rho$  olmak üzere tüm  $\dot{x} = (A + BKC)x$  doğrusal sistemleri için bir Lyapunov fonksiyonudur.

4.5.1 Teorem ve 4.5.2 Önerme' nin ispatı [6,s.109,112] dedir.



## 5. ORANSAL-İNTEGRAL KONTROL EDİLEBİLİRLİK

### 5.1 Doğrusal Sistemler İçin Kontrol Edilebilirlik

**5.1.1 Teorem:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  olmak üzere

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.1)$$

doğrusal sisteminin kontrol edilebilmesi için gerek ve yeter koşul

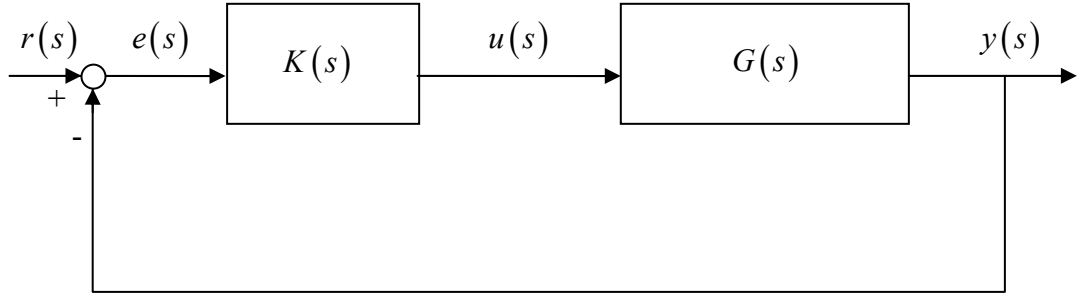
$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \quad (5.2)$$

olmasıdır [3].

Kontrol edilebilen bir sistemin cevabı çeşitli kontrol tipleri kullanılarak istenilen şekilde değiştirilebilir veya sistem kararsız ise kontrolör yardımıyla kararlı hale getirilebilir. Bu kontrol tiplerinden birisi oransal ve integral kontrol tiplerinin toplamından oluşan oransal-integral kontrolördür. Bu kontrolör tipi kısaca bileşenlerinin İngilizce karşılıklarının baş harfleri “PI” kullanılarak gösterilir. Aşağıdaki kısımda PI kontrol edilebilirlik kavramı verilmiştir.

### 5.2 İntegral (I) Kontrol Edilebilirlik

Sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlılık 3.3.2 Tanım’da ve açık çevrimli sistemler için bu kararlılığın koşulları 3.3.3 Teorem’de verilmişti. Aşağıda öncelikle kapalı çevrimli sistemler için sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlılığın koşulları verilecektir.



**Şekil 5.1** Genel olarak kontrol edilen bir sistemin blok diyagramı.

Bu bölümde kullanılacak olan gösterimler aşağıda verilmiştir:

- Her  $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $\mathbb{C}_\alpha = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > \alpha\}$ .
- $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $M_\alpha$ ,  $\mathbb{C}_\alpha$  üzerinde tanımlı meromorfik fonksiyonların alanıdır.
- $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $H_\alpha^\infty$ ,  $\mathbb{C}_\alpha$  üzerinde tanımlı tüm analitik ve sınırlı fonksiyonların cebridir.
- $M_- = \bigcup_{\alpha < 0} M_\alpha$  ve  $H_-^\infty = \bigcup_{\alpha < 0} H_\alpha^\infty$ .

**5.2.1 Tanım:**  $G \in M_-^{n \times n}$  ve  $K \in M_-^{n \times n}$  transfer fonksiyon matrisleri olsunlar ve Şekil 5.1 deki kapalı çevrim sistemi  $F(G, K)$  ile gösterilsin. Eğer  $F(G, K) = GK(I + GK)^{-1} \in H_-^\infty$  ve  $\det(I + G(s)K(s)) \neq 0$  ise  $F(G, K)$  kapalı çevrim sistemi sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır.

Tek girişli ve tek çıkışlı sistemler için, yani  $G \in M_-$  ve  $K \in M_-$  için,

$$F(G, K) = \frac{GK}{1 + GK} \in H_-^\infty \text{ ve } 1 + G(s)K(s) \neq 0$$

ise  $F(G, K)$  sistemi sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır.

**5.2.2 Tanım:**  $F(G, K)$  sistemi sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlı ise  $K, G$  yi kararlılaştırır denir.

**5.2.3 Tanım:**  $K(s) = \frac{1}{s} K_I$  kontrolörü  $G \in M_-^{n \times n}$  transfer fonksiyonunu kararlılaştıracak şekilde bir  $K_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrisi varsa  $G$  integral kararlılaştırılabilir.

**5.2.4 Tanım:**  $K(s) = \frac{1}{s} K_I$ ,  $G$  yi integral kararlılaştırılabilir ve

$$\left[ GK(I + GK)^{-1} \right](0) = I \quad (5.3)$$

ise  $G$  integral kontrol edilebilirdir. Buradaki  $\frac{1}{s} K_I$  kontrolörü integral kontrol veya integratör olarak adlandırılır.

**5.2.5 Tanım:**  $H_-^\infty$  daki  $G$  nin aralarında asal sol çarpanları (bkz. EK C)  $(D, N) \in (H_-^\infty)^{n \times n} \times (H_-^\infty)^{n \times n}$  çifti şeklindedir öyle ki  $D \neq 0$ ,  $G = D^{-1}N$  dir ve  $DX + NY = I$  şartını sağlayacak şekilde  $X, Y \in (H_-^\infty)^{n \times n}$  vardır. Aralarında asal sağ çarpanlar da benzer şekilde tanımlanır.  $F(G, K)$  sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlı ise  $G$  ve  $K$  nin  $H_-^\infty$  da aralarında asal sol ve sağ çarpanları vardır.

**5.2.6 Önerme:**  $G \in M_-^{n \times n}$  integral kontrol edilebilir olsun. Bu durumda  $G$  nin  $H_-^\infty$  da  $(D, N)$  şeklinde aralarında asal sol çarpanları vardır. Böyle çarpanlar arasında bulunan her  $N$  payı

$$\det N(0) \neq 0 \quad (5.4)$$

özelliğini sağlar.

**İspat:** 5.2.5 Tanım' dan  $G$  aralarında asal  $(D, N)$  sol çarpanlarına sahiptir.

$K_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  olmak üzere  $K(s) = \frac{1}{s} K_I$  kontrolörü  $G$  yi kararlılaştırın ve (5.3)

denklemini sağlasın.

$$H = GK(I + GK)^{-1} \text{ ve } \Delta = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ K(I + GK)^{-1} \right](s) \quad (5.5)$$

olarak tanımlansın. Bu denklemde sağ tarafta yer alan ilk  $G$  için eşiti olan  $G = D^{-1}N$  yazılırsa

$$DH = NK(I + GK)^{-1} \quad (5.6)$$

elde edilir.  $s \rightarrow 0$  limit alınır ve (5.3) kullanılırsa  $D(0) = N(0)\Delta$  bulunur.  $D$  ve  $N$   $H_-^\infty$  üzerinde aralarında sol asal olduklarından

$$\text{rank}N(0)(\Delta, I) = \text{rank} \left[ D(0), N(0) \right] = n \quad (5.7)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla  $\text{rank}N(0) = n$  ve buradan  $\det N(0) \neq 0$  dır.

**5.2.7 Teorem:**  $G \in (H_-^\infty)^{n \times n}$  ve  $G(0)$  reel bir matris olsun. Bu durumda  $G$  integral kontrol edilebilirdir ancak ve ancak

$$\det G(0) \neq 0. \quad (5.8)$$

Eğer  $\det G(0) \neq 0$  ise bir  $K_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vardır öyle ki

$$\sigma(G(0)K_I) \subset \mathbb{C}_0 \quad (5.9)$$

dır. (5.9) özelliğini sağlayan herhangi bir  $K_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  için bir  $k^* > 0$  vardır ki her  $k \in (0, k^*)$  için  $K_k(s) = \frac{k}{s} K_I$  olmak üzere

$$F(G, K_k) \in (H_-^\infty)^{2n \times 2n} \text{ ve } [GK_k (I + GK_k)^{-1}](0) = I. \quad (5.10)$$

Teoremin tek girdili ve tek çıktılı sistemler için ifadesi şu şekilde olacaktır:  $G \in H_-^\infty$  ve  $G(0) \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $G$  integral kontrol edilebilirdir ancak ve ancak

$$G(0) \neq 0. \quad (5.11)$$

$G(0) \neq 0$  ise yeterince küçük  $k > 0$  için  $kG(0) > 0$  dır.

**İspat:** (5.8) koşulunun yeterliliği 5.2.6 Önermeden ve  $G \in (H_-^\infty)^{n \times n}$  olmasından görülür. Gereklik koşulunun ispatlanması için  $K_0 = G^{-1}(0)$  olarak tanımlansın. Dolayısıyla (5.9) sağlanır. Ayrıca [16] da gösterilmiştir ki öyle bir  $k^* > 0$  vardır ki her  $k \in (0, k^*)$  için  $K_k$  kontrolörü  $G$  yi kararlılaştırır yani

$$F(G, K_k) \in (H_-^\infty)^{2n \times 2n} \quad (5.12)$$

dir. Son olarak  $kG(0)K_0$  in tersinebilirliğinden

$$\lim_{s \rightarrow 0} [GK_k (I + GK_k)^{-1}](s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)kK_0 (sI + kGK_0)^{-1} = I \quad (5.13)$$

elde edilir bu ise (5.10) daki ikinci eşitliği verir.

Logemann ve Townley [17] tek girdili ve tek çıktılı sistemlerde  $k^*$  in seçimi için “Pozitif Reel Lemma” olarak adlandırdıkları şu koşulu vermişlerdir:

$$1 + k \operatorname{Re} \frac{G(s)}{s} \geq 0, \quad \forall \operatorname{Re} s > 0. \quad (5.14)$$

Böylelikle

$$k^* = \sup \{k > 0 : k \text{ (4.14) ifadesini sağlar}\} \quad (5.15)$$

olarak seçilir. Aşağıda Pozitif Reel Lemma' nın çıkış noktası verilmiştir.

**5.2.8 Tanım:**  $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitian matrisler (karmaşık eşleniğinin transpozisine eşit olan matris) olmak üzere  $N - M$  pozitif tanımlı (sıfırdan farklı her  $x \in \mathbb{R}^n$  veya  $\mathbb{C}^n$  için  $x^T (N - M)x > 0$  özelliği) ise  $M \prec N$ ,  $N - M$  negatif tanımlı (benzer şekilde  $x^T (N - M)x < 0$  özelliği) ise  $M \succ N$  ile gösterilir. Eğer  $N - M$  pozitif yarı tanımlı ( $x^T (N - M)x \geq 0$ ) ise  $M \preceq N$  ve  $N - M$  negatif yarı tanımlı ( $x^T (N - M)x \leq 0$ ) ise  $M \succeq N$  ile gösterilir.

**5.2.9 Önerme:**  $G \in (H_-^\infty)^{n \times n}$  ve  $\det G(0) \neq 0$  olsun.  $\bar{G}(s) = \frac{1}{s}G(s)$  olarak tanımlansın,  $k \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\bar{G}^k(s) = \bar{G}(s)(I + k\bar{G}(s))^{-1} = \frac{1}{s}G(s) \left( I + \frac{k}{s}G(s) \right)^{-1} \quad (5.16)$$

yazılabilir. Bu koşullar altında bir  $k^* > 0$  vardır öyle ki her  $k \in (0, k^*)$  için

$$\tilde{\sigma}(\bar{G}^k) = \frac{1}{k} \quad (5.17)$$

dır ancak ve ancak  $G(0) \succ 0$  dır.  $\tilde{\sigma}(\bar{G}^k)$ ,  $\bar{G}^k$  nın en büyük tekil değeridir.

Bu önerme aşağıdaki yardımcı teoremin doğal bir sonucudur.

**5.2.10 Yardımcı Teorem:**  $G \in (H_-^\infty)^{n \times n}$  ve  $G^H$ ,  $G$  nin Hermitian'ı olmak üzere

üzere

i.  $\det G(0) \neq 0$  ve  $k \neq 0$  olsun. Bu durumda (5.17) doğrudur ancak ve ancak her  $s \in \mathbb{C}_0$  için  $I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^H(s) \succeq 0$  dır.

ii. Bir  $k^* > 0$  vardır öyle ki her  $s \in \mathbb{C}_0$  ve her  $k \in (0, k^*)$  için

$I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^H(s) \succeq 0$  dir ancak ve ancak  $G(0) \succeq 0$  dır.

Ayrıca eğer her  $s \in (0, \infty)$  için  $G(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ise her  $s \in \mathbb{C}_0$  için  $I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^T(s) \succeq 0$  dir ancak ve ancak  $\frac{1}{2}I + k\bar{G}(s)$  pozitif reeldir.

**İspat:** i. Varsayımdan  $G^{-1}(0)$  vardır ve böylece  $\tilde{\sigma}(\bar{G}^k(0)) = \frac{1}{k}$  dır.

Dolayısıyla (5.17) elde edilir ancak ve ancak

$$\tilde{\sigma}(\bar{G}^k(s)) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0 \quad (5.18)$$

veya buna denk olarak

$$(I + k\bar{G}(s))^{-1} \bar{G}(s) \bar{G}^H(s) (I + k\bar{G}^H(s))^{-1} \preceq \frac{1}{k^2}, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0 \quad (5.19)$$

veya

$$k^2 \bar{G}(s) \bar{G}^H(s) \preceq (I + k\bar{G}(s))(I + k\bar{G}^H(s)), \quad \forall s \in \mathbb{C}_0 \quad (5.20)$$

bu ise  $I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^H(s)$  ifadesinin pozitif yarı tanımlılığını verir.

iii.  $G$  fonksiyonu 0 noktasında analitik olduğundan bu noktanın civarında kuvvet serisi ile ifade edilebilir:

$$G(s) = G(0) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i s^i \quad (5.21)$$

Bu ifadede  $G_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ve (5.21) kuvvet serisi merkezi 0, yarıçapı  $\varepsilon$  olan bir  $B_\varepsilon$  diskinde yakınsaktır. Dolayısıyla

$$I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^H(s) = I + \frac{k}{s}G(0) + \frac{k}{s}G^H(0) + kH(s), \quad \forall s \in B_\varepsilon \quad (5.22)$$

bulunur,  $H(s) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i s^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} G_i^H \bar{s}^{-i-1}$  dir. Ayrıca  $\bar{G}(s)$ ,  $\mathbb{C}_0 - B_\varepsilon$  üzerinde sınırlı olduğundan bir  $k_1 > 0$  vardır öyle ki

$$I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^H(s) \succeq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0 - B_\varepsilon, \forall k \in (0, k_1). \quad (5.23)$$

Öncelikle  $G(0) \succeq 0$  olduğu varsayalım. Bu durumda (5.21) ve  $H(s)$  nin  $B_\varepsilon$  üzerindeki sınırlılığından bir  $k_2 > 0$  vardır öyle ki

$$I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^H(s) \succeq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0 \cap B_\varepsilon, \forall k \in (0, k_2). \quad (5.24)$$

$k^* = \min(k_1, k_2)$  olarak seçilirse (5.22) ve (5.23) den

$$I + k\bar{G}(s) + k\bar{G}^H(s) \succeq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0, \forall k \in (0, k^*) \quad (5.25)$$

elde edilir. Tersine (5.24) ün sağlandığı varsayalım. Böylece (5.21) den herhangi bir  $\xi \in \mathbb{C}^n$  için



$$2 \operatorname{Re} \left\langle \xi, \frac{k}{s} G(0) \xi \right\rangle + \|\xi\|^2 + k \langle \xi, H(s) \xi \rangle \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0 \cap B_\varepsilon, \forall k \in (0, k^*) \quad (5.26)$$

ve buradan her  $s \in \mathbb{C}_0 \cap B_\varepsilon$  ve  $k \in (0, k^*)$  için

$$\frac{2k}{|s|^2} \left( \operatorname{Re} s \operatorname{Re} \langle \xi, G(0) \xi \rangle - \operatorname{Im} s \operatorname{Im} \langle \xi, G(0) \xi \rangle \right) + \|\xi\|^2 + k \langle \xi, H(s) \xi \rangle \geq 0 \quad (5.27)$$

bulunur.  $H(s)$  nin  $B_\varepsilon$  üzerindeki sınırlılığından her  $\xi \in \mathbb{C}^n$  için  $\operatorname{Im} \langle \xi, G(0) \xi \rangle = 0$  ve  $\operatorname{Re} \langle \xi, G(0) \xi \rangle \geq 0$  sonucuna ulaşılır ki bu  $G(0) \succeq 0$  olduğunu verir [17].

### 5.3 Oransal (P) Kontrol Edilebilirlik

**5.3.1 Yardımcı Teorem:**  $G \in (H_-^\infty)^{n \times n}$  ve  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  olsun. Eğer

$$\tilde{\sigma}(G(s)) < \frac{1}{\tilde{\sigma}(K_p)} \quad (5.28)$$

ise  $K_p$   $G$  yi kararlılaştırır.

Tek girdili ve tek çıktılı sistemlerde  $\tilde{\sigma}(G(s)) < \frac{1}{K_p}$  ise  $K_p$   $G$  yi kararlılaştırır.

## 5.4 Oransal-İntegral (PI) Kontrol Edilebilirlik

**5.4.1 Teorem:**  $G \in (H_-^\infty)^{n \times n}$  olsun ve  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrisi  $G$  yi kararlılaştıracak şekilde seçilsin. Ayrıca  $\det G(0) \neq 0$  olsun. Bu durumda  $K_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrisleri vardır öyle ki  $K_I$

$$\sigma\left((I + G(0)K_p)^{-1}G(0)K_I\right) \subset \mathbb{C}_0 \quad (5.29)$$

koşulunu sağlar. Her  $K_I$  için  $k^* > 0$  vardır öyle ki her  $k \in (0, k^*)$  için

$$K_k(s) = \frac{k}{s}K_I + K_p \quad (5.30)$$

$G$  yi kararlılaştırır.

**İspat:** Varsayımdan  $\text{rank}\left((I + G(0)K_p)^{-1}G(0)\right) = n$  dir. Yukarıdaki teoremden (5.29) koşulunu sağlayan bir  $K_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrisi vardır. Ayrıca bu şekildeki her  $K_I$  matrisi için bir  $k^* > 0$  sayısı vardır öyle ki Şekil 5.1 de gösterilen sistem her  $k \in (0, k^*)$  için sınırlı girdi-sınırlı çıktı kararlıdır [16].

## 6. DUHEM HİSTEREZİS GİRİŞİNE SAHİP DOĞRUSAL SİSTEMLERİN Pİ KONTROLÜ

Doğrusal olmayan girişe sahip sistemlerin integral kontrolü üzerine çalışmalar Logemann-Ryan-Townley [18], Fliegner-Logemann-Ryan [8], Özdemir [24], Özdemir-Townley [25] dur. Özel olarak girişin histerisis olduğu sistemlerin integral kontrolü Logemann-Mawby [19], Logemann-Ryan [20] ve oransal integral kontrolü ise Özdemir-Köçkar [26] tarafından araştırılmıştır.

Bu bölümde ise özel olarak Duhem histerisis girişine sahip sistemlerin oransal-integral kontrolü üzerinde durulacaktır. Dolayısıyla öncelikle Duhem modeli ayrıntılı olarak incelemek ve ardından doğrusal bir sistemin girişine uygulanacaktır.

### 6.1 Duhem Histerisis Modeli

$(X, A, \mu)$  ölçüm uzayı üzerinde tanımlı reel değerli  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının oluşturduğu uzay  $F(X, \mathbb{R})$  olsun.  $L^p(X)$  uzayı,  $1 < p < \infty$  olmak üzere mutlak değerinin  $p$ . kuvveti  $X$  üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilen  $f$  fonksiyonlarından oluşur. Yani;

$$L^p(X) = \left\{ f \in F(X, \mathbb{R}) : \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \right\} \subset F(X, \mathbb{R}).$$

$L^p(X)$  uzayı üzerindeki norm ifadesi:

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left( \int_X |f(x)|^p dp \right)^{\frac{1}{p}}.$$

k. mertebeden türevi  $L^p(X)$  uzayında bulunan  $L^p(X)$  in elemanlarından oluşan uzay ise  $W^{k,p}(X)$  ile gösterilir. Yani

$$W^{k,p}(X) = \{u \in L^p(X) : D^k u \in L^p(X)\}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall p \in [0, +\infty)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $W^{k,p}(X)$  üzerindeki norm tanımı aşağıdaki şekildedir:

$$\|u\|_{W^{k,p}(X)} := \sum_{j=0}^k \|D^j u\|_{L^p(X)}$$

$u \in W^{1,1}(0,T)$  ve  $w_0 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\Phi : (u, w_0) \mapsto w$  Duhem operatörü

$$\frac{dw}{dt} = f_1(u, w) \dot{u}_+(t) - f_2(u, w) \dot{u}_-(t), \quad w(0) = w_0 \quad (6.1)$$

Cauchy problemi ile tanımlanır. Burada  $\dot{u}_+(t) = \max(0, \dot{u}(t))$ ,  $\dot{u}_-(t) = \min(0, \dot{u}(t))$  ve ayrıca  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır. (6.1) ifadesinin

her iki tarafı  $\frac{du}{dt}$  ye bölünerek Duhem modelinin başka bir ifadesi elde edilir:

$$\frac{dw}{du} = f(u, w, \dot{u}) = \begin{cases} f_1(u, w); & du \geq 0, \\ f_2(u, w); & du < 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

(6.1) ifadesinden  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $\dot{u}$  ne göre birinci dereceden homojen olduğu görülmektedir.

**6.1.1 Teorem** (Duhem operatörünün varlığı) :  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  sürekli bir fonksiyon olmak üzere  $f_1$  ve  $f_2$  aşağıdaki koşulu sağlayan sürekli fonksiyonlar olsunlar.

$$\begin{aligned}
(w_1 - w_2)[f_1(u, w_1) - f_1(u, w_2)] &\leq L(u)(w_1 - w_2)^2 & \forall u, w_1, w_2 \in \mathbb{R} \\
(w_1 - w_2)[f_2(u, w_1) - f_2(u, w_2)] &\geq -L(u)(w_1 - w_2)^2 & \forall u, w_1, w_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Bu durumda her  $u \in W^{1,1}(0, T)$  ve her  $w_0 \in \mathbb{R}$  için (6.1) ifadesinin  $w = \Phi(u, w_0) = \Phi(u) \in W^{1,1}(0, T)$  şeklinde tek bir çözümü vardır.

**İspat:** Bundan sonra hemen hemen her ifadesi yerine ‘h.h.h’ kısaltması kullanılacaktır.

$$h_i(u, w) = L(u)w - f_i(u, w), \quad \forall (u, w) \in \mathbb{R}^2 \ (i = 1, 2)$$

olarak tanımlansın.  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$  ve  $w_1 < w_2$  için (6.3) den

$$f_i(u, w_1) - f_i(u, w_2) \leq |f_i(u, w_1) - f_i(u, w_2)| \leq L(u)|w_1 - w_2| \quad (i = 1, 2)$$

elde edilir; kabulden  $w_1 - w_2 < 0$  ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
f_i(u, w_1) - f_i(u, w_2) &\leq L(u)(w_2 - w_1) \\
L(u)w_1 - f_i(u, w_1) &\leq L(u)w_2 - f_i(u, w_2) \\
h_i(u, w_1) &\leq h_i(u, w_2) \quad (i = 1, 2)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $w \mapsto h_i(u, w)$  fonksiyonu her  $u \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2)$  için azalmayıdır.

Sabit bir  $u \in W^{1,1}(0, T)$  için

$$\varphi(w, t) = h_1(u(t), w)\dot{u}_+(t) + h_2(u(t), w)\dot{u}_-(t) \quad \forall w \in \mathbb{R}, (0, T) \text{ de h.h.h yerde}$$

ve

$$\Lambda(t) = \int_0^t L(u(\tau))|\dot{u}(\tau)|d\tau$$

olsun, bu durumda (6.1) denklemini

$$\dot{w}(t) + \varphi(w(t), t) = \Lambda'(t)w(t) \quad (6.4)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} K(\xi, t) &= e^{-\Lambda(t)}\varphi(e^{-\Lambda(t)}\xi, t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \\ z(t) &= e^{-\Lambda(t)}w(t) \end{aligned}$$

olsun, (6.4) denkleminin her iki tarafı  $e^{-\Lambda(t)}$  ile çarpılırsa

$$\dot{z}(t) + K(z(t), t) = 0 \quad (6.5)$$

elde edilir.  $\xi \mapsto K(\xi, t)$  fonksiyonu sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olduğundan (6.5) denkleminin tek bir çözümü vardır ve dolayısıyla buna karşılık gelen Cauchy probleminin de tek bir çözümü vardır.

Duhem operatörü  $\Phi$  nedensel ve hızdan bağımsız olduğu için bir histerisis operatörüdür. Ayrıca  $\Phi$  Duhem operatörü  $\dot{u} = 0$  özelliğindeki  $u \in C^1([0, T])$  ler hariç  $C^1([0, T])$  de diferansiyellenebilirdir.

### 6.1.2 Önerme ( $\Phi(u, w_0)$ nin Lipschitz sürekliliği):

$\forall R > 0$  için bir  $L(R) > 0$  var olsun öyle ki  $\forall (u_i, w_i) \in \mathbb{R}^2$  ( $i = 1, 2$ ) için eğer  $|u_i| \leq R$  ise

$$|f_j(u_1, w_1) - f_j(u_2, w_2)| \leq L(R)(|u_1 - u_2| + |w_1 - w_2|) \quad (j = 1, 2) \quad (6.6)$$

olsun. Bu durumda herhangi bir  $w_0 \in \mathbb{R}$  için  $W^{1,\infty}(0, T)$  deki her  $B_R(0)$  yuvarında  $\Phi(u, w_0)$   $W^{1,1}(0, T)$  deki metriğe göre Lipschitz süreklidir. Yani  $\forall R > 0$  için

$\exists l(R, T) > 0$  öyle ki  $\forall u_1, u_2 \in W^{1,\infty}(0, T)$  ve  $\|u_i\|_{W^{1,\infty}(0, T)} \leq R$  olmak üzere

$$\left\| \Phi(u_1, w^0) - \Phi(u_2, w^0) \right\|_{W^{1,1}(0, T)} \leq l(R, T) \|u_1 - u_2\|_{W^{1,1}(0, T)} \quad (6.7)$$

dir.

**İspat:**  $u_1, u_2 \in W^{1,\infty}(0, T)$  için  $\|u_i\|_{W^{1,\infty}(0, T)} \leq R$  ( $i = 1, 2$ ) olsun. (6.6) dan

$$\left| f_i(u_1(t), w_1(t)) - f_i(u_2(t), w_2(t)) \right| \leq L(R) (|u_1 - u_2| + |w_1 - w_2|)$$

dir.  $u_1 - u_2 = \tilde{u}$  ve  $w_1 - w_2 = \tilde{w}$  olarak tanımlansın. 6.1.1 Teorem'den sınırlı  $u \in W^{1,1}(0, T)$  için  $w = \Phi(u, w_0) \in W^{1,1}(0, T)$  dir. Dolayısıyla  $[0, T]$  de

$$\left| f_i(u_2(t), w_2(t)) \right| \leq C(R), \quad i = 1, 2$$

olacak şekilde bir  $C(R) > 0$  vardır. (6.1) denkleminde  $\left| f_i(u_2(t), w_2(t)) \right|$  ifadesi eklenip çıkarılır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa hipotez ile

$$\begin{aligned} \left| \dot{\tilde{w}}(t) \right| &\leq \max_{i=1,2} \left| f_i(u_1(t), w_1(t)) - f_i(u_2(t), w_2(t)) \right| + \max_{i=1,2} \left| f_i(u_2(t), w_2(t)) \right| \\ &\leq L(R) (|\tilde{u}(t)| + |\tilde{w}(t)|) |\dot{u}_1(t)| + C(R) |\dot{u}_1(t)| \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadede  $|\tilde{w}(t)| = \left| \int_0^t \dot{\tilde{w}}(\tau) d\tau \right|$  yazılırsa  $[0, T]$  aralığında

$$\left| \dot{\tilde{w}}(t) \right| \leq L(R) R |\tilde{u}(t)| + L(R) R \int_0^t \left| \dot{\tilde{w}}(\tau) \right| d\tau + C(R) |\dot{u}_1(t)| \quad (6.8)$$

elde edilir. Gronwall lemması (Ek B) ile uygun  $l(R, T) > 0$  sabiti için  $[0, T]$  de

$$\begin{aligned} \int_0^t |\dot{\tilde{w}}(\tau)| d\tau &\leq \int_0^t e^{L(R)R\tau} \left[ L(R)R|\tilde{u}(\tau)| + C(R)|\dot{\tilde{u}}(\tau)| \right] d\tau \\ &\leq l(R,T) \int_0^t \left( |\tilde{u}(\tau)| + |\dot{\tilde{u}}(\tau)| \right) d\tau \end{aligned} \quad (6.9)$$

elde edilir. (6.8) ve (6.3) birlikte çözülür ve  $\left| \int_0^t \dot{\tilde{w}}(\tau) d\tau \right|$  ifadesi yok edilirse

$$|\dot{\tilde{w}}(t)| \leq L(R)R|\tilde{u}(t)| + L(R)Rl(R,T) \int_0^t \left( |\tilde{u}(\tau)| + |\dot{\tilde{u}}(\tau)| \right) d\tau + C(R)|\dot{\tilde{u}}(t)| \quad (6.10)$$

bulunur. Son formül yardımıyla (6.7) ifadesine ulaşılır.

### 6.1.2 Duhem Operatörünün Monotonluk Özelliği

$f_1, f_2$  (6.3) koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsunlar. Böylece  $\forall u \in W^{1,1}(0, T)$  için  $(0, T)$  de

$$\frac{d}{dt} \Phi(u, w_0) \frac{du}{dt} \geq 0 \quad (6.11)$$

dir. Dolayısıyla  $\Phi$  Duhem operatörü parçalı monotonudur.

[22] bir histerisis sınıfı tanımlamış ve değiştirme, durma, hareket operatörleri ile Preisach ve Prandtl-Ishlinskii modellerinin bu sınıfa dâhil olduklarını göstermişlerdir. Daha sonra bu sınıfa dâhil olan histerisis girişine sahip tek girdili ve tek çıktılı kararlı bir sistemin minimum kazanç (low-gain) integrali altında kararlı olduğunu göstermişlerdir. Aşağıdaki kısımda öncelikle bu sınıf tanıtılacak daha sonra ise Duhem histerisisin bu sınıfa dâhil olduğu gösterilecektir.



## 6.2 $N(\ell)$ Histerisis Sınıfı

$u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  olsun.  $u$ ,  $[T, \infty)$  aralığında azalmayan olacak şekilde bir  $T \in \mathbb{R}_+$  varsa  $u$  ya nihai azalmayan fonksiyon denir.

$\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bir histerisis operatörü olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $\Phi$  operatörü  $N(\ell)$  sınıfındandır denir.

**N1.**  $\Phi$  bir histerisis operatörüdür.

**N2.**  $\Phi$  Lipschitz süreklidir.

**N3.**  $\Phi(AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})) \subset AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .

**N4.** Her  $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  için  $\Phi$  monotondur, yani

$$\frac{d}{dt}(\Phi(u))(t)\dot{u}(t) \geq 0, \quad h.h.h. t \in \mathbb{R}_+$$

**N5.**  $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  nihai azalmayan ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$  ise  $(\Phi(u))(t)$  ve  $(\Phi(-u))(t)$  sırasıyla  $\sup NVS(\Phi)$  ve  $\inf NVS(\Phi)$  yakınsar.

**N6.**  $u \in C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ,  $L = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) \in \inf NVS(\Phi)$  ve  $u$  sınırlıdır.

**N7.** Her  $\alpha > 0$  ve her  $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  için öyle  $\alpha, \beta > 0$  vardır ki

$$\sup_{t \in [0, \tau]} |(\Phi(u))(t)| \leq \alpha + \beta \sup_{t \in [0, \tau]} |u(t)|, \quad \forall \tau \in [0, \alpha).$$

Duhem operatörün **N1-N4**'ü sağladığı 6.1 kısımda verilmiştir. Şimdi **N5**'in sağlandığı gösterilsin.

$u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  nihai azalmayan bir fonksiyon ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$  olsun. Bu durumda bir  $T \in \mathbb{R}_+$  vardır öyle ki  $t \geq T$  için  $(\Phi(u))(t) = f_1(u(t))$  dir. Dolayısıyla

$\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) = \sup(gör(f_1))$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(-u))(t) = \inf(gör(f_1))$  dir. Buradan bir  $(u_n) \subset C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  dizisi vardır ki  $n \rightarrow \infty$  için  $u_n \rightarrow u$  düzgün yakınsar.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) = \sup(gör(f_1))$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(-u))(t) = \inf(gör(f_1))$  olduğundan her  $n \in \mathbb{Z}_+$  için iken  $(\Phi(u_n))(t)$ ,  $\sup \text{NVS}(\Phi)$  ye ve  $(\Phi(-u_n))(t)$ ,  $\inf \text{NVS}(\Phi)$  ye yakınsar.  $t \rightarrow \infty$  için  $\Phi$  nin Lipschitz sürekliliğinden  $(\Phi(u_n))(t)$ ,  $\sup \text{NVS}(\Phi)$  ve  $(\Phi(-u_n))(t)$ ,  $\inf \text{NVS}(\Phi)$  ye yakınsar. Buradan **N5** sağlanmış olur.

**N6** için,  $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) = l \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda bir  $\delta > 0$  ve bir  $T \in \mathbb{R}_+$  vardır öyle ki her  $t \geq T$  için  $(\Phi(u))(t) \in (l - \delta, l + \delta)$  dir. Böylece bir  $\varepsilon > 0$  vardır öyle ki her  $t \geq T$  için  $u(t) \in (\phi(l) - \varepsilon, \phi(l) + \varepsilon)$  dir. Dolayısıyla  $u$  sınırlıdır.

Son olarak **N7**'nin sağlandığı [22, Yardımcı Teorem 5.1.8] den görülür. Şöyle ki:  $\alpha > 0$  ve  $u \in C([0, \alpha], \mathbb{R})$  olsun ve  $\ell > 0$   $\Phi$  nin Lipschitz sabiti olmak üzere  $\Phi$  Lipschitz sürekli olduğundan

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |(\Phi(Q_\tau u))(t) - (\Phi(0))(t)| \leq \ell \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |(Q_\tau u)(t)|, \forall \tau \in [0, \alpha)$$

dir. 2.2.8 Teorem **i** den

$$\sup_{t \in [0, \tau]} |(\Phi(u))(t)| \leq \ell \sup_{t \in [0, \tau]} |u(t)| + |(\Phi(0))(0)|, \forall \tau \in [0, \alpha)$$

elde edilir.  $\alpha = (\Phi(0))(0)$  ve  $\beta = \ell$  seçilerek **N7** sağlanmış olur.

**6.2.1 Tanım:**  $\Phi : C_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  operatörü **N1-N4** koşullarını sağlasın ve  $\Phi$  nin Lipschitz sabiti  $\ell$  olsun.

$$E(\Phi, u) = \{t \in \mathbb{R}_+ : u \text{ veya } \Phi(u) \text{ } t \text{ anında diferansiyellenbilir değil}\}$$

$$F(\Phi, u) = \{t \in \mathbb{R}_+ - E(\Phi, u) : \dot{u}(t) = 0\}, \quad G(\Phi, u) = E(\Phi, u) \cup F(\Phi, u)$$

$$\Phi^\diamond : AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

ve

$$(\Phi^\diamond(u))(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}(\Phi(u))(t) / \dot{u}(t) & t \in \mathbb{R}_+ - G(\Phi, u) \\ \ell & t \in G(\Phi, u) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Böylece her bir  $u \in AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  için  $\Phi^\diamond(u)$  fonksiyonu ölçülebilirdir.  $\Phi$  nin Lipschitz sürekliliğinden her  $t \in \mathbb{R}_+ - E_u$  için

$$\left| \frac{d}{dt}(\Phi(u))(t) \right| \leq \ell |\dot{u}(t)|$$

dir. Bu ve N3, N4 den

$$(\Phi^\diamond(u))(t) \in [0, \ell], \quad \forall u \in AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \text{ h.h.h } t \in \mathbb{R}_+.$$

$\left| \frac{d}{dt}(\Phi(u))(t) \right| \leq \ell |\dot{u}(t)|$  den, her  $t \in \mathbb{R}_+$  ve  $u \in AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  için  $\dot{u}(t) = 0$

$\frac{d}{dt}(\Phi(u))(t) = 0$  olmasını gerektirir. Dolayısıyla  $u \in AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  için

$$\frac{d}{dt}(\Phi(u))(t) = (\Phi^\diamond(u))(t) \dot{u}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ - E(\Phi, u).$$

Aşağıdaki yardımcı teorem bir sonraki kısımda kullanılacaktır.

**6.2.2 Yardımcı Teorem:**  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $x(0) = x_0$  doğrusal sisteminde  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_\infty$  ise

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) + A^{-1}Bu_\infty\| = 0$$

dir.

**İspat:** Sistemin çözümü

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

şeklindedir. Her iki tarafa  $A^{-1}Bu_\infty$  terimi eklenir ve elde edilen ifadenin normu alınırsa üçgen eşitsizliğinden

$$\|x + A^{-1}Bu_\infty\| \leq \|e^{At}x_0\| + \left\| A^{-1}Bu_\infty + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \right\|$$

elde edilir. Eşitsizliğin limiti alınırsa,  $A$  kararlı bir matris olduğundan tüm öz değerleri sol yarı düzlemde olup dolayısıyla  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x_0 = 0$  dır.  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_\infty$  kullanılarak elde edilen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x + A^{-1}Bu_\infty\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| A^{-1}Bu_\infty + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu_\infty ds \right\|$$

ifadesinde yer integral çözülürse

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x + A^{-1}Bu_\infty\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|A^{-1}Bu_\infty - A^{-1}Bu_\infty\| = 0$$

bulunur. Son ifadeden  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) + A^{-1}Bu_\infty\| = 0$  bulunur.

### 6.3 Duhem Histerisis Girişine Sahip Sonlu Boyutlu Doğrusal Sistemler

$x \in \mathbb{R}^n$  durum değişkeni,  $u \in W^{1,1}(0,T) \subset \mathbb{R}$  sistemin girdi fonksiyonu  $y \in \mathbb{R}$  sistem çıktısı ve katsayı matrisleri  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$  ve  $C^T \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere zamanla değişmeyen tek girdi ve tek çıktıya sahip

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\Phi(u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{6.12}$$

doğrusal sistemi tanımlansın. Burada  $\Phi(u(t))$  fonksiyonu ilk kısımda tanımlanan Duhem Histerisis operatörüdür ve (6.12) denkleminin transfer fonksiyonu

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B\tag{6.13}$$

şeklindedir. Sistemin blok diyagramı Şekil 6.1 deki gibidir.

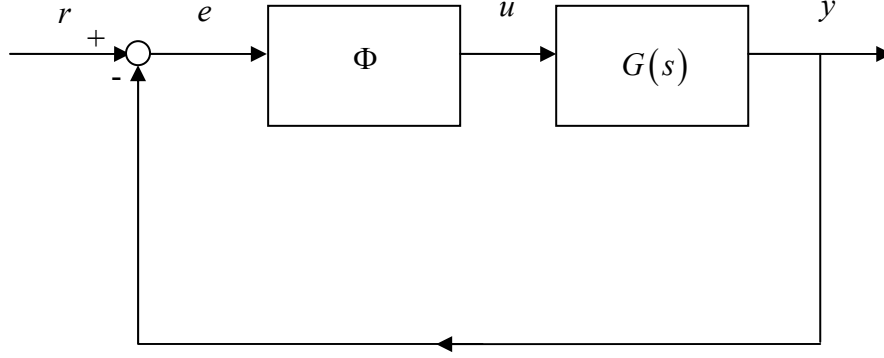
(6.12) sistemindeki  $A$  matrisi Hurwitz (yani bütün öz değerleri sol yarı düzlemde) ve  $G(0) = -CA^{-1}B > 0$  olsun. Bu özelliği sağlayan sistemlerin sınıfı aşağıdaki şekilde gösterilsin:

$$\Theta = \{ \Sigma = (A, B, C) : A \text{ Hurwitz ve } G(0) > 0 \}.$$

**6.3.1 Teorem** ((6.12) sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği):

$$\Phi(u, w_0) \text{ nun çözümü olduğu } \frac{dw}{du} = f(u, w, \dot{u}) = \begin{cases} f_1(u, w) & du > 0 \\ f_2(u, w) & du < 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklemindeki  $f_1(u, w)$  ve  $f_2(u, w)$  düzgün fonksiyonları sınırlı fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda (6.12) sisteminin bir tek çözümü vardır.



Şekil 6.1 Duhem girişli bir sistem blok diyagramı.

**İspat:** Öncelikle (6.12) sisteminin Lipschitz sürekli olduğu gösterilmelidir.

6.1.2 Önerme kullanılarak

$$\begin{aligned} |Ax_1 + B\Phi(u_1, w_0) - Ax_2 - B\Phi(u_2, w_0)| &\leq \|A\| \|x_1 - x_2\| + \|B\| \|\Phi(u_1, w_0) - \Phi(u_2, w_0)\|_{W^{1,1}(0,T)} \\ &\leq \|A\| \|x_1 - x_2\| + \|B\| l(R, T) \|u_1 - u_2\|_{W^{1,1}(0,T)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir  $\ell = \max \{\|A\|, \|B\|l(R, T)\}$  pozitif bir sayı olsun. Bu durumda

$$|Ax_1 + B\Phi(u_1, w_0) - Ax_2 - B\Phi(u_2, w_0)| \leq \ell \left( \|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|_{W^{1,1}(0,T)} \right) \quad (6.14)$$

bulunur.  $x_0 \in \mathbb{R}$  başlangıç koşulu için

$$|Ax_0 + B\Phi(u, w_0)| \leq \|A\| \|x_0\| + \|B\| \|\Phi(u, w_0)\|_{W^{1,1}(0,T)}$$

$\Phi(u, w_0)$  sınırlı olduğundan  $\|\Phi(u, w_0)\|_{W^{1,1}(0,T)} \leq \mu$  şekilde bir  $\mu > 0$  sayısı vardır.

Böylece

$$|Ax_0 + B\Phi(u, w_0)| \leq \|A\| |x_0| + \|B\| \mu \leq \eta, \quad (\eta > 0) \quad (6.15)$$

bulunur. (6.14) ve (6.15) den (6.12) sisteminin bir tek çözümü vardır.

#### 6.4 Duhem Histerisis Girişine Sahip Doğrusal Sistemlerin PI Kontrolü

$r \in \mathbb{R}$  sabit bir referans değeri,  $k_p$  ve  $k_I$  reel parametreler ve  $e(t) = r - y(t)$  olmak üzere

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + u_0 \quad (6.16)$$

olarak tanımlanırsa (6.12)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\Phi(u), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{u} &= -k_p (CAx + CB\Phi(u)) + k_I (r - Cx), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.17)$$

diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilir. Amaç (6.17) sisteminin istenen bir  $r \in \mathbb{R}$  referans değerine yakınsadığının gösterilmesidir.

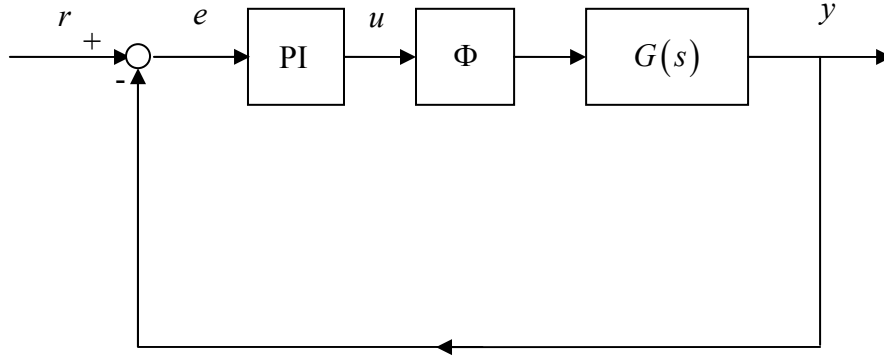
**6.4.1 Teorem:**  $\Phi$  Duhem histerisis operatörü,  $\ell > 0$   $\Phi$  nin Lipschitz sabiti,

$\Sigma = (A, B, C) \in \Theta$ ,  $k_p \in \left(0, \frac{k_p^*}{\ell}\right)$ ,  $k_I \in \left(0, \frac{k_I^*}{\ell}\right)$  ve  $r \in \mathbb{R}$  referans değeri için

$\phi_r = \frac{r}{G(0)} \in \overline{g\ddot{o}r(\Phi)}$  olsun. Her  $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  için (6.12) sisteminin  $(x(\cdot), u(\cdot))$

şeklinde tek bir çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i.  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(u))(t) = \phi_r$
- ii.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1} B \phi_r$
- iii.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$ .



Şekil 6.2 PI ile kontrol edilen Duhem girişli bir sistemin blok diyagramı.

**6.4.2 Yardımcı Teorem:**  $A$  matrisi Hurwitz,  $G(0) > 0$  olsun ve  $\tilde{G}(s) = k_p G(s) + \frac{k_I}{s} G(s)$  olarak tanımlansın. Bu durumda öyle  $k_p^* > 0$  ve  $k_I^* > 0$  değerleri vardır ki her  $0 < 2k_p < k_p^*$  ve  $0 < 2k_I < k_I^*$  için

$$\left\| \tilde{G}(s)(1 + \tilde{G}(s))^{-1} \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (6.18)$$

ancak ve ancak her  $\text{Re } s > 0$  için

$$1 + \text{Re } \tilde{G}(s) \geq 0$$

dır.

**İspat:**  $\| \cdot \|_{\infty} = \sup_{\text{Re } s > 0} (\tilde{\sigma}(\cdot))$  olarak tanımlanır. 0 noktası  $\tilde{G}(s)(1 + \tilde{G}(s))^{-1}$  nin tekil noktasıdır. Hipotezden  $G(0)^{-1}$  vardır ve

$$\tilde{G}(0)(1 + \tilde{G}(0))^{-1} = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{G}(s)(1 + \tilde{G}(s))^{-1}$$



denkleminde  $\tilde{G}$  nın karşılığı yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{G}(0)(1+\tilde{G}(0))^{-1} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( k_p G(s) + \frac{k_I}{s} G(s) \right) \left( \frac{s + k_p s G(s) + k_I G(s)}{s} \right)^{-1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (k_p s G(s) + k_I G(s)) (s + k_p s G(s) + k_I G(s))^{-1} \\ &= k_I G(0) (k_I G(0))^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (6.18) geçerlidir ancak ve ancak her  $\text{Re } s > 0$  için  $\tilde{\sigma} \left( \tilde{G}(s)(1+\tilde{G}(s))^{-1} \right) \leq 1$  dir veya buna denk olarak her  $\text{Re } s > 0$  için

$$\tilde{G}(s)(1+\tilde{G}(s))^{-1} \tilde{G}(s)^H (1+\tilde{G}^H(s))^{-1} \leq 1$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapırsa

$$\tilde{G}(s) \tilde{G}^H(s) \leq (1+\tilde{G}(s))(1+\tilde{G}^H(s))$$

elde edilir. Buradan sağ taraf açılırsa

$$0 \leq 1 + \tilde{G}(s) + \tilde{G}^H(s) = 1 + \text{Re } \tilde{G}(s), \quad \forall \text{Re } s > 0$$

bulunur. İspatın diğer tarafı benzer işlemler tersten izlenerek tamamlanır.

**6.4.3 Yardımcı Teorem:**  $A$  matrisi Hurwitz ve  $G(0) > 0$  olsun.  $0 < 2k_p < k_p^*$

ve  $0 < 2k_I < k_I^*$  için

$$\left\| \tilde{G}(s)(1+\tilde{G}(s))^{-1} \right\|_{\infty} \leq 1$$

ise bir  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrik ve pozitif matrisi vardır öyle ki

$$\langle A_{PI}z_1, Pz_2 \rangle + \langle Pz_1, A_{PI}z_2 \rangle + \langle Cz_1, Cz_2 \rangle + \left\langle (A^{-1}B)^T Pz_1, (A^{-1}B)^T Pz_2 \right\rangle = 0 \quad (6.19)$$

Riccati denklemi sağlanır. Burada  $A_{PI} = A - k_p A^{-1} B C A - k_I A^{-1} B C$  ve her  $z_1, z_2 \in D(A_{PI}) = D(A) = \mathbb{R}^n$  dir.

**İspat:**  $\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{B} = \begin{bmatrix} A^{-1}B \\ 1 \end{bmatrix}$  ve  $\hat{C} = [k_p C A + k_I C \quad k_I G(0)]$  olarak

tanımlansın. Kolaylıkla görülür ki  $\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} = k_p G(s) + \frac{k_I}{s} G(s)$  yi verir.

$\hat{A}_{PI} = \hat{A} - \hat{B} \hat{C}$  olmak üzere  $(\hat{A}_{PI}, \hat{B}, \hat{C})$  üçlüsü kapalı çevrim transfer fonksiyonunun matrisleridir.  $\left\| \tilde{G}(s)(1 + \tilde{G}(s))^{-1} \right\|_{\infty} \leq 1$  olmak üzere  $(\hat{A}_{PI}, \hat{B}, \hat{C})$  üçlüsü için 4.5.1

Teorem' den bir  $\hat{P} = \hat{P}^T > 0$  matrisi vardır öyle ki Riccati denklemi her  $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in D(\hat{A}_{PI}) = D(A)$

$$\langle \hat{A}_{PI} \hat{z}_1, \hat{P} \hat{z}_2 \rangle + \langle \hat{P} \hat{z}_1, \hat{A}_{PI} \hat{z}_2 \rangle + \langle \hat{C} \hat{z}_1, \hat{C} \hat{z}_2 \rangle + \langle \hat{B}^T \hat{P} \hat{z}_1, \hat{B}^T \hat{P} \hat{z}_2 \rangle = 0$$

şeklindedir.  $\hat{A}_{PI} = \begin{bmatrix} A - k_p A^{-1} B C A - k_I A^{-1} B C & -k_I A^{-1} B G(0) \\ -k_p C A - k_I C & k_I G(0) \end{bmatrix}$  olmak üzere

$\hat{A}_{PI}, \hat{B}, \hat{C}$  değerleri Riccati denkleminde yerine yazılırsa  $\hat{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & k_I G(0) \end{bmatrix}$  olarak

elde edilir ve Riccati denklemi

$$\begin{bmatrix} \langle A_{PI}z_1, Pz_2 \rangle + \langle Pz_1, A_{PI}z_2 \rangle + \langle Cz_1, Cz_2 \rangle + \left\langle (A^{-1}B)^T Pz_1, (A^{-1}B)^T Pz_2 \right\rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Yine 4.5.1 Teorem'den

$$\langle A_{PI}z_1, Pz_2 \rangle + \langle Pz_1, A_{PI}z_2 \rangle + \langle Cz_1, Cz_2 \rangle + \left\langle (A^{-1}B)^T Pz_1, (A^{-1}B)^T Pz_2 \right\rangle = 0$$

denklemini sağlayacak şekilde bir  $P = P^T > 0$  çözümünün var oluşu görülür.

**6.4.1 Teoremin İspatı:** (6.17) sisteminde  $z(t) = x(t) + A^{-1}B\Phi(u(t))$  ve  $v(t) = \Phi(u(t)) - \phi_r$  değişken dönüşümü yapılırsa  $\frac{d}{dt}(\Phi(u)) = d(\Phi(u))\dot{u}$  olmak üzere

$$\dot{z}(t) = Az(t) + A^{-1}Bd\Phi(u(t))(-k_pCAz - k_lCz - k_lG(0)v) \quad (6.20-a)$$

$$\dot{v}(t) = d\Phi(u(t))(-k_pCAz - k_lCz - k_lG(0)v) \quad (6.20-b)$$

sistemi elde edilir. (6.20) sisteminin kararlılığı Lyapunov yaklaşımı ile araştırılacaktır. Hipotezden  $k_p \in \left(0, \frac{k_p^*}{\ell}\right)$  ve  $k_l \in \left(0, \frac{k_l^*}{\ell}\right)$  olduğundan  $0 < k_p\ell < k_p^*$  ve  $0 < k_l\ell < k_l^*$  dir. Öyle bir  $\mu > \frac{\ell}{2}$  sabiti vardır ki  $2\mu > \ell$  dolayısıyla  $2\mu k_p > \ell k_p$  ve  $2\mu k_l > \ell k_l$  olmak üzere  $\mu$  sabiti  $0 < 2\mu k_p < k_p^*$  ve  $0 < 2\mu k_l < k_l^*$  eşitsizliklerini sağlar. 6.4.2 Yardımcı Teorem'den

$$\left\| \tilde{G}(s)(1 + \tilde{G}(s))^{-1} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\mu}$$

elde edilir ve 6.4.3 Yardımcı Teorem'den (6.19) Riccati denklemini sağlayacak şekilde bir  $P = P^T > 0$  matrisi vardır.

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \mu k_l G(0) \end{bmatrix}$$

olsun ve

$$\tilde{A}_{PI} = \begin{bmatrix} A - k_p\mu A^{-1}BCA - k_l\mu A^{-1}BC & -k_l\mu A^{-1}BG(0) \\ -k_p\mu CA - k_l\mu C & k_l\mu G(0) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} A^{-1}B \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [k_p CA + k_l C \quad k_l G(0)]$$

olarak tanımlansın. 6.4.3 Yardımcı Teorem'den  $\tilde{P}$ ,  $(\tilde{A}_{PI}, \tilde{B}, \tilde{C})$  üçlüsünün

$$\langle \tilde{A}_{PI} \tilde{z}_1, \tilde{P} \tilde{z}_2 \rangle + \langle \tilde{P} \tilde{z}_1, \tilde{A}_{PI} \tilde{z}_2 \rangle + \mu^2 \langle \tilde{C} \tilde{z}_1, \tilde{C} \tilde{z}_2 \rangle + \langle \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z}_1, \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z}_2 \rangle = 0 \quad (6.21)$$

Riccati denklemini sağlar.  $\tilde{z} = (z, v)$  olmak üzere (6.20) sistemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{A}_{PI} \tilde{z} + (\mu - d\Phi(u)) \tilde{B} \tilde{C} \tilde{z}, \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0. \quad (6.22)$$

(6.22) sisteminin kararlılığı Lyapunov analizi ile araştırılacaktır. Bu amaçla (6.22) sistemi için

$$V(\tau) = \langle \tilde{z}(\tau), \tilde{P} \tilde{z}(\tau) \rangle \quad (6.23)$$

fonksiyonu tanımlansın.  $\tilde{P}$  matrisi pozitif bir matris olduğundan her  $0 \neq \tilde{z} \in \mathbb{R}^n$  için  $\langle \tilde{z}(\tau), \tilde{P} \tilde{z}(\tau) \rangle > 0$ , yani  $V$  pozitif tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca  $V(0) = 0$  dır. Böylelikle Lyapunov fonksiyonun olma şartlarından ilk ikisi sağlanır. Son şart için  $V$  nin diferansiyeli alınır

$$\dot{V} = \langle \dot{\tilde{z}}, \tilde{P} \tilde{z} \rangle + \langle \tilde{z}, \tilde{P} \dot{\tilde{z}} \rangle$$

ve  $\dot{\tilde{z}}$  nin değeri yerine yazılırsa

$$\dot{V} = \langle \tilde{A}_{PI} \tilde{z} + (\mu - d\Phi(u)) \tilde{B} \tilde{C} \tilde{z}, \tilde{P} \tilde{z} \rangle + \langle \tilde{z}, \tilde{P} \tilde{A}_{PI} \tilde{z} + (\mu - d\Phi(u)) \tilde{P} \tilde{B} \tilde{C} \tilde{z} \rangle$$

iç çarpımın özelliklerinden

$$\dot{V} = \langle \tilde{A}_{p1} \tilde{z}, \tilde{P} \tilde{z} \rangle + \langle \tilde{P} \tilde{z}, \tilde{A}_{p1} \tilde{z} \rangle + 2 \langle \tilde{B} (\mu - d\Phi(u)) \tilde{C} \tilde{z}, \tilde{P} \tilde{z} \rangle \quad (6.24)$$

elde edilir. (6.21) Riccati denkleminde  $\langle \tilde{A}_{p1} \tilde{z}, \tilde{P} \tilde{z} \rangle + \langle \tilde{P} \tilde{z}, \tilde{A}_{p1} \tilde{z} \rangle$  nin karşılığı (6.24) de yerine yazılırsa

$$\dot{V} = -\mu^2 \langle \tilde{C} \tilde{z}_1, \tilde{C} \tilde{z}_2 \rangle - \langle \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z}_1, \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z}_2 \rangle + 2 \langle \tilde{B} (\mu - d\Phi(u)) \tilde{C} \tilde{z}, \tilde{P} \tilde{z} \rangle$$

bulunur ve bu ifadenin 0 dan  $t$  ye integrali alınır

$$V(t) - V(0) = -\int_0^t \mu^2 (\tilde{C} \tilde{z})^2 - \int_0^t (\tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z})^2 - 2 \int_0^t \langle (d\Phi(u) - \mu) \tilde{C} \tilde{z}, \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z} \rangle$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına  $\int_0^t (\mu - d\Phi(u))^2 (\tilde{C} \tilde{z})^2$  eklenir ve çıkarılırsa

$V(t) - V(0)$  ifadesi aşağıdaki şekilde kareye tamamlanmış olur:

$$V(t) - V(0) = -\int_0^t \left[ \mu^2 - (\mu - d\Phi(u))^2 \right] (\tilde{C} \tilde{z})^2 - \int_0^t \left[ (d\Phi(u) - \mu) \tilde{C} \tilde{z} + \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z} \right]^2 .$$

Bu eşitlik düzenlenirse

$$V(t) - V(0) = -\int_0^t \left[ 2\mu d\Phi(u) - (d\Phi(u))^2 \right] (\tilde{C} \tilde{z})^2 - \int_0^t \left[ (d\Phi(u) - \mu) \tilde{C} \tilde{z} + \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z} \right]^2$$

haline gelir. Burada  $\tilde{C} \tilde{z}$  yerine karşılığı olan  $k_1 C + k_p CAz + k_1 G(0)v$  yazılır ve

$\int_0^t \left[ (d\Phi(u) - \mu) \tilde{C} \tilde{z} + \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{z} \right]^2 \geq 0$  olduğundan bu terim ihmal edilirse

$$V(t) - V(0) \leq -\int_0^t \left( 2\mu d\Phi(u) - d\Phi(u)^2 \right) (k_1 C + k_p CAz + k_1 G(0)v)^2 \quad (6.25)$$

bulunur.  $2\mu > \lambda$  ve  $\|d\Phi(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq \ell$  olduğundan  $d\Phi(u) < 2\mu$  ve  $d\Phi(u) \geq 0$  dan

$$2\mu d\Phi(u) - d\Phi(u)^2 > 0 \quad (6.26)$$

olduğu görülür. Bunun anlamı  $V(t) - V(0) \leq 0$  yani  $V$  nin azalan bir fonksiyon olduğudur. Dolayısıyla  $V$  bir Lyapunov fonksiyonudur. (6.25) -1 ile çarpılır ve  $V(t)$  ihmal edilirse

$$\int_0^t d\Phi(u)^2 (k_I C + k_p CAz + k_I G(0)v)^2 \leq V(0) < \infty \quad (6.27)$$

olur. (6.26) dan öyle bir  $\varepsilon > 0$  vardır ki

$$2\mu d\Phi(u) - d\Phi(u)^2 \geq \varepsilon d\Phi(u)^2$$

ve böylece

$$\varepsilon \int_0^t d\Phi(u)^2 (k_I C + k_p CAz + k_I G(0)v)^2 \leq V(0) < \infty .$$

Son eşitsizlikten  $d\Phi(u)(k_I C + k_p CAz + k_I G(0)v) \in L^2(\mathbb{R}_+)$  elde edilir. Bu (6.20) de kullanılırsa,  $A, A^{-1}B, C$  kararlı sistemin üretici operatörleri olduğundan

$$k_I Cz + k_p CAz \in L^2(\mathbb{R}_+) \quad (6.28)$$

elde edilir. (6.28) ve  $d\Phi(u)$  nun sınırlılığından

$$d\Phi(u)v \in L^2(\mathbb{R}_+) \quad (6.29)$$

dur, böylece

$$d\Phi(u)(k_I Cz + k_p CAz)v \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad (6.30)$$

(6.27), (6.29), (6.30) dan ve  $d\Phi(u)$  nun sınırlılığından

$$d\Phi(u)v^2 \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad (6.31)$$

bulunur. (6.20-b)  $v(t)$  ile çarpılır ve ardından integre edilirse

$$\int_0^t v\dot{v} = -\int_0^t d\Phi(u)(k_p CAz + k_I Cz)v - \int_0^t d\Phi(u)k_I G(0)v^2$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı integrallenebilir olduğundan sonlu bir değerdir. Bu

değer  $\nu$  olsun. Yani  $\int_0^t v\dot{v} = \nu$  ve  $\nu \in [0, \infty)$  dur. Bu ifade açılır ve  $t \rightarrow \infty$  için limit

alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v^2(t) = v_0^2 + 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t v\dot{v} = \tilde{\nu}$$

elde edilir. Burada  $\tilde{\nu} = \nu + \frac{v_0^2}{2}$  dir.  $v$  nin sürekliliğinden

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\tilde{\nu}} \text{ veya } \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\sqrt{\tilde{\nu}}$$

dir.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(u(t)) = \phi_r$  olduğunu ispatlamak için  $\tilde{\nu} = 0$  olduğu gösterilmelidir. Çelişki

elde etmek için  $\tilde{\nu} > 0$  kabul edilsin. Öncelikle  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\tilde{\nu}}$  olsun (diğer durum

benzer şekilde ispat edilir), bu durumda  $v = \Phi(u) - \phi_r$  olduğundan  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(u) - \phi_r > 0$

dır. Yani

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(u) > \phi_r \quad (6.32)$$

dir. 6.2.2 Yardımcı Teorem'den

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) + A^{-1}B\Phi_\infty\| = 0 \quad (6.33)$$

ve  $C$  nin sınırlılığından  $e = r - Cx$  olmak üzere (6.20-a) ifadesinin  $t \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}(t) = k_l (r + CA^{-1}B\Phi_\infty)$$

elde edilir.  $\phi_r = \frac{r}{G(0)}$  bu ifadede yerine yazılırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u} = k_l G(0)(\phi_r - \Phi_\infty) < 0$$

bulunur. Dolayısıyla buradan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty$$

sonucuna ulaşılır.  $\Phi$  azalmayan olduğundan

$$\Phi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(u(t)) = \inf(im\Phi) \leq \phi_r$$

olacaktır. Bu ise (6.32) ile çelişir. Yani  $\tilde{v} = 0$  olmalıdır. Dolayısıyla  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(u(t)) = \phi_r$  dir. Bu ispatın i. kısmını verir. ii. durumu i. nin bir sonucu olarak 6.2.1 Yardımcı Teorem'den kısmından elde edilir. iii. durumunu elde etmek için  $y$  çıktısının limiti alınır:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Cx(t) = CA^{-1}B\phi_r$$

hipotezden  $\phi_r = \frac{r}{G(0)}$  olduğundan  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r$  bulunur.

Aşağıda Duhem histerisis girişine sahip doğrusal bir sistemin PI kontrolüne ilişkin bir örnek verilmiştir. Örnekteki sistem [24]'den alınmıştır. Ayrıca örnekte Değiştirme histerisis girişine sahip bir sistemin integral kontrolü ile oransal-integral kontrolü arasında karşılaştırma yapılmıştır.

**Örnek:** Yayılım katsayısı  $\alpha > 0$  olan ve Dirichlet sınır koşullarına sahip, bir noktada aktif ve duyarlı, bir boyutlu  $[0,1]$  aralığı üzerindeki bir yayılım süreci göz önüne alınsın. Bu sistem, aşağıdaki kontrol edilen kısmi diferansiyel denklemi verir.

$$z_t(t, x) = az_{xx}(t, x) + \delta(x - x_b)\Phi(u(t)), \quad y(t) = z(t, x_c)$$

ve sınır koşulları

$$z(t, 0) = 0 = z(t, 1), \quad \forall t > 0.$$

Buradaki  $\Phi$ ,  $f_1$  ve  $f_2$  eğrileri aşağıdaki gibi tanımlanan Duhem operatörüdür.

$$f_1 = \sqrt{0.1 + \sqrt{2.1 - \sqrt{1.1 - u}}} \quad \text{ve} \quad f_2 = \sqrt{1.1 + u}.$$

Burada  $u$  sistem girdisidir ve

$$\Phi = \begin{cases} f_1, & \dot{u} \geq 0 \\ f_2, & \dot{u} < 0 \end{cases}$$

dır. Sistemin transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{\sinh\left(x_b \sqrt{\frac{s}{a}}\right) \sinh\left((1-x_c) \sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{a \sqrt{\frac{s}{a}} \sinh \sqrt{\frac{s}{a}}}$$

Bir  $u(t) \in \mathbb{R}$  girdisi ve  $y(t) \in \mathbb{R}$  çıktısı için bu yayılım sistemi (6.12) şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda  $A$  matrisinin özdeğerleri  $-an^2\pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ve özvektörleri  $\sin(n\pi x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  olmak üzere sistemin katsayı matrisleri

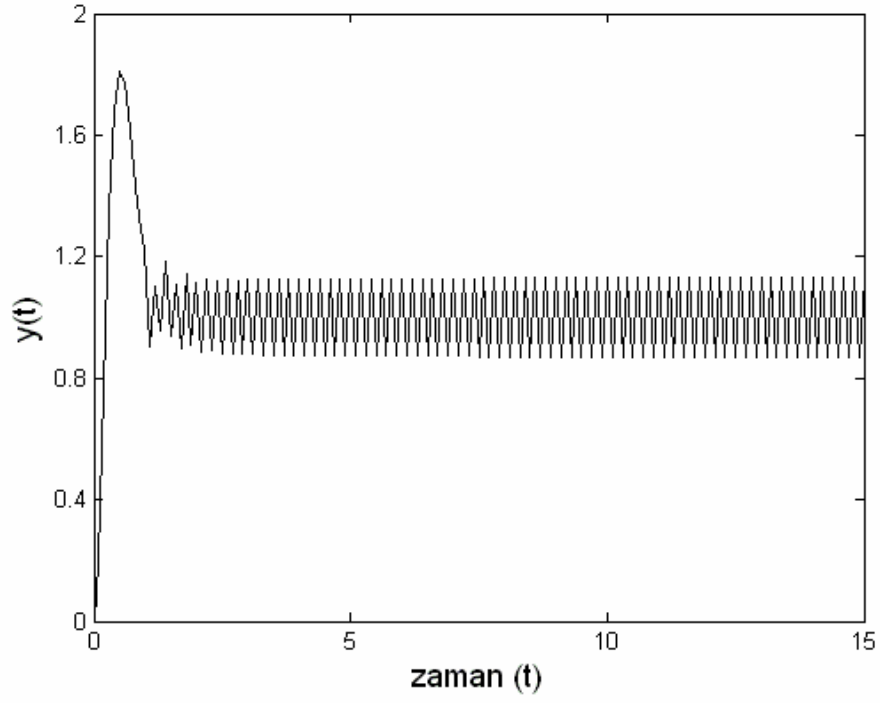
$$A = \text{diyagonal}(-an^2\pi^2), \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_{10}), \quad b_k = \frac{\sin(k\pi x_b)}{\int_0^1 \sin^2(k\pi x) dx}$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_{10}), \quad c_k = \sin(k\pi x_c), \quad k = 1, 2, \dots$$

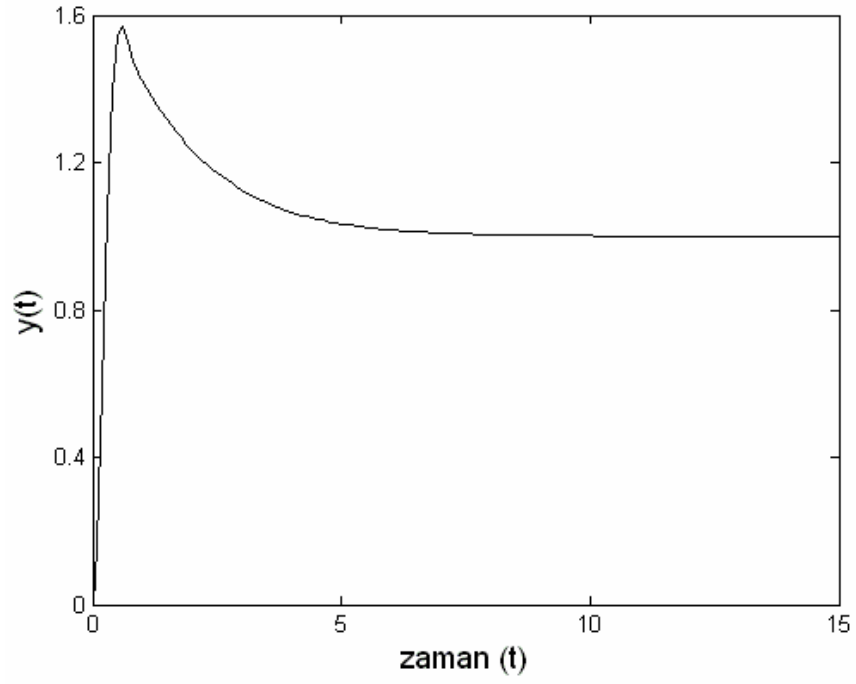
şeklindedir. Sistemde  $a = 0.1$ ,  $x_b = 0.25$ ,  $x_c = 3/8$  olarak seçilirse

$$G(0) = \frac{1}{a}(x_b(1-x_c)) = 1.5625 > 0$$

şartı sağlanır. Şekil 6.3 ve Şekil 6.4 de  $r=1$  referans değeri ve farklı  $k_p$  ve  $k_I$  değerleri için sistem cevabı verilmiştir.

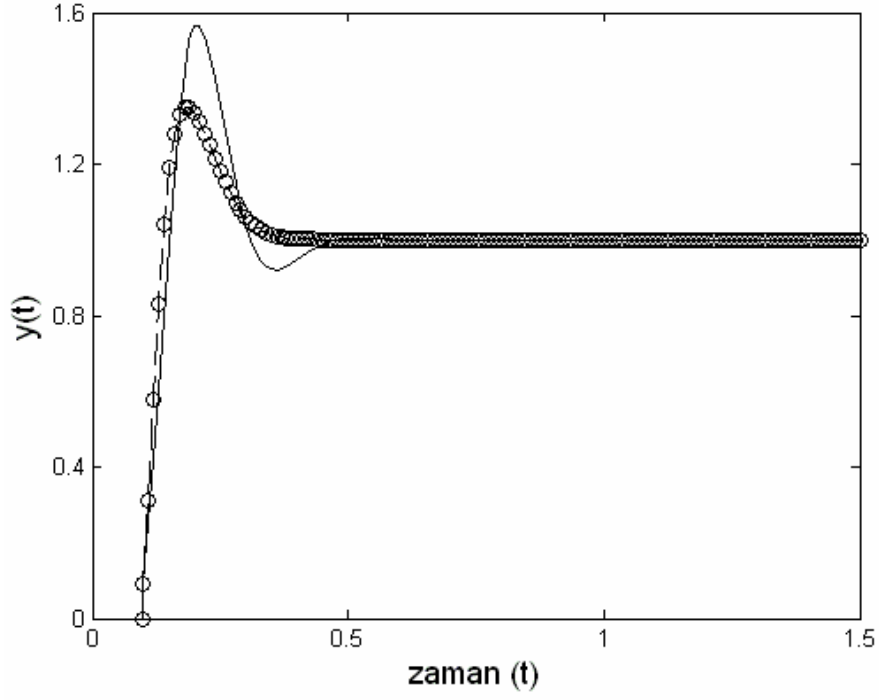


**Şekil 6.3**  $r = 1, k_I = 0.3, k_p = 0.7$  değerleri için sistemin cevabı



**Şekil 6.4**  $r = 1, k_I = 0.1, k_p = 0.7$  değerleri için sistemin cevabı

Aynı  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonları için oluşturulan Değişirme histerisis yapısına sahip bir sistemin I ve PI ile kontrolü sonucu verdiği cevap aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 6.5 ‘-’: I kontrolör,  $k_I=0.244$ ,  
‘--o’: PI kontrolör  $k_I=0.244$  ve  $k_P=0.6$ .

Şekil 6.5 de görüldüğü gibi PI kontrolör ile yükselme zamanı düşmüş, aşım ve yerleşme zamanı azalmıştır.

## 7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerde yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmektedir.

Birinci bölümde genel olarak histerisis kavramı ile ilgili temel bilgiler, histerisisin matematiksel alt yapısı ve mevcut olan histerisis operatörleri ve histerisis modelleri tanıtılmıştır.

İkinci bölümde kontrol sistemlerinin kararlılığı üzerinde durulmuştur. Bu amaçla kararlılık analizinde temel teşkil eden denge noktası, kararlı, asimptotik kararlı denge noktası kavramlarına değinilmiştir. Daha sonra kararlılık analizinde sık sık başvurulan ve bu tezde de kullanılan sınırlı girdi sınırlı-çıkıtı kararlılık kriteri ve doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler için Lyapunov kararlılık teorisi verilmiştir.

Üçüncü bölümde öncelikle kontrol edilmeyen sistemler için kararlılık yarıçapı tanıtılmış, ardından bu tanım kontrol edilen sistemlere genişletilmiştir. Ayrıca parametrelendirilmiş Riccati denkleminin göre kararlılık yarıçapının karakterizasyonu ve buna dayalı olarak son bölümde kullanılacak olan gerekli teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde doğrusal sistemler için kontrol edilebilirlik kavramı verilmiş, oransal (P), integral (I) ve bunların toplamından oluşan oransal-integral (PI) kontrolör tipleri verilmiştir. Ardından I, P ve PI kontrol edilebilirlik kavramları üzerinde durulmuştur. Son olarak bu kontrolörlerin kazanç katsayılarının aralığını belirlemede kullanılacak kriterler tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde Duhem histerisis modelinin  $N(\ell)$  histerisis sınıfından olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Duhem histerisis girişine sahip doğrusal bir sistem tanımlanarak, sistemin çözümünün varlığı incelenmiştir. PI kontrolü uygulandıktan

sonra sistemin pozitif reellik koşulunu sağladığı ve Riccati denkleminin bir çözümü nün olduğu ispatlanmıştır. Sonuç olarak PI kontrolör ile kontrol edilen Duhem histerisis girişine sahip negatif geri beslemeli sistemin sınırlı bir girdiye karşılık sınırlı bir çıktı verdiği, yani kararlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca örnek bir sisteme Duhem histerisis girişi ve PI kontrolü uygulanarak sistemin cevabı incelenmiştir. Aynı örnek üzerine Değişirme histerisis girişi uygulanarak I ve PI kontrolörlerin sistem cevabı üzerine karşılaştırmaları yapılmıştır. Sonuç olarak PI kontrolörün I kontrolöre göre aşımının daha düşük, yerleşme zamanına ise daha kısa sürede ulaştığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla PI kontrolörün daha avantajlı bir sonuç verdiği görülmektedir.

## 8. EKLER

### Ek A

**Teorem:**  $f(x,t)$  fonksiyonu her  $t \geq t_0$  için parçalı sürekli ve her  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  için yerel Lipschitz özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun.  $W \subset D$  tıkmaz bir alt küme olsun ve

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(0) = x_0$$

bütün çözümleri tamamen  $W$  da kalsın. Bu durumda her  $t \geq t_0$  için bir tek çözüm vardır.

Teoremin ispatı [14,s.77]'de bulunabilir.

### Ek B

**Gronwall Lemma:**  $t_0 < t < t_1$  için  $\phi(t) \geq 0$  ve  $\psi(t) \geq 0$  sürekli fonksiyonlar olsunlar.  $\phi$  ve  $\psi$  fonksiyonları  $(t_0, t_1)$  üzerinde  $K$  ve  $L$  pozitif sabitler olmak üzere

$$\phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $(t_0, t_1)$  üzerinde

$$\phi(t) \leq K \exp L \int_{t_0}^t \psi(s) ds$$

eşitsizliği sağlanır.

### Ek C

- 1. Tam Satır Rankı:**  $P$ ,  $n \times m$  lik bir matris olmak üzere  $\text{rank}(P) = n$  ise  $P$  matrisi tam satır ranka sahiptir denir.
- 2. Tam Sütun Rankı:**  $P$ ,  $n \times m$  lik bir matris olmak üzere  $\text{rank}(P) = m$  ise  $P$  matrisi tam sütun ranka sahiptir denir.
- 3. Sol (sağ) Asal Matris:** Bir  $P$  polinom matrisi kompleks düzlemin sonlu sayıda noktası hariç tam satır (veya sütun) ranka sahip ise  $P$  ye sol (sağ) asal matris denir.

**4. Aralarında Sol Asal Matrisler:** Aynı sayıda satıra sahip  $N$  adet  $P_1, P_2, \dots, P_N$  polinom matrisleri için eğer  $[P_1 \ P_2 \ \dots \ P_N]$  matrisi sol asal ise  $P_1, P_2, \dots, P_N$  matrisleri aralarında sol asaldır.

**5. Aralarında Sağ Asal Matrisler:** Aynı sayıda sütuna sahip  $N$  adet

$P_1, P_2, \dots, P_N$  polinom matrisleri için eğer  $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}$  matrisi sağ asal ise

$P_1, P_2, \dots, P_N$  matrisleri aralarında sağ asaldır.



## 9. KAYNAKLAR

- [1] Brokate, M., Sprekels, J., Hysteresis and phase transitions, Marsden J. E., Sirovich, L., John, F., Springer, New York, (1996).
- [2] Belbas, S.A., Mayergoyz, I.D., “Hadamard-like derivatives in preisach modeling and control”, *Physica B*, (2006) **372**, 87.
- [3] Chen, C.T., Linear systems theory and design, Oxford University Press, Oxford, (1999).
- [4] Chen, X., Robust control for the unknown systems preceded by hysteresis, MMAR2006, Poland, (28-31 August 2006).
- [5] Coleman, B.D., Hodgdon, M.L., “A constitutive relation for rate-independent hysteresis in ferromagnetically softmaterials”, *Internat. J. Engrg. Sci.*, (1986) **24**, 897.
- [6] Coleman, B.D., Hodgdon, M.L., “On a class of constitutive relations for ferromagnetic hysteresis”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, (1987) **99**, 375.
- [7] Curtain, R.F., Pritchard, A.J., Functional analysis in modern applied mathematics, Academic Press, London, (1977).
- [8] Fliegner T., Logemann, H., Ryan, E.P., Low-gain integral control of continuous-time linear systems subject to input nonlinearities, Proc. European Control Conference ECC'01, Porto, Portugal, (2001), 534.
- [9] Haddad, W.M., Chellaboina, V., Oh, J., “Linear controller analysis and design for systems with input hystereses nonlinearities”, *Journal of the Franklin Institute*, (2003) **340**, 371.
- [10] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J., “Stability radii of linear systems”, *Systems & Control Letters*, **8**, (1986). 1.
- [11] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J., “Stability radius for structured perturbations and algebraic Riccati equation”, *Systems & Control Letters*, **8**, (1986), 105.
- [12] Hodgdon, M.L., “Application of a theory of ferromagnetic hysteresis”, *IEEE Trans. Magn.*, *MAG-24*, (1988), 218.

- [13] Hodgdon, M.L., “Mathematical theory and calculations of magnetic hysteresis curves”, *IEEE Trans. Magn., MAG-24*, (1988), 3210.
- [14] Khalil, H.K., *Nonlinear systems*, Prentice Hall, New Jersey, (1996).
- [15] Krasnosel’skii, M.A., Pokrovskii, A.V., *Systems with hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin, (1989).
- [16] Logemann, H., Owens, D.H., “Low-Gain control of unknown infinite-dimensional systems: a frequency-domain approach”, *Dynamics and Stability of Systems*, **4**, (1989), 13.
- [17] Logemann, H., Townley, S., “Low-Gain control of uncertain regular linear systems”, *SIAM J. Control Optim.*, **35**, (1997), 78.
- [18] Logemann, H., Ryan, E.P., Townley, S., “Integral control of infinite-dimensional linear systems subject to input saturation”, *SIAM J. Control Optim.*, **36**, (1998), 1940.
- [19] Logemann, H., Mawby, A. D, Integral control of distributed parameter systems with input relay hysteresis, UKACC International Conference on Control 98, University of Wales Swansea, United Kingdom, (1-4 September 1998).
- [20] Logemann, H., Ryan, E.P., Low-gain integral of well-posed systems subject to input hysteresis: an input-output approach, MTNS04, Belgium, (2004).
- [21] Macki, J.W., Nistri, P., Zecca, P., “Mathematical models of hysteresis”, *SIAM Review*, **35**, (1993), 94.
- [22] Mawby, A.D., Integral control of infinite-dimensional linear systems subject to input hysteresis, Ph.D. Thesis, University of Bath, Bath, United Kingdom, (2000).
- [23] Mayergoyz, I.D., *Mathematical models of hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin, (1991).
- [24] Özdemir, N., Robust and adaptive sampled data I–control, Ph.D. Thesis, University of Exeter, Exeter, United Kingdom, (2000).
- [25] Özdemir, N., Townley, S., Variable sampling integral control of infinite-dimensional systems, Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, (12-15 December 2000), 3284.

[26] Özdemir, N., Köçkar, H., Diferansiyel denklemleri kullanarak manyetik histerisis eğrilerinin kontrol teoride modellenmesi, 2003/22, Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Projeler Birimi, (2007).

[27] Pokrovskii, A., Sobolev, V., Singular perturbations and hysteresis: “A naive view of time relaxation and hysteresis”, Mortell, M.P., O’ Malley, R.E., Pokrovskii, A., Sobolev, V., *SIAM*, Philadelphia, (2005).

[28] Sain, P.M., Sain, M.K., Spencer B.F., “Models for hysteresis and application to structural control”, Proceedings American Control Conferences, (4–6June 1997)**1**, 16.

[29] Şuhubi, E.S., Fonksiyonel analiz, İTÜ Vakfı Yayınları No: 38, İstanbul, (2001), 525-527.

[30] Tao, G., Kokotovic, P.V., “Discrete-time adaptive control of systems with unknown output hysteresis”, Proceedings of the American Control Conference Baltimore, Maryland, (June 1994).

[31] Visintin, A., Differential models of hysteresis, John, F., Marsden J.E., Sirovich, L., Springer, Berlin, (1994).