

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRUP VE MONOİD YAPILARINA GEOMETRİK
YAKLAŞIMLAR

DOKTORA TEZİ

Fırat ATEŞ

Balıkesir, Eylül - 2007

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GRUP VE MONOİD YAPILARINA GEOMETRİK
YAKLAŞIMLAR**

DOKTORA TEZİ

Fırat ATEŞ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi : 13.09.2007

Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFILOV (BAÜ, FEF)

Doç. Dr. Ahmet S. ÇEVİK (BAÜ, FEF) (Danışman)

Doç. Dr. Hayrullah AYIK (ÇÜ, FEF)

Doç. Dr. Gonca AYIK (ÇÜ, FEF)

Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ, FEF)

Balıkesir, Eylül - 2007

ÖZET

GRUP VE MONOİD YAPILARINA GEOMETRİK YAKLAŞIMLAR

Fırat ATEŞ

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balıkesir, 2007

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, grup ve monoid sunuşlarıyla ilgili hatırlatmalar yapıp, bu cebirsel yapılar üzerinde resimler tanımlanmıştır. Ayrıca aspherical, combinatorial aspherical, etkililik ve etkisizlik kavramları hatırlatılmıştır. Son olarak ise, grup durumunda Lustig, monoid durumunda ise Pride'in ortaya koymuş olduğu, etkisiz iken minimallik ile ilgili önemli bir teorem ifade edilmiştir.

İkinci bölüm iki kısımda incelenmiş olup, birinci kısımda serbest grupların HNN genişlemesinin devirli alt grup ayrıştırılabilir olması için gerek koşul verilmiştir. İkinci kısımda ise, ayırık genişlemeler üzerinde (özellikle de holomorflar üzerinde) alt grup ayrıştırılabilirlik incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, standart wreath çarpımdan hareketle etkililik ve alt grup ayrıştırılabilirlik arasındaki ilişki incelenmiştir. Bunun için ilk önce, Cayley graf kullanılarak standart wreath çarpımın sunuşu elde edilmiştir. Sonrada bu bölümün ana teoremi verilmiştir. Ayrıca G grubu B ile A nın standart wreath çarpımı olmak üzere, bu bölümün diğer ana sonucu olarak, G grubunun etkililiği ve B -ayrıştırılabilirliği arasındaki ilişki tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, bir değişmeli grubun herhangi bir grup ile oluşturacağı merkezi genişlemenin sunuşu yardımıyla, p -Cockcroft olması için gerek ve yeter koşullar tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde, sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpımını minimal ancak etkisiz yapan gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bölümün sonunda ise bazı örnekler verilmiştir.

Son bölümde, elde edilen sonuçların bir değerlendirmesi yapılmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Merkezi Genişleme, Cayley Graf, Etkililik, Minimallik, Resimler, HNN and Split (Ayrık) Genişleme, p -Cockcroft Özelliği, Alt Grup Ayrıştırılabilirlik, Yarı Direkt Çarpım, Wreath Çarpım.

ABSTRACT

THE GEOMETRIC APPROXIMATIONS TO GROUP AND MONOID STRUCTURES

Firat ATEŞ

Department of Mathematics,

Balikesir University, Institute of Science

(Ph. D. Thesis / Supervisor : Assoc. Prof. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balikesir – Turkey, 2007

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, we review existing theory concerning group and monoid presentations and the concept of pictures over these. We also recall aspherical, combinatorial aspherical, n -Cockcroft ($n \in \mathbb{Z}^+$), efficient and inefficient presentations. Minimality is the final concept introduced in this chapter: we present an important theorem, due to Lusting in the case of groups and to Pride for monoids.

The second chapter is divided in two parts. In the first part we give sufficient conditions on the HNN extension of a free group to be cyclic subgroup separable. In the second part we show just subgroup separability on a split extension of special groups which is actually on holomorph.

In the third chapter, we are mainly interested in separability and efficiency under standard wreath products. To do that we first obtain a presentation for standard wreath product in terms of Cayley graphs. Then we prove our first main result of this chapter. Moreover, by considering the standard wreath product G of any finite groups B by A , we define the relationship between B -separability and efficiency, as another main result of this chapter.

In Chapter 4, we prove the p -Cockcroft property for the presentation of a central extension of an abelian group by any group.

In Chapter 5, we give necessary and sufficient conditions for a presentation of a semi-direct product of two finite cyclic monoids to be minimal but inefficient. We end this chapter by giving some examples.

In the last chapter the results which are obtained according to the previous chapters have been summarized.

KEY WORDS : Central Extensions, Cayley Graphs, Efficiency, Pictures, Minimality, HNN and Split Extensions, p -Cockcroft Property, Subgroup Separability, Semi-direct products, Wreath Products.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	xi
1. BÖLÜM	1
1.1 Giriş	1
1.2 Grup Sunuşları	3
1.2.1 Tietze Dönüşümleri	4
1.2.2 Grup Sunuşları Üzerinde Tanımlanan Resimler	5
1.2.3 Küresel Resimler Üzerinde İşlemler	9
1.2.4 Gruplar için İkinci Fox İdealleri	13
1.2.5 Aspherical ve Cockcroft Grup Sunuşları	14
1.2.6 Grup Sunuşlarının Etkililiği	17
1.3 Monoid Sunuşları	21
1.3.1 Fox Türevleri	22
1.3.2 Monoid Sunuşları Üzerinde Tanımlanan Resimler	24
1.3.3 Monoidler için İkinci Fox İdealleri	28
1.3.4 Aspherical ve Cockcroft Monoid Sunuşları	32
1.3.5 Monoid Sunuşları Üzerinde Etkililik	33
2. BÖLÜM	36
2.1 Giriş	36
2.2 Yarı Direkt Çarpımlar ve Ayrık Genişlemeler	37
2.3 Bir Grubun Alt Grup Ayrıştırılabilirliği	42
2.3.1 HNN Genişlemesi	43
2.3.2 Ayrık Genişleme	49
3. BÖLÜM	53
3.1 Giriş	53
3.2 Standart Wreath (Çelenk) Çarpım	54
3.3 Cayley Graf	56
3.4 Yardımcı Teoremler ve Ana Sonuçlar	58
4. BÖLÜM	89
4.1 Giriş	89
4.2 Merkezi Genişlemenin Etkililiği	90
5. BÖLÜM	107
5.1 Giriş	107
5.2 Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımı	108
5.3 Sonlu Devirli Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımı	119
5.4 Ana Teorem	124
5.5 Ana Teoremin İspatı	130

6. SONUÇLAR	136
7. KAYNAKLAR	137

SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Tanımı</u>
	G ve H grup olsun
$G \times H$	Direkt çarpım
$G \oplus H$	Direkt toplam
$G \otimes H$	Tensör çarpım
$G \times_{\theta} H$	G nin H ile yarı direkt çarpımı
$G \wr H$	Standart wreath çarpım
G/H	Bölüm grubu
$H_1(G)$	Birinci homoloji grubu
$H_2(G)$	İkinci homoloji grubu
$Aut(G)$	G nin bütün otomorfizmalarının kümesi
$[a, b]$	a ve b nin komutatörü
\mathbb{Z}_n	Mertebesi n olan devirli grup
$\mathbb{Z}G$	Grup halkası
$\wp = \langle X ; R \rangle$	Grup sunuşu
$\wp = \langle \mathbf{a} ; \mathbf{r} \rangle$	Grup sunuşu
$\wp = \langle \underline{x} ; \underline{r} \rangle$	Grup sunuşu
$F(X)$	X ile üretilen serbest grup
$G(\wp)$	\wp ile tanımlanan grup
$[W]$	W kelimesinin serbest denklik sınıfı
\overline{W}	$G(\wp)$ nin elemanı (W ile temsil edilen)
$L(W)$	W nin uzunluğu
$L_x(W)$	x elemanına bağlı olarak W nin uzunluğu

$\exp_x(W)$	x elemanının W kelimesindeki üstler toplamı
\approx	Serbest denklik
\approx_{\wp}	\wp sunuşuna bağlı olarak denklik
$\chi(\wp)$	\wp sunuşunun Euler karakteristiği
$\chi(G)$	G grubunun Euler karakteristiği
$rk_z()$	Serbest burulma kısmının \mathbb{Z} rankı
$d()$	Minimal üreteç sayısı
$\delta(G)$	$\delta(G) = 1 - rk_z(H_1(G)) + d(H_2(G))$
\mathbb{P}	\wp sunuşu üzerinde resim
$\partial \mathbb{P}$	\mathbb{P} nin sınırı
$W(\wp)$	\mathbb{P} resminin sınırının etiketi
$\pi_2(\wp)$	İkinci homotopi modülü
$\exp_R(\mathbb{P})$	\mathbb{P} resmindeki R bağıntısının üstler toplamı
Δ	\mathbb{P} resmindeki disk
$\partial \Delta$	Δ nin sınırı
$\underline{\gamma}$	yay
$I_2(\wp)$	İkinci Fox İdeali
\mathbf{Z}	$\pi_2(\wp)$ nin üreteç resimlerinin kümesi
	M ve K monoid olsun
$M \times_{\theta} K$	M nin K ile yarı direkt çarpımı
$End(M)$	M nin bütün endomorfizmalarının kümesi
$\overline{\wp} = [\mathbf{y} : \mathbf{s}]$	Monoid sunuşu
$F(\mathbf{y})$	\mathbf{y} ile üretilen serbest monoid
$M(\wp)$	\wp ile tanımlanan monoid
\overline{W}	$M(\wp)$ nin elemanı (W ile temsil edilen)
$L_y(W)$	y elemanına bağlı olarak W nin uzunluğu

$\exp_y(W)$	y elemanının W kelimesindeki üstler toplamı
\approx_{\wp}	\wp sunuşuna bağlı olarak denklik
$\chi(\wp)$	\wp sunuşunun Euler karakteristiği
$\chi(M)$	M monoidinin Euler karakterisitiği
$rk_z()$	Serbest burulma kısmının \mathbb{Z} rankı
$d()$	Minimal üreteç sayısı
$\delta(M)$	$\delta(M) = 1 - rk_z(H_1(M)) + d(H_2(M))$
$\frac{\partial}{\partial y}$	Sabit bir $y \in \mathbf{y}$ nin Fox türevi
\mathcal{A}	Atomik monoid resmi
\mathbb{P}	$\overline{\wp}$ sunuşu üzerinde resim
$\exp_S(\mathbb{P})$	\mathbb{P} resmindeki S bağıntısının üstler toplamı
$I_2^{(l)}(\wp)$	$\overline{\wp}$ sunuşu üzerinde sol ikinci Fox İdeali
$I_2^{(r)}(\wp)$	$\overline{\wp}$ sunuşu üzerinde sağ ikinci Fox İdeali
$D(\wp)$	Squier kompleks
\mathbf{Y}	$D(\wp)$ nin üreteç resimlerinin kümesi

Bu tez boyunca, $End()$ monoidi ve $Aut()$ grubu dışında kalan bütün dönüşümler sol taraftan yazılacaktır.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil	<u>Adı</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1	Küresel olmayan resim örneği	7
Şekil 1.2	Küresel resim örneği	7
Şekil 1.3	Küresel olan ve küresel olmayan resimleri içeren resim örneği	8
Şekil 1.4	Spreyi çizilmiş resim örneği	8
Şekil 1.5	İki küresel resmin yan yana gelmesiyle elde edilen resim	10
Şekil 1.6	\mathbb{P}^W küresel resmi	11
Şekil 1.7	Devirli grubun üreteç resmi	15
Şekil 1.8	<i>Cockcroft</i> resim örneği	16
Şekil 1.9	Üreteç resim örneği	16
Şekil 1.10	Minimallikle ilgili resim örneği	20
Şekil 1.11	Atomik monoid resmi	25
Şekil 1.12	Küresel olan ve küresel olmayan monoid resimleri içeren resim örneği	26
Şekil 1.13	$C.\mathcal{A}$ resmi	27
Şekil 1.14	Atomik monoid resimler üzerindeki operasyonlara ilişkin monoid resimleri	27
Şekil 1.15	Monoidler için üreteç resim örneği	31
Şekil 3.1	S_3 simetrik grubunun Cayley grafi	67
Şekil 3.2	S_3 simetrik grubunun elemanlarının kopyalarından hareketle elde edilmiş Cayley graf	67
Şekil 3.3	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubunun Cayley grafi	69
Şekil 3.4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubunun elemanlarının kopyalarından hareketle elde edilmiş Cayley graf	70

Şekil 3.5	Geodezik örneği	71
Şekil 3.6	$T_{Z_2 \times Z_2}$ maksimal ağacı	79
Şekil 4.1	W_{Δ_j} ile etiketlenmiş spreyleerin resmi	92
Şekil 4.2	\mathbb{P}_1 köşe resmi	95
Şekil 4.3	\mathbb{P}_2 köşe resmi	95
Şekil 4.4	\mathbb{P}_3 köşe resmi	95
Şekil 4.5	\mathbb{P}_a^1 kenar resmi	96
Şekil 4.6	\mathbb{P}_a^2 kenar resmi	96
Şekil 4.7	$\mathbb{H}_{x_i, R}$ 2-hücre resmi	97
Şekil 4.8	$\mathbb{H}_{x_i, R}$ 2-hücre resmi	97
Şekil 4.9	\mathbb{C} resmi	97
Şekil 4.10	$B_{\Delta_j} W_{R_j} B_{\Delta_j}^{-1} W_{R_j}^{-1}$ ile etiketlenmiş resim	98
Şekil 4.11	$B_{\Delta_j} W_{R_j} B_{\Delta_j}^{-1} W_{R_j}^{-1}$ ile etiketlenmiş resim	99
Şekil 4.12	$\mathbb{Q}^\#$ resmi	99
Şekil 4.13	\mathbb{Q}^{**} resmi	100
Şekil 4.14	\mathbb{Q}_R ve $\mathbb{Q}^\#$ resim örneği	105
Şekil 5.1	$\mathbb{P}_{k,l}^1, \mathbb{P}_{k,l}^2 \dots \mathbb{P}_{k,l}^{k-1}$ resimleri	113
Şekil 5.2	$\mathcal{A}_{U, y}$ resmi	115
Şekil 5.3	$\mathbb{P}_{S, x}$ ve $\mathbb{P}_{R, y}$ resimleri	117
Şekil 5.4	$\mathbb{Q}_{S, x}$ resmi	120
Şekil 5.5	$\mathcal{A}_{R_+, y}$ resmi	121
Şekil 5.6	\mathbb{C}_{y, θ_R} resmi	121
Şekil 5.7	Sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpımının üreteç resimleri	122

ÖNSÖZ

Öncelikle, Balıkesir'e adım attığım ilk günden beri benden fikirlerini, yönlendirmelerini, bilgisini hiçbir zaman esirgemeyen ve en kötü durumlarda dahi her zaman ileriye doğru adım atmamı sağlayan, daima örnek olarak alacağım, danışman hocam Doç. Dr. Ahmet Sinan Çevik'e,

Bu günlere ulaşmamda katkısı olan diğer bütün hocalarıma, özellikle Prof. Dr. Mehmet Terziler'e,

Dostluklarını sürekli hissettiğim bütün arkadaşlarıma,

Her zaman hayatımda önemli bir yere sahip olan Aileme,

Tanıştığımız günden bu yana yaşamımı değiştiren ve beni her zaman ileriye taşıyan, en bunalımlı zamanlarımda daima nefes almamı sağlayan, desteğini anlatmaya kelimelerin dahi yetemeyeceği, biricik eşime,

SONSUZ TEŞEKKÜRLERİMİ SUNUYORUM.

1. BÖLÜM

Bu bölüm, genel anlamda, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel materyallerin incelenmesi için oluşturulmuştur. Bu materyaller ile ilgili detay bilgilerin bir kısmı [9], [12], [24], [43], [56], [57], [62], [63], [64], [65] gibi kaynaklardan elde edilebilir. Bunlara ek olarak alt bölümlerin içinde gerekli referanslar işaret edilmiştir.

1.1 Giriş

X boştan farklı bir küme olmak üzere, X kümesine bire bir karşılık gelen X^{-1} ($x \leftrightarrow x^{-1}$) kümesini tanımlayalım. Burada $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ iken, X^{\pm} kümesinin her bir elemanına *harf* denir. Ayrıca, $n \geq 0$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \quad (1.1)$$

ifadesine X kümesi üzerinde bir kelime denir. Bu kelimeyi W ile gösterirsek, W kelimesinin *başlangıç harfi* $\iota(W) = x_1^{\varepsilon_1}$ ve *bitiş harfi* $\tau(W) = x_n^{\varepsilon_n}$ biçiminde tanımlanır. Eğer $n = 0$ ise W kelimesine *boş kelime* denir ve 1_W (veya sadece 1) ile gösterilir. Ayrıca, $1 \leq i \leq n$ için, $n = 0$ ve $n > 0$ durumlarından biri varken, $\varepsilon_i = +1$ oluyorsa W kelimesine *pozitif kelime* denir. Herhangi bir W kelimesinin tersi

$$x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots x_1^{-\varepsilon_1}$$

şeklinde tanımlanan kelimedir ve W^{-1} ile gösterilir.

W kelimesi (1.1) de verildiği gibi olmak üzere, W nin uzunluğu, W nin içindeki harflerin sayısıdır ve $L(W)$ ile gösterilir. Bununla beraber, W kelimesi içindeki bir x elemanının uzunluğu $\sum_{x_i=x} |\varepsilon_i|$ ile hesaplanır ve $L_x(W)$ ile gösterilir.

Yine aynı W kelimesi üzerinde, bir x elemanın W içindeki üstler toplamı da $\sum_{x_j=x} \varepsilon_i$ ile bulunur ve $\exp_x(W)$ şeklinde gösterilir. Özel olarak, W boş kelime ise $L_x(W) = \exp_x(W) = 0$ ve W bir pozitif kelime ise $L_x(W) = \exp_x(W)$ dir.

X kümesi üzerinde iki kelime W ve U olmak üzere bu *kelimelerin çarpımı*, W kelimesinin sonuna U kelimesinin getirilip yan yana yazılmasıyla elde edilir ve WU biçiminde gösterilir. Verilen bu çarpım altında kelimeler üzerinde aşağıdaki şekilde işlemler tanımlanabilir.

(1) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime üzerindeki $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri silinir.

(1)⁻¹ $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime üzerindeki $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenir.

X kümesi üzerinde iki kelime W ve W' olsun. Eğer bu kelimelerden biri, diğerine yukarıdaki işlemlerin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelimeye *serbest olarak eşit* denir ve bu durum $W \approx W'$ olarak gösterilir. Elde edilen \approx bağıntısı denklik bağıntısı olup, herhangi bir W kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[W]$ ile gösterilir. Ayrıca X kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıfları $F(X)$ olmak üzere, $F(X)$ kümesi üzerinde çarpma işlemi

$$[W][U] = [WU]$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpma işlemi altında $F(X)$ bir grup oluşturur ve oluşan bu gruba X kümesi üzerindeki *serbest grup* denir. Kolaylık sağlaması açısından, bazı durumlarda $[W]$ yerine W gösterilimi kullanılacaktır.

X kümesi üzerinde alınan U, V ve W kelimeleri için $W' = UWV$ eşitliği varsa, W kelimesine W' kelimesinin *alt kelimesi* denir. X kümesi üzerindeki bir kelime, $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ ($x \in X, \varepsilon = \pm 1$) şeklinde bir alt kelime içermiyorsa bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir. Ayrıca, $n \geq 0, x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ için,

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$$

kelimesi indirgenmiş ve $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye *devirsel indirgenmiş kelime* denir.

Aşağıdaki teorem, bir sonraki alt bölümde vereceğimiz grup sunuşlarının oluşturulması açısından önemlidir.

1.1.1 Teorem (Normal Form Teoremi) [24]: *Her denklik sınıfı içinde en fazla bir tane indirgenmiş kelime vardır.*

1.2 Grup Sunuşları

X bir küme ve bu küme üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme R olsun. Bu durumda

$$\wp = \langle X ; R \rangle \quad (1.2)$$

ikilisine *grup sunuşu* denir. Burada X kümesine *üreteç sembollerinin kümesi* ve R ye de bağıntı kümesi denir. Özel olarak, X ve R nin her ikisi de sonlu ise \wp sonlu bir sunuş olarak anılır.

X kümesindeki kelimeler üzerinde, yukarıdaki **(1)** ve **(1)**⁻¹ işlemlerine ek olarak aşağıda verilen **(2)** ve **(2)**⁻¹ işlemlerinin eklenmesiyle, \wp sunuşun bir grup temsil ettiği garanti altına alınmış olur. Bunun için X kümesi üzerindeki bir kelime W olsun.

(2) W kelimesi S^ε ($S \in R, \varepsilon = \pm 1$) şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelimeyi sileriz.

(2)⁻¹ W kelimesi içinde herhangi iki harf arasına S^ε ($S \in R, \varepsilon = \pm 1$) alt kelimesini ekleriz.

X kümesi üzerinde iki kelime W_1 ve W_2 olsun. Eğer W_1 kelimesinden W_2 kelimesi **(1)** ^{± 1} ve **(2)** ^{± 1} işlemlerinin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, W_1 ve W_2 kelimelerine \wp sunuşuna bağlı olarak *denk kelimeler* denir ve $W_1 \approx_\wp W_2$ ile gösterilir. Buradaki \approx_\wp bağıntısı X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Genellikle W kelimesini içeren denklik sınıfı $[W]_\wp$ ile gösterilir. Bu denklik sınıfları üzerinde çarpma işlemi

$$[W_1]_{\wp} [W_2]_{\wp} = [W_1 W_2]_{\wp}$$

olarak tanımlanır. Bu çarpma işlemi altında tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup oluşturur ve bu grup $G(\wp)$ ile gösterilir. $G(\wp)$ grubunun birim elemanı $[1]_{\wp}$ dir. Kolaylık sağlaması açısından, bazı durumlarda, $[W]_{\wp}$ yerine \overline{W} gösterilimi kullanılacaktır.

Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu \wp ile sunuluyor denir. Ayrıca N ile normal kapanışını gösterirsek, aşağıdaki teorem elde edilir.

1.2.1 Teorem ([24], [45]):

$$G(\wp) \cong F(X) / N.$$

1.2.1 Tietze Dönüşümleri

$\wp = \langle X ; R \rangle$ bir grup sunuşu olmak üzere, bu sunuş üzerinde aşağıda verilen maddeler Tietze dönüşümlerini [57] oluşturur.

(T1) X kümesi üzerindeki kelimelerin sonlu bir kümesi S olsun. Eğer S kümesi üzerindeki her eleman, R kümesi üzerindeki elemanlardan elde edilebiliyorsa \wp sunuşu

$$\wp = \langle X ; R, S \rangle$$

ile değiştirilir.

(T2) (T1) dönüşümünün tersidir.

(T3) X kümesine ait elemanlardan farklı olan elemanların sonlu bir kümesi T olsun. X kümesi üzerinde bir kelime U_t ($t \in T$) olmak üzere, \wp sunuşu

$$\langle X, T ; R, t^{-1}U_t (t \in T) \rangle$$

şeklindeki bir sunuşa dönüştürülebilir.

(T4) (T3) dönüşümünün tersidir.

Aşağıda verilen teoremin ispatı Magnus-Karras-Solitar tarafından [57] de yapılmıştır.

1.2.2 Teorem (Tietze Teoremi): \wp_1 ve \wp_2 sunuşlarının aynı gruba ait olabilmeleri için gerek ve yeter koşul bunlardan birine sonlu sayıda (T1), (T2), (T3) ve (T4) dönüşümlerinin uygulanmasıyla diğerinin elde edilmesidir.

1.2.2 Grup Sunuşları Üzerinde Tanımlanan Resimler

Cebirsel yapılar (özellikle grup ve monoid) için verilen sunuşlar üzerindeki *resim* kavramı, ilk olarak S. J. Pride tarafından 90 lı yılların başlarında bir metot olarak geliştirilmiş ([9], [15], [62], [63], [64]) ve bir çok matematikçi, örneğin A. S. Çevik [28], [29], [30], [31] ve J. Wang [74], literatürde yer alan çalışmalar yapmışlardır.

$\wp = \langle X ; R \rangle$ bir grup sunuşu olsun. \wp sunuşu üzerinde tanımlanacak bir \mathbb{P} resmi (*picture*) aslında aşağıdaki koşulları sağlayan geometrik bir şekildir.

(1) D^2 , ∂D^2 sınırı üzerinde O başlangıç noktası olan bir *disk* (*disc*) olsun.

(2) D^2 diskinin iç kısmında birbirinden farklı diskler $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ olmak üzere, her Δ_i diski $\partial \Delta_i$ sınırında O_i biçiminde bir başlangıç noktasına sahiptir.

(3) $D^2 - \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ nin kapanışında bulunan sonlu sayıda *yaylar* (*arc*)

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere, bu yaylar $\partial D^2 \cup \partial \Delta_1 \cup \partial \Delta_2 \cup \dots \cup \partial \Delta_n$ ile kesişen basit kapalı bir eğri yada $\partial D^2 \cup \partial \Delta_1 \cup \partial \Delta_2 \cup \dots \cup \partial \Delta_n$ birleşiminin iki başlangıç noktasını birinden başlayıp diğerine birleştiren kapalı olmayan basit bir eğridir. Her yay kendisini kesen bir ok ile gösterilen bir yöne (normal orientation) sahiptir. Ayrıca her yay $X \cup X^{-1}$ kümesinin bir elemanı ile etiketlenir ve buna bu ilgili “yay”ın *etiketi* (*label*) denir.

(4) $\partial \Delta_i$ etrafında O_i başlangıç noktasından başlayarak saat yönünde bir defa dönülüp, karşılaşılan yayların etiketleri okunursa, $R \cup R^{-1}$ kümesine ait olan bir kelime elde edilir. Bu kelimeye $\partial \Delta_i$ nin etiketi denir. Bir yay x ile etiketlendiği

zaman, normal orientasyon yönünde işaretlenirse bu etiket x olarak, eğer yay ters orientasyon yönünde işaretlenirse x^{-1} olarak okunur. R kümesinin bir alt kümesi S olmak üzere, $S \cup S^{-1}$ kümesinin bir elemanı ile temsil edilen diske bir S -disk denir.

Bir \mathbb{P} resminin disklerinden söz edildiği zaman, dış cephedeki D^2 diskini değil $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ disklerini anlatırız. \mathbb{P} resminin içinde, etrafını sardığı disk yada yay olmayan kapalı bir alana *kapalı çember* denir.

Bir \mathbb{P} resminin dışındaki D^2 diskinin ∂D^2 sınırını $\partial \mathbb{P}$ olarak tanımlarız. $\partial \mathbb{P}$ sınırı etrafında O başlangıç noktasından başlayarak saat yönünde bir defa dönülmesiyle okunan kelimeye \mathbb{P} üzerindeki *etiket* denir ve $W(\mathbb{P})$ ile gösterilir. Eğer $\partial \mathbb{P}$ sınırına ulaşan hiçbir yay yoksa, \mathbb{P} resmine *küresel resim* denir.

$D^2 - \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ nin kapanışında bulunan ve \mathbb{P} resmi içindeki yayların sonlu tanesinin kesişimi olan yola bir *transfer yol* denir ve γ ile gösterilir. Bir transfer yolun başlangıç noktasından bitiş noktasına hareket edildiğinde, karşılaşılan yayların üzerindeki etiketlerin okunmasıyla X kümesi üzerinde $W(\gamma)$ kelimesi elde edilir. \mathbb{P} resmi içinde basit kapalı bir transfer yol γ olsun. \mathbb{P} resminin γ ile çevrelenen kısmına \mathbb{P} resminin *alt resmi* denir. Eğer γ yaylar ile kesişmiyorsa, \mathbb{P} resminin γ ile çevrelenen kısmına \mathbb{P} resminin *küresel alt resmi* denir.

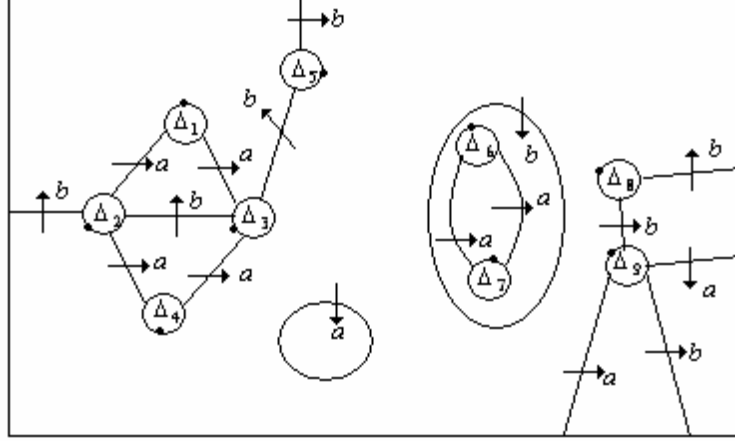
Aşağıdaki şartları sağlayan basit transfer yolların $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ gibi bir dizisine \mathbb{P} resmi için bir *sprey* denir.

(1) $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, γ_i transfer yolu O noktasında başlar ve Δ_i diskinin O_i başlangıç noktasında biter.

(2) $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, γ_i ve γ_j transfer yolları sadece O başlangıç noktasında kesişir.

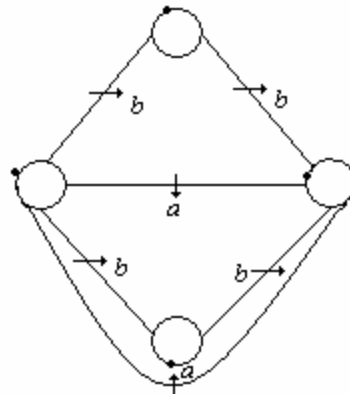
(3) \mathbb{P} resmi içinde O noktası etrafında saat yönünde gidildiğinde sıra ile $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ transfer yolları ile karşılaşılır.

1.2.3 Örnek: $\wp = \langle a, b ; a^2, b^2, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ olsun. Bu durumda, Şekil 1.1 ile verilen resim \wp sunuşu üzerinde küresel olmayan bir resimdir. Bu resim içinde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_9$ şeklinde



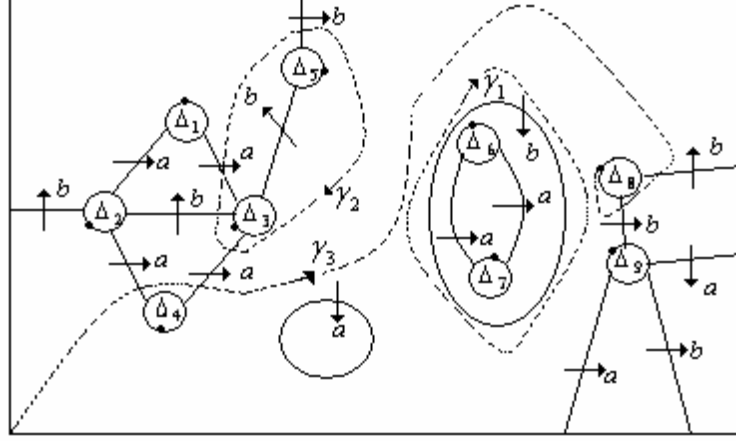
Şekil 1.1

toplam 9 tane disk ve bu disklerin $\partial\Delta_i$ sınırlarının üzerinde birer O_i başlangıç noktaları vardır. Δ_4 diskinin etiketi a^2 , Δ_5 diskinin b^2 ve Δ_2 diskinin etiketi ise $(aba^{-1}b^{-1})^{-1}$ biçimindedir. Şekil 1.1 de, a ile etiketli kapalı yay, kapalı bir çember iken b ile etiketli kapalı yay kapalı bir çember değildir. Ayrıca \mathbb{P} resminin etiketi $W(\mathbb{P}) = bbb^{-1}ab^{-1}a^{-1}$ dir. Bununla beraber \wp sunuşu üzerindeki bir küresel resim Şekil 1.2 deki gibi elde edilir.



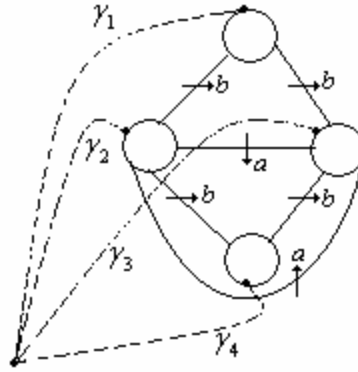
Şekil 1.2

Ayrıca Şekil 1.3 ile verilen resim içinde γ_1, γ_2 basit kapalı transfer yolu, γ_3 de kapalı olmayan transfer yolu gösterir.



Şekil 1.3

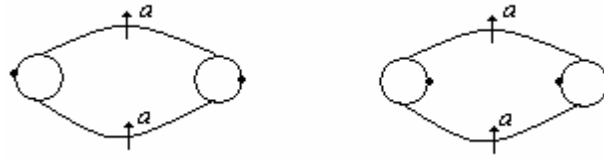
Şekil 1.3 ile verilen resim içinde, γ_1 ile ayrılan resim küresel alt resim ve γ_2 ile ayrılan ise küresel olmayan bir alt resimdir. Ayrıca $W(\gamma_1) = 1$, $W(\gamma_2) = a^{-1}bab$ ve $W(\gamma_3) = a^2b^{-2}$ dir.



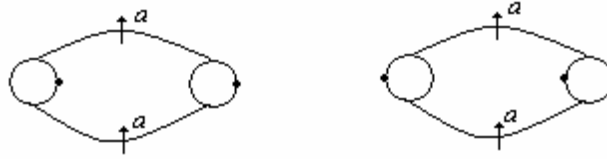
Şekil 1.4

Şekil 1.4 ile verilen yukarıdaki resimde, $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ spreyi için, $W(\gamma_1) = 1$, $W(\gamma_2) = 1$, $W(\gamma_3) = aba^{-1}$ ve $W(\gamma_4) = a$ dir. •

Herhangi bir \mathbb{P} resmi içinde, başlangıç noktaları aynı bölge içinde bulunan ve iki diskten oluşan alt küresel resme *silinebilir çift* denir. Örneğin,



silenebilir çift iken,

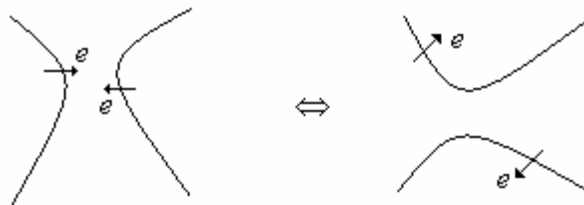


silenebilir çift değildir.

1.2.3 Küresel Resimler Üzerinde İşlemler

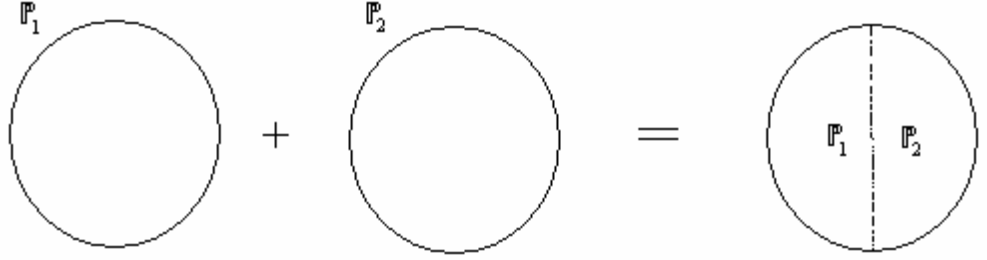
Küresel resimler üzerinde bazı temel işlemler aşağıdaki tanımlanır.

- (1) Kapalı çemberler silinir.
- (1)⁻¹ Kapalı çemberler eklenir.
- (2) Silenebilir çiftler yok edilir.
- (2)⁻¹ Silenebilir çiftler eklenir.
- (3) Köprü operasyonu:



İki küresel resimden biri diğerinden sonlu sayıda (1), (1)⁻¹, (2), (2)⁻¹ ve (3) işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, bu iki küresel resme *denk küresel resimler* denir.

\wp sunuşu üzerinde iki küresel resim \mathbb{P}_1 ve \mathbb{P}_2 olsun. Buradan \mathbb{P}_1 küresel resminin *ters görüntüsünü* $-\mathbb{P}_1$ ile gösterilir. Ayrıca \mathbb{P}_1 küresel resminin yanına \mathbb{P}_2 küresel resminin konulmasıyla elde edilen resim $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$ dir. Bu durum Şekil 1.5 ile gösterilmiştir.



Şekil 1.5

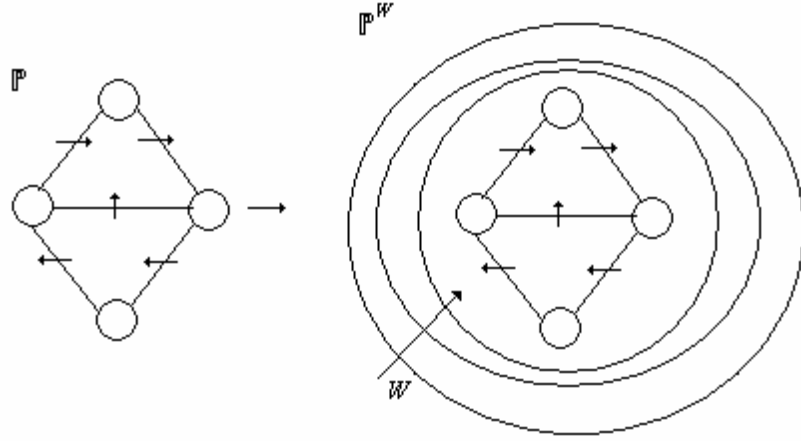
Genellikle $\mathbb{P}_1 + (-\mathbb{P}_2)$ yerine $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$ yazılır.

\wp sunuşu üzerinde herhangi bir küresel resim \mathbb{P} olmak üzere, \mathbb{P} küresel resmini içeren denklik sınıfı $\langle \mathbb{P} \rangle$ ile gösterilir. Böylece \wp sunuşu üzerinde küresel resimlerin tüm denklik sınıflarının kümesi

$$\langle \mathbb{P}_1 \rangle + \langle \mathbb{P}_2 \rangle = \langle \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 \rangle$$

işlemi altında bir grup oluşturur.

Ayrıca X kümesi üzerinde bir kelime W ve \wp sunuşu üzerinde bir küresel resim \mathbb{P} olmak üzere, \mathbb{P} küresel resminin etrafının, etiketi W olan yaylarla çevrilmesiyle \wp sunuşu üzerinde yeni bir küresel resim oluşur. Bu küresel resim \mathbb{P}^W ile gösterilir. Bu durum Şekil 1.6 da gösterildiği gibidir.



Şekil 1.6

Küresel resimlerin denklik sınıfları üzerinde

$$\overline{W} \cdot \langle \mathbb{P} \rangle = \langle \mathbb{P}^W \rangle \quad (\overline{W} \in G(\wp))$$

ile verilen bir $G(\wp)$ -hareketi (etkisi) vardır. Buradan $\mathbb{Z}G(\wp)$ şeklinde bir sol modül elde edilir. Bu modüle \wp sunuşunun *ikinci homotopi modülü* denir ve $\pi_2(\wp)$ ile gösterilir.

İkinci homotopi modülleri, resimlerin kullanım amacını ortaya çıkarması açısından önemlidir. Öyle ki, $\pi_2(\wp)$ den $\bigoplus_{S \in R} \mathbb{Z}G(\wp)e_S$ (burada $\bigoplus_{S \in R} \mathbb{Z}G(\wp)e_S$, $\{e_S : S \in R\}$ tabanlı serbest $\mathbb{Z}G(\wp)$ -modül olarak alınır) içine aşağıdaki gibi tanımlanan bir μ gömme dönüşümü vardır [15], [17], [62]. Dolayısıyla, $\langle \mathbb{P} \rangle \in \pi_2(\wp)$ ve $S_i \in R$ ($\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere, \mathbb{P} küresel resmi sırasıyla $S_1^{\varepsilon_1}, S_2^{\varepsilon_2}, \dots, S_n^{\varepsilon_n}$ etiketli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ disklerine sahip olsun. Önceden tanımladığımız gibi, $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ bir sprey ve $W(\gamma_i)$ kelimesi $G(\wp)$ grubunun bir elemanını gösteren γ_i nin etiketi olmak üzere,

$$\mu(\langle \mathbb{P} \rangle) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \overline{W(\gamma_i)} e_{S_i}$$

biçiminde gömme dönüşümü tanımlıdır. Bu dönüşüm özel olarak $\mu(\langle \mathbb{P} \rangle)$ yerine $\mu(\mathbb{P})$ ile gösterilecektir.

1.2.3 Örnek (Devam): Şekil 1.4 de verilen küresel resim için,

$$\mu(\mathbb{P}) = (-1 + \bar{a})e_{b^2} - (1 + \overline{aba^{-1}})e_{aba^{-1}b^{-1}}$$

olarak bulunur. •

\wp sunuşu üzerinde küresel resimlerin bir kümesini \mathbf{Z} olarak alalım. Bu durumda, [62] ye göre, küresel resimler üzerindeki işlemlere aşağıdaki gibi iki yeni işlem daha eklenebilir:

(4) $\mathbf{Z} \cup -\mathbf{Z}$ kümesinin elemanlarının bir kopyası olan küresel alt resimler silinir.

(4)⁻¹ $\mathbf{Z} \cup -\mathbf{Z}$ kümesinin elemanlarının bir kopyası olan küresel alt resimler eklenir.

İki küresel resimden biri diğerinden sonlu sayıda (1), (1)⁻¹, (2), (2)⁻¹, (3), (4) ve (4)⁻¹ işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, bu iki küresel resme \mathbf{Z} ye göre denk küresel resimler denir. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

1.2.4 Teorem [9], [62]: $\pi_2(\wp)$ modülünün $\langle \mathbb{P} \rangle$ ($\mathbb{P} \in \mathbf{Z}$) elemanlarıyla üretilmesi için gerek ve yeter koşul her küresel resmin \mathbf{Z} ye göre boş resme denk olmasıdır.

1.2.4 Teoremin bir sonucu olarak; $\langle \mathbb{P} \rangle$ ($\mathbb{P} \in \mathbf{Z}$) kümesi $\pi_2(\wp)$ yi üretiyorsa, \mathbf{Z} nin de $\pi_2(\wp)$ yi ürettiğini (\mathbf{Z} üreteç resimlerin kümesi) söyleyebiliriz.

1.2.4 Gruplar için İkinci Fox İdealleri

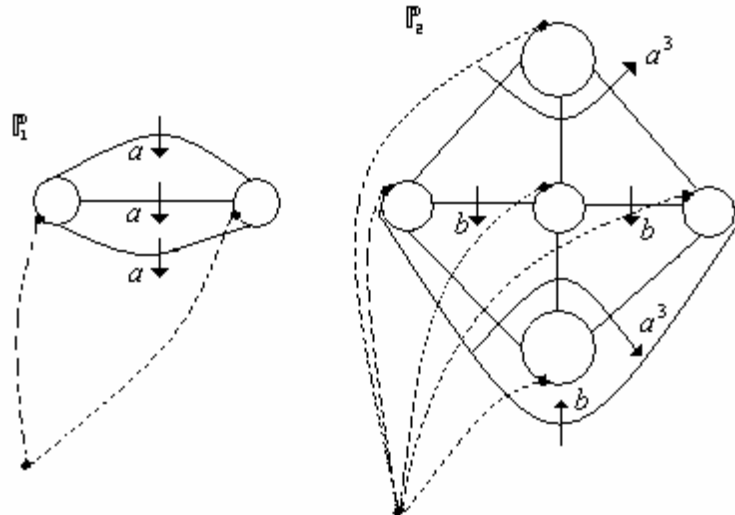
$\wp = \langle X : R \rangle$ sunuşu üzerinde tanımlanan bir küresel resim \mathbb{P} olmak üzere, $\lambda_{p,S}$ ($S \in R$) sembolü, bir önceki alt bölümde tanımladığımız gömme dönüşümü $\mu(\mathbb{P})$ de, e_S nin katsayısı olsun. Ayrıca, $I_2(\wp)$ ($\mathbb{Z}G(\wp)$ -modülünde)

$$\{\lambda_{p,S} : \mathbb{P} \text{ bir küresel resim ve } S \in R\}$$

kümesi ile üretilen çift taraflı ideal olsun. Bu ideale \wp sunuşunun *ikinci Fox ideali* denir. Aslında ikinci Fox idealleri grup sunuşlarının minimalliğini göstermede önemli bir yer tutmaktadır. Bu konuyla ilgili daha detaylı bilgilere [53] ve [54] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

Not: \mathbf{Z} üreteç resimlerinin kümesi olmak üzere, $I_2(\wp)$ ikinci Fox ideali $\{\lambda_{p,S} : \mathbb{P} \in \mathbf{Z}, S \in R\}$ kümesi tarafından üretilir.

1.2.5 Örnek: $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$ grubunun sunuşu $\wp = \langle a, b : a^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ biçiminde olsun. Bu durumda $\pi_2(\wp)$ kümesi aşağıda verilen \mathbb{P}_1 ve \mathbb{P}_2 resimleri ile üretilir [9], [11].



Yukarıda verilen \mathbb{P}_1 ve \mathbb{P}_2 resimleri için, $\mu(\mathbb{P}_1) = (1 - \bar{a})e_{a^3}$ ve $\mu(\mathbb{P}_2) = (-1 + \bar{b})e_{a^3} + (1 + \overline{bab^{-1}} + \overline{ba^2b^{-1}})e_{aba^{-1}b^{-1}}$ dir. O halde $I_2(\wp)$ kümesi $\{-1 + \bar{b}, 1 + \overline{bab^{-1}} + \overline{ba^2b^{-1}}, 1 - \bar{a}\}$ ile üretilir. Burada $\overline{bab^{-1}} = \bar{a}$ ve $\overline{ba^2b^{-1}} = \bar{a}^2$ dir. ●

1.2.5 Aspherical ve Cockcroft Grup Sunuşları

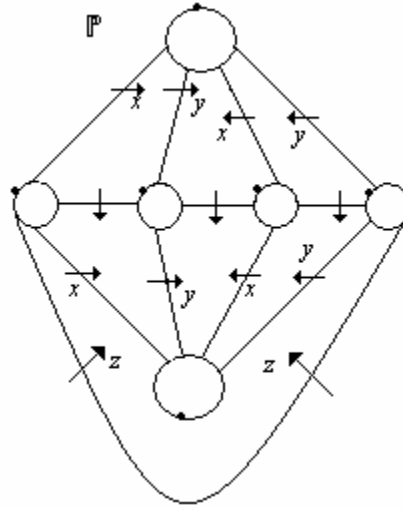
1.2.6 Tanım: \wp sunuşu (1.2) ile verildiği gibi olsun. $\pi_2(\wp) = 0$ ise \wp sunuşuna *aspherical* denir. Eğer bir grup *aspherical* sunuşla tanımlanabiliyorsa bu gruba *aspherical* denir.

Bütün serbest gruplar ve bir bağıntılı torsion-free gruplar, bilinen *aspherical* gruplara örnek olarak verilebilir [55]. Bu gruplarla ilgili diğer örnekler [16], [22] ve [62] gibi kaynaklardan bulunabilir.

1.2.7 Tanım: \wp sunuşu (1.2) ile verildiği gibi olmak üzere, $\pi_2(\wp)$ kümesi sadece iki disk içeren resimlerin bir kümesiyle üretiliyorsa bu \wp sunuşuna *Combinatorial Aspherical (CA)* denir. Eğer bir grup *combinatorial aspherical* bir sunuşla tanımlanabiliyorsa bu gruba *combinatorial aspherical* denir.

Sonlu bir bağıntılı gruplar (CA) olup ancak *aspherical* değildir [55]. (CA) sunuşlarla ilgili diğer örnekler [16], [22], [62] gibi kaynaklardan bulunabilir.

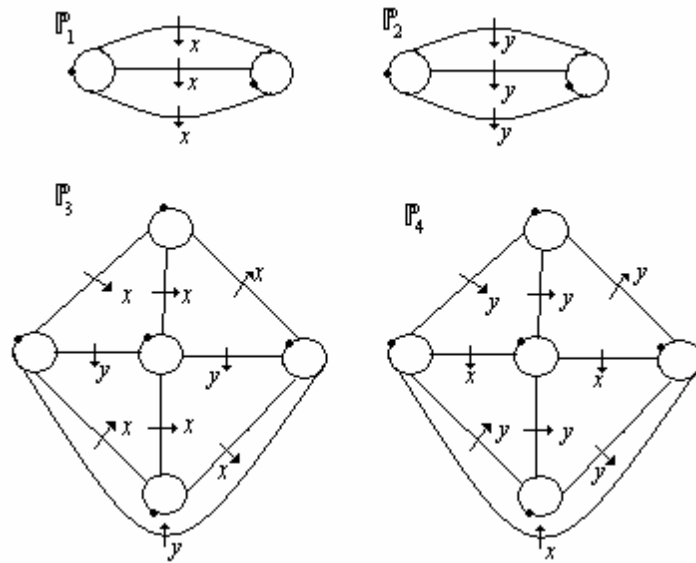
1.2.8 Örnek: $\wp = \langle a: a^n \rangle$ devirli grubun sunuşu olmak üzere, $\pi_2(\wp)$ Şekil 1.7 de gösterildiği gibi tek resimle üretilir .



Şekil 1.8

Bu resime göre, $\exp_{[x,y]}(\mathbb{P}) = \exp_{[x,z]}(\mathbb{P}) = \exp_{[y,z]}(\mathbb{P}) = 1 - 1 = 0$ olduğundan, \wp sunuşu *Cockcroft* dur. •

1.2.13 Örnek: $\wp = \langle x, y, : x^3, y^3, [x, y] \rangle$ olsun. Buna göre $\pi_2(\wp)$, Şekil 1.9 da gösterildiği gibi, $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ ve \mathbb{P}_4 küresel resimleri ile üretilir [9].



Şekil 1.9

Bu resimlere göre, $\exp_{x^3}(\mathbb{P}_1) = \exp_{y^3}(\mathbb{P}_2) = \exp_{x^3}(\mathbb{P}_3) = \exp_{y^3}(\mathbb{P}_4) = 1 - 1 = 0$,
 $\exp_{[x,y]}(\mathbb{P}_3) = 3$ ve $\exp_{[x,y]}(\mathbb{P}_4) = -3$ olduğundan, \wp sunuşu 3 – Cockcroft dur. •

1.2.6 Grup Sunuşlarının Etkililiği

G grubu $\wp = \langle X : R \rangle$ sonlu sunuşuna sahip olsun. Bu durumda, \wp nin *Euler karakteristiği*

$$\chi(\wp) = 1 - |X| + |R|$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $rk_z(\cdot)$ serbest burulma kısmının \mathbb{Z} -boyutunu ve $d(\cdot)$ minimal üreteç sayısını göstermek üzere,

$$\delta(G) = 1 - rk_z(H_1(G)) + d(H_2(G))$$

biçiminde bu G grubu için bir alt sınır tanımlanır. Euler karakteristik ile bu sınır arasındaki $\chi(\wp) \geq \delta(G)$ şeklindeki ilişkiyi Epstein [34] de göstermiştir.

Ayrıca

$$\chi(G) = \min\{\chi(\wp) : \wp, G \text{ nin sonlu bir sunuşu}\}$$

kümesini göz önüne alarak aşağıdaki tanımı elde ederiz.

1.2.14 Tanım : G bir grup olsun.

i) G grubunun \wp_0 sunuşu, G nin diğer tüm \wp sunuşları için

$$\chi(\wp_0) \leq \chi(\wp)$$

özelliğini sağlıyorsa, bu \wp_0 sunuşuna *minimal* denir.

ii) G grubunun bir \wp_0 sunuşu,

$$\chi(\wp_0) = \delta(G)$$

eşitliğini sağlıyorsa ise, bu \wp_0 sunuşuna *etkilidir* denir.

iii) Bir G grubu için,

$$\chi(G) = \delta(G)$$

oluyorsa, bu G grubuna *etkilidir* denir.

1.2.15 Önerme [24]:

i) $\chi(G) \leq 0$ ise G grubu sonsuzdur.

ii) G sonlu devirli bir grup ise $\chi(G) = 1$ dir.

Sonlu üretilen değişmeli gruplar [34], kapalı 3-manifoldların temel grupları [34] ve sonlu metacyclic gruplar [14], [71] etkili grup örnekleridir. Baik ve Pride sonsuz metacyclic grupların etkili olamayabileceğini göstermiştir [9], [11]. Ayrıca, [40] de, Harlender sonlu sunuşlu grupların etkili grupların içine gömülebileceğini ispatlamıştır. 2000 li yıllarda standart wreath çarpımlar üzerinde etkililik kavramı [8] ve [29] da gösterilmiştir. Etkili gruplar için daha farklı örnekler [10], [20], [21], [38], [39], [46], [47], [49], [52], [59], [66], [70], [72], [73] ve [75] gibi kaynaklardan bulunabilir.

Her ne kadar etkililik önemli bir konu ise, etkili olmama bu dalda çalışan bir çok matematikçinin üzerinde çalıştığı önemli bir konu olup, verilen bir grubun etkisiz olduğunu göstermek orijinal bir sonuç oluşturur. Çünkü bir grubun birden fazla sunuşu olabilip, bu sunuşlardan birinin etkisiz olması o grubun etkisiz olmasını gerektirmez. Etkisiz olduğu iddia edilen bir sunuş, Tietze dönüşümleri veya başka bir metot ile etkili hale getirilebilir. Bu yüzden bir grubun etkisiz olduğunu göstermek için, etkisiz olan sunuşun minimal olduğunu göstermek gerekir. Kısaca, \wp_0 sunuşunu, G grubunun, minimal ancak etkisiz bir sunuşu olarak alalım . Bu durumda G nin her bir \wp' sunuşu için

$$\chi(\wp') \geq \chi(\wp_0) > \delta(M)$$

eşitsizliği daima sağlanır. Böylece G nin etkili bir sunuşa sahip olamayacağı bulunur. Bu ise bize G nin etkisiz bir grup olduğunu söyler. Bu konu daha detaylı olarak (monoidler üzerinde) 5. Bölümde incelenecektir.

Aşağıdaki teorem ilk olarak Eipstein [34] (daha sonra Kilgour ve Pride [50]) tarafından ispatlanmış olup, etkililik ve n -Cockcroft kavramları arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır.

1.2.16 Teorem: \wp sunuşu (1.2) ile verildiği gibi olsun. Bu \wp sunuşunun etkili olabilmesi için, gerek ve yeter koşul, alınacak herhangi bir p asal sayısı için, \wp nin p -Cockcroft olmasıdır.

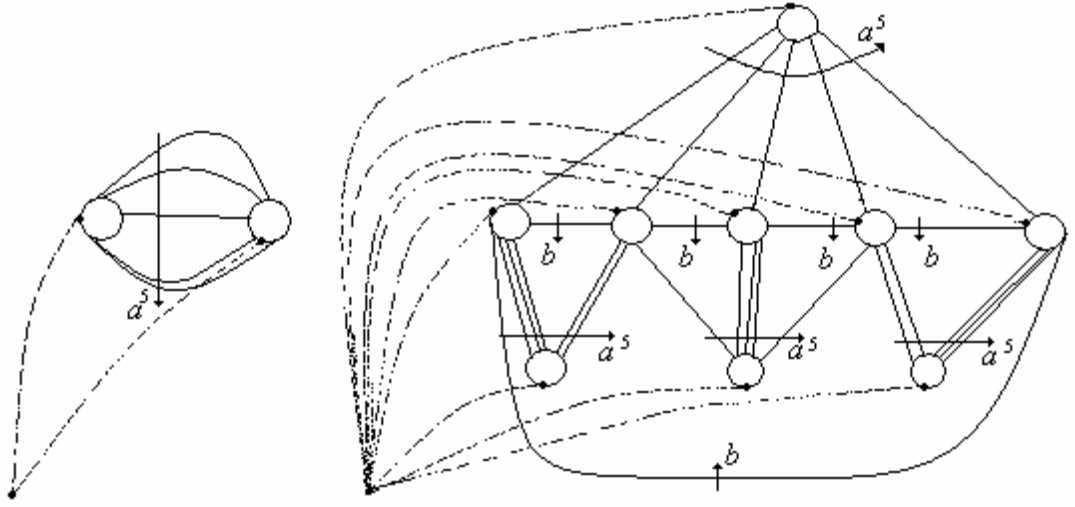
Aşağıdaki teorem ise, Lustig tarafından ispatlanmış olup [53], bir sunuşun minimalliğini göstermede önemli bir metot olarak kullanılır.

1.2.17 Teorem: \wp bir grup sunuşu olsun. ϕ dönüşümü, $\phi(1)=1$ olacak şekilde, $\mathbb{Z}G$ den birimli ve değişmeli $k \times k$ ($k \geq 1$) tipindeki matrislerin bir A halkası üzerine tanımlanmış bir halka homomorfizması olmak üzere, $\phi(I_2(\wp))=0$ ise \wp sunuşuna minimaldir denir.

1.2.18 Örnek [9]: G grubunun sunuşu

$$\wp = \langle a, b : a^5, aba^{-3}b^{-1} \rangle$$

olsun. Bu durumda $\pi_2(\wp)$ modülü Şekil 1.10 ile gösterilen küresel resimler ile üretilir.



Şekil 1.10

Verilen bu φ sunuşunun, herhangi bir p asal sayısı için, p -Cockcroft olmadığı kolayca görülür. Böylece, 1.2.16 Teoreminden, φ nin etkili olmadığı açıktır. Buna göre φ nin minimal olduğunu göstermeye çalışalım. Şekil 1.10 dan hareketle, $I_2(\varphi)$ nin üreteç kümesi

$$\{1 - \bar{a}, 1 + \bar{a} + \bar{a}^{-2} + \bar{a}^{-3} + \bar{a}^{-4}, \overline{3b-1}\}$$

biçiminde tanımlıdır. Şimdi $\langle x \rangle$ sonsuz bir devirli grup olmak üzere,

$$\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}\langle x \rangle, \quad a \rightarrow 1, \quad b \rightarrow x$$

halka homomorfizmasını ele alalım. Ayrıca, tamsayı sabitlerini 5 moduna göre taşıyan ve x elemanını da 2 nin denklik sınıflarına götüren

$$\mathbb{Z}\langle x \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_5$$

dönüşümünü ele alalım. Bu durumda

$$\mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}\langle x \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_5$$

bileşke homomorfizması, $I_2(\wp)$ nin tüm elemanlarını sıfıra taşır. Böylece, 1.2.17 Teoremden, \wp nin minimal olduğu görülür. •

1.3 Monoid Sunuşları

Bir monoid sunuşu, \mathbf{y} üreteç kümesi \mathbf{s} de bağıntı kümesi olmak üzere,

$$\overline{\wp} = [\mathbf{y} : \mathbf{s}] \quad (1.3)$$

biçiminde gösterilir. Ayrıca, S_+ ve S_- sembolleri \mathbf{y} kümesi üzerinde birbirinden farklı pozitif sembolleri ifade etmek üzere, her bir $S \in \mathbf{s}$ bağıntısı (S_+, S_-) sıralı çifti olarak tanımlanır. Genellikle $S : S_+ = S_-$ biçiminde yazılır.

Şimdi bir $\overline{\wp}$ sunuşuyla ilişkilendirilmiş monoidi tanımlamak için (graplarda olduğu gibi), \mathbf{y} kümesinden elde edilen pozitif kelimeler üzerinde aşağıdaki elementer işlem verilebilir:

(*) W kelimesi \mathbf{y} kümesinden elde edilen pozitif bir kelime olsun. Eğer W kelimesi S_ε ($\varepsilon = \pm 1$, $S : S_+ = S_-$) şeklinde alt kelime içeriyorsa, bu alt kelimenin $S_{-\varepsilon}$ alt kelimesiyle yer değiştirme işlemidir.

W_1 ve W_2 kelimeleri \mathbf{y} kümesinden elde edilen pozitif kelimeler olmak üzere, $\overline{\wp}$ sunuşuna bağlı olarak, bu iki kelimedenden biri diğerinden yukarıda verilen (*) işleminin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, W_1 ve W_2 denktir ve $W_1 \approx_{\overline{\wp}} W_2$ şeklinde gösterilir. Elde edilen $\approx_{\overline{\wp}}$ bağıntısı denklik bağıntısı olup, herhangi bir W pozitif kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[W]_{\overline{\wp}}$ ile gösterilir. Bu denklik sınıfı üzerinde çarpma işlemi

$$[W_1]_{\overline{\wp}} [W_2]_{\overline{\wp}} = [W_1 W_2]_{\overline{\wp}}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpma işlemi altında denklik sınıfları kümesi monoid oluşturur. Oluşan bu monoide $\bar{\wp}$ sunuşu ile tanımlanmış monoid denir ve $M(\bar{\wp})$ ile gösterilip, $M(\bar{\wp})$ nin birim elemanı $[1]_{\bar{\wp}}$ ile temsil edilir.

Tezin ilerleyen kısımlarında $[W]_{\bar{\wp}}$ gösterimi yerine \bar{W} kullanılacaktır.

1.3.1 Fox Türevleri

$F(\mathbf{y})$ kümesi \mathbf{y} üzerinde tanımlanan serbest monoid olsun. Sabit bir $y \in \mathbf{y}$ için,

$$\frac{\partial}{\partial y} : F(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbb{Z} F(\mathbf{y})$$

fonksiyonunu, $W \in F(\mathbf{y})$ ve $W_0, W_1, \dots, W_r \in \mathbf{y} - \{y\}$ kelimeleri için

$$W = W_0 y W_1 y \dots W_{r-1} y W_r \quad (r \geq 1) \quad (1.4)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{i=1}^r W_0 y W_1 y \dots W_{i-1}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\frac{\partial}{\partial y}$ fonksiyonunu, $r \geq 0, n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ ve

$W_0, W_1, \dots, W_r \in F(\mathbf{y})$ olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial y} (n_1 W_1 + n_2 W_2 + \dots + n_r W_r) = \sum_{i=1}^r n_i \frac{\partial W_i}{\partial y}$$

olacak biçimde

$$\frac{\partial}{\partial y} : \mathbb{Z} F(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbb{Z} F(\mathbf{y})$$

fonksiyonuna genişletebiliriz.

M sunuşu (1.3) ile verildiği gibi bir monoid olsun. Bu durumda

$$\mathbb{Z} F(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbb{Z} M$$

halka homomorfizması,

$$F(\mathbf{y}) \rightarrow M, \quad W \rightarrow \overline{W}$$

monoid homomorfizmasına genişletilebilir. Burada

$$\mathbb{Z} F(\mathbf{y}) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}} \mathbb{Z} F(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbb{Z} M$$

bileşkesi $\frac{\partial^M}{\partial \mathbf{y}}$ olarak tanımlansın. Dolayısıyla W kelimesi (1.4) de verildiği gibi olmak üzere,

$$\frac{\partial^M W}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{i=1}^r \overline{W_0 y W_1 y \cdots W_{i-1} y W_i}$$

biçimindedir.

Bunlara ek olarak

$$aug : \mathbb{Z} M \rightarrow \mathbb{Z}, \quad m \rightarrow 1$$

augmentation (arttırma) dönüşümü olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

1.3.1 Önerme: *Sabit bir $y \in \mathbf{y}$ için,*

$$aug\left(\frac{\partial^M W}{\partial \mathbf{y}}\right) = L_y(W)$$

dir.

İspat: Fox türev yardımıyla,

$$aug\left(\frac{\partial^M W}{\partial y}\right) = aug\left(\sum_{i=1}^r \overline{W_0 y W_1 y \cdots W_{i-1} y W_i}\right) = r = L_y(W)$$

elde edilir. Bu ise istenilen sonuçtur. \diamond

1.3.2 Monoid Sunuşları Üzerinde Tanımlanan Resimler

Gruplar üzerinde tanımlanan resim kavramı, daha özel bir yapı olan monoidler için tanımlanabilir. Gruplardakine benzer olarak yine bu konu ile ilgili temel çalışmalar Pride ([63], [64]) tarafından ortaya konulmuştur. Monoid resimlerinin inşası, grup resimlerinininkinden biraz daha farklı olup, bu alt bölüm bu konuya ayrılmıştır.

$\overline{\varphi} = [\mathbf{y} : \mathbf{s}]$ bir monoid sunuşu olmak üzere, $F(\mathbf{y})$ kümesi \mathbf{y} üzerinde tanımlanan serbest bir monoid olsun. Eğer

$$W = US_{\varepsilon}V \quad (U, V \in F(\mathbf{y}), S \in \mathbf{s}, \varepsilon = \pm 1)$$

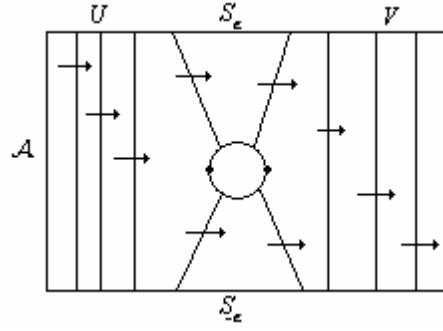
kelimesi, $F(\mathbf{y})$ kümesine ait bir kelime ise S_{ε} nun $S_{-\varepsilon}$ ile yer değiştirmesinden

$$W' = US_{-\varepsilon}V$$

kelimesi elde edilir. Bu durum Şekil 1.11 de geometrik olarak gösterilmiştir. Bu geometrik gösterim

$$\mathcal{A} = (U, S, \varepsilon, V)$$

şeklindeki sıralı dördü ile ifade edilip, özel olarak *atomik monoid resmi* adı verilir.



Şekil 1.11

Bir \mathcal{A} atomik monoid resmine ait, S ile etiketlenmiş olan disk için, $\varepsilon = 1$ (veya $\varepsilon = -1$) ise bu diske *pozitif* (veya *negatif*) *disk* denir.

Monoid resimlerinin inşasında temel yapı taşı “ Squier graflar ” dır. Bir $\Gamma (= \Gamma(\bar{\varphi}))$ Squier grafi, verilen bir $\bar{\varphi}$ sunuşundan hareketle aşağıdaki biçimde oluşturulur:

1) $F(\mathbf{y})$ kümesi \mathbf{y} üzerinde tanımlanan serbest monoid olmak üzere, Γ nın köşe elemanları $F(\mathbf{y})$ nin elemanlarından oluşur. Ayrıca $U, V \in F(\mathbf{y}), S \in \mathbf{s}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, Γ nın kenar elemanları $\mathcal{A} = (U, S, \varepsilon, V)$ sıralı dörtlülerinden oluşur.

2) Bir \mathcal{A} kenarının giriş, çıkış ve ters fonksiyonları sırasıyla

$$\iota(\mathcal{A}) = US_{\varepsilon}V, \quad \tau(\mathcal{A}) = US_{-\varepsilon}V \quad \text{ve} \quad \mathcal{A}^{-1} = (U, S, -\varepsilon, V)$$

biçimindedir.

3) Graf üzerindeki bir *yol* (*path*), $\tau(\mathcal{A}_i) = \iota(\mathcal{A}_{i+1})$ ($1 \leq i \leq n$) olmak üzere,

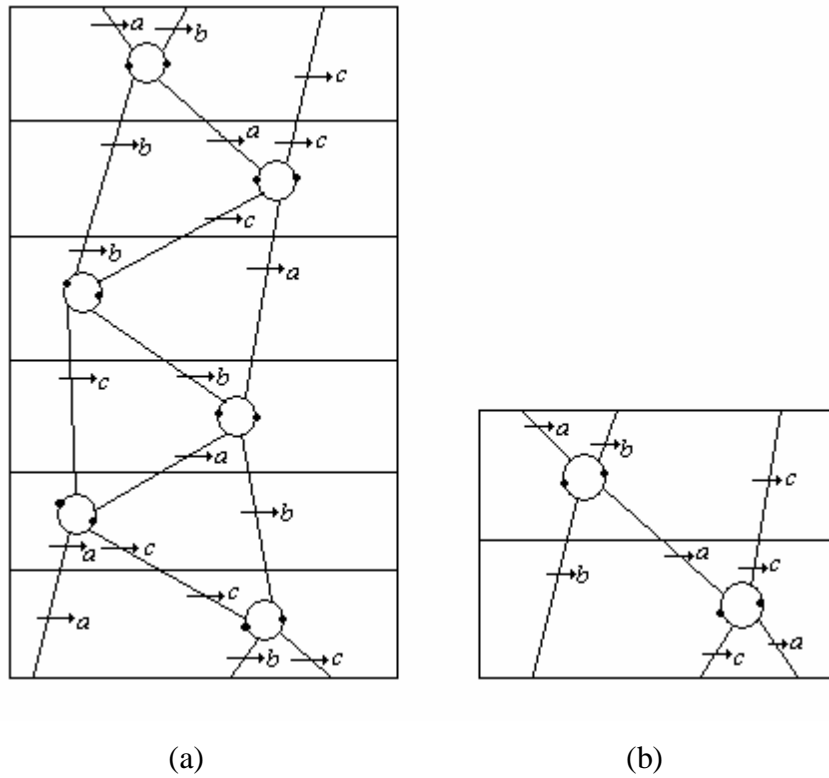
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ şeklindeki atomik monoid resimlerinin

$$\mathbb{P} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \cdots \mathcal{A}_n \tag{1.5}$$

biçiminde bir araya getirilmesinden elde edilir.

1.3.2 Tanım: 1), 2) ve 3) maddelerinden hareketle oluşturulan Squier grafa, 3) maddesi ile tanımlanan her bir yol *monoid resmi* olarak adlandırılır. Özel olarak, (1.5) deki gibi verilen bir \mathbb{P} resmi için, $\iota(\mathcal{A}_1) = \tau(\mathcal{A}_n)$ oluyor ise bu \mathbb{P} resmine *küresel monoid resmi*, olmuyor ise *küresel olmayan monoid resmi* denir.

1.3.3 Örnek: Şekil 1.12-(a) ile verilen resim küresel monoid resmi iken, Şekil 1.12-(b) ile verilen resim küresel olmayan monoid resmidir.



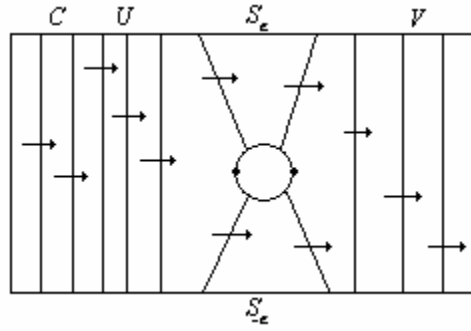
Şekil 1.12

Ayrıca bir monoid resminin alt resimleri de (alt yolları) mevcuttur. Örneğin Şekil 1.12-(b) ile verilen resim, Şekil 1.12-(a) ile verilmiş resmin bir alt resmidir. •

Γ Squier grafinin köşe elemanları oluşturan $F(\mathbf{y})$ kümesi üzerinde, aşağıda i) ve ii) de tanımlanmış olan soldan hareket vardır.

i) W kelimesi Γ grafinin bir köşe elemanı olsun. Bu durumda $C \in F(\mathbf{y})$ olmak üzere, $C.W$ hareketi CW ($F(\mathbf{y})$ deki çarpım) olacaktır.

ii) \mathcal{A} atomik monoid resmi, Şekil 1.11 de verildiği gibi, Γ grafının bir kenarı olsun. Bu durumda $C.\mathcal{A}$ hareketi (CU, S, ε, V) olacaktır ve bu durum Şekil 1.13 deki gibi gösterilir.



Şekil 1.13

Benzer biçimde Γ Squier grafının köşe elemanları oluşturan $F(\mathbf{y})$ kümesi üzerinde *sağdan hareket* tanımlanabilir.

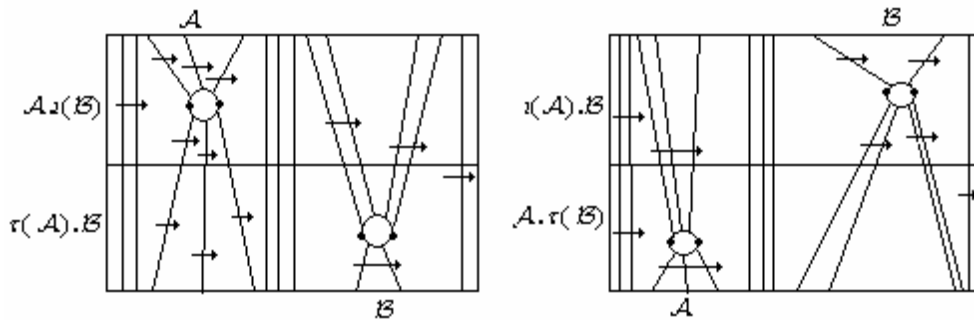
\mathcal{A} ve \mathcal{B} iki atomik monoid resmi olmak üzere, bu iki resim için aşağıdaki operasyonlar uygulanabilir:

(1) $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ tersinir çiftinin silinmesi.

(1)⁻¹ $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ tersinir çiftinin eklenmesi.

(2) $(\mathcal{A}, \iota(\mathcal{B}))$ ($\tau(\mathcal{A}), \mathcal{B}$) alt resminin $(\iota(\mathcal{A}), \mathcal{B})$ ($\mathcal{A}, \tau(\mathcal{B})$) alt resmi ile yer

değiştirmesi. Bu durum Şekil 1.14 ile gösterilmiştir.



Şekil 1.14

1.3.4 Tanım: İki küresel monoid resimden biri diğerinden sonlu sayıda **(1)**, **(1)**⁻¹ ve **(2)** işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, bu iki küresel resme *denk küresel resimler* denir.

Yollar üzerinde, yukarıda tanımlanan bu denklik bağıntısıyla beraber, Γ grafına $\overline{\varphi}$ sunuşunun *Squier Kompleksi* denir ve $D(\overline{\varphi})$ ile gösterilir [63], [64].

Küresel monoid resimlerinin kümesini **Y** olarak alalım. Yukarıda tanımlanan **(1)**, **(1)**⁻¹ ve **(2)** operasyonlarına ek olarak aşağıdaki gibi iki yeni işlem daha tanımlanır:

(3) $W \cdot \mathbb{P}^{\pm 1} \cdot V$ ($\mathbb{P} \in \mathbf{Y}$, $W, V \in F(\mathbf{y})$) formundaki alt resimlerin silinmesi.

(3)⁻¹ $W \cdot \mathbb{P}^{\pm 1} \cdot V$ ($\mathbb{P} \in \mathbf{Y}$, $W, V \in F(\mathbf{y})$) formundaki alt resimlerin eklenmesi.

1.3.5 Tanım: İki küresel monoid resminden biri diğerinden, sonlu sayıda **(1)**, **(1)**⁻¹, **(2)**, **(3)** ve **(3)**⁻¹ işlemlerinin uygulanmasıyla elde ediliyorsa, bu iki küresel resme **Y** ye göre *denk küresel resimler* denir.

Buradan hareketle aşağıdaki teoremi verebiliriz.

1.3.6 Teorem [63]: **Y** kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı altında, her bir küresel monoid resmi boş resme denk ise **Y** kümesi $D(\overline{\varphi})$ nin üreteç resimlerinin (*trivialiser*) kümesidir.

Bu konuyla ilgili daha detaylı örneklere [27], [63], [64], [65], [69] ve [74] gibi kaynaklarından ulaşılabilir.

1.3.3 Monoidler için İkinci Fox İdealleri

M bir monoid ve sunuşu (1.3) de verildiği gibi olmak üzere,

$$P^{(l)} = \bigoplus_{S \in \mathbf{s}} \mathbb{Z} M e_S \quad \text{ve} \quad P^{(r)} = \bigoplus_{S \in \mathbf{s}} f_S \mathbb{Z} M$$

sırasıyla,

$$\{e_S : S \in \mathbf{s}\} \quad \text{ve} \quad \{f_S : S \in \mathbf{s}\}$$

tabanlı serbest sol ve sağ $\mathbb{Z}M$ –modülleri olsun. Ayrıca, $U, V \in F(\mathbf{y})$, $S \in \mathbf{s}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ için, $\mathcal{A} = (U, S, \varepsilon, V)$ atomik monoid resmini göz önüne alalım. Buna göre $\bar{U}, \bar{V} \in M(\bar{\varphi}) \cong M$ olmak üzere,

$$eval^{(l)}(\mathcal{A}) = \varepsilon \bar{U} e_S \in P^{(l)} \quad \text{ve} \quad eval^{(r)}(\mathcal{A}) = \varepsilon f_S \bar{V} \in P^{(r)}$$

şeklinde, \mathcal{A} resmi için, evaluation dönüşümleri tanımlanır. Bu dönüşümleri, (1.5)

ile belirtildiği gibi bir küresel \mathbb{P} monoid resmine

$$eval^{(l)}(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^n eval^{(l)}(\mathcal{A}_i) \in P^{(l)},$$

$$eval^{(r)}(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^n eval^{(r)}(\mathcal{A}_i) \in P^{(r)}$$

şeklinde genişletebiliriz. Burada, $\lambda_{P,S}$ sembolü e_S nin $eval^{(l)}(\mathbb{P})$ deki katsayısı olsun. O halde

$$eval^{(l)}(\mathbb{P}) = \sum_{S \in \mathbf{s}} \lambda_{P,S} e_S \in P^{(l)}$$

dir. Benzer olarak, $\eta_{P,S}$ sembolü f_S nin $eval^{(r)}(\mathbb{P})$ deki katsayısı olsun. O halde

$$eval^{(r)}(\mathbb{P}) = \sum_{S \in \mathbf{s}} f_S \eta_{P,S} \in P^{(r)}$$

biçimindedir.

1.3.7 Örnek: $\bar{\wp} = [a, b, c : ab = ba, bc = cb, ca = ac]$ sunuşu ile verilen serbest değişmeli monoidi ele alalım. Burada

$$R : ab = ba, \quad S : bc = cb \quad \text{ve} \quad T : ca = ac$$

ve

$$\mathcal{A}_1 = (1, ab = ba, +1, c), \quad \mathcal{A}_2 = (b, ac = ca, -1, 1),$$

$$\mathcal{A}_3 = (1, bc = cb, +1, a), \quad \mathcal{A}_4 = (c, ba = ab, -1, 1),$$

$$\mathcal{A}_5 = (1, ca = ac, +1, b), \quad \mathcal{A}_6 = (a, cb = bc, -1, 1)$$

olmak üzere,

$$eval^{(l)}(\mathcal{A}_1) = e_R, \quad eval^{(l)}(\mathcal{A}_2) = \bar{b}e_T, \quad eval^{(l)}(\mathcal{A}_3) = e_S,$$

$$eval^{(l)}(\mathcal{A}_4) = \bar{c}e_R, \quad eval^{(l)}(\mathcal{A}_5) = e_T \quad \text{ve} \quad eval^{(l)}(\mathcal{A}_6) = \bar{a}e_S$$

dır. Böylece, $\lambda_{P,R} = 1 - \bar{c}$, $\lambda_{P,S} = 1 - \bar{a}$ ve $\lambda_{P,T} = 1 - \bar{b}$ için,

$$eval^{(l)}(\mathbb{P}) = \lambda_{P,R}e_R + \lambda_{P,S}e_S + \lambda_{P,T}e_T$$

biçimindedir. •

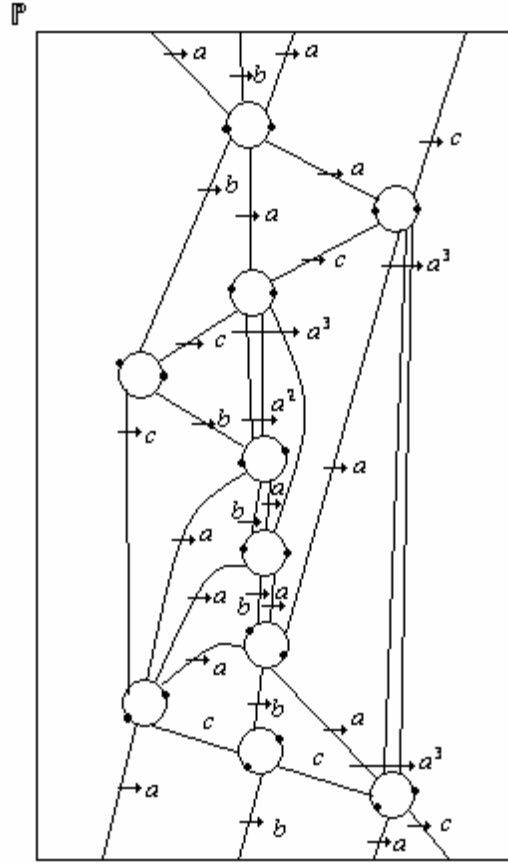
1.3.8 Tanım: $I_2^{(l)}(\bar{\wp})$ ve $I_2^{(r)}(\bar{\wp})$ idealleri, sırasıyla,

$$\{\lambda_{P,S} : \mathbb{P} \text{ küresel monoid resim ve } S \in \mathbf{s}\} \text{ ve}$$

$$\{\eta_{P,S} : \mathbb{P} \text{ küresel monoid resim ve } S \in \mathbf{s}\}$$

kümeleriyle üretilmiş, $\mathbb{Z}M$ nin çift taraflı idealleri olsun. Bu ideallere monoidler için *ikinci Fox idealleri* denir.

1.3.9 Örnek: $\overline{\wp} = [a, b, c : aba = ba^2, ac = ca^3, bc = cb]$ monoidini ele alalım. Bu durumda $D(\overline{\wp})$ nin \mathbf{Y} üreteç resimlerinin kümesi Şekil 1.15 deki gibi tek bir monoid resminden oluşur [74].



Şekil 1.15

Burada

$$R : aba = ba^2, \quad S : ac = ca^3 \text{ ve } T : bc = cb$$

için

$$\lambda_{P,R} = 1 - \overline{c(1+a+a^2)}, \quad \lambda_{P,S} = \overline{b} - 1 \text{ ve } \lambda_{P,T} = 1 - \overline{a}$$

olmak üzere,

$$eval^{(l)}(\mathbb{P}) = \lambda_{P,R}e_R + \lambda_{P,S}e_S + \lambda_{P,T}e_T$$

dir. O halde $I_2^{(l)}(\bar{\wp}) = \{1 - c(1 + a + a^2), \bar{b} - 1, 1 - \bar{a}\}$ dir. •

1.3.4 Aspherical ve Cockcroft Monoid Sunuşları

1.3.10 Tanım: $\bar{\wp}$ sunuşu (1.3) ile verildiği gibi olsun. Bu durumda $\bar{\wp}$ sunuşu üzerinde tekilden başka monoid resmi yoksa, bu $\bar{\wp}$ sunuşuna *aspherical* denir.

Bütün serbest monoidler aspherical dır. Bu konuyla ilgili farklı örnekler [23] ve [63] gibi kaynaklardan bulunabilir.

1.3.11 Tanım: $\bar{\wp}$ sunuşu (1.3) ile verildiği gibi bir monoid sunuşu olsun. Bu $\bar{\wp}$ sunuşunun \mathbf{Y} üreteç resimlerinin kümesi sadece iki diske sahip ise, $\bar{\wp}$ ye *Combinatorial Aspherical (CA)* denir. Ayrıca bir M monoidi (CA) sunuşu ile tanımlanabiliyorsa, bu monoide (CA) monoid denir.

1.3.12 Tanım:

1) $\bar{\wp}$ sunuşu (1.3) ile verildiği gibi bir monoid sunuşu olsun. $\bar{\wp}$ sunuşu üzerindeki herhangi bir \mathbb{P} monoid resmi için, $\exp_S(\mathbb{P})$ sembolü, $S \in \mathbf{s}$ olmak üzere, S nin \mathbb{P} deki *üstler toplamı* olarak tanımlanır.

2) M monoidinin sunuşu $\bar{\wp}$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olsun. Her $S \in \mathbf{s}$ ve $\bar{\wp}$ üzerindeki her küresel monoid resmi için,

$$\exp_S(\mathbb{P}) \equiv 0 \pmod{n}$$

oluyor ise, $\bar{\wp}$ ye *n-Cockcroft* denir. M monoidi *n-Cockcroft* sunuşa sahip ise o zaman M ye *n-Cockcroft* monoid denir.

1.3.9 Örnek (devam): [74] den $D(\overline{\varphi})$ nin, Şekil 1.12-(a) da gösterildiği gibi, sadece bir tek resimden oluştuğu görülür. Burada, $\exp_R(\mathbb{P}) = 1 - 3 = -2$, $\exp_S(\mathbb{P}) = 2 - 2 = 0$ ve $\exp_T(\mathbb{P}) = 1 - 1 = 0$ olduğundan, φ sunuşu 2-Cockcrofttur. •

1.3.5 Monoid Sunuşları Üzerinde Etkililik

M bir monoid ve $\overline{\varphi} = [\mathbf{y} : \mathbf{s}]$ biçiminde bir sonlu sunuşa sahip olsun. Bu durumda $\overline{\varphi}$ nin *Euler karakteristiği*

$$\chi(\overline{\varphi}) = 1 - |\mathbf{y}| + |\mathbf{s}|$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $rk_Z(\cdot)$ serbest burulma kısmının \mathbb{Z} -boyutunu ve $d(\cdot)$ minimal üreteç sayısını vermek üzere,

$$\delta(M) = 1 - rk_Z(H_1(M)) + d(H_2(M))$$

biçiminde bir alt sınır tanımlıdır (Pride, basılmamış çalışma). Buna ek olarak

$$\chi(\overline{\varphi}) \geq \delta(M)$$

her zaman sağlanır. Gruplarda olduğu gibi

$$\chi(M) = \min\{ \chi(\overline{\varphi}) : \overline{\varphi}, M \text{ nin sonlu bir sunuşu} \}$$

olarak tanımlansın.

Tüm bunlardan sonra bir monoidin etkiliği ile ilgili aşağıdaki tanımları verebiliriz.

1.3.13 Tanım: M bir monoid olsun.

i) M monoidinin $\overline{\wp_0}$ sunuşu, M nin diğer tüm sunuşları için,

$$\chi(\overline{\wp_0}) \leq \chi(\overline{\wp})$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu $\overline{\wp_0}$ sunuşuna *minimal* denir.

ii) M monoidinin bir $\overline{\wp_0}$ sunuşu için,

$$\chi(\overline{\wp_0}) = \delta(M)$$

eşitliğini sağlanıyor ise, bu $\overline{\wp_0}$ sunuşuna *etkilidir* denir.

iii) Bir M monoidi için,

$$\chi(M) = \delta(M)$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu M monoidine *etkilidir* denir.

Aşağıdaki teorem Pride tarafından (basılmamış çalışma) ispatlanmış olup, etkililik ve n -Cockcroft arasındaki ilişkiyi vermektedir.

1.3.14 Teorem: $\overline{\wp}$ sunuşu (1.3) ile verildiği gibi olsun. $\overline{\wp}$ sunuşunun etkili olabilmesi için gerek ve yeter koşul, herhangi bir p asal sayısı için, $\overline{\wp}$ nin p -Cockcroft olmasıdır.

Aşağıdaki teorem, yine Pride tarafından, çalışma notları olarak ispatlanmış olup, bir monoid sunuşun minimalliğini göstermekle ilgilidir.

1.3.15 Teorem (Pride): $\overline{\wp}$ sunuşu (1.3) ile verildiği gibi olsun. Ayrıca ψ dönüşümü, $\psi(1) = 1$ olacak şekilde, $\mathbb{Z}M$ den A ile gösterilen birimli, değişmeli ve $k \times k$ ($k \geq 1$) tipindeki matrislerin halkası üzerine tanımlanmış bir homomorfizma olsun. \mathbf{Y} kümesi $D(\overline{\wp})$ nin üreteç resimlerinin kümesi olmak üzere,

$$(a) \text{ Her } \mathbb{P} \in \mathbf{Y} \text{ ve } S \in \mathbf{s} \text{ için, } \psi(\lambda_{P,S}) = 0$$

yada

$$(b) \text{ Her } \mathbb{P} \in \mathbf{Y} \text{ ve } S \in \mathbf{s} \text{ için, } \psi(\eta_{P,S}) = 0$$

oluyor ise, ϕ sunuşu minimal dir.

1.3.16 Not: Yukarıda verilen teoremin koşulunu

$$\psi(I_2^{(l)}(\bar{\phi})) = 0 \quad \text{veya} \quad \psi(I_2^{(r)}(\bar{\phi})) = 0$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

2. BÖLÜM

HNN VE SPLIT (AYRIK) GENİŞLEMELERİNİN ALT GRUP AYRIŞTIRILABİLİRLİĞİ

2.1 Giriş

Grup sınıflandırılması, grup yapılarının anlaşılmasında önem teşkil etmektedir. Özellikle gruplar ile alt grupları arasındaki ilişki, sınıflandırmada en çok üstünde durulan noktadır. Bu yüzden, bir grup ile o grubun alt grubu arasındaki ilişkiyi ortaya çıkardığından, alt grup ayrıştırılabilirlik bu bölümde bizim üstünde duracağımız konudur.

Alt grup ayrıştırılabilirlik *Grup Teori* de önemli bir yere sahiptir. Özellikle grupların sınıflandırılıp, yapılarının anlaşılması anlamında kullanımı çok fazladır. Mesela bir grup alt grup ayrıştırılabilir ise o grup *çözülebilir kuvvet problemine* sahiptir [58]. Çözülebilir kuvvet problemine sahip olan her grup ise *çözülebilir kelime problemine* sahiptir. (Verilen herhangi bir grup için kelime probleminin çözülebilir olup olmadığı günümüzde üzerinde sıkça çalışılan konulardan biridir).

Bu bölümde grup genişleme çeşitlerinden olan *HNN* ve *Split* (Ayrık) genişlemelerinin alt grup ayrıştırılabilirliği incelenecektir. Özellikle 2.3 Alt Bölüm de, serbest grupların *HNN* genişlemesini devirli alt grup ayrıştırılabilir yapan koşullar belirlenmiş olup, yine bu alt bölüm de özel bir ayrık genişleme olan \mathbb{Z}_{2^k} ($k \geq 3$) devirli grubun *holomorfunun* bir takım özel alt grupları için alt grup ayrıştırılabilirliğine dair sonuçlara ulaşılmıştır.

Bu bölümde yer alan 2.3.8 ve 2.3.14 Teoremleri ile 2.3.9, 2.3.10, 2.3.11, 2.3.12, 2.3.13, 2.3.15, 2.3.16, 2.3.17 Sonuçları tarafımdan ispatlanmış yeni sonuçlardır.

2.2 Yarı Direkt Çarpımlar ve Ayrık Genişlemeler

Bu kısımda tezimizde çok önemli bir yere sahip olan *yarı direkt* çarpımın öncelikle tanımı verilir, grup oluşturduğu gösterilmiş ve bu grubunun sunuşu verilmiştir. Ayrıca, ayrık genişleme tanımlanarak, bir yarı direkt çarpımın ayrık genişleme olduğu gösterilmiştir. Bu kısımda verilen, temel tanım ve teoremlere [4], [18], [25] ve [42] gibi kaynaklarından ulaşılabilir.

2.2.1 Tanım: A ve K herhangi iki grup olsun. Ayrıca, her $a \in A, k \in K$ için,

$$\theta : A \rightarrow \text{Aut}(K), a \rightarrow \theta_a : k \mapsto aka^{-1}$$

şeklinde tanımlanan θ homomorfizması

$$(k)\theta_{a_1 a_2} = ((k)\theta_{a_1})\theta_{a_2}$$

şartını sağlasın. Buna göre K nın A ile olan yarı direkt çarpımı, her (a, k) sıralı çifti için,

$$(a, k)(a', k') = (aa', (k)\theta_a k') \quad (2.1)$$

kuralını sağlayan bir kümedir.

Bu kümeye G diyelim.

2.2.2 Teorem: G kümesi (2.1) de verilen işlem altında bir grup oluşturur.

İspat: Birim elemanı $(1, 1)$ sıralı ikilisidir. Şimdi G nin birleşme özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Her $(a_1, k_1), (a_2, k_2)$ ve $(a_3, k_3) \in A \times K$ için,

$$\begin{aligned} [(a_1, k_1)(a_2, k_2)](a_3, k_3) &= (a_1 a_2, (k_1)\theta_{a_2} k_2)(a_3, k_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3, ((k_1)\theta_{a_2} k_2)\theta_{a_3} k_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3, ((k_1)\theta_{a_2 a_3})(k_2)\theta_{a_3} k_3) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(a_1, k_1)[(a_2, k_2)(a_3, k_3)] &= (a_1, k_1)(a_2 a_3, (k_2)\theta_{a_3} k_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3, (k_1)\theta_{a_2 a_3} (k_2)\theta_{a_3} k_3)\end{aligned}$$

biçimindedir. Şimdi, her $(a, k) \in A \times K$ elemanının tersini bulalım. O halde

$$(a, k)(a_1, k_1) = (aa_1, (k)\theta_{a_1} k_1) = (1_A, 1_K) \text{ ve}$$

$$(a_1, k_1)(a, k) = (a_1 a, (k_1)\theta_a k) = (1_A, 1_K)$$

den hareketle, $aa_1 = a_1 a = 1_A$ ve $(k)\theta_{a_1} k_1 = (k_1)\theta_a k = 1_K$ elde edilir. Böylece $a_1 = a^{-1}$ ve $k_1 = (k^{-1})\theta_{a^{-1}}$ olur. Sonuç olarak (2.1) de verilen işlem ile tanımlanan G kümesi bir grup tanımlar. \diamond

2.2.3 Tanım: (2.1) ile verilen işlem ile tanımlanmış olan G grubuna K nın A ile olan *yarı direkt çarpım* grubu denir ve $G = K \times_{\theta} A$ ile gösterilir.

Şimdi $G = K \times_{\theta} A$ grubunun sunuşunu oluşturalım. Bunun için önce üreteç elemanlarını belirleyen aşağıdaki önermeyi vermemiz gerekmektedir.

2.2.4 Önerme: A ve K grupları sırasıyla X ve Y kümeleri ile üretilsin. Bu durumda $G = K \times_{\theta} A$ grubunun üreteç kümesi

$$\{(x, 1_K); x \in X\} \cup \{(1_A, y); y \in Y\}$$

biçimindedir.

İspat: Burada yapmamız gereken (2.1) ile verilen çarpımı kullanmaktır. O halde, her $(a_1, 1_K), (a_2, 1_K), (1_A, k_1)$ ve $(1_A, k_2) \in G$ için,

$$(a_1, 1_K)(a_2, 1_K) = (a_1 a_2, 1_K) \tag{2.2}$$

$$(1_A, k_1)(1_A, k_2) = (1_A, k_1 k_2) \tag{2.3}$$

$$(a, 1_K)(1_A, k) = (a, k) \tag{2.4}$$

elde edilir. Böylece a_1 ve a_2 elemanları X üreteç kümesine ait elemanlardan, k_1 ve k_2 elemanları ise Y üreteç kümesine ait elemanlardan olduğundan istenilen sonuca ulaşılmış olur. \diamond

2.2.5 Teorem: A ve K grupları sırasıyla $\langle X; R \rangle$ ve $\langle Y; S \rangle$ sunuşlarıyla verilsin. O zaman K nın A ile oluşturduğu yarı direkt çarpım grubunun üreteç kümesi $Z = X \cup Y$ olmak üzere; bağıntı kümesi, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için,

$$R, S \quad (2.5)$$

$$yx = x(y)\theta_x \quad (2.6)$$

biçimindedir.

İspat: Z kümesinden elde edilen kelimelerin kümesini Z^* ile gösterelim. Ayrıca, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için, $(x)\psi = (x, 1_K)$ ve $(y)\psi = (1_A, y)$ olmak üzere,

$$\psi : Z^* \rightarrow K \times_{\theta} A$$

homomorfizmasını tanımlayalım. 2.2.4 Önermeden ψ nin öretenliği kolayca görülür. Şimdi $K \times_{\theta} A$ nın (2.5) ve (2.6) bağıntılarını sağladığını gösterelim. (2.5) deki bağıntılar (2.2), (2.3) ve (2.4) deki bağıntılardan elde edilir. (2.6) numaralı bağıntı ise, yine (2.1)'i kullanarak,

$$(1_A, y)(x, 1_K) = (x, (y)\theta_x) = (x, 1_K)(1_A, (y)\theta_x)$$

den elde edilir. Böylece ψ homomorfizması, (2.5) ve (2.6) ile tanımlanmış olan herhangi bir G grubundan $K \times_{\theta} A$ olan $\bar{\psi}$ homomorfizmasına genişletilebilir. Şimdi $\bar{\psi}$ nin birebir ve örten olduğunu gösterelim.

Z^* kümesine ait bir w kelimesi alalım. (2.2), (2.3), (2.4) ve (2.5) bağıntılarını kullanarak $w = w_x w_y \in G$ olacak şekilde $w_x \in X^*$ ve $w_y \in Y^*$ kelimeleri var olduğu kolayca görülür.

Böylece

$$(w)\psi = (w_x w_y)\psi = (w_x)\psi(w_y)\psi = (w_x, 1_K)(1_A, w_y) = (w_x, w_y)$$

olur. Şimdi, $w', w'' \in Z^*$ olmak üzere $(w')\psi = (w'')\psi$ olduğunu kabul edelim. O halde $w'_x = w''_x$ ve $w'_y = w''_y$ olacaktır. Buradan da, (2.5) numaralı bağıntıdan hareketle, $w'_x = w''_x$ ve $w'_y = w''_y$ bağıntılarının G grubunda sağlandığı görülür. Böylece $\bar{\psi}$ birebir ve örten bir homomorfizma olur. Bu da bize $G \cong K \times_{\theta} A$ sonucunu verir. G grubu (2.5) ve (2.6) bağıntılarını sağladığından, tanımlanan izomorfizma gereği $K \times_{\theta} A$ çarpımında bu bağıntıları sağlar. Bu da bize istenilen sonucu verecektir. \diamond

2.2.6 Sonuç: A ve K grupları sırasıyla $\wp_A = \langle X; R \rangle$ ve $\wp_K = \langle Y; S \rangle$ sunuşlarıyla verilsin. O zaman K nin A ile yarı direkt çarpım grubu olan $G = K \times_{\theta} A$ nin sunuşu

$$\wp_G = \langle Y, X; S, R, T_{yx} \rangle$$

ile tanımlanır. Burada $T_{yx} = \{(x, y) \in X \times Y \mid yx = x(y)\theta_x\}$ kümesi $yx = x(y)\theta_x$ biçimindeki bağıntıların kümesidir.

Yarı direkt çarpım grubunun sunuşunu verdikten sonra, bu çarpımla ilgili aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

2.2.7 Sonuç: G grubu K nin A ile yarı direkt çarpım grubu olsun. Bu durumda

$$i_1 : A \rightarrow G, \quad a \mapsto (a, 1_K) \quad \text{ve} \quad i_2 : K \rightarrow G, \quad k \mapsto (1_A, k)$$

monomorfizmaları vardır ve A ile K grubu G nin alt grubudur.

2.2.8 Sonuç: $G = K \times_{\theta} A$ olsun. O zaman

i) K grubu G nin normal alt grubudur.

ii) $G = AK$ dir.

iii) $K \cap A = \{1_G\}$ dir.

İspat: İlk önce $j: G \rightarrow A, (a, k) \mapsto a$ şeklinde projektif dönüşümü göz önüne alalım. Aslında bu j dönüşümü homomorfizma olup, çekirdeği

$$\text{Çek}(j) = \{(a, k) \in G : j(a, k) = 1_A\} = \{(1_A, k) : k \in K\}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre K grubu G nin bir normal alt grubu olur. Ayrıca, her $(a, k) \in G$ için, $(a, 1_K)(1_A, k) = (a(1_K)\theta_{1_A}, k) = (a, k)$ elde edilir. Son olarak yarı direkt çarpımın elemanları, aslında direkt çarpıma ait sıralı ikililerden oluştuğundan $K \cap A = \{1_G\}$ dir. Böylece (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlanmış olur. \diamond

2.2.9 Tanım: G bir grup, K ve A bu grubun alt grupları olsun. Bu grupların

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} A \longrightarrow 1 \quad (2.7)$$

dizisini düşünelim. Bu dizide, özel olarak,

$$\text{Gör}(i) = \text{Çek}(j)$$

şartı sağlanıyor ise bu diziye tam dizi denir.

Şimdi (2.7) ile verilen dizinin tam olduğunu kabul edelim. Eğer, $f \circ j = 1_A$ olacak şekilde bir $f: A \rightarrow G$ homomorfizması var ise bu diziye *Ayrık (Split)* denir. Bu durumda G grubuna *ayrık genişleme* denir.

Şimdi yarı direkt çarpım ile ayrık genişleme arasındaki birebir ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi verelim.

2.2.10 Teorem: G, K ve A birer grup olsun. O zaman $G \cong K \times_{\theta} A$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7) ile verilen tam dizinin ayrık olmasıdır.

İspat: $G \cong K \times_{\theta} A$ olsun. O zaman 2.2.7 Sonuç dan hareketle, $i: K \rightarrow G, k \mapsto (1_A, k)$ ve $j: G \rightarrow A, (a, k) \mapsto a$ homomorfizmaları vardır. Ayrıca, varsayımdan dolayı, $f: A \rightarrow G, a \mapsto (a, 1_K)$ olmak üzere, her $a_1, a_2 \in A$ için,

$$(a_1 a_2) f = (a_1 a_2, 1_K) = (a_1 a_2, (1_K) \theta_{a_2} 1_K) = (a_1, 1_K) (a_2, 1_K) = (a_1) f (a_2) f$$

olduğundan f bir homomorfizmadır. Bununla beraber $(a)(f \circ j) = (a, 1_K) j = a$ sağlanır. Böylece (2.7) tam dizisi ayrık olur.

Tersine, (2.7) tam dizisi ayrık olsun. Burada $Gör(i) = Çek(j)$ olduğundan, $Gör(i)$ grubu G nin bir normal alt grubudur. Ayrıca, her $g \in G$ için, $g(g^{-1})(j \circ f)$ elemanını düşünelim. Bu elemana j yi uyguladığımızda, $(g)j(g^{-1})(j \circ f \circ j) = 1_A$ elde edilir. Böylece $g(g^{-1})(j \circ f) \in Çek(j) = Gör(i)$ sonucuna ulaşılır. O halde G grubuna ait her kelime $g = (g)(j \circ f)(g(g^{-1})(j \circ f)(g))$ biçiminde yazıldığından $G = Gör(f) Gör(i)$ biçimindedir. Şimdi $Gör(i) \cap Gör(f) = \{1_G\}$ olduğunu görelim. Kabul edelim ki $g \in Gör(i) \cap Gör(f)$ olsun. Böylece $g \in Gör(i) = Çek(j)$ olur. Buradan da $(g)j = 1_A$ elde edilir. Ayrıca $g \in Gör(f)$ dir. O halde, $a \in A$ için, $g = (a)f$ olur. Burada her iki tarafa j yi uygularsak, $(g)j = ((a)f)j = a$ olur. Böylece $a = 1_A$ elde edilir. Buradan da $g = (a)f = (1_A)f = 1_G$ elde edilir. Tüm bunlar ise istenilen sonuçtur. Çünkü i ve f birebir olduğundan $K \cong Gör(i)$ ve $A \cong Gör(f)$ olur. Böylece $G \cong K \times_{\theta} A$ dir. \diamond

2.3 Bir Grubun Alt Grup Ayrıştırılabilirliği

Bu bölüm, HNN ve Ayrık genişlemelerinin alt grup ayrıştırılabilirliği biçiminde iki ayrı bölüm halinde incelenmiş olup bir takım yeni sonuçlar elde edilmiştir. Yine bu bölüm boyunca, 2.2.10 Teorem den hareketle, ayrık genişlemenin bir yarı direkt çarpım tanımlayacağı kabul edilecektir. Alt grup ayrıştırılabilirlik ilgili daha detaylı bilgilere [4], [19], [25], [60] ve [61] kaynaklarından ulaşılabilir.

Şimdi alt grup ayrıştırılabilirlik tanımını verelim:

2.3.1 Tanım: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Her $x \in G - H$ için, $x \notin NH$ olacak şekilde sonlu indeksli bir N normal alt grubu var ise G ye H -ayrıştırılabilir denir. Bir G grubunun her sonlu üretilen H alt grubu için G grubu H -ayrıştırılabilir ise G ye *alt grup ayrıştırılabilir* denir. Özel olarak G grubu $H = \langle 1 \rangle$ -ayrıştırılabilir ise G ye *rezidilü sonlu* grup denir.

2.3.2 Örnek: $G = \mathbb{Z}$ ve $H = 2\mathbb{Z}$ olmak üzere, her $g \in G - H$ için, $N = 3\mathbb{Z}$ ise $g \notin NH$ olur. Böylece G grubu H ayrıştırılabilir. ●

2.3.1 HNN Genişlemesi

Goansu Kim [51] deki çalışmasında, sonlu bir A grubunun HNN genişlemesinin bir takım koşullar altında devirli alt grup ayrıştırılabilir olduğunu ispatlamıştır. Niblo ise [60] daki çalışmasında, \mathbb{Z} tamsayılar grubunun HNN genişlemesinin alt grup ayrıştırılabilirliği ile ilgili bir takım sonuçlar vermiştir. Tezimizin bu bölümünde, belirtilen kaynaklarda yapılmış bu konuların bir genelmesi olarak, serbest grupların HNN genişlemesini devirli alt grup ayrıştırılabilir yapan koşullar ortaya konmuştur.

Elde edilen teorem ve sonuçlara belirtmeden önce, alt grup ayrıştırılabilirlik ve HNN genişlemesiyle ilgili temel tanım ve teoremleri verelim. Bu konuyla ilgili daha detaylı bilgilere [1], [4], [24], [25], [42] ve [51] kaynaklarından ulaşılabilir.

2.3.3 Tanım: G bir grup ve sunuşu $\langle X; R \rangle$ biçiminde olsun. Ayrıca $H, K \leq G$ için, $\varphi: H \rightarrow K$ izomorfizması verilsin. Bu durumda G nin bir HNN genişlemesi

$$\langle X, t; R, tHt^{-1} = K \rangle$$

sunuşu ile tanımlanır ve alınacak bir $g \in G$ kelimesi, $a_i \in G$ ve $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere, $g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \dots a_{n-1} t^{\varepsilon_n}$ biçiminde indirgenmiş forma sahiptir.

Verilen bir $g = a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 t^{\varepsilon_2} \cdots a_{n-1} t^{\varepsilon_n} \in G$ kelimesinin

$$a_{i-1} t^{\varepsilon_i} a_i \cdots a_{n-1} t^{\varepsilon_n} a_0 t^{\varepsilon_1} a_1 \cdots a_{i-2} t^{\varepsilon_{i-1}}$$

biçimindeki bütün devirli permütasyonları indirgenmiş ise g ye *devirsel indirgenmiş kelime* denir. Ayrıca verilen bir g kelimesindeki t harflerinin pozitif (veya negatif) üstlerinin toplamı $\exp_{t^+}(g)$ (veya $\exp_{t^-}(g)$) olarak gösterilir.

2.3.4 Örnek: Üreteç kümesi iki elemandan oluşan $\langle x, y; \rangle$ sunuşuna sahip F serbest grubu için

$$\varphi: F \rightarrow F, \quad x \mapsto x^2, \quad y \mapsto y^2$$

izomorfizması tanımlandığında, F nin bir *HNN genişlemesi*

$$\langle x, y, t; \quad x^2 = t^{-1}xt, \quad y^2 = t^{-1}yt \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca $g = xtytx^2t$ kelimesi yukarıda verilen F nin *HNN genişlemesine* ait devirsel indirgenmiş bir kelimedir. •

Gerekli tanımlamaları yaptıktan sonra şimdi ana teoremin ispatında kullanacağımız önerme ve teoremleri verelim.

2.3.5 Teorem [51]: *A sonlu bir grup olmak üzere,*

$$G = \langle A, t; \quad t^{-1}Ht = K \rangle \tag{2.8}$$

bir HNN genişlemesi olsun. Bu durumda G grubu alt grup ayrıştırılabilir.

2.3.6 Teorem [51]: *G grubu sunuşu (2.8) de verildiği gibi olsun. Ayrıca*

$$\mathcal{R} = \{ P \triangleleft G : (P \cap H)\varphi = P \cap K \}$$

kümesi verilsin. Bu durumda;

$$(a) \quad \bigcap_{P \in \mathcal{R}} HP = H \quad \text{ve} \quad \bigcap_{P \in \mathcal{R}} KP = K,$$

$$(b) \bigcap_{P \in \mathfrak{R}} P = \langle 1 \rangle$$

şartları sağlanıyor ise G grubu rezidilü sonludur.

2.3.7 Teorem [60]: *F alt grup ayrıştırılabilir ve $a \in F$ olsun. Ayrıca F nin bir HNN genişlemesi*

$$\wp_G = \langle F, t; tat^{-1} = a^{\pm 1} \rangle$$

olsun. Bu durumda \wp_G sunuşu ile verilen G grubu alt grup ayrıştırılabilir.

G ile HNN genişlemesini gösterelim ve sunuşunu (2.8) ile tanımlayalım. Ayrıca $\mathfrak{R} = \{ P \triangleleft F : (P \cap H)\varphi = P \cap K \}$ kümesini alalım. \bar{G} sembolü G grubunun ve \bar{g} sembolü ise $g \in G$ elemanının homomorfik görüntüsü olmak üzere, her bir $S \in \mathfrak{R}$, $\bar{F} = F/S$ ve $\phi_s(t) = t_s$ için,

$$\phi_s : G \rightarrow \langle \bar{F}, t_s ; t_s^{-1} \bar{h} t_s = (\bar{h})\bar{\varphi}, \bar{h} \in \bar{H} \rangle$$

homomorfizması ve $\bar{\varphi} : HS/S \rightarrow KS/S$ izomorfizması vardır. Burada F serbest grubunu sonlu ranklı ve $H = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ile $K = \langle x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1} \rangle$ gruplarını ise F nin alt grupları olarak alalım. Bu durumda

$$\varphi : H \rightarrow K, \quad x_i \rightarrow x_i^{\pm 1}$$

izomorfizması altında

$$\langle F, t; tHt^{-1} = K \rangle \tag{2.9}$$

grubu F serbest grubunun bir HNN genişlemesidir.

Şimdi yukarıdaki açıklamalardan sonra serbest grupların HNN genişlemesini devirli alt grup ayrıştırılabilirliğini gösteren bu bölümün ana teoremlerinden birini verelim.

2.3.8 Teorem: F serbest grubunun HNN genişlemesi olan G grubunun sunuşu (2.9) da verildiği gibi olsun. Ayrıca

$$\mathfrak{R} = \{ P \triangleleft F : (P \cap H)\varphi = P \cap K \}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, her $x \in F$ için,

$$(a) \bigcap_{P \in \mathfrak{R}} HP = H \quad \text{ve} \quad \bigcap_{P \in \mathfrak{R}} KP = K,$$

$$(b) \bigcap_{P \in \mathfrak{R}} P\langle x \rangle = \langle x \rangle$$

ise o zaman G grubu devirli alt grup ayrıştırılabilir.

İspat: g ve x elemanları G grubuna ait birer devirsel indirgenmiş elemanlar olsun. Ayrıca $g \in G - \langle x \rangle$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda g ve x elemanlarındaki t sabit harfinin pozitif ve negatif üsler toplamına bağlı olarak üç ayrı durum oluşur:

1. DURUM : Aldığımız g ve x elemanları için,

$$i) \exp_{t^+}(x) = -\exp_{t^-}(x) \quad \text{ve} \quad \exp_{t^+}(g) \neq -\exp_{t^-}(g) \quad \text{olsun.}$$

$$ii) \exp_{t^+}(g) = -\exp_{t^-}(g) \quad \text{ve} \quad \exp_{t^+}(x) \neq -\exp_{t^-}(x) \quad \text{olsun.}$$

$$iii) \exp_{t^+}(g) \neq -\exp_{t^-}(g), \exp_{t^+}(x) \neq -\exp_{t^-}(x) \quad \text{ve}$$

$\exp_{t^+}(x) - \exp_{t^-}(x)$ farkı $\exp_{t^+}(g) - \exp_{t^-}(g)$ farkını bölmeyin.

$i)$, $ii)$ ve $iii)$ şartlarının her birinde, alınacak $\bar{g} \neq 1$ indirgenmiş kelime için, $\exp_{t^+}(\bar{g}) - \exp_{t^-}(\bar{g}) = \exp_{t^+}(g) - \exp_{t^-}(g)$ olacak şekilde $S \in \mathfrak{R}$ vardır. Ayrıca

$$\bar{G} = G_{\phi_S} = \langle \bar{F}, t_S; t_S^{-1} \bar{H} t_S = \bar{K} \rangle$$

olmak üzere, $\exp_{t^+}(\bar{x}) - \exp_{t^-}(\bar{x}) = \exp_{t^+}(x) - \exp_{t^-}(x)$ olacak şekilde $\bar{x} \neq 1$ devirli indirgenmiş kelimesine sahip oluruz. Buradan $\bar{g} \notin \langle \bar{x} \rangle$ olur. O halde 2.3.7 Teorem den hareketle \bar{G} nin devirli altgrup ayrıştırılabilir olduğu kolayca görülür.

Böylece $\bar{g} \notin \bar{N}\langle \bar{x} \rangle$ olacak şekilde $\bar{N} \triangleleft \bar{G}$ vardır. Burada \bar{N} normal alt grubu N nin homomorfik imajıdır. O halde $g \notin N\langle x \rangle$ sonucuna ulaşılır.

2. DURUM: Aldığımız g ve x elemanları için, $\exp_{t^+}(g) = -\exp_{t^-}(g)$ ve $\exp_{t^+}(x) = -\exp_{t^-}(x)$ olsun. Bu durumda teoremin (b) şikkından hareketle $g \notin S\langle x \rangle$ olacak şekilde $S \in \mathfrak{R}$ olduğu kolayca görülür. Buradan $\bar{G} = G_{\phi_S}$ olduğundan $\bar{g} \notin \langle \bar{x} \rangle$ olur. Böylece $g \notin N\langle x \rangle$ olacak şekilde $N \triangleleft G$ bulunmuş olur. Bu da istenilen sonuçtur.

3. DURUM: Aldığımız g ve x elemaları için, $\exp_{t^+}(g) \neq -\exp_{t^-}(g)$, $\exp_{t^+}(x) \neq -\exp_{t^-}(x)$ ve $\exp_{t^+}(x) - \exp_{t^-}(x)$ farkı $\exp_{t^+}(g) - \exp_{t^-}(g)$ farkını bölsün. Seçmiş olduğumuz x kelimesi devirli indirgenmiş olduğundan bu kelimeyi, $a_j \in F$, $n \geq 1$ ve $\delta_{j+1} = \pm 1$ olmak üzere, $x = a_0 t^{\delta_1} a_1 t^{\delta_2} \dots a_{n-1} t^{\delta_n}$ olarak alabiliriz. Ayrıca, $b_i \in F$, $m \geq 1$ ve $\gamma_{i+1} = \pm 1$ olmak üzere, alınan bir $g = b_0 t^{\gamma_1} b_1 t^{\gamma_2} \dots b_{m-1} t^{\gamma_m}$ indirgenmiş kelimesi için, $\exp_{t^+}(g) - \exp_{t^-}(g) = m = nk$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olsun. Varsayalım ki $a_i \notin H$ (veya $a_i \notin K$) olsun. Bu durumda teoremin (a) şikkından hareketle $a_i \notin HS_1$ (veya $a_i \notin KS_1$) olacak şekilde $S_1 \in \mathfrak{R}$ vardır. Benzer bir biçimde, varsayalım ki $b_j \notin H$ (veya $b_j \notin K$) olsun. Bu durumda (a) şikkından hareketle $b_j \notin HS_2$ (veya $b_j \notin KS_2$) olacak şekilde $S_2 \in \mathfrak{R}$ vardır. 2.3.6 Teoreminden ve $g^{-1}x^k \neq 1$ olduğundan dolayı $g^{-1}x^k \notin M$ ve $gx^k \notin M$ olur. O zaman $M \cap F \in \mathfrak{R}$ ve $P = S_1 \cap S_2 \cap (M \cap F) \in \mathfrak{R}$ olur. Böylece $P \subset S_1 \cap S_2$ olduğundan \bar{g} indirgenmiş ve \bar{x} devirsel indirgenmiş kelimeler olur. Bunlara ek olarak,

$$\begin{aligned} \exp_{t^+}(\bar{g}) - \exp_{t^-}(\bar{g}) &= \exp_{t^+}(g) - \exp_{t^-}(g) = m = nk \\ &= \exp_{t^+}(x^k) - \exp_{t^-}(x^k) = \exp_{t^+}(\bar{x}^k) - \exp_{t^-}(\bar{x}^k) \end{aligned}$$

ve $\bar{g} \neq \bar{x}^{\pm k}$ olduğundan, $\bar{g} \notin \langle \bar{x} \rangle$ sonucuna ulaşılır. Böylece, 1. Durumda olduğu gibi, $g \notin N\langle x \rangle$ olacak şekilde $N \triangleleft G$ vardır. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

◇

Ana teoremin ispatını verdikten sonra bu teoremin uygulaması olarak, Kim'in [51] çalışmasındakine benzer biçimdeki aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

2.3.9 Sonuç: F sonlu ranklı bir serbest grup ve H -ayrıştırılabilir olsun. Ayrıca $\varphi: F \rightarrow F$ otomorfizması verilsin. O zaman $G = \langle F, t; tHt^{-1} = (H)\varphi \rangle$ devirli alt grup ayrıştırılabiliridir.

İspat: Bu ispatı yapabilmek için sadece 2.3.8 Teoremin (a) ve (b) koşullarının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. O halde, kabul edelim ki $a \notin H$ olsun. Varsayım gereği F serbest grubu H -ayrıştırılabilir olduğundan, $a \notin NH$ olacak biçimde sonlu indeksli $N \triangleleft F$ normal alt grubu vardır. Ayrıca F sonlu ranklı olduğundan, $P \subset N$ ve $P \triangleleft F$ olacak biçimde P karakteristik alt grubu vardır. Bununla beraber P karakteristik normal alt grubu olduğundan $(P)\varphi = P$ dir. Buradan $(P \cap H)\varphi = P \cap (H)\varphi$ dir. Böylece $P \in \mathfrak{R}$ ve $a \notin PH$ elde edilir. Buradan da (a) koşulu elde edilmiş olur. Şimdi $a, x \in F$ ve $a \notin \langle x \rangle$ olduğunu varsayalım. F devirli alt grup ayrıştırılabilir olduğundan $a \notin N\langle x \rangle$ olacak biçimde sonlu indeksli $N \triangleleft F$ normal alt grubu vardır. Böylece $P \subset N$ ve $P \triangleleft F$ olacak biçimde P karakteristik normal alt grubu vardır. Böylece $P \in \mathfrak{R}$ ve $a \notin P\langle x \rangle$ olur. Buradan da (b) ispatlanmış olur. Böylece 2.3.8 Teoremden G grubu devirli alt grup ayrıştırılabiliridir.

◇

2.3.10 Sonuç: F sonlu ranklı bir serbest grup ve H -ayrıştırılabilir olsun. Ayrıca $\varphi: F \rightarrow F$ iç otomorfizması verilsin. O zaman $G = \langle F, t; tHt^{-1} = (H)\varphi \rangle$ devirli alt grup ayrıştırılabiliridir.

İspat: $\varphi: F \rightarrow F$ iç otomorfizma olduğundan, her bir sonlu indeksli $N \triangleleft F$ normal alt grubu için $(N \cap H)\varphi = N \cap (H)\varphi$ eşitliği sağlanır. Böylece $N \in \mathfrak{R}$ olur. Dolayısıyla ispat 2.3.9 Sonuçtakine benzer bir şekilde tamamlanır. ◇

2.3.11 Sonuç: F bir serbest grup olsun. O zaman $G = \langle F, t; tHt^{-1} = H \rangle$ devirli alt grup ayrıştırılabilir olması için gerek ve yeter koşul F nin H -ayrıştırılabilir olmasıdır.

G grubu sonlu sunumlu bir grup olsun. Her $u, v \in G$ için, $v = u^n$ ($n \neq 0$) oluyorsa bu grup için kuvvet problemi çözülebilirdir denir. Şimdi [58] den faydalanarak devirli alt grup ayrıştırılabilirlik ile kuvvet problemi arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

2.3.12 Sonuç: (2.9) sunuşu ile verilen G grubu çözülebilir kuvvet problemine sahiptir.

2.3.13 Sonuç : (2.9) sunuşu ile verilen G grubu çözülebilir kelime problemine sahiptir.

2.3.2 Ayrık Genişleme

Bu bölümde bazı özel ayrık genişlemelerinin alt grup ayrıştırılabilir olup olmadığı incelenmiştir. Burada ayrık genişleme, 2.2.10 Teoremden dolayı, yarı direkt çarpım olarak anlaşılmalıdır.

Bir G grubunun *holomorf* 'u; G nin otomorfizma grubuyla olan yarı direkt çarpım grubu, yani $G \times_{\theta} \text{Aut}(G)$ dir. Bu kesimde özellikle, $k \geq 3$ olmak üzere, \mathbb{Z}_{2^k} devirli grubunun holomorfunun bir takım özel alt grupları için alt grup ayrıştırılabilir olduğuna dair sonuçlara ulaşılmıştır. Bu sonuçları vermeden önce \mathbb{Z}_{2^k} devirli grubunun *holomorfunun* sunuşunu, Huebschman'ın [42] deki çalışmasında yaptığı gibi, aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

N grubu mertebesi 2^k ($k \geq 3$) olan ve y elemanı ile üretilen bir devirli grup olsun. O zaman N nin otomorfizma grubu \mathbb{Z}_{2^k} nin unit (çarpımsal tersinir) elemanlarının oluşturduğu grup olup, bu grup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{k-2}}$ grubuna izomorftur [67].

İzomorfizma altında elde edilen bu grubu $\mathbb{Z}_{2^k}^*$ ile gösterelim. Dolayısıyla

$G = \mathbb{Z}_{2^k} \times_{\theta} \mathbb{Z}_{2^k}^*$ olacaktır. Kabul edelim ki, \mathbb{Z}_2 devirli grubu z ve $\mathbb{Z}_{2^{k-2}}$ devirli grubu da x ile üretilsin. O zaman $r = 2^k$ ve $s = 2^{k-2}$ olmak üzere, G grubunun sunuşunu 2.2.6 Sonuçtan

$$\wp_G = \langle x, y, z; x^s, y^r, z^2, xyx^{-1} = y^5, zyz^{-1} = y^{-1}, xz = zx \rangle \quad (2.10)$$

biçiminde elde ederiz. Ayrıca sunuşları, sırasıyla,

$$\wp_{G_1} = \langle x, y; x^s, y^r, xyx^{-1} = y^5 \rangle, \quad (2.11)$$

ve

$$\wp_{G_2} = \langle y, z; y^r, z^2, zyz^{-1} = y^{-1} \rangle \quad (2.12)$$

biçiminde olan $G_1 = N \times_{\theta} \langle x; x^s \rangle \leq G$ ve $G_2 = N \times_{\theta} \langle z; z^2 \rangle \leq G$ alt gruplarının metacyclic gruplar olduğu [42] ile bilinmektedir.

Şimdi yukarıda tanımlanan G nin bu alt grupları için alt grup ayrıştırılabilirliği veren 2. Bölümün diğer ana sonuç ve uygulamalarını verelim:

2.3.14 Teorem: G grubu sunuşu (2.10) ile verilmiş olan yarı direkt çarpım grubu olsun. O zaman G nin sunuşları (2.11) ve (2.12) eşitlikleri ile verilmiş olan G_1 ve G_2 alt grupları için, G grubu G_1 ve G_2 - ayrıştırılabilir.

İspat: Alt grup ayrıştırılabilirlik tanımından hareketle ispatımızı yapacağız. Açıkça görüleceği gibi G grubunun mertebesi $2rs$, G_1 grubunun mertebesi rs ve G_2 grubunun mertebesi ise $2r$ dir. Böylece $G - G_1$ kümesi toplam rs elemana sahip olup, bu elemanlar

$$\{z, zy, zy^2, \dots, zy^{r-1}, xz, \dots, x^{s-1}z, yxz, y^2xz, \dots, y^{r-1}xz, yx^2z, y^2x^2z, \dots, y^{r-1}x^2z, \dots, y^{r-1}x^2z, \dots, yx^{s-1}z, y^2x^{s-1}z, y^3x^{s-1}z, \dots, y^{r-1}x^{s-1}z\}$$

biçimindedir. Ayrıca $G - G_2$ kümesi de $2r(s-1)$ elemana sahip olup, yine bu elemanlar

$$\{x, x^2, \dots, x^{s-1}, yx, yx^2, \dots, yx^{s-1}, y^2x, \dots, y^2x^{s-1}, \dots, y^{r-1}x, \dots, y^{r-1}x^{s-1}, \\ xz, x^2z, \dots, x^{s-1}z, yxz, y^2xz, \dots, y^{r-1}xz, yx^2z, y^2x^2z, \dots, y^{r-1}x^2z, \dots, \\ yx^{s-1}z, y^2x^{s-1}z, y^3x^{s-1}z, \dots, y^{r-1}x^{s-1}z\}$$

biçimindedir. G grubunun sonlu indeksli normal alt grubunu $N = \langle y; y^r \rangle$ olarak alalım. Bu durumda, her $g_1 \in G - G_1$ ve $g_2 \in G - G_2$ için, $g_1 \notin NG_1$ ve $g_2 \notin NG_2$ olur. Böylece G grubu G_1 ve G_2 -alt grup ayrıştırılabilir. \diamond

2.3.15 Sonuç: G_1 grubunun HNN genişlemesi olan G grubu G_2 -ayrıştırılabilir.

İspat: G_1 grubunun (2.11) ile verilen sunuşunu göz önüne alalım. z sabit harf olmak üzere,

$$y \mapsto y^{-1}, \quad x \mapsto x$$

dönüşümleri altında G grubu G_1 grubunun HNN genişlemesi olur. Böylece 2.3.14 Teoremden, G grubunun G_2 -ayrıştırılabilir olduğu gösterilmiş olur. \diamond

2.3.16 Sonuç: G_2 grubunun HNN genişlemesi olan G grubu G_1 -ayrıştırılabilir.

İspat: Burada ilk önce G_2 grubunun (2.12) ile verilen sunuşunu düşünelim. x sabit harf olmak üzere,

$$y \mapsto y^5, \quad z \mapsto z$$

dönüşümleri altında, G grubu G_2 grubunun HNN genişlemesi olur. 2.3.15 Sonuçun ispatında olduğu gibi, 2.3.14 Teoremden, istenilen sonuca ulaşılmış olur. \diamond

Şimdi $G_2 = N \times_{\theta} \langle z; z^2 \rangle$ metacyclic grubunu göz önüne alalım. Bu durumda G_2 grubunun elemanlarının oluşturduğu küme

$$\{1, y, y^2, \dots, y^{r-1}, z, zy, zy^2, \dots, zy^{r-1}\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu grubun $H = \langle z \rangle$ ile üretilen alt grubu için G_2 grubu H -ayrıştırılabilir olamaz. Bu durumda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

2.3.17 Sonuç: *Metacyclic gruplar genel anlamda alt grup ayrıştırılabilir değildir.*

3. BÖLÜM

ALT GRUP AYRIŞTIRILABİLİRLİK VE ETKİLİK KAVRAMLARI ARASINDAKİ İLİŞKİNİN CAYLEY GRAF YARDIMIYLA STANDART WREATH ÇARPIM ALTINDA İNCELENMESİ

3.1 Giriş

Ayık [8] ve Çevik [29] bağımsız yapmış oldukları çalışmalarda, sonlu grupların standart wreath çarpımının etkiliğini veren koşulları belirlemişlerdir. Bunun için wreath çarpımının sunuşunu kullanmışlardır.

Bu bölümde, yukarıda belirtilen bu çalışmalardan hareketle, standart wreath çarpımının oluşturduğu grubunun etkili bir sunuşa sahip iken (ki bu durumda *minimal üreteçli* olduğunu biliyoruz) *alt grup ayrıştırılabilirliği* incelenmiş ve bir takım yeni sonuçlar elde edilmiştir. Adı geçen bu sonuçların elde edilebilmesi için gerekli olan wreath çarpım sunuşu, [8] ve [29] den farklı olarak, *Cayley graf* yardımıyla oluşturulmuştur. Adı geçen bu metot, [3] deki ortak çalışmada da kullanılmıştır. Literatürde wreath çarpımının sunuşunun Cayley graf kullanılarak oluşturulduğuna dair bir bilgiye, [3] deki çalışmaya kadar geçen sürede, rastlanmamıştır.

Yine bu bölümde Cayley graftan elde edilen *maksimal ağaç* yardımıyla, p -grupların standart wreath çarpımının minimal üreteç sayısında etkili olması için gerekli koşulları veren 3.4.7 Teorem ispatlanmıştır.

Bu bölümde verilen 3.4.10 ve 3.4.11 Teoremleri ile 3.4.12 ve 3.4.13 Sonuçları, tezin diğer yeni sonuçlardır.

3.2 Standart Wreath (Çelenk) Çarpım

2. Bölümde incelenen *yarı direkt çarpımın* bir uygulaması olarak standart wreath çarpımlar düşünülebilir. Bu konuyla ilgili daha detaylı bilgilere [3], [8], [29], [46] ve [73] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

3.2.1 Tanım: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_g\}$ ve B sonlu gruplar olmak üzere, $x \in A$ olsun. Bu durumda a_1x, a_2x, \dots, a_gx elemanları a_1, a_2, \dots, a_g nın bir permütasyonu olur. Dolayısıyla a_1x, a_2x, \dots, a_gx elemanlarını $a_{\sigma_x(1)}, a_{\sigma_x(2)}, \dots, a_{\sigma_x(g)}$ olarak alabiliriz. Burada verilen σ_x ler $1, 2, \dots, n$ elemanlarının bir permütasyonudur. Şimdi

$$K = B^{|A|} = \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_g$$

olarak tanımlayalım. O halde K nın elemanları $(b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_g})$ biçimindedir. Ayrıca $(b_{a_1}, b_{a_2}, \dots, b_{a_g})\theta_x = (b_{a_{\sigma_x(1)}}, b_{a_{\sigma_x(2)}}, \dots, b_{a_{\sigma_x(g)}})$ olacak biçimde $\theta : A \rightarrow \text{Aut}(K)$, $x \rightarrow \theta_x$ homomorfizması vardır. Böylece K nın A ile olan yarı direkt çarpımı $K \times_{\theta} A$ elde edilir ve bu yarı direkt çarpıma B nin A grubu ile olan *standart wreath çarpımı* denir. Bu çarpım $B \int A$ biçiminde gösterilir. Ayrıca, 2.2.2 Teorem yardımıyla, $B \int A$ nın bir *grup* tanımladığı kolayca görülebilir.

Şimdi, sunuşları sırasıyla $\wp_A = \langle \underline{x}; \underline{r} \rangle$ ve $\wp_B = \langle \underline{y}; \underline{s} \rangle$ olan A ve B grupları için, $G = B \int A$ standart wreath çarpım grubunun sunuşunu oluşturalım. Burada sunuşlar içindeki “ $\underline{\quad}$ ” notasyonu üreteç ve bağıntı kümelerini ifade etmektedir. Bunun için öncelikle her bir $a \in A$ için, B grubunun \wp_B sunuşunun bir $\langle \underline{y}^{(a)}; \underline{s}^{(a)} \rangle$ kopyasını alalım ve A grubunun elemanları arasında, $a_1 = 1$ olmak üzere, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ şeklinde bir sıralamanın var olduğunu varsayalım. Ayrıca $\{a_x : x \in \underline{x}\}$ kümesini A grubu için $\wp_A = \langle \underline{x}; \underline{r} \rangle$ sunuşuna karşılık gelen bir üreteç

kümesi ve $\{b_y : y \in \underline{y}\}$ kümesini de, B grubu için $\wp_B = \langle \underline{y} ; \underline{s} \rangle$ sunuşuna karşılık gelen bir üreteç kümesi olarak alalım. Bu durumda, 2.2.6 Sonuçun bir uygulaması olarak, $G = B \int A$ grubunun sunuşunu veren aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

3.2.2 Teorem: *Sunuşları sırasıyla, $\wp_A = \langle \underline{x} ; \underline{r} \rangle$ ve $\wp_B = \langle \underline{y} ; \underline{s} \rangle$ olan, A ve B grupları için, $G = B \int A$ standart wreath çarpım grubunun sunuşu, $a, a' \in A$, $y, z \in \underline{y}$ ve $x \in \underline{x}$ olmak üzere,*

$$\wp_G = \langle \underline{y}^{(a)}, \underline{x} ; \underline{s}^{(a)}, \underline{r}, y^{(a)}z^{(a')} = z^{(a')}y^{(a)} \ (a < a'), \ x^{-1}y^{(a)}x = y^{(aa_x)} \rangle \quad (3.1)$$

biçimindedir.

İspat: Standart wreath çarpımın tanımından dolayı $K = B^{|A|}$ olarak aldığımızda, $G = K \times_{\theta} A$ yarı direkt çarpım grubunu elde ederiz. Burada $K = B^{|A|}$ direkt çarpım grubunun sunuşu, $a, a' \in A$ ve $y, z \in \underline{y}$ olmak üzere,

$$\wp_K = \langle \underline{y}^{(a)} ; \underline{s}^{(a)}, y^{(a)}z^{(a')} = z^{(a')}y^{(a)} \ (a < a') \rangle$$

biçimindedir. Ayrıca yarı direkt çarpımın tanımından gelen T_{yx} ($x \in \underline{x}, y \in \underline{y}$) kümesi $\{y^{(a)}xy^{(aa_x)^{-1}}x^{-1} : y \in \underline{y}, x \in \underline{x}\}$ biçimindeki bağıntıların kümesidir. O halde 2.2.6 Sonuçtan ispat tamamlanmış olur. \diamond

3.2.3 Örnek: A ve B gruplarının sunuşları sırasıyla $\wp_A = \langle x ; x^2 \rangle$ ve $\wp_B = \langle y ; y^2 \rangle$ olsun. Bu durumda $G = B \int A$ grubunun sunuşunu oluşturalım: $K = B^{|A|} = B \times B$ olduğundan, $\wp_K = \langle y^{(0)}, y^{(1)} ; y^{(0)^2}, y^{(1)^2}, y^{(0)}y^{(1)} = y^{(1)}y^{(0)} \rangle$ sunuşu vardır. Burada 1 ve x elemanlarının kopyaları sırasıyla $y^{(0)}$ ve $y^{(1)}$ olarak alınmıştır. Şimdi $\{y^{(a)}xy^{(aa_x)^{-1}}x^{-1} : a \in A\}$ kümesinin elemanlarını belirleyelim. İlk olarak $a=1$ olarak alırsak, $x^{-1}y^{(0)}x = y^{(1)}$ bağıntısı elde edilir. Benzer olarak $a=x$ için $x^{-1}y^{(1)}x = y^{(0)}$ elde edilir. Böylece 3.2.2 Teorem den

$$\mathcal{P}_G = \langle y^{(0)}, y^{(1)}, x; x^2, y^{(0)^2}, y^{(1)^2}, y^{(0)}y^{(1)} = y^{(1)}y^{(0)}, x^{-1}y^{(0)}x = y^{(1)}, x^{-1}y^{(1)}x = y^{(0)} \rangle$$

sunuşu G grubunu temsil eder. Aslında *Tietze dönüşümlerini* kullanarak bu G grubun

$$\langle y, x; x^2, y^2, (yx)^4 \rangle$$

sunuşuyla verilen D_4 dihedral grubuna izomorf olduğunu açıklar. •

3.3. Cayley Graf

Cayley graflar, bu bölümün girişinde belirtildiği üzere, 3. Bölüm için anahtar konulardan biridir. Çünkü Cayley graf yardımıyla standart wreath çarpımın sunuşu elde edilecek ve bu sunuş üzerinde, maksimal ağaç kullanılarak, üreteç ve bağıntı kümesindeki elemanlar arasında silme işlemi yapılacaktır. Bu ise bize, bu sunuşun minimal üreteç sayısında etkiliğini inceleme olanağını verecektir. Cayley graf ile ilgili daha detaylı bilgilere [2], [3] ve [44] kaynaklarından ulaşılabilir.

3.3.1: Tanım: \mathbf{v} ve \mathbf{e} birbirinden farklı iki küme ve bu kümeler arasında

$$\iota: \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \tau: \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \iota^{-1}: \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}$$

her $e \in \mathbf{e}$ için, $\iota(e) = \tau(e^{-1})$, $(e^{-1})^{-1} = e$ ve $e \neq e^{-1}$ koşullarını sağlayan fonksiyonlar olsun. \mathbf{v} , \mathbf{e} kümelerinden ve ι, τ, ι^{-1} fonksiyonlarından oluşan $(\mathbf{v}, \mathbf{e}, \iota, \tau, \iota^{-1})$ yapısına *graf* denir ve Γ notasyonu ile gösterilir. Burada \mathbf{v} kümesine *köşe kümesi*, \mathbf{e} kümesine *kenar kümesi*, ι fonksiyonuna *başlangıç fonksiyonu* ve ι^{-1} fonksiyonuna da *ters fonksiyon* denir. Ayrıca kenar kümesindeki bir $e \in \mathbf{e}$ kenarı için, $\iota(e)$ köşesine, e kenarının *başlangıç noktası* ve $\tau(e)$ köşesinde, e kenarının *bitiş noktası* denir. Bir Γ grafında \mathbf{e} kenar kümesindeki e, e^{-1} kenar çiftlerinden sadece birinin seçilmesiyle oluşturulan kümeye Γ grafının *yönlendirilmiş kenar kümesi* denir ve \mathbf{e}^+ gösterilir. Kenar kümesi \mathbf{e}^+ olan grafa ise *yönlendirilmiş graf* denir.

e_1, e_2, \dots, e_n kenarların sonlu bir dizisi olmak üzere, $i = 1, 2, \dots, n-1$ için, $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$ oluyorsa, bu diziye Γ grafı içinde bir *yol* denir. Verilen bir $e_1 e_2 \dots e_n$

yolu için, $\iota(e_1) = \tau(e_n)$ oluyor ise bu yola *kapalı yol* denir. Ayrıca bir Γ grafının içindeki herhangi iki köşeyi birleştiren bir yol varsa bu Γ grafına *bağlantılı graf* denir.

\mathbf{v} kümesinin bir alt kümesi \mathbf{v}_1 ve \mathbf{e} kümesinin bir alt kümesi de \mathbf{e}_1 olsun.

Herhangi bir $e' \in \mathbf{e}_1$ elemanı için,

$$\text{i) } \iota(e'), \tau(e') \in \mathbf{v}_1$$

$$\text{ii) } (e')^{-1} \in \mathbf{e}_1$$

şartları sağlanıyorsa, \mathbf{e}_1 kenar kümesi ve \mathbf{v}_1 köşe kümesinden oluşan Γ' grafına Γ grafının *alt grafi* denir. Bağlantılı olan ve içinden boştan farklı basit kapalı yolu olmayan bir Γ grafına *ağaç* denir. Ayrıca bağlantılı bir Γ grafının T gibi bir alt grafi,

$$\text{i) } T \text{ bir ağaç,}$$

$$\text{ii) } T \text{ nin köşe kümesiyle } \Gamma \text{ grafının köşe kümesi aynı,}$$

koşullarını sağlıyorsa, bu T ağacına *maksimal ağaç* denir. [44] de her grafın en az bir tane maksimal ağacının olduğu gösterilmiştir.

G sonlu bir grup ve S kümesi de G nin üreteç kümesi olsun. Ayrıca $V(G, S)$ kümesini elemanları G den alınan elemanlardan oluşan *köşe kümesi* ve $E(G, S)$ kümesini de elemanları $G \times S = \{(g, s) : g \in G, s \in S\}$ den oluşan *kenar kümesi* olarak ifade edelim.

Yukarıda verilen $V(G, S)$ ve $E(G, S)$ kümeleriyle oluşturulan grafa, G nin Cayley grafi denir ve genellikle Γ_G ile ifade edilir. Bir (g, s) kenarının *başlangıç köşesi* g ve *bitiş köşesi* ise gs dir. Ayrıca (g, s) kenarının *tersi* (gs, s^{-1}) biçimindedir.

3.4 Yardımcı Teoremler ve Ana Sonuçlar

A sonlu değişmeli bir grup olsun. O halde $m_i \mid m_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k-1$) olmak üzere, $A = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ biçiminde yazılabilir. Burada $t(A)=m_1$ ile A grubunun ilk burulma numarasını (torsion number) gösterelim. Ayrıca $d(A)$ ile A grubunun minimal üreteç sayısını ifade edelim. Buna göre ana teoremin ispatında kullanacağımız, sonlu değişmeli grupların minimal üreteç sayıları ile ilgili aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.4.1 Önerme: A ve B sonlu değişmeli gruplar ve $(t(A), t(B)) \neq 1$ olsun. Bu durumda $d(A \oplus B) = d(A) + d(B)$ dir.

İspat: İlk olarak $t(A)$ yada $t(B)$ den herhangi birinin sıfır olduğunu kabul edelim. Mesela $t(A)=0$ olsun. Bu durumda $A=0$ olacaktır. Buradan $d(B) = d(B)$ elde edilir.

Şimdi $t(A)$ ve $t(B)$ den her ikisinin de sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Böylece, $m_i \mid m_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k-1$) olmak üzere, $A = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ biçiminde yazılabilir. Benzer olarak $n_j \mid n_{j+1}$ ($1 \leq j \leq l-1$) olmak üzere, $B = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_l}$ biçimindedir. Böylece $t(A)=m_1$ ve $t(B)=n_1$ dir. Bu durumda

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_l}$$

olacaktır. Ancak $(t(A), t(B)) \neq 1$ olduğundan, $p \mid t(A)$ ve $p \mid t(B)$ olacak şekilde bir p asal sayısı vardır. O halde $p \mid m_1, p \mid m_2, \dots, p \mid m_k, p \mid n_1, p \mid n_2, \dots, p \mid n_l$ dir. Dolayısıyla,

$$\Phi_i : \mathbb{Z}_{m_i} \rightarrow \mathbb{Z}_p \quad \text{ve} \quad \Psi_j : \mathbb{Z}_{n_j} \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

şeklinde Φ_i ve Ψ_j örten homomorfizmaları vardır. Buradan bu homomorfizmaların genişlemeri olan

$$\Phi : \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{(k)} \quad \text{ve}$$

$$\Psi : \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_l} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{(l)}$$

örten homomorfizmaları elde edilir. O halde,

$$\Phi \oplus \Psi : \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_l} \rightarrow \mathbb{Z}_p^{(k+l)}$$

olur. Burada $\mathbb{Z}_p^{(k)}$, \mathbb{Z}_p üzerinde bir vektör uzayıdır [67]. Dolayısıyla bir vektör uzayının herhangi iki tabanı aynı sayıda eleman sayısına sahip olacağından [43], $\mathbb{Z}_p^{(k)}$ uzayı k sayısından daha az sayıda eleman tarafından üretilemez. Bu ise bize $\mathbb{Z}_p^{(k)}$ nın boyutunu verir. Diğer bir deyişle, $d(\mathbb{Z}_p^{(k)})=k$ dir. Buradan da, bir grubun üreteç kümesinin minimum sayısı, bu grubun herhangi bir homomorfik görüntüsünün üreteç kümesinin minimum sayısından büyük yada eşit olacağından ve $\mathbb{Z}_p^{(k)}$ grubu A grubunun homomorfik görüntüsü olduğundan, $d(A) \geq k$ elde ederiz. Diğer taraftan, A grubu $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ şeklinde k tane eleman tarafından üretileceğinden $d(A) \leq k$ elde edilir. O halde sonuç olarak $d(A) = k$ elde edilir.

Benzer biçimde, A grubu için yukarıda yapılan işlemleri B grubu üzerinde tekrarladığımızda, $d(B) = l$ sonucunu elde ederiz. Böylece $d(A \oplus B) = d(A) + d(B)$ dir. Bu da istenilen sonuçtur. \diamond

Aşağıda belirtilen 3.4.2, 3.4.3 ve 3.4.4 Önermeler [48] de bulunabilir.

3.4.2 Önerme (Schur 1904): B sonlu bir grup olsun. O zaman

i) $H_2(B)$ sonlu bir grup olup, elemanlarının mertebesi B grubunun mertebesini böler.

ii) B devirli ise $H_2(B) = 1$ dir.

A değişmeli bir grup olsun. Ayrıca $A \# A$ ifadesi, $A \otimes A$ grubunun $a \otimes b + b \otimes a$ ($a, b \in A$) formundaki elemanları ile üretilen bir alt grubu olsun. G herhangi bir grup olmak üzere G nin mertebesi 2 olan elemanlarına inversiyon denir.

3.4.3 Önerme (Blackburn 1972): A grubundaki inversiyonların sayısı m olmak üzere

$$H_2(B \int A) = H_2(B) \oplus H_2(A) \oplus (H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m-1)} \oplus (H_1(B) \# H_1(B))^m$$

dır.

3.4.4 Önerme: B sonlu bir grup, $H_1(B) = \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}_{n_i}$ ve s sembolü çift sayı olan

n_i ($1 \leq i \leq t$) lerin toplam sayısı olsun. Bu durumda

$$H_1(B) \# H_1(B) \cong \bigoplus_{1 \leq i < j \leq t} \mathbb{Z}_{(n_i, n_j)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(s)}$$

dir. Burada $\mathbb{Z}_2^{(s)}$, s tane \mathbb{Z}_2 grubunun direkt çarpımıdır.

3.4.5 Teorem [29]: B sonlu bir p -grup olsun. O zaman $d(H_1(B)) = d(B)$ dir.

3.4.6 Teorem [29]: A ve B , sırasıyla g ve n üretece sahip, sonlu gruplar olmak üzere, $G = B \int A$ grubu için

i) A ve B , $d(B) = n$ olmak üzere, sırasıyla $\wp_A = \langle \underline{x} ; \underline{r} \rangle$ ve

$\wp_B = \langle \underline{y} ; \underline{s} \rangle$ şeklinde etkili sunuşlara sahip olsun,

ii) $d(B) = d(H_1(B))$,

iii) A ve $H_1(B)$ nin mertebesi çift ve de $t(H_2(A)), t(H_2(B)), t(H_1(B))$ çift

VEYA

A nın mertebesi tek, p tek asalı için, $p \mid t(H_2(A)), p \mid t(H_2(B))$ ve

$p \mid t(H_1(B))$,

koşullarını sağlasın. Bu durumda G grubu $g+n$ üreteçli etkili bir sunuşa sahiptir.

Şimdi 3.4.6 Teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.4.7 Teorem: A ve B birer p -grup olmak üzere $G = B \int A$ olsun. Ayrıca 3.4.6 Teoremin i). koşulu sağlansın. O zaman G grubu $g+n$ üreteçli etkili bir sunuşa sahiptir.

İspat: İspat $\delta(G)$ nin hesaplanması (homolojik kısım) ve $B \int A$ nın etkili sunuşunun bulunması (geometrik kısım) biçiminde iki ayrı bölüm halinde incelenmiştir. İlk olarak, p asal sayısının tek ve çift olma durumlarına göre $\delta(G)$ değerini hesaplayalım.

a) $\delta(G)$ nin hesaplanması

G sonlu bir grup olduğundan, $rk_z(H_1(G)) = 0$ dır. Böylece $\delta(G) = 1 + d(H_2(G))$ olacaktır.

1. DURUM : p tek asal olsun. Bu durumda inversiyon sayısı $m=0$ olur. Böylece 3.4.3 Önermeden

$$H_2(B \int A) = H_2(B) \oplus H_2(A) \oplus (H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)}$$

elde edilir. Buradan da, 3.4.1 Önermeden hareketle,

$$\begin{aligned} d(H_2(B \int A)) &= d(H_2(B) \oplus H_2(A) \oplus (H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)}) \\ &= d(H_2(B)) + d(H_2(A)) + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)}) \end{aligned}$$

dır. Bu eşitliğe 1 ekleyip çıkarttığımızda

$$1 + d(H_2(B \int A)) = 1 + d(H_2(B)) + 1 + d(H_2(A)) - 1 + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)})$$

elde ederiz. Böylece

$$\delta(G) = \delta(A) + \delta(B) - 1 + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)})$$

olur. Buradan, kabulümüz gereği, A ve B etkili bir sunuşa sahip olduğundan $\delta(G)$ değerini

$$\chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)})$$

olarak alabiliriz.

Şimdi $d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)})$ değerini hesaplayalım. Varsayım gereği B bir p -grup olduğundan B nin birinci homoloji grubu olan $H_1(B)$ grubu da p -grup tur. Ayrıca i) koşulundan ve 3.4.5 Teoremden dolayı $d(H_1(B)) = d(B) = n$ elde edilir. Böylece B nin birinci homoloji grubu

$$H_1(B) = \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{k_n}}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} H_1(B) \otimes H_1(B) &= (\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{k_n}}) \otimes (\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{k_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{k_n}}) \\ &= (\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_1}}) \otimes (\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_2}}) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{Z}_{p^{k_1}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_n}}) \otimes \\ &\quad (\mathbb{Z}_{p^{k_2}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_1}}) \otimes (\mathbb{Z}_{p^{k_2}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_2}}) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{Z}_{p^{k_2}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_n}}) \otimes \\ &\quad \vdots \\ &\quad (\mathbb{Z}_{p^{k_n}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_1}}) \otimes (\mathbb{Z}_{p^{k_n}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_2}}) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{Z}_{p^{k_n}} \otimes \mathbb{Z}_{p^{k_n}}) \\ &= (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_1, k_1)}}) \otimes (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_1, k_2)}}) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_1, k_n)}}) \otimes \\ &\quad (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_2, k_1)}}) \otimes (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_2, k_2)}}) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_2, k_n)}}) \otimes \\ &\quad \vdots \\ &\quad (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_n, k_1)}}) \otimes (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_n, k_2)}}) \otimes \cdots \otimes (\mathbb{Z}_{p^{\min(k_n, k_n)}}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $d(H_1(B) \otimes H_1(B)) = n^2$ olur. Buradan

$$d((H_1(B) \oplus H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-1)}) = \frac{1}{2}(|A|-1)n^2$$

olur. O halde

$$\delta(G) = \chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2}(|A| - 1)n^2 \quad (3.2)$$

eşitliği elde edilir.

2. DURUM: $p=2$ olsun. O halde 3.4.3 Önermeden,

$$H_2(B \int A) = H_2(B) \oplus H_2(A) \oplus (H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m-1)} \oplus (H_1(B) \# H_1(B))^m$$

dir. İspatın 1. Durumunda olduğu gibi, 3.4.1 Önermeden,

$$\begin{aligned} d(H_2(B \int A)) &= d(H_2(B) \oplus H_2(A) \oplus (H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m-1)} \oplus (H_1(B) \# H_1(B))^m) \\ &= d(H_2(B)) + d(H_2(A)) + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m-1)}) + d((H_1(B) \# H_1(B))^m) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğe 1 ekleyip çıkarttığımızda,

$$\begin{aligned} 1 + d(H_2(G)) &= 1 + d(H_2(B)) + 1 + d(H_2(A)) - 1 + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m-1)}) \\ &\quad + d((H_1(B) \# H_1(B))^m) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\delta(G) = \delta(A) + \delta(B) - 1 + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m+1)}) + d((H_1(B) \# H_1(B))^m)$$

elde edilir. Buradan da A ve B etkili bir sunuşa sahip olduğundan $\delta(G)$ değeri

$$\chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m-1)}) + d((H_1(B) \# H_1(B))^m)$$

değerine eşit olur.

Şimdi $d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m+1)})$ değerini hesaplayalım. Varsayım gereği B bir 2-grup olduğundan B nin birinci homoloji grubu olan $H_1(B)$ grubu da 2-grup tur. Ayrıca i). koşuldan ve 3.4.5 Teorem den dolayı, $d(H_1(B)) = d(B) = n$ elde edilir. O halde B nin birinci homoloji grubu

$$H_1(B) = \mathbb{Z}_{2^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{2^{k_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{k_n}}$$

olacaktır. Dolayısıyla, 1. Duruma benzer olarak, $d(H_1(B) \otimes H_1(B)) = n^2$ olur.

Buradan

$$d((H_1(B) \otimes H_1(B))^{\frac{1}{2}(|A|-m+1)}) = \frac{1}{2}(|A|-m+1)n^2$$

elde edilir.

Şimdi 3.4.4 Önermeden hareketle $H_1(B) \# H_1(B)$ değerini hesaplarsak

$$\begin{aligned} H_1(B) \# H_1(B) &= (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_2)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_3)}}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_n)}}) \oplus \\ &(\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_3)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_4)}}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_n)}}) \oplus \\ &\vdots \\ &(\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-2}, k_{n-1})}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-2}, k_n)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-1}, k_n)}}) \oplus \mathbb{Z}_2^{(n)} \end{aligned}$$

olur. Burada $H_1(B)$ grubu 2-grup olduğundan, $s = n$ olarak alınmıştır. Böylece 3.4.1 Önermeden dolayı,

$$\begin{aligned} d(H_1(B) \# H_1(B)) &= d((\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_2)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_3)}}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_n)}}) \oplus \\ &(\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_3)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_4)}}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_n)}}) \oplus \\ &\vdots \\ &(\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-2}, k_{n-1})}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-2}, k_n)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-1}, k_n)}}) \oplus \mathbb{Z}_2^{(n)}) \\ &= d((\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_2)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_3)}}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_1, k_n)}})) + \\ &d((\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_3)}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_4)}}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_2, k_n)}})) + \\ &\vdots \\ &d((\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-2}, k_{n-1})}}) \oplus (\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-2}, k_n)}})) + d(\mathbb{Z}_{2^{\min(k_{n-1}, k_n)}}) + d(\mathbb{Z}_2^{(n)}) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$d(H_1(B)\#H_1(B)) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + n = \frac{n+n^2}{2}$$

elde edilir. Böylece $d((H_1(B)\#H_1(B))^m) = m(\frac{n+n^2}{2})$ olur. O halde

$$\begin{aligned} \delta(G) &= \chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2}(|A| - m + 1)n^2 + m(\frac{n+n^2}{2}) \\ &= \chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2}n^2(|A| + \frac{m}{n} - 1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir.

b) G grubunun etkili sunuşunun bulunması

$G = B \int A$ grubunun etkililiğini oluşturabilmek için her şeyden önce (3.1) eşitliği ile verdiğimiz sunuşu başka bir metot ile elde edelim:

Bu metotta asıl olan *Cayley graf* kullanımımızdır. O halde A ve B sonlu gruplar olmak üzere $G = B \int A$ grubu verilsin. Aşağıdaki *sunuş inşası* kullanılabilir:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_g\}$ olsun. Ayrıca $\wp_A = \langle \underline{x}; \underline{r} \rangle$ sunuşuna bağlı olarak A grubunun üreteç kümesini $\{a_x; x \in \underline{x}\}$ olarak ve $\wp_B = \langle \underline{y}; \underline{s} \rangle$ sunuşuna bağlı olarak B grubunun üreteç kümesini $\{b_y; y \in \underline{y}\}$ olarak alalım.

- $a_1 = 1$ olmak üzere $a_1 < a_2 < \dots < a_g$ biçiminde bir sıralamanın seçilmesi.
- A grubunun Γ_A Cayley grafının çizilmesi.
- Her bir $a \in A$ köşesi için, \wp_B sunuşunun $\langle \underline{y}^{(a)}; \underline{s}^{(a)} \rangle$ biçimindeki

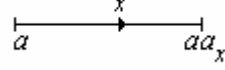
kopyalarının alınması.

- Her $a, a' \in A$ ($a \neq a'$) için,

$$y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)}, \quad (y, z \in \underline{y})$$

bağıntılarının yazılması.

- Her bir pozitif kenar için, Cayley graf tan hareketle,



figüründe olduğu gibi,

$$x^{-1}y^{(a)}x = y^{(aa_x)}$$

bağıntılarının yazılması.

Bu inşaada verilen yukarıdaki adımlardan sonra, standart wreath çarpım için 3.2.2 Teorem deki

$$\wp_G = \langle \underline{y}^{(a)}, \underline{x}; \underline{s}^{(a)}, \underline{r}, y^{(a)}z^{(a')} = z^{(a')}y^{(a)} \ (a < a'), x^{-1}y^{(a)}x = y^{(aa_x)} \rangle \quad (3.4)$$

sunuşu elde edilir.

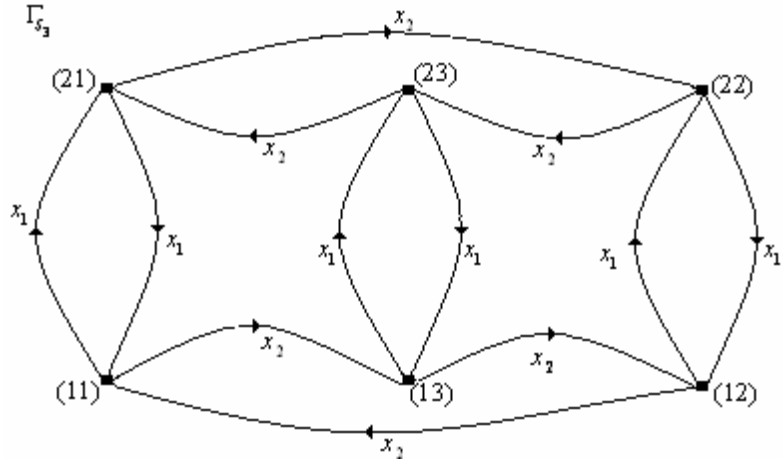
- Son olarak elde edilen \wp_G sunuşu için, Cayley graftan seçilecek maksimal ağaca bağlı olarak Tietze dönüşümlerinin uygulanması.

Not: Sonlu A ve B grupları için yukarıda tanımlanan inşaanın aslında p -gruplar üzerine uygulanabileceği açıktır.

Şimdi bu yapıyla ilgili bir takım örnekler verelim.

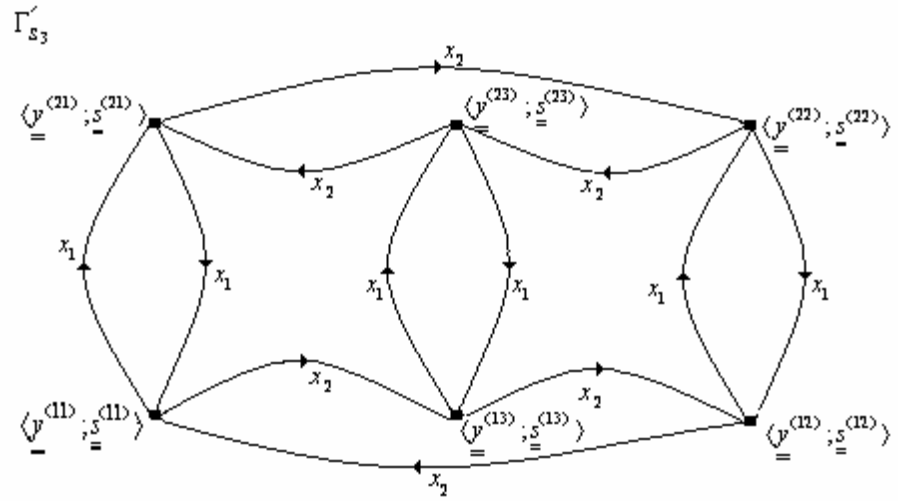
3.4.8 Örnek: S_3 simetrik grubunu düşünelim. B herhangi bir grup olmak üzere, yukarıda verilen yapıyı kullanarak, $G = B \int S_3$ grubunun sunuşunu oluşturalım.

S_3 grubunun sunuşunu $\wp_{S_3} = \langle x_1, x_2; x_1^2, x_2^3, (x_1x_2)^2 \rangle$ biçiminde alalım. Kolaylık olması açısından, S_3 grubuna ait $1, x_1, x_2, x_2^2, x_1x_2, x_1x_2^2$ elemanlarını (11), (21), (12), (13), (22) ve (23) olarak işaretleyelim. Buna göre ilk önce S_3 grubunun Cayley grafını çizelim.



Şekil 3.1

Her bir (ij) ($1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3$) köşeleri için φ_B sunuşunun $\langle \underline{y}^{(ij)}; \underline{s}^{(ij)} \rangle$ kopyalarını oluşturalım. Dolayısıyla, Şekil 3.1 den hareketle, bu kopyalardan Cayley grafi aşağıdaki biçimde çizebiliriz.



Şekil 3.2

Böylece Şekil 3.2 den,

$$x_1^{-1} y^{(11)} x_1 = y^{(21)}, \quad x_1^{-1} y^{(21)} x_1 = y^{(11)}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{-1} y^{(22)} x_1 &= y^{(12)}, & x_1^{-1} y^{(12)} x_1 &= y^{(22)} \\
x_1^{-1} y^{(23)} x_1 &= y^{(13)}, & x_1^{-1} y^{(13)} x_1 &= y^{(23)} \\
x_2^{-1} y^{(11)} x_2 &= y^{(13)}, & x_2^{-1} y^{(13)} x_2 &= y^{(12)} \\
x_2^{-1} y^{(21)} x_2 &= y^{(22)}, & x_2^{-1} y^{(22)} x_2 &= y^{(23)} \\
x_2^{-1} y^{(23)} x_2 &= y^{(21)}, & x_2^{-1} y^{(12)} x_2 &= y^{(11)}
\end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir. Başka bir deyişle bu bağıntılar her bir (ij) $(1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ için,

$$\begin{aligned}
x_1^{-1} y^{(ij)} x_1 &= y^{(i+1j)}, & i &\equiv 0 \pmod{2} \\
x_2^{-1} y^{(ij)} x_2 &= y^{(ij+1)}, & j &\equiv 0 \pmod{3}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Şekil 3.2 den, her (ij) $(1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ ve $(ij) < (lm)$ için,

$$y^{(ij)} z^{(lm)} = z^{(lm)} y^{(ij)}$$

bağıntılarına sahip oluruz.

Böylece G grubunun sunuşu

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_G = \langle \underline{y}^{(ij)}, x_1, x_2; \underline{s}^{(ij)}, x_1^2, x_2^3, (x_1 x_2)^2, y^{(ij)} z^{(lm)} = z^{(lm)} y^{(ij)}, \\
x_1^{-1} y^{(ij)} x_1 = y^{(i+1j)}, i \equiv 0 \pmod{2} \\
x_2^{-1} y^{(ij)} x_2 = y^{(ij+1)}, j \equiv 0 \pmod{3} \rangle
\end{aligned}$$

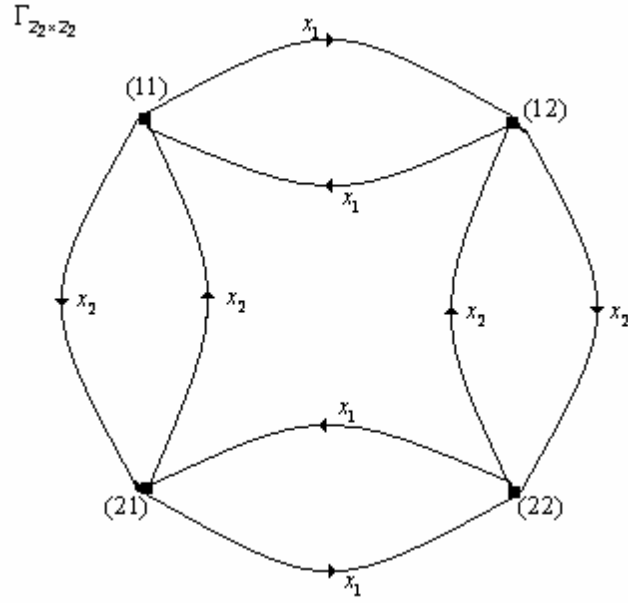
şeklinde olacaktır. •

3.4.9 Örnek: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubunu düşünelim. B herhangi bir grup olmak üzere, 3.4.8 Örnekte olduğu gibi, yukarıda verilen yapıyı kullanarak, $G = B \int \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubunun sunuşunu oluşturalım.

Bunun için $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubunun sunuşunu

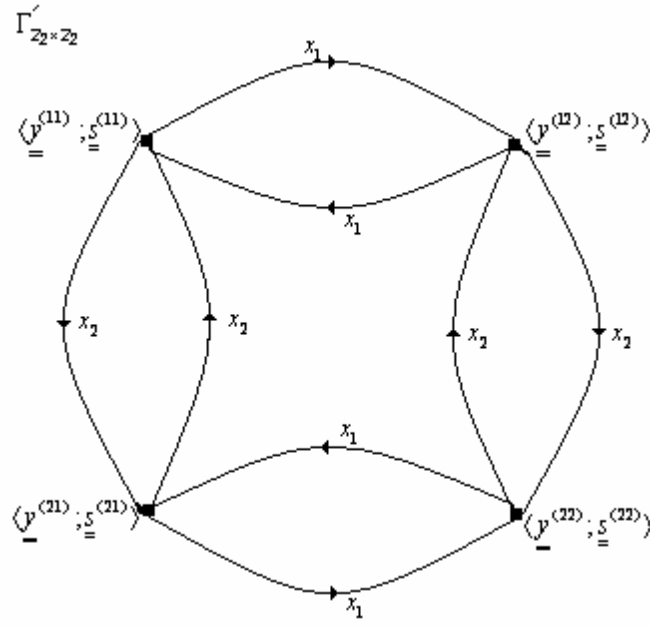
$$\mathcal{G}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} = \langle x_1, x_2 : x_1^2, x_2^2, x_1 x_2 = x_2 x_1 \rangle$$

olarak alalım. Kolaylık olması açısından $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubuna ait 1, x_1 , x_2 ve $x_1 x_2$ elemanlarını (11), (12), (21) ve (22) olarak işaretleyelim. Şimdi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ grubunun Cayley grafını Şekil 3.3 deki gibi çizebiliriz.



Şekil 3.3

Ayrıca, her bir (ij) ($i, j \in \{1,2\}$) köşesi için, \mathcal{G}_B sunuşunun $\langle \underline{y}^{(ij)}; \underline{s}^{(ij)} \rangle$ kopyalarını oluşturalım. Dolayısıyla, Şekil 3.3 ün yardımıyla, bu kopyalardan Cayley grafi Şekil 3.4 deki gibi çizebiliriz.



Şekil 3.4

Böylece Şekil 3.4 den

$$\left. \begin{array}{ll} x_1^{-1} y^{(11)} x_1 = y^{(12)}, & x_2^{-1} y^{(11)} x_2 = y^{(21)} \\ x_1^{-1} y^{(12)} x_1 = y^{(11)}, & x_2^{-1} y^{(21)} x_2 = y^{(11)} \\ x_1^{-1} y^{(21)} x_1 = y^{(22)}, & x_2^{-1} y^{(12)} x_2 = y^{(22)} \\ x_1^{-1} y^{(22)} x_1 = y^{(21)}, & x_2^{-1} y^{(22)} x_2 = y^{(12)} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

bağıntıları elde edilir. Başka bir deyişle bu bağıntılar, her bir (ij) ($i, j \in \{1, 2\}$) köşesi için,

$$\begin{aligned} x_1^{-1} y^{(ij)} x_1 &= y^{(i+1j)}, & j &\equiv 0 \pmod{2} \\ x_2^{-1} y^{(ij)} x_2 &= y^{(i+1j)}, & i &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Şekil 3.4 den, her (ij) ($i, j \in \{1, 2\}$) ve $(ij) < (lm)$ için,

$$y^{(ij)} z^{(lm)} = z^{(lm)} y^{(ij)} \quad (3.6)$$

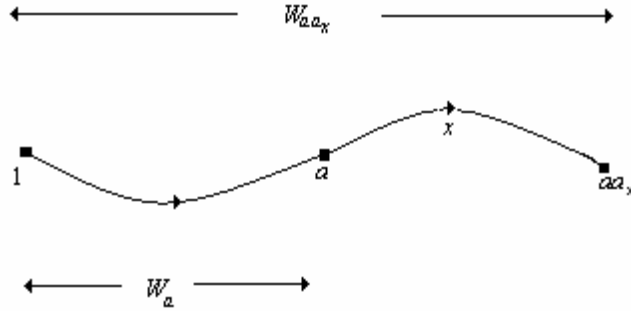
bağıntılarına sahip oluruz.

Böylece G grubunun sunuşu

$$\begin{aligned} \wp_G = \langle \underline{\underline{y}}^{(ij)}, x_1, x_2; \underline{\underline{s}}^{(ij)}, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2 = x_2 x_1, y^{(ij)} z^{(lm)} = z^{(lm)} y^{(ij)}, \\ x_1^{-1} y^{(ij)} x_1 = y^{(ij+1)}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ x_2^{-1} y^{(ij)} x_2 = y^{(i+1j)}, i \equiv 0 \pmod{2} \rangle \quad (3.7) \end{aligned}$$

biçimindedir. •

A ve B sonlu gruplarının sunuşları sırasıyla $\wp_A = \langle \underline{\underline{x}}; \underline{\underline{r}} \rangle$, $\wp_B = \langle \underline{\underline{y}}; \underline{\underline{s}} \rangle$ olmak üzere, $G = B \int A$ çarpımını göz önüne alalım. Ayrıca A grubunun Cayley grafi Γ_A olsun. Γ_A dan seçilen maksimal ağaca T_A diyelim. Aşağıda Şekil 3.5 de gösterildiği gibi, her bir $a \in A$ için, γ_a sembolü 1 den a ya olan geodezik (en kısa yol) olmak üzere, γ_a yı W_a kelimesi ile etiketleyelim.



Şekil 3.5

Şimdi Cayley grafdan elde edilen ve (3.4) ile gösterilen standart wreath çarpımın \wp_G sunuşunda, yine Cayley graftan seçilen maksimal ağaç yardımıyla, üreteç ve bağıntı kümelerinin elemanları arasında indirgeme işlemlerinin uygulandığı Tietze dönüşümlerini gösterelim.

(T1) Her bir $y^{(a)} \in \underline{\underline{y}}$ için, $y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a$ bağıntıları (3.4) ile verilen sunuşa eklenebilir. Çünkü bu bağıntılar $x^{-1} y^{(a)} x = y^{(aa_x)}$ den ve $\underline{\underline{r}}$ kümesindeki bağıntılarından elde edilmektedir. Bu durumda (3.4) ile verilen sunuş

$$\wp_1 = \langle \underline{\underline{y}}^{(a)}, \underline{\underline{x}}; \underline{\underline{s}}^{(a)}, \underline{\underline{r}}, y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)} \ (a < a'), x^{-1} y^{(a)} x = y^{(aa_x)}, \rangle$$

$$y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a \rangle \quad (3.8)$$

haline gelir.

(T2) Her bir $y^{(a)} \in \underline{y}$ için, $x^{-1} y^{(a)} x = y^{(aa_x)}$ bağıntıları \wp_1 den silinebilir.

Çünkü bu bağıntılar $y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a$ den ve \underline{r} kümesindeki bağıntılardan elde edilmektedir. Şimdi bu durumu gösterelim:

Bunun için ilk önce $y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a$ elemanını x^{-1} ile soldan x ile sağdan çarpalım. Bu durumda

$$x^{-1} y^{(a)} x = x^{-1} W_a^{-1} y^{(1)} W_a x \quad (3.9)$$

elde ederiz. Böylece, Şekil 3.5 den görüleceği gibi, (3.9) ile verilen ifade

$$x^{-1} y^{(a)} x = W_{aa_x}^{-1} y^{(1)} W_{aa_x} \quad (3.10)$$

değerine eşit olur. Ayrıca, $y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a$ bağıntısında a yerine aa_x aldığımızda,

$$y^{(aa_x)} = W_{aa_x}^{-1} y^{(1)} W_{aa_x} \quad (3.11)$$

eşitliğini elde ederiz. O halde (3.10) ve (3.11) den

$$x^{-1} y^{(a)} x = y^{(aa_x)}$$

ifadesine sahip oluruz. Sonuç olarak (3.8) ile verilen sunuş

$$\wp_2 = \langle \underline{y}^{(a)}, \underline{x}; \underline{s}^{(a)}, \underline{r}, y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)} \ (a < a'), y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a \rangle \quad (3.12)$$

haline gelir.

(T3) Her $a \in A$ ($a \neq 1$) için, $\underline{s}^{(a)}$ bağıntıları \wp_2 sunuşundan silinebilir.

Çünkü bu bağıntılar, $\underline{s}^{(1)}$ ve $y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a$ bağıntılarından elde edilmektedir.

Silme işlemi sonunda, sunuş içerisinde, $\underline{\underline{s}}^{(a)}$ bağıntılarından sadece $\underline{\underline{s}}^{(1)}$ bağıntısı kalacaktır. Şimdi bu durumu gösterelim:

Bunun için önce, $S^{(1)} \in \underline{\underline{s}}^{(1)}$ ve $S^{(a)} \in \underline{\underline{s}}^{(a)}$ ($a \neq 1$) elemanlarını seçelim. $S^{(1)}$ ve $S^{(a)}$ elemanları sırasıyla, $y^{(1)}$ ve $y^{(a)}$ elemanları tipinde yazılabileceğinden dolayı $y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a$ bağıntısını,

$$S^{(a)} = W_a^{-1} S^{(1)} W_a \quad (a \neq 1)$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $S^{(1)} \in \underline{\underline{s}}^{(1)}$ olup, $\underline{\underline{s}}^{(1)}$ bağıntısı (3.12) de verilen \wp_2 sunuşuna ait olduğundan, $S^{(1)} \approx 1$ dir. Buradan $S^{(a)} \approx 1$ olur. Bu ise bize $\underline{\underline{s}}^{(a)}$ bağıntı kümesinin $\underline{\underline{s}}^{(1)}$ bağıntı kümesinden elde edildiğini söyler. Böylece, her $a \in A$ ($a \neq 1$) için, $\underline{\underline{s}}^{(a)}$ bağıntılarını silebiliriz. O halde sunuş içerisinde sadece $\underline{\underline{s}}^{(1)}$ bağıntı kümesi kalacaktır. Böylece bu dönüşüm sonunda, (3.12) ile verilen sunuş

$$\wp_3 = \langle \underline{\underline{y}}^{(a)}, \underline{\underline{x}}; \underline{\underline{s}}^{(1)}, \underline{\underline{r}}, y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)} \quad (a < a'), y^{(a)} = W_a^{-1} y^{(1)} W_a \rangle \quad (3.13)$$

haline gelir.

(T4) \wp_3 sunuşundan, her $a \in A$ ($a \neq 1$) için, $\underline{\underline{y}}^{(a)}$ üreteçlerinin silinmesi ve $y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)}$ bağıntılarındaki her $y^{(a)} \in \underline{\underline{y}}^{(a)}$ üreteç elemanının $W_a^{-1} y^{(1)} W_a$ ile yer değiştirmesi dönüşümüdür. Bu işlem sonucunda sunuş içerisinde sadece $\underline{\underline{y}}^{(1)}$ kümesine ait üreteç elemanları kalır. Böylece (3.13) ile verilen sunuş

$$\wp_4 = \langle \underline{\underline{y}}^{(1)}, \underline{\underline{x}}; \underline{\underline{s}}^{(1)}, \underline{\underline{r}}, [W_a^{-1} y^{(1)} W_a, W_{a'}^{-1} z^{(1)} W_{a'}] \quad (a < a') \rangle \quad (3.14)$$

haline gelir.

Bu aşamalardan sonra, her $a \in A$ ($a \neq 1$) için, elimizde $[y^{(1)}, W_a^{-1} z^{(1)} W_a]$

formunda toplam $|A|-1$ tane komütatör eleman kalır. Bunlardan başka, her $a_1, a_2 \in A$ ($a_1, a_2 \neq 1$) için,

$$[W_{a_1}^{-1}y^{(1)}W_{a_1}, W_{a_2}^{-1}z^{(1)}W_{a_2}] \quad (3.15)$$

formunda komütatör elemanlar da vardır. Şimdi bu elemanları soldan W_{a_2} ve sağdan $W_{a_2}^{-1}$ ile çarpalım. Bu durumda (3.15) ile verilen form

$$[W_{a_2}W_{a_1}^{-1}y^{(1)}W_{a_1}W_{a_2}^{-1}, z^{(1)}]$$

haline gelir. Bu komütatör formu

$$[z^{(1)}, W_{a_2}W_{a_1}^{-1}y^{(1)}W_{a_1}W_{a_2}^{-1}]$$

biçiminde yazabiliriz. Yine elde edilen bu komütatör formu

$$[y^{(1)}, W_{a_2}W_{a_1}^{-1}z^{(1)}W_{a_1}W_{a_2}^{-1}] \quad (3.16)$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca $W_{a_1}W_{a_2}^{-1} \approx W_{a_1a_2^{-1}} \approx W_a$ olduğundan, (3.16) de verilen bağıntılar $[y^{(1)}, W_a^{-1}z^{(1)}W_a]$ formunda yazılabileceğinden, (3.15) eşitliğinde verilen bağıntıları silebiliriz. Böylece, her $a \in A$ için ($a \neq 1$), (3.14) ile verilen \wp_4 sunuşu içerisinde sadece $[y^{(1)}, W_a^{-1}z^{(1)}W_a]$ komütatör formunda bağıntılar kalır. Sonuç olarak (3.14) ile verilen grup sunuşu, $^{(1)}$ üssünün atılmasıyla,

$$\wp_5 = \langle \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{x}}; \underline{\underline{s}}, \underline{\underline{r}}, [y, W_a^{-1}zW_a] (a \in A, a \neq 1, y, z \in \underline{\underline{y}}) \rangle \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır.

Yukarıda elde edilen \wp_5 sunuşunda toplam $(|A|-1)\underline{\underline{y}}^2$ sayıda $[y, W_a^{-1}zW_a]$ komütatör bağıntısı vardır. Ancak bu bağıntılar arasında bir takım indirgeme işlemleri yapabiliriz.

İnversiyon olmayan her $a \in A$ ($a \neq 1$) için $\{a, a^{-1}\}$ kümesini göz önüne alalım. Ayrıca A^+ kümesi; $\{a, a^{-1}\}$ kümesinin elemanlarından sadece birinin seçilmesiyle oluşturulduğunu kabul edelim. Böylece, m inversiyon olan elemanların sayısı olmak üzere, $|A^+| = \frac{1}{2}(|A| - 1 - m)$ dir.

A grubundaki inversiyonların oluşturduğu kümeyi Inv ile gösterelim. Buna göre $A - \{\{1\} \cup A^+ \cup Inv\}$ kümesini düşünerek, $[y, W_a^{-1}zW_a]$ komütatör elemanları arasında silme işlemi yapalım. Bunun için önce $a \in A - \{\{1\} \cup A^+ \cup Inv\}$ elemanını alalım. Buna karşılık gelen $[y, W_a^{-1}zW_a]$ komütatörünü W_a ile soldan ve W_a^{-1} ile de sağdan çarpalım. Bu durumda

$$[W_a y W_a^{-1}, z]$$

bağıntısını elde ederiz. Aslında bu bağıntıyı, kendisinde denk olan

$$[z, W_a y W_a^{-1}]$$

formunda yazabiliriz. Ayrıca bu bağıntıyı da

$$[z, (W_a^{-1})^{-1} y W_a^{-1}]$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $W_a^{-1} = W_{a^{-1}}$ olduğundan, $a^{-1} \in A^+$ olmak üzere, bu bağıntı

$$[z, (W_{a^{-1}})^{-1} y W_{a^{-1}}]$$

haline gelir. Böylece $a^{-1} \in \{A^+ \cup Inv\}$ için, $[z, (W_{a^{-1}})^{-1} y W_{a^{-1}}]$ elemanı $[y, W_a^{-1}zW_a]$ elemanından elde edildiğinden, bu elemanları sileriz. Silinen bu elemanların toplam sayısı ise $\frac{1}{2}(|A| - 1 + m) \underline{|y|}^2$ dir. O halde silme işlemi sonunda (3.17) de verilen \wp_5 sunuşu,

$$\wp_6 = \langle \underline{y}, \underline{x}; \underline{s}, \underline{r}, [y, W_a^{-1}zW_a], a \in \{A^+ \cup Inv\}, y, z \in \underline{y} \rangle \quad (3.18)$$

biçiminde olur.

Şimdi, \underline{y} üreteç kümesinin elemanları arasında $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ biçiminde bir sıralamanın olduğunu kabul edelim. O zaman, her $a \in \{A^+ \cup Inv\}$ için, (3.18) eşitliği ile verilen sunuş için, $[y, W_a^{-1}zW_a]$ bağıntıları arasından $[z, W_a^{-1}yW_a]$ ($a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z$) biçimindeki bağıntıları silebiliriz.

Bunu göstermek için, $a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z$ olmak üzere, $[y, W_a^{-1}zW_a]$ bağıntısını ele alalım ve bu bağıntıyı W_a ile soldan ve W_a^{-1} ile de sağdan çarpalım. Bu durumda

$$[W_a y W_a^{-1}, z]$$

komütatörünü elde ederiz. Bu bağıntının tersini aldığımızda

$$[z, W_a y W_a^{-1}]$$

elde edilir. Ancak burada, $a \in Inv$ için $W_a = W_a^{-1}$ olduğundan, bu bağıntı

$$[z, W_a^{-1}yW_a]$$

haline gelir. Böylece, $a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z$ olmak üzere, $[z, W_a^{-1}yW_a]$ komütatörleri $[y, W_a^{-1}zW_a]$ komütatörlerinden elde edildiğinden bu bağıntılar silinir. Silme işlemi sonunda (3.18) eşitliğinde verilen \wp_6 sunuşu,

$$\wp_7 = \langle \underline{y}, \underline{x}; \underline{s}, \underline{r}, [y, W_a^{-1}zW_a](a \in A^+, y, z \in \underline{y}), [y, W_a^{-1}zW_a](a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z) \rangle \quad (3.19)$$

biçiminde olur.

Burada $[y, W_a^{-1}zW_a]$ ($a \in A^+, y, z \in \underline{y}$) biçimindeki bağıntıların sayısı $\frac{1}{2}(|A|-1-m)|\underline{y}|^2$ ve $[y, W_a^{-1}zW_a]$ ($a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z$) biçimindeki bağıntıların sayısı ise $m|\underline{y}|^2 - \frac{|\underline{y}|(|\underline{y}|-1)}{2}m$ dir. Böylece \wp_7 sunuşundaki komütatör olan bağıntıların sayısı

$$\frac{1}{2}(|A|-1+\frac{m}{|\underline{y}|})|\underline{y}|^2$$

dır.

Not: Yukarıda gösterilmiş olan (T1), (T2), (T3) ve (T4) dönüşümleri ile ilgili bütün hesaplamalar, herhangi sonlu grupların standart wreath çarpımı için yapılabilir. Ancak ana teoremimiz p -gruplar üzerine olduğundan, A ve B grupları p -grup olarak alınacaktır.

Şimdi A ve B şeklindeki p -gruplar için, $G=B \int A$ nin \wp_7 ile verilen sunuşunun p asalının durumuna göre etkiliğini $\chi(\wp_7)$ değerini hesaplayarak gösterelim.

1. DURUM: p tek asal olsun. Buna göre p nin inversiyon değeri sıfıra eşittir. Böylece $Inv = \phi$ olup, (3.19) sunuşundaki $[y, W_a^{-1}zW_a]$ komütatör elemanlarının sayısı $\frac{1}{2}(|A|-1)|\underline{y}|^2$ olacaktır. Buna göre \wp_7 sunuşunun Euler karakteristiği

$$\begin{aligned} \chi(\wp_7) &= 1 - (|\underline{x}| + |\underline{y}|) + |\underline{r}| + |\underline{s}| + \frac{1}{2}(|A|-1)|\underline{y}|^2 \\ &= 1 - (|\underline{x}| + |\underline{y}|) + 1 - 1 + |\underline{r}| + |\underline{s}| + \frac{1}{2}(|A|-1)|\underline{y}|^2 \\ &= (1 - |\underline{x}| + |\underline{r}|) + (1 - |\underline{y}| + |\underline{s}|) - 1 + \frac{1}{2}(|A|-1)|\underline{y}|^2 \end{aligned}$$

$$= \chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2}(|A| - 1)|\underline{y}|^2 \quad (3.20)$$

değerine eşit olur. Ayrıca, kabulümüz gereği, $|\underline{y}| = d(B) = n$ olduğundan (3.20) ile verilen $\chi(\wp_7)$ değeri

$$\chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2}(|A| - 1)n^2$$

değerine eşit olur. Dolayısıyla $\chi(\wp_7)$ Euler karakteristik değerinin, (3.2) de verilen $\delta(G)$ değerine eşit olduğu kolayca görülür. O halde G grubunun \wp_7 ile verilmiş olan sunuşu etkili olacaktır.

2.DURUM: $p=2$ olsun. Bu durumda $Inv \neq \phi$ olur. Böylece (3.19) sunuşundaki $[y, W_a^{-1}zW_a]$ komütatör elemanlarının sayısı $\frac{1}{2}(|A| - 1 + \frac{m}{|\underline{y}|})|\underline{y}|^2$ dir. O

halde \wp_7 sunuşunun Euler karakteristiği

$$\begin{aligned} \chi(\wp_7) &= 1 - (|\underline{x}| + |\underline{y}|) + |\underline{r}| + |\underline{s}| + \frac{1}{2}(|A| - 1 + \frac{m}{|\underline{y}|})|\underline{y}|^2 \\ &= 1 - (|\underline{x}| + |\underline{y}|) + 1 - 1 + |\underline{r}| + |\underline{s}| + \frac{1}{2}(|A| - 1 + \frac{m}{|\underline{y}|})|\underline{y}|^2 \\ &= (1 - |\underline{x}| + |\underline{r}|) + (1 - |\underline{y}| + |\underline{s}|) - 1 + \frac{1}{2}(|A| - 1 + \frac{m}{|\underline{y}|})|\underline{y}|^2 \\ &= \chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2}(|A| - 1 + \frac{m}{|\underline{y}|})|\underline{y}|^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur. Burada $|\underline{y}| = d(B) = n$ olduğundan, (3.21) ile verilen $\chi(\wp_7)$ değeri

$$\chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2}(|A| - 1 + \frac{m}{n})n^2$$

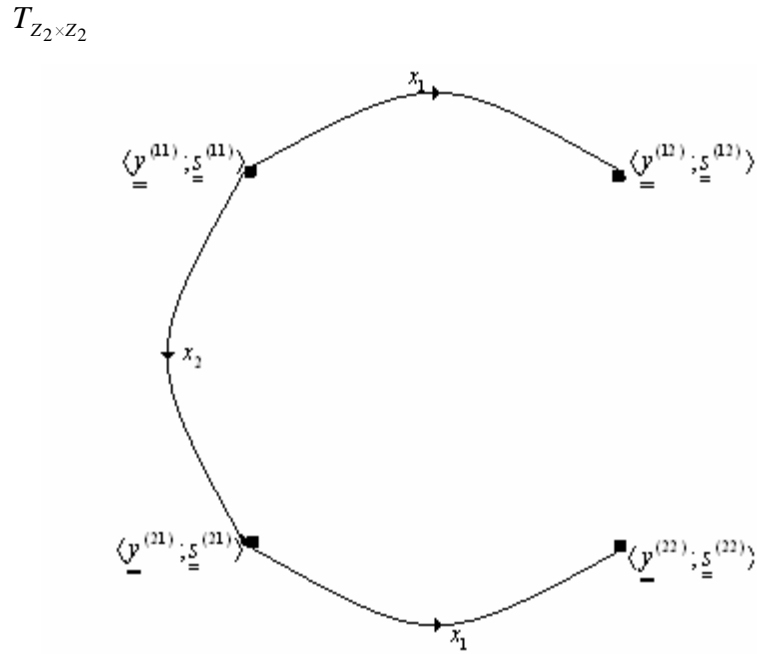
değerine eşit olur. O halde $\chi(\wp_7)$ Euler karakteristik değerinin, (3.3) de verilen $\delta(G)$ değerine eşit olduğu kolayca görülür.

Tüm bu hesaplamalarımız G grubunun p nin her iki durumu için etkili bir sunuşa sahip olduğunu gösterir.

İspat içinde uygulanan Tietze dönüşümlerini uygulamadaki şekli için 3.4.9 Örneğine devam edelim:

3.4.9 Örnek (Devam): Şimdi (3.7) eşitliği ile verilen \wp_G grubunun sunuşunu ele alalım ve bu sunuşa bazı Tietze dönüşümlerini uygulayarak, \wp_G nin etkiliğini gösterelim.

Bunun için $\Gamma'_{Z_2 \times Z_2}$ Cayley grafindan aşağıda verilen, Şekil 3.6 da olduğu gibi, bir $T_{Z_2 \times Z_2}$ maksimal ağacını seçelim.



Şekil 3.6

Burada γ_{11} , γ_{12} , γ_{21} ve γ_{22} elemanlarını, $T_{Z_2 \times Z_2}$ maksimal ağacı içinde, 1 den a elemanına ($a \in Z_2 \times Z_2$) olan geodesikler olarak tanımlayalım. Ayrıca,

1 elemanını γ_{11} ile,

$$x_1 \text{ elemanını } \gamma_{12} \text{ ile,} \quad (3.22)$$

x_2 elemanını γ_{21} ile ve

$x_2 x_1$ elemanını γ_{22} ile etiketleyelim.

Şimdi (3.5) eşitliğinde verilen bağıntıları ele alalım. Bu bağıntılara **(T1)** ve **(T2)** dönüşümlerini uygulayarak

$$\left. \begin{aligned} x_1^{-1} y^{(11)} x_1 &= y^{(12)} \\ x_2^{-1} y^{(11)} x_2 &= y^{(21)} \\ x_1^{-1} x_2^{-1} y^{(11)} x_2 x_1 &= y^{(22)} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

bağıntılarını kolaylıkla elde ederiz. Burada ilk iki bağıntı, (3.5) eşitliğindeki bağıntılar arasında bulunduğu için elimizde mevcuttur. Üçüncü sıradaki bağıntıyı bulmak için önce (3.5) eşitliğinde yer alan $x_2^{-1} y^{(11)} x_2 = y^{(21)}$ bağıntısını düşünelim. Bu bağıntıyı x_1^{-1} ile soldan ve x_1 ile sağdan çarptığımızda, $x_1^{-1} x_2^{-1} y^{(11)} x_2 x_1 = x_1^{-1} y^{(21)} x_1$ eşitliği elde ederiz. Buradan $x_1^{-1} y^{(21)} x_1 = y^{(22)}$ olduğundan, **(T1)** dönüşümü ile, $x_1^{-1} x_2^{-1} y^{(11)} x_2 x_1 = y^{(22)}$ bağıntısını elde ederiz.

Şimdi (3.22) de yapılan etiketlemeden yararlanarak, (3.23) de verilen bağıntıları

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{12}^{-1} y^{(11)} \gamma_{12} &= y^{(12)} \\ \gamma_{21}^{-1} y^{(11)} \gamma_{21} &= y^{(21)} \\ \gamma_{22}^{-1} y^{(11)} \gamma_{22} &= y^{(22)} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

olarak yeniden yazabiliriz.

Ayrıca γ_{11} , γ_{12} , γ_{21} ve γ_{22} elemanları arasında

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{12}\gamma_{12} &= 1 \\ \gamma_{12}\gamma_{21} &= \gamma_{22} = \gamma_{21}\gamma_{12} \\ \gamma_{21}\gamma_{21} &= 1 \\ \gamma_{12}\gamma_{22} &= \gamma_{21} = \gamma_{22}\gamma_{12} \\ \gamma_{21}\gamma_{22} &= \gamma_{12} = \gamma_{22}\gamma_{21} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

eşitliklerinin varlığı kolayca görülür.

Bu bağıntılara ek olarak (3.6) dan gelen

$$\left. \begin{aligned} [y^{(11)}, z^{(12)}], [y^{(11)}, z^{(22)}], [y^{(12)}, z^{(22)}] \\ [y^{(11)}, z^{(21)}], [y^{(12)}, z^{(21)}], [y^{(21)}, z^{(22)}] \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

bağıntılarını düşünelim. Buna göre (3.24) de verilen bağıntıları, **(T4)** dönüşümü ile (3.26) de verilen bağıntılarda yerlerine yazdığımızda

$$\left. \begin{aligned} [y^{(11)}, z^{(12)}] &= [y^{(11)}, \gamma_{12}^{-1} z^{(11)} \gamma_{12}] \\ [y^{(11)}, z^{(22)}] &= [y^{(11)}, \gamma_{22}^{-1} z^{(11)} \gamma_{22}] \\ [y^{(12)}, z^{(22)}] &= [\gamma_{12}^{-1} y^{(11)} \gamma_{12}, \gamma_{22}^{-1} z^{(11)} \gamma_{22}] \\ [y^{(11)}, z^{(21)}] &= [y^{(11)}, \gamma_{21}^{-1} z^{(11)} \gamma_{21}] \\ [y^{(12)}, z^{(21)}] &= [\gamma_{12}^{-1} y^{(11)} \gamma_{12}, \gamma_{21}^{-1} z^{(11)} \gamma_{21}] \\ [y^{(21)}, z^{(22)}] &= [\gamma_{21}^{-1} y^{(11)} \gamma_{21}, \gamma_{22}^{-1} z^{(11)} \gamma_{22}] \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

bağıntılarını elde ederiz.

Şimdi **(T2)** dönüşümü kullanılarak, (3.27) deki bağıntılar arasında (3.25) yardımıyla silme işlemi yapabiliriz. Bunun için

$$\begin{aligned} &[\gamma_{12}^{-1} y^{(11)} \gamma_{12}, \gamma_{22}^{-1} z^{(11)} \gamma_{22}], \\ &[\gamma_{21}^{-1} y^{(11)} \gamma_{21}, \gamma_{22}^{-1} z^{(11)} \gamma_{22}], \\ &[\gamma_{12}^{-1} y^{(11)} \gamma_{12}, \gamma_{21}^{-1} z^{(11)} \gamma_{21}] \end{aligned}$$

bağıntılarını seçelim. Bunlardan birincisi olan $[\gamma_{12}^{-1} y^{(11)} \gamma_{12}, \gamma_{22}^{-1} z^{(11)} \gamma_{22}]$ ele alalım.

Bu bağıntıyı γ_{22}^{-1} ile soldan ve γ_{22} ile sağdan çarptığımızda $[\gamma_{22}^{-1} \gamma_{12}^{-1} y^{(11)} \gamma_{12} \gamma_{22}^{-1}, z^{(11)}]$ elde ederiz. Bu da (3.25) den dolayı

$[\gamma_{21}^{-1}y^{(11)}\gamma_{21}, z^{(11)}]$ bağıntısına denk olur. Buradan da $[y^{(11)}, \gamma_{21}^{-1}z^{(11)}\gamma_{21}]$ bağıntısına ulaşılır. Sonuç olarak $[y^{(12)}, z^{(22)}]$ bağıntısından hareketle $[y^{(11)}, z^{(21)}]$ bağıntısı elde edilir. O halde, **(T2)** dönüşümü yardımıyla, $[y^{(11)}, z^{(21)}]$ bağıntısını silebiliriz.

Benzer olarak $[\gamma_{21}^{-1}y^{(11)}\gamma_{21}, \gamma_{22}^{-1}z^{(11)}\gamma_{22}]$ bağıntısını düşünelim. Bu bağıntıyı γ_{22}^{-1} ile soldan ve γ_{22} ile sağdan çarptığımızda $[\gamma_{22}^{-1}\gamma_{21}^{-1}y^{(11)}\gamma_{21}\gamma_{22}^{-1}, z^{(11)}]$ elde ederiz. Bu da (3.25) den dolayı $[\gamma_{12}^{-1}y^{(11)}\gamma_{12}, z^{(11)}]$ bağıntısına denk olur. Buradan da $[y^{(11)}, \gamma_{12}^{-1}z^{(11)}\gamma_{12}]$ bağıntısına ulaşılır. Böylece $[y^{(21)}, z^{(22)}]$ bağıntısından hareketle $[y^{(11)}, z^{(12)}]$ bağıntısı elde edilir. O halde, **(T2)** dönüşümü yardımıyla, $[y^{(11)}, z^{(12)}]$ bağıntısını silebiliriz.

Son olarak $[\gamma_{12}^{-1}y^{(11)}\gamma_{12}, \gamma_{21}^{-1}z^{(11)}\gamma_{21}]$ bağıntısını düşünelim. Bu bağıntıyı γ_{21}^{-1} ile soldan ve γ_{21} ile sağdan çarptığımızda $[\gamma_{21}^{-1}\gamma_{12}^{-1}y^{(11)}\gamma_{12}\gamma_{21}^{-1}, z^{(11)}]$ bağıntılarına ulaşırız. Böylece bu bağıntıda (3.25) eşitliğinden dolayı, $[\gamma_{22}^{-1}y^{(11)}\gamma_{22}, z^{(11)}]$ komutatörüne denk olur. Buradan da $[y^{(11)}, \gamma_{22}^{-1}z^{(11)}\gamma_{22}]$ bağıntısına ulaşılır. Böylece $[y^{(12)}, z^{(21)}]$ bağıntısından hareketle $[y^{(11)}, z^{(22)}]$ bağıntısı elde edilir. O halde, yine **(T2)** dönüşümünden, $[y^{(11)}, z^{(22)}]$ bağıntısını silebiliriz.

Silme işlemlerinin ardından elimizde sadece

$$[y^{(11)}, \gamma_{12}^{-1}z^{(11)}\gamma_{12}],$$

$$[y^{(11)}, \gamma_{21}^{-1}z^{(11)}\gamma_{21}],$$

$$[y^{(11)}, \gamma_{22}^{-1}z^{(11)}\gamma_{22}]$$

bağıntıları kalır.

Şimdi **(T3)** dönüşümünü kullanarak, her (ij) ($i, j \in \{1,2\}, (ij) \neq (11)$) ve $(ij) < (lm)$ için $\underline{\underline{s}}^{(ij)}$ bağıntılarının silinebileceğini gösterelim. Bunun için önce, $S^{(11)} \in \underline{\underline{s}}^{(11)}$ ve $S^{(ij)} \in \underline{\underline{s}}^{(ij)}$ ($a \neq 1$) elemanlarını seçelim. Her bir her (ij) için, γ_{ij} sembolü 1 den ij ye olan geodesik olmak üzere, W_{ij} kelimesini γ_{ij} nin etiketi olarak

alalım. Bu durumda $S^{(11)}$ ve $S^{(ij)}$ elemanları sırasıyla, $y^{(11)}$ ve $y^{(ij)}$ elemanları tipinde yazılabileceğinden dolayı $y^{(ij)} = W_{ij}^{-1} y^{(11)} W_{ij}$ bağıntısını,

$$S^{(ij)} = W_{ij}^{-1} S^{(11)} W_{ij} \quad ((ij) \neq (11))$$

olarak yazabiliriz. Burada, $S^{(11)} \in \underline{\underline{s}}^{(11)}$ ve $\underline{\underline{s}}^{(11)}$ bağıntısı (3.7) de verilen \wp_G sunuşuna ait olduğundan, $S^{(11)} \approx 1$ dir. Buradan da $S^{(ij)} \approx 1$ olur. Böylece $\underline{\underline{s}}^{(ij)}$ bağıntı kümesi $\underline{\underline{s}}^{(11)}$ bağıntı kümesinden elde edilmiş olur. O halde, her (ij) ($i, j \in \{1,2\}$, $(ij) \neq (11)$) ve $(ij) < (lm)$ için, $\underline{\underline{s}}^{(ij)}$ bağıntıları silinebilir. Buradan da sunuş içerisinde sadece $\underline{\underline{s}}^{(11)}$ bağıntı kümesi geriye kalır.

Böylece maksimal ağaç kullanılarak yapılan bütün bu silme işlemlerinden sonra (3.7) ile verilen $G = B \int Z_2 \times Z_2$ grubunun sunuşu,

$$\wp_G = \langle \underline{\underline{y}}^{(11)}, x_1, x_2 ; \underline{\underline{s}}^{(11)}, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2 = x_2 x_1, [y^{(11)}, \gamma_{12}^{-1} z^{(11)} \gamma_{12}], [y^{(11)}, \gamma_{21}^{-1} z^{(11)} \gamma_{21}], [y^{(11)}, \gamma_{22}^{-1} z^{(11)} \gamma_{22}] \rangle \quad (3.28)$$

biçimindedir.

Şimdi \wp_G sunuşunun etkililiği göstermek için B grubunu mertebesi 4 olan ve sunuşu $\wp_B = \langle y; y^4 \rangle$ biçiminde olan devirli grup olarak alalım. O zaman (3.28) ile verilen \wp_G sunuşu, $^{(11)}$ üssünün atılmasıyla,

$$\wp_G = \langle y, x_1, x_2 ; y^4, x_1^2, x_2^2, x_1 x_2 = x_2 x_1, [y, x_1^{-1} y x_1], [y, x_2^{-1} y x_2], [y, x_2^{-1} x_1^{-1} y x_1 x_2] \rangle \quad (3.29)$$

olur. Böylece, $p=2$ durumu söz konusu olduğundan,

$$\begin{aligned} \delta(G) &= \chi(\wp_A) + \chi(\wp_B) - 1 + \frac{1}{2} (|A| - 1 + \frac{m}{n}) n^2 \\ &= 1 - 2 + 3 + 1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{2} (4 - 1 + 3) = 5 \end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca \wp_G nin Euler karakteristiği

$$\chi(\wp_G) = 1 - 3 + 7 = 5$$

dir. Böylece

$$\delta(G) = \chi(\wp_G) = 5$$

olduğundan G grubunun \wp_G sunuşu etkilidir. •

Şu ana kadar A ve B p -gruplar olmak üzere $G = B \int A$ grubunun (3.19) de verilen \wp_7 sunuşunun, p nin her iki durumu için, etkili olduğu görüldü. Şimdi, 3.4.7 Teoremini tamamlamak için \wp_7 sunuşunun minimal üreteç sayısına sahip olduğunu gösterelim. Yani $d(G)=g+n$ olduğunu gösterelim.

Bunun için G grubunun \wp_7 ile verilen sunuşunu düşünelim ve $x_1, x_2, \dots, x_g \in \underline{x}$ üreteç elemanları arasında $x_1 < x_2 < \dots < x_g$ şeklinde bir sıralamanın olduğunu varsayalım. Bu durumda G grubunun birinci homoloji grubunun sunuşu

$$\begin{aligned} \wp_{H_1(G)} = \langle \underline{y}, \underline{x} ; \underline{s}, \underline{r}, [y, W_a^{-1}zW_a] (a \in A^+, a \neq 1, y, z \in \underline{y}), [y, x] (y \in \underline{y}, x \in \underline{x}) \\ [y, W_a^{-1}zW_a] (a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z) \\ [y, z] (y, z \in \underline{y}, y < z), [x, x'] (x, x' \in \underline{x}, x < x') \rangle \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $[y, W_a^{-1}zW_a] (a \in A^+, a \neq 1, y, z \in \underline{y})$ ve $[y, W_a^{-1}zW_a] (a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z)$ bağıntıları $[y, x] (y \in \underline{y}, x \in \underline{x})$, $[y, z] (y, z \in \underline{y}, y < z)$ ve $[x, x'] (x, x' \in \underline{x}, x < x')$ bağıntılarından elde edilebileceğinden, **(T2)** dönüşümü den, söylebiliriz. Böylece yukarıda verilen sunuş

$$\wp_{H_1(G)} = \langle \underline{y}, \underline{x} ; \underline{s}, \underline{r}, [y, x] (y \in \underline{y}, x \in \underline{x}), [y, z] (y, z \in \underline{y}, y < z), [x, x'] (x, x' \in \underline{x}, x < x') \rangle$$

haline gelir. Böylece $H_1(G) \cong H_1(A) \oplus H_1(B)$ olur. O halde 3.4.1. Önermeden $d(H_1(G)) = d(H_1(A)) + d(H_1(B))$ dir. Burada A ve B grupları p -gruplar olduğundan ve 3.4.5 Teoremden hareketle, $d(H_1(B)) = d(B) = n$ ve $d(H_1(A)) = d(A) = g$ olup

$$d(H_1(G)) = g + n$$

biçimindedir. Böylece $H_1(G)$ bir p -grup olduğundan $d(H_1(G)) = d(G) = g + n$ elde edilir. Buda istenilen sonuçtur. \diamond

3.4.9 Örnek (Devam): (3.29) eşitliği ile verilen \wp_G sunuşu 3 üreteçli etkili bir sunuşa sahiptir. •

3.4.10 Teorem: A_1, A_2, \dots, A_r ve B grupları p -grup ve

$$G_0 = B,$$

$$G_1 = G_0 \int A_1,$$

$$G_2 = G_1 \int A_2,$$

\vdots

$$G_r = G_{r-1} \int A_r$$

olsun. Ayrıca B grubu $d(B)$ üreteç elemanlı etkili bir sunuşa sahip olsun. O halde G_r grubu $d(G_r)$ üreteç elemanlı etkili bir sunuşa sahip olur.

İspat: r üzerinde tümevarımla ispatımızı yapalım.

i) $r = 1$ olsun. Bu durumda $G_1 = G_0 \int A_1 = B \int A_1$ olur. O halde varsayım gereği B grubu $d(B)$ üreteç elemanlı etkili bir sunuşa sahip olduğundan ve 3.4.7 Teoremden G_1 grubu da $d(G_1)$ üreteçli etkili bir sunuşa sahiptir.

ii) Şimdi $r > 1$ için ispatlayalım. Bu durumda $G_r = G_{r-1} \int A_r$ grubunu düşünelim. Burada tümevarım hipotezinden G_{r-1} grubu $d(G_{r-1})$ üreteç elemanlı etkili bir sunuşa sahiptir. Ayrıca G_{r-1} grubu p -gruptur. Böylece A_r grubu p -grup

olduğundan ve 3.4.7 Teoremden G_r grubu $d(G_r)$ üreteç elemanlı etkili bir sunuşa sahip olur. \diamond

A ve B grupları sonlu gruplar olsun ve 3.4.6 Teoremde verilen i), ii) ve iii) koşullarını sağlasın. Ayrıca $G = B \int A$ olsun. Şimdi bu bölümün diğer ana teoremlerinden biri olan alt grup ayrıştırılabilirlik ile etkililik arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi verelim.

3.4.11 Teorem: $G = B \int A$ grubu $d(G)$ minimal üreteç elemanlı etkili bir sunuşa sahip olsun. Bu durumda G grubu B -ayrıştırılabilirdir.

İspat: Kabul edelim ki A ve B grupları sonlu gruplar olsun ve 3.4.6 Teoremde verilen i), ii) ve iii) koşullarını sağlasın. Ayrıca G grubu bu gruplarının standart wreath çarpımı olsun. Her $a \in A$ ($a \neq 1$) için, a inversiyon olmayacak şekilde, $\{a, a^{-1}\}$ kümesini düşünelim. Buna göre A^+ kümesi $\{a, a^{-1}\}$ kümesinin elemanlarından sadece birinin seçilmesiyle oluşturulduğu önceden ifade edilmişti. Bu durumda Cayley graftan seçilen maksimal ağacın yardımıyla yapılan silme işlemleri sonunda G grubunun sunuşu (3.19) de verildiği gibi

$$\wp_7 = \langle \underline{y}, \underline{x}; \underline{s}, \underline{r}, [y, W_a^{-1}zW_a](a \in A^+, y, z \in \underline{y}), [y, W_a^{-1}zW_a](a \in Inv, y, z \in \underline{y}, y < z) \rangle$$

elde edilir. Çevik [29] de yapmış olduğu çalışmasında yukarıda verilen sunuşun minimal üreteçli etkili bir sunuşa sahip olduğunu göstermiştir.

$G = B \int A = B^{|A|} \times_{\theta} A$ olduğundan yarı direkt çarpım tanımından $N = B^{|A|}$ direkt çarpım grubu G grubunun normal alt grubudur. Şimdi $G - B$ kümesini düşünelim. Bu kümenin elemanları \underline{x} kümesinin elemanlarından ve $[y, W_a^{-1}zW_a]$ ($a \in A^+ \cup Inv, y, z \in \underline{y}, y < z$) komütatör formunu sağlayan elemanlardan oluşur. Daha öncede belirttiğimiz gibi W_a kelimesi T ağacından elde edilen γ_a geodiziğinin etiketi olduğu için sadece \underline{x} kümesinin elemanlarından oluşur. Burada $a \neq 1$ olduğundan $W_a \neq 1$ dir.

$U \in G - B$ olsun. $W_a \neq 1$ olduğundan U kelimesi $[y, z]$ ($y, z \in \underline{y}, y < z$) komütator formunda olamaz. Ayrıca NB kümesine ait elemanlar \underline{x} kümesine ait olan elemanlardan hiçbirini içermez. Yine bu küme $(yz)^k$ veya $y^s z^i$ ($y, z \in \underline{y}, k, i, s \in \mathbb{Z}^+$) formuna ait elemanları da içermez. Böylece \wp_7 sunuşu minimal üreteçli etkili bir sunuşa sahip olduğundan, her $U \in G - B$ için, $U \notin NB$ dir. Çünkü minimal üreteçli etkili sunuşa sahip olmasından $G - B$ kümesi bu minimal sayıdaki elemanlardan elde edilir. \diamond

3.4.12 Sonuç: A ve B grubu p -grup ve (3.19) ile verilen \wp_7 sunuşu $G = B \int A$ nin $g+n$ üreteçli etkili sunuşu olsun. O zaman G grubu B -ayrıştırılabilir.

3.4.9 Örnek (Devam): $G = B^{|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2|} \times_{\theta} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ olduğundan yarı direkt çarpım tanımından $N = B^{|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2|}$ direkt çarpım grubu G grubunun normal alt grubudur. Şimdi $G - B$ kümesini düşünelim. Bu kümenin elemanları $\{x_1, x_2\}$ kümesinden alınan elemanlarla oluşturulan kelimelerden ve $[y, x_1^{-1} y x_1]$, $[y, x_2^{-1} y x_2]$, $[y, x_2^{-1} x_1^{-1} y x_1 x_2]$ komütator formunu sağlayan elemanlardan oluşur. Ayrıca (3.29) eşitliği ile verilen \wp_G sunuşunun 3 üreteçli etkili bir sunuşa sahip olduğu bir önceki 3.4.9 Örnek (Devam) da ifade edilmişti. Böylece (3.29) ile verilen \wp_G sunuşu minimal üreteçli etkili sunuşa sahip olduğundan $G - B$ kümesi bu minimal sayıdaki elemanlardan elde edilir. Dolayısıyla, $u \in G - B$ kelimesi x_1 yada x_2 kelimelerinden birini (yada ikisini) içermek zorundadır. Ancak $B^{|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2|} B$ kümesi x_1 yada x_2 kelimelerinden hiçbirini içermez. Böylece, $u \notin B^{|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2|} B$ dir. Bu da bize G nin B -ayrıştırılabilir olduğunu verir. \bullet

Son olarak 3.4.7-3.4.10 Teorem ve 3.4.12 Sonuç dan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.4.13 Sonuç: A_1, A_2, \dots, A_r ve B grupları p -grup ve

$$\begin{aligned} G_0 &= B, \\ G_1 &= G_0 \int A_1, \\ G_2 &= G_1 \int A_2, \\ &\vdots \\ G_r &= G_{r-1} \int A_r \end{aligned}$$

olsun. Ayrıca B grubu $d(B)$ üreteç elemanlı etkili bir sunuşa sahip olsun. O zaman G_1 grubu G_0 -ayrıştırılabilir, G_2 grubu G_1 -ayrıştırılabilir, ... , G_r grubu G_{r-1} -ayrıştırılabilir.

4. BÖLÜM

GRUPLARIN MERKEZİ (CENTRAL) GENİŞLEMESİ ÜZERİNDE p -COCKCROFT ÖZELLİĞİ

4.1 Giriş

2. Bölümde, önemli grup genişlemelerinden olan HNN genişlemesinin ve *Ayrık* genişlemenin (ki bu, 2.2.10 Teorem ile yarı direkt çarpım tanımlar) alt grup ayrıştırılabilirliği incelenmişti. Ayrıca 3. Bölümde, yine *yarı direkt* çarpımın bir üst versiyonu olan *standart wreath* çarpımın minimal üreteçli etkili bir sunuşa sahip iken alt grup ayrıştırılabilirliğine dair bazı sonuçlar elde edilmişti. Bu bölümde ise, 2. ve 3. Bölümlerde incelenen bu genişlemeler dışında, yine önemli bir genişleme çeşidi olan *merkezi (central)* genişleme üzerinde durulup, bu genişleme için p -*Cockcroft* (yani *etkililik*) kavramı incelenecektir. Bu inceleme; verilen herhangi bir grubun değişmeli grup ile olan merkezi genişlemesinin sunuşunu, alınacak bir p asalı için, p -*Cockcroft* olmasını sağlayan gerek ve yeter koşullar belirlenerek yapılacaktır.

Şimdi bu bölümün temelini oluşturan merkezi genişleme için bazı temel bilgileri verelim:

4.1.1 Tanım [67]: Bir G grubu

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 1 \quad (4.1)$$

olacak biçimde bir tam diziye sahip olsun. Bu durumda G grubuna, K nın Q grubu ile olan *genişlemesi* denir.

Aslında (4.1) bir tam dizi gösterdiğinden, $Gör(i) = Çek(p)$ dir. Burada i birebir ve p örten olup, $Gör(i) \cong K$ ve $Gör(p) \cong Q$ dir. Ayrıca, Birinci İzomorfizma Teoreminden, $G/Çek(p) \cong Gör(p)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$G/K \cong Q$$

sağlanacaktır.

4.1.2 Tanım ([43], [67]): Bir G grubu (4.1) deki gibi bir tam diziye sahip olsun. Ayrıca $Gör(i) \triangleleft Z(G)$ olsun. Bu durumda G grubuna K nın Q grubu ile olan *merkezi genişlemesi* denir.

Convay, Coxeter ve Shephard, [26] da, merkezi genişlemeye *combinatorial* anlamında yaklaşmışlardır. Sonra Beyl ve Tappe, [13] deki çalışmalarında, genel grup genişlemeleri ve bunların temsilleri ile bazı örnekler üstünde grup genişlemelerinin ikinci homoloji grubunu çalışmışlardır. 1998 de ise Baik, Harlender ve Pride ([11]) genel olarak *combinatorial* anlamında grup genişlemelerini çalışıp, bu genişlemelerin sunuşunu tanımlanmış ve yine bu genişlemelere ait sunuşlar üzerinde üreteç *resimlerini* oluşturmuşlardır. Aynı makalede *merkezi genişlemesinin* sunuşları üzerine sonuçlar verilmiş olup, bu genişlemelerinin ikinci homotopi modülü, dolayısıyla üreteç resimleri belirlenmiştir. Bu üreteç resimlerini kullanarak, Çevik [31] herhangi bir grubun devirli grup ile olan merkezi genişlemesinin sunuşunu *p-Cockcroft* (herhangi p asalı için) yapan gerek ve yeter koşulları belirlemiştir.

Bu bölümde, Çevik in [31] deki çalışmasında kullanmış olduğu yöntemden hareketle, verilen herhangi bir grubun değişmeli grup ile olan *merkezi* (central) genişlemesinin sunuşunu *p-Cockcroft* yapan gerek ve yeter koşullar belirlenecektir.

4.2 Merkezi Genişlemenin Etkililiği

Herhangi bir Q grubunun sunuşu $\wp_Q = \langle \mathbf{a} ; \mathbf{r} \rangle$ biçiminde olsun. Ayrıca, m_j ($1 \leq j \leq s$) negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, değişmeli bir grup olan K nın sunuşunu

$$\wp_K = \langle x_1, x_2, \dots, x_s; x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_s^{m_s}, [x_i, x_n] (1 \leq i < n) \rangle \quad (4.2)$$

olarak alalım. Buna göre K nın Q grubu ile olan *merkezi genişlemesi* olan G grubunun sunuşu

$$\begin{aligned} \wp_G = \langle \mathbf{a}, x_1, x_2, \dots, x_s; RW_R^{-1} (R \in \mathbf{r}), x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_s^{m_s}, [x_i, x_n] (1 \leq i < n) \\ [a, x_i] (a \in \mathbf{a}, 1 \leq i \leq s) \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

biçimindedir [11], [26].

Burada, her bir $(R \in \mathbf{r})$ için, $0 \leq k_i < m_i$ ($1 \leq i \leq s$) olmak üzere, W_R kelimesi

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}$$

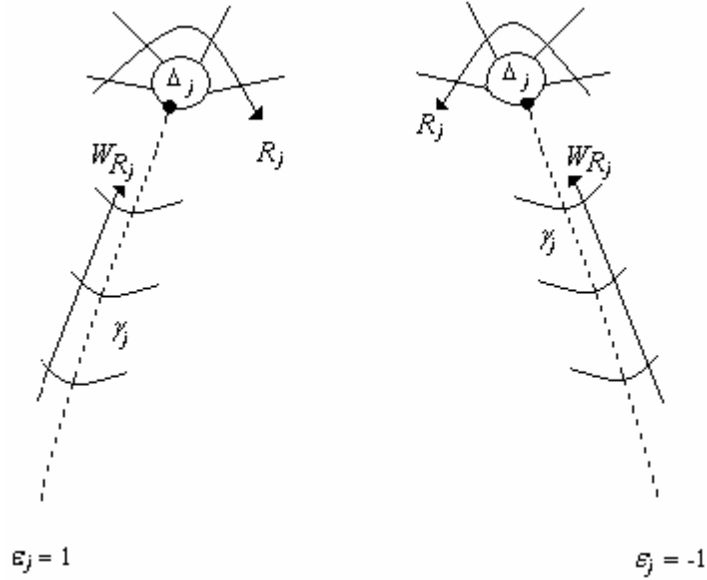
formuna sahiptir.

Ancak, [11] de ifade edildiği gibi, (4.3) ile verilen her sunuş bir genişleme tanımlamaz. Çünkü $K \rightarrow G \cong G(\wp)$ homomorfizması birebir olmayabilir. [26] da bu homomorfizmayı birebir yapan gerek ve yeter koşul Q grubunun *ikinci homotopi modülü olan* $\pi_2(\wp_Q)$ nin *üreteç kümesinin belirlenebilmesiyle*, ifade edilmiştir. Dolayısıyla, [11] ve [26] da, verilen bu koşulu K nın değişmeli olması durumuna göre uyarlamamız gerekmektedir.

Verilen Q grubunun ikinci homotopi modülü olan $\pi_2(\wp_Q)$ nin üreteç kümesini \mathbf{Y} ile gösterelim. Ayrıca $\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ resmi, $R_1^{\varepsilon_1}, R_2^{\varepsilon_2}, \dots, R_t^{\varepsilon_t}$ ($R_j \in \mathbf{r}$, $\varepsilon_j = \pm 1, 1 \leq j \leq t$) ile etiketlenmiş olan $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_t$ disklerine sahip bir resim olsun. Bununla birlikte

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t \quad (4.4)$$

\mathbb{Q} resminde *spreyler* olmak üzere, her bir γ_j spreyni, \mathbf{a} üreteç kümesinden elde edilen W_{R_j} ($1 \leq j \leq t$) kelimesi olarak etiketleyelim. Bu durum Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1

Özel olarak, her bir $1 \leq j \leq t$ için, $0 \leq k_{ij} < m_i$ ($1 \leq i \leq s$) olmak üzere, W_{R_j} kelimesini

$$W_{R_j} = x_1^{k_{1j}} x_2^{k_{2j}} \cdots x_s^{k_{sj}}$$

olarak belirtelim. Bu durumda \mathbb{Q} nun sınırı $\prod_{j=1}^t W_{R_j}^{\varepsilon_j}$ biçimindedir. Dolayısıyla G merkezi genişleme tanımlandığından, K grubu içinde,

$$\prod_{j=1}^t W_{R_j}^{\varepsilon_j} = 1$$

eşitliği sağlanmalıdır. Böylece

$$\prod_{j=1}^t (x_1^{k_{1j}} x_2^{k_{2j}} \cdots x_s^{k_{sj}})^{\varepsilon_j} = 1 \quad (4.5)$$

dir. Buradan da, K nın değişmeli olması gereği

$$\lambda_i(\mathbb{Q}) = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j k_{ij}$$

olup, dolayısıyla (4.5) ile verilen ifade

$$\prod_{i=1}^s x_i^{\lambda_i(\mathbb{Q})} = 1$$

biçimine gelecektir.

O halde, sunuşu (4.3) ile verilen G grubunu merkezi genişleme yapan, yani $K \rightarrow G \cong G(\varphi)$ homomorfizması birebir yapan, gerek ve yeter koşulu aşağıdaki sonuçta verebiliriz.

4.2.1 Teorem ([11], [26]): G sunuşu (4.3) ile verilen bir merkezi genişleme olsun. Bu durumda $K \rightarrow G$ homomorfizmasının birebir olması için gerek ve yeter koşul, her bir $\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ için,

$$\lambda_i(\mathbb{Q}) \equiv 0 \pmod{m_i} \quad (4.6)$$

olmasıdır.

$\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ resmi için oluşturulan, her bir γ_j spreyini, \mathbf{a} üreteç kümesinden elde edilen B_{Δ_j} ($1 \leq j \leq t$) kelimesi olarak etiketleyelim. Ayrıca, her $a \in A$ için, $\alpha_{a,i}(\mathbb{Q})$ ifadesini

$$\alpha_{a,i}(\mathbb{Q}) = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \exp_a(B_{\Delta_j}) k_{ij} \quad (1 \leq i \leq s)$$

olarak tanımlayalım.

Yukarıda verilen açıklamalardan sonra, bu bölümün ana teoremini verelim. (Bu sonuç [5] de tarafımızdan değerlendirilmiştir).

4.2.2 Teorem: G merkezi genişleme grubunun sunuşu (4.3) ile verildiği gibi \wp_G olsun ve (4.6) koşulunu sağlasın. Ayrıca p sayısı asal veya 0 olsun. Bu durumda \wp_G sunuşunun p -Cockcroft olması için gerek ve yeter koşullar

- i) $m=(m_1, m_2, \dots, m_s)$ olmak üzere, $m \equiv 0 \pmod{p}$,
- ii) Her $a \in \mathbf{a}$ ve $R \in \mathbf{r}$ için, $\exp_a(R) \equiv 0 \pmod{p}$,
- iii) Her $1 \leq i \leq s$ ve $1 \leq j \leq t$ için, $k_{i_j} \equiv 0 \pmod{p}$,
- iv) \wp_Q sunuşu p -Cockcroft,
- v) Her $a \in \mathbf{a}$, $\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ ve $1 \leq i \leq s$ için, $\alpha_{a,i}(\mathbb{Q}) \equiv 0 \pmod{p}$,
- vi) Her $\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ ve $1 \leq i \leq s$ için, $\lambda_i(\mathbb{Q}) \equiv 0 \pmod{m_i p}$,

şeklindedir.

İspat: Q ve K gruplarının sunuşları sırasıyla

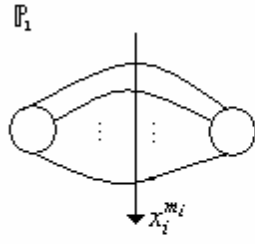
$$\wp_Q = \langle \mathbf{a} ; \mathbf{r} \rangle \quad \text{ve} \quad \wp_K = \langle x_1, x_2, \dots, x_s ; x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_s^{m_s}, [x_i, x_n] (1 \leq i < n) \rangle$$

biçiminde olsun. Ayrıca K nın Q grubu ile olan merkezi genişlemesi olan G grubunun sunuşu (4.3) de verildiği gibi olup, (4.6) koşulunu sağlasın.

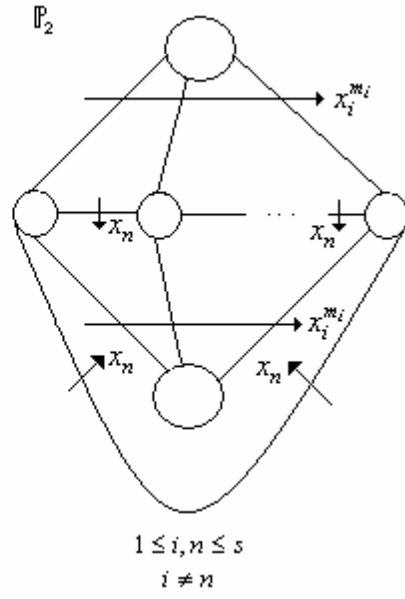
İlk olarak [11] yardımıyla $\pi_2(\wp_G)$ ikinci homotopi modülünün üreteç resimlerini oluşturalım. Buradaki amacımız bu üreteç resimlerindeki disklerin toplamını hesaplamaktır. Çünkü \wp_G sunuşunun p -Cockcroft yapan koşullar, elde edilen bu üreteç resimlerindeki disklerin toplamı kullanılarak belirlenir.

(I) $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ ve \mathbb{P}_3 Köşe (Vertex) Resimleri:

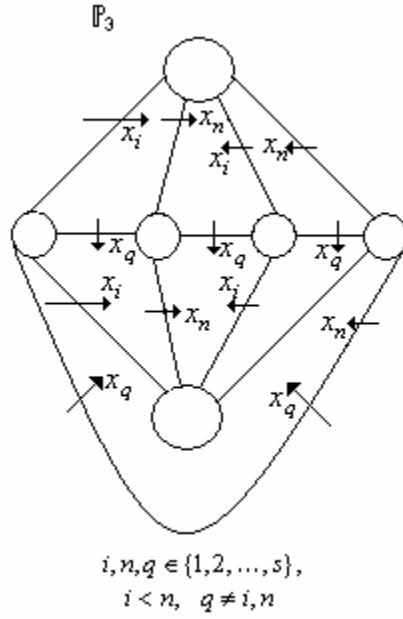
Bu resimler Şekil 4.2, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 de çizilmiş olup, aslında $\pi_2(\wp_K)$ ikinci homotopi modülünü üreten resimlerdir.



Şekil 4.2



Şekil 4.3

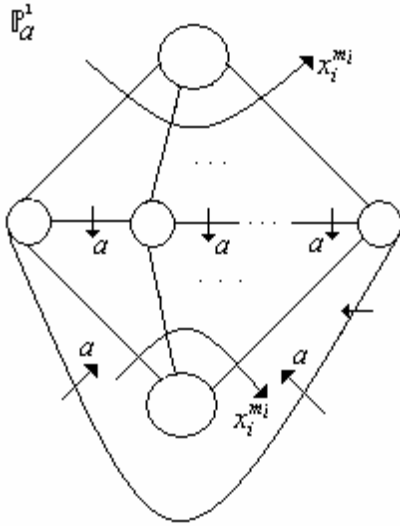


Şekil 4.4

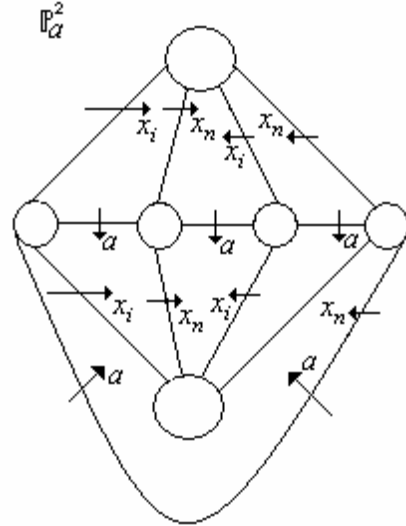
Her bir $1 \leq i \leq s$ için, $m_i = 0$ oluyorsa, yani K grubu rankı s olan serbest değişmeli grup oluyorsa, yukarıda verilen \mathbb{P}_1 ve \mathbb{P}_2 resimleri boş resim olurlar. Ancak bu durum \mathbb{P}_3 resmini etkilemez.

(II) \mathbb{P}_a^1 ve \mathbb{P}_a^2 Kenar (Edge) Resimleri:

Her $a \in \mathbf{a}$ ve her $x_i^{m_i}$ için, Şekil 4.5 de gösterildiği gibi, \mathbb{P}_a^1 küresel resmine sahip oluruz. Yukarıda **(I)** durumuyla belirtildiği gibi, her bir $1 \leq i \leq s$ için, $m_i = 0$ olursa, Şekil 4.5 ile verilen \mathbb{P}_a^1 resmi boş resim olur. Ayrıca, her $a \in \mathbf{a}$ ve $i < n$ ($i, n \in \{1, 2, \dots, s\}$) için, Şekil 4.6 de gösterildiği gibi, \mathbb{P}_a^2 küresel resmine sahip oluruz.



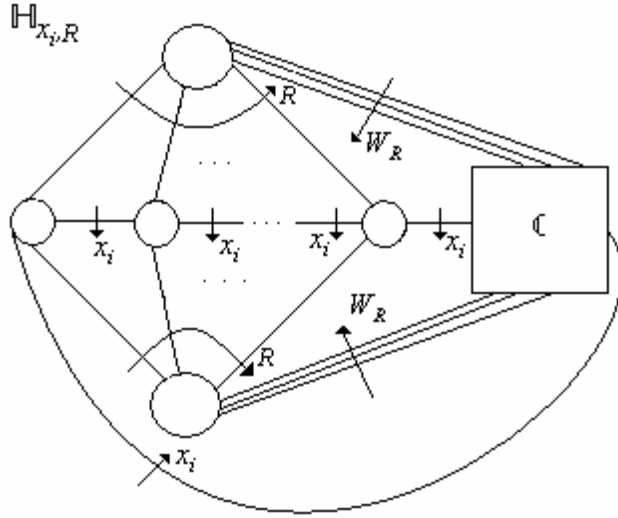
Şekil 4.5



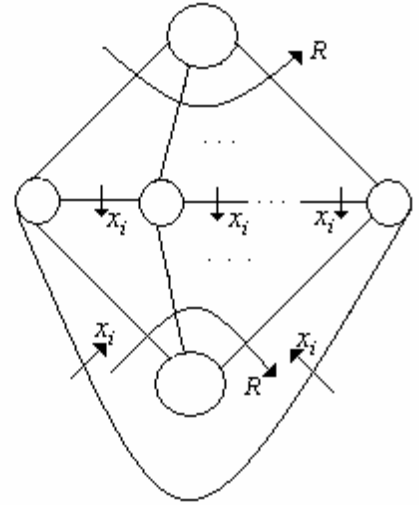
Şekil 4.6

(III) $\mathbb{H}_{x_i, R}$ Şeklindeki 2-hücre Resimleri:

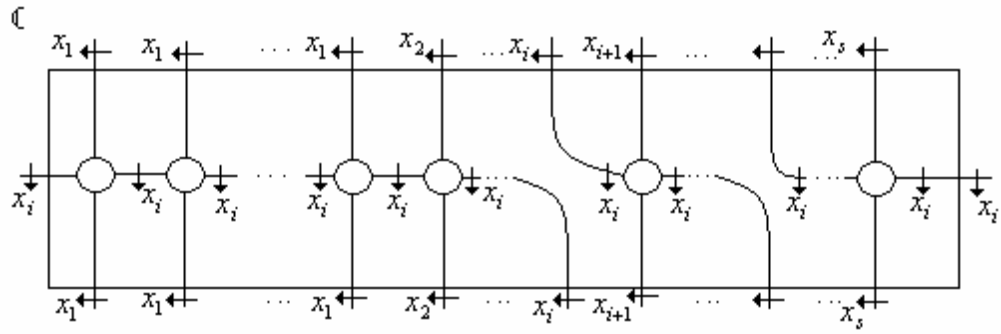
Her bir $R \in \mathbf{r}$ ve $1 \leq i \leq s$ için, Şekil 4.7 (W_R boş kelime olduğunda, Şekil 4.8) de gösterildiği üzere, $\mathbb{H}_{x_i, R}$ küresel resimlerine sahip oluruz. Şekil 4.7 de bulunan \mathbb{C} alt resmi Şekil 4.9 da gösterildiği gibi $[x_i, x_n]$ ($1 \leq i, n \leq s$) biçimindeki komutator disklerinden oluşur.



Şekil 4.7



Şekil 4.8



Şekil 4.9

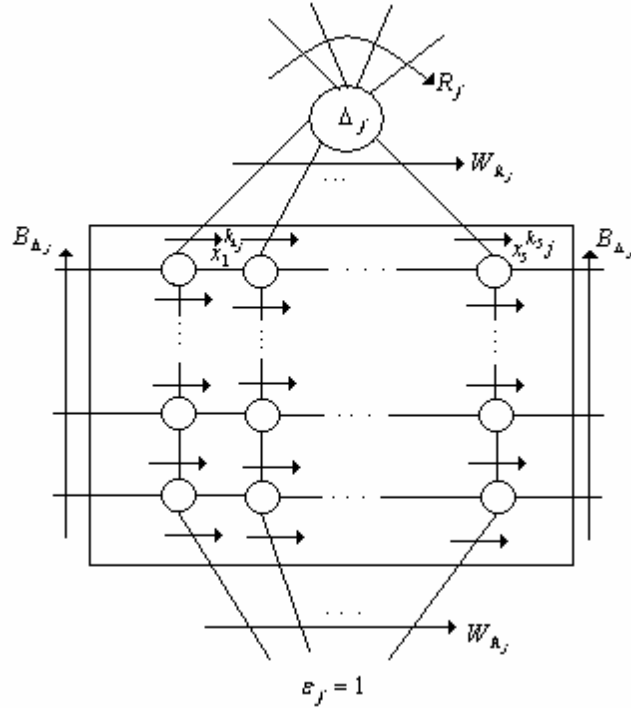
(IV) $\mathbb{Q}^\#$ Resmi:

Her bir $\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ resmi için, (4.4) ile verildiği biçimde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ spreyleri vardır. Şimdi, her bir $1 \leq j \leq t$ için, $R_j^{\varepsilon_j}$ ile etiketlenen, her bir $\Delta_j \in \mathbb{Q}$ diski için, γ_j sprej çizgisini, Şekil 4.10 ve Şekil 4.11 de gösterildiği gibi, $B_{\Delta_j} W_{R_j} B_{\Delta_j}^{-1} W_{R_j}^{-1}$ sınırı ile etiketlenmiş $[a, x_i]$ ($a \in \mathbf{a}, 1 \leq i \leq s$) komutator disklerini içeren bir resim ile yer değiştirelim. Burandan da

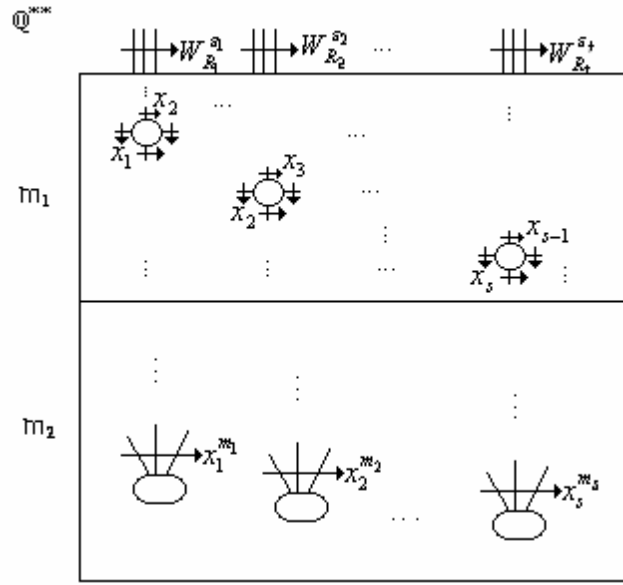
$$B(\mathbb{Q}) = (W_{R_1}^{\varepsilon_1} W_{R_2}^{\varepsilon_2} \dots W_{R_t}^{\varepsilon_t})^{-1}$$

$$= ((x_1^{k_{11}} x_2^{k_{21}} \dots x_s^{k_{s1}})^{\varepsilon_1} (x_1^{k_{12}} x_2^{k_{22}} \dots x_s^{k_{s2}})^{\varepsilon_2} \dots (x_1^{k_{1t}} x_2^{k_{2t}} \dots x_s^{k_{st}})^{\varepsilon_t})^{-1} \quad (4.7)$$

sınır etiketine sahip \mathbb{Q}^* resmini elde ederiz (Şekil 4.12). Bunu yaparak sınır etiketleri üzerinde elde edeceğimiz disklerin toplam sayısını bulabilir, başka bir deyişle, $[a, x_i]$ komutator disklerini diğer resimler içerisindeki aynı komutator diskleri ile karşılaştırabilir ve sayısını hesaplayabiliriz. Ayrıca yine bu sınır etiketini kullanarak \mathbb{Q} nun alt tarafında, \mathbb{Q}^{**} ile göstereceğimiz yeni bir alt-resim elde edebiliriz [11], [31]. Sonuç olarak \mathbb{Q} ile \mathbb{Q}^* in birleşiminden yeni bir üreteç resmi olan ve $\mathbb{Q}^\#$ resmini elde ederiz. (Bununla ilgili çizimler Şekil 4.12 ve 4.13 de gösterilmiştir). Aslında \mathbb{Q}^{**} resmi m_1 ve m_2 biçiminde iki alt resme sahiptir. Burada m_1 resmi $[x_i, x_n]$ ($1 \leq i < n \leq s$) biçiminde komutator disklerinden ve m_2 resmi ise $x_i^{m_i}$ ($1 \leq i \leq s$) disklerinden meydana gelir.



Şekil 4.10



Şekil 4.13

\mathfrak{m}_1 alt resminde bulunan $[x_i, x_n]$ komutatör disklerini kullanılarak (4.7) ile verilen ifade, aslında,

$$\prod_{i=1}^s x_i^{-\lambda_i(Q)}$$

ifadesine eşit olur. Ayrıca, her $1 \leq i \leq s$ için, \mathfrak{m}_2 alt resminde bulunan $x_i^{m_i}$ disklerinin sayısı $\frac{\lambda_i(Q)}{m_i}$ tanedir. Burada K özel olarak, *serbest değişmeli grup*

olarak alınırsa (yani $m = (m_1 = 0, m_2 = 0, \dots, m_s = 0) = 0$ olursa), $\frac{\lambda_i(Q)}{m_i}$ değeri 0

olur. Eğer $\lambda_i(Q) > 0$ ise, $x_i^{m_i}$ diskleri pozitif biçimde ve $\lambda_i(Q) < 0$ ise yine bu diskler negatif biçimde seçilmiş olarak düşünülecektir.

Dolayısıyla [11] den, (4.3) ile verilen ve (4.6) koşulunu sağlayan \wp_G sunuşunun, $\pi_2(\wp_G)$ ikinci homotopi modülünün üreteç kümesi

$$\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3, \mathbb{P}_a^1, \mathbb{P}_a^2, \mathbb{H}_{x_i, R}, \mathbb{Q}^\# \quad (a \in \mathbf{a}, R \in \mathbf{r}, 1 \leq i \leq s, \mathbb{Q} \in \mathbf{Y})$$

resimlerinden oluşan ve \mathbf{Y}_G ile gösterilen bir küme olacaktır.

Şimdi Y_G kümesinde bulunan resimleri kullanarak sonucumuzun gereklilik kısmını aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

Bunun için, işlemlerimizde kolaylık sağlaması açısından, her $a \in \mathbf{a}$, $R \in \mathbf{r}$ ve $1 \leq i < n \leq s$ için, C_R , $C_{a,i}$ ve $C_{i,n}$ notasyonlarını, sırasıyla, RW_R^{-1} , $[a, x_i]$ ve $[x_i, x_n]$ bağıntıları olarak alalım.

İspatta $m \neq 0$ ve $m = 0$ durumları göz önüne alınacaktır. $m = 1$ durumu ise [31] de yapılmış olduğundan burada incelenmeyecektir.

i) $m \neq 0$ durumu:

İlk olarak \mathbb{P}_1 , \mathbb{P}_2 , \mathbb{P}_3 , \mathbb{P}_a^1 ve \mathbb{P}_a^2 resimlerini düşünelim. Her bir $1 \leq i \leq s$ için,

$$\exp_{x_i^{m_i}}(\mathbb{P}_1) = \exp_{x_i^{m_i}}(\mathbb{P}_2) = \exp_{x_i^{m_i}}(\mathbb{P}_a^1) = 1 - 1 = 0$$

dır. Ayrıca, her $1 \leq i < n \leq s$ ve $a \in \mathbf{a}$ için,

$$\exp_{C_{a,i}}(\mathbb{P}_a^1) = m_i = \exp_{C_{i,n}}(\mathbb{P}_2)$$

dir. Böylece $m_i \equiv 0 \pmod{p}$ olur. Dolayısıyla teoremin (i) koşulu sağlanmış olacaktır. Bunlardan başka

$$\exp_{C_{i,n}}(\mathbb{P}_a^2) = \exp_{C_{a,i}}(\mathbb{P}_a^2) = \exp_{C_{i,n}}(\mathbb{P}_3) = 1 - 1 = 0$$

dır. Her bir $i, n, q \in \{1, 2, \dots, s\}$, $i < n$ ve $q \neq i, n$ için, Şekil 4.4 ile verilen \mathbb{P}_3 resminden kolayca görüleceği üzere, $[x_i, x_q]$ ve $[x_n, x_q]$ şeklinde komutatör diskler vardır. Ancak bu diskler aslında $C_{i,n}$ komutatör formundaki disklerdir. Yine \mathbb{P}_3 resmine göre, elimizde sadece bir tane pozitif ve bir tane negatif $[x_i, x_q]$ diski

(benzer olarak sadece bir pozitif ve bir negatif $[x_n, x_q]$ diski) olduğundan, bu disklerin üstler toplamı 0 değerine eşit olacaktır.

Şimdi, her $R \in \mathbf{r}$ ve $1 \leq i \leq s$ için, Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 de verilen $\mathbb{H}_{x_i, R}$ resmini düşünelim. Burada

$$\exp_{C_R}(\mathbb{H}_{x_i, R}) = 1 - 1 = 0 \quad \text{ve} \quad \exp_{C_{a,i}}(\mathbb{H}_{x_i, R}) = \exp_a(R) \quad (a \in \mathbf{a})$$

dir. Böylece sonucumuzun (ii) koşulu sağlanmış olur. Şekil 4.9 ile verilen \mathbb{C} resminden, her $R \in \mathbf{r}$ ve $1 \leq i \leq s$ için,

$$\exp_{C_{i,n}}(\mathbb{C}) = \exp_{C_{i,n}}(\mathbb{H}_{x_i, R}) = \exp_{x_i}(W_R)$$

elde edilir. Böylece W_R kelimesinde bulunan her bir x_i elemanın üstler toplamı sıfıra denktir. Ancak, her bir $1 \leq j \leq t$ için, W_{R_j} kelimelerini göz önüne aldığımızda,

$$\exp_{x_i}(W_{R_j}) \equiv 0 \pmod{p}$$

olacaktır. Dolayısıyla, her $1 \leq i \leq s$ ve $1 \leq j \leq t$ için, $k_{ij} \equiv 0 \pmod{p}$ olur. O halde teoremin üçüncü koşulunu elde etmiş oluruz.

Son olarak Şekil 4.12 de gösterilmiş olan $\mathbb{Q}^\#$ resmini göz önüne alalım. Bu resimden kolayca görüleceği üzere

$$\exp_{C_R}(\mathbb{Q}^\#) \equiv 0 \pmod{p}$$

dir. Bununla birlikte $\exp_{C_R}(\mathbb{Q}^\#) = \exp_R(\mathbb{Q})$ olduğundan,

$$\exp_R(\mathbb{Q}) \equiv 0 \pmod{p}$$

elde edilir. Böylece \wp_Q sunuşu p -Cockcroft olacaktır. Dolayısıyla (iv) koşulu sağlanmış olur. Bunlara ek olarak, her $a \in \mathbf{a}$ ve $1 \leq i \leq s$ için,

$$\exp_{C_{a,i}}(\mathbb{Q}^\#) = \alpha_{a,i}(\mathbb{Q})$$

eşitliği vardır. Burada \mathbb{Q} resminde görüleceği üzere, $\alpha_{a,i}(\mathbb{Q}) \equiv 0 \pmod{p}$ dır. O halde (v) sağlanmış olur.

Tüm bunlardan başka, her $1 \leq i < n \leq s$ için, \mathbb{Q}^{**} ya ait \mathcal{M}_1 alt resminde $C_{i,n}$ komutatör disklerinin üstler toplamı, \wp_G sunuşunun p -Cockcroft olması kabulünden dolayı, p moduna göre 0 sayısına denk olmalıdır. Ayrıca \mathbb{Q}^{**} resminde $C_{i,n}$ komutatör diskleri sadece \mathcal{M}_1 alt resminde bulunduğundan,

$$\exp_{C_{i,n}}(\mathcal{M}_1) = \exp_{C_{i,n}}(\mathbb{Q}^{**})$$

eşitliği her zaman sağlanıp, buradaki üstler toplam yine \pmod{p} ye göre 0 a denk olmalıdır. Bununla birlikte, her $1 \leq j \leq t$ ve $1 \leq i < s$ için, $0 \leq k_{ij} < m_i$, $\varepsilon_j = \pm 1$ ve

$W_{R_j} = x_1^{k_{1j}} x_2^{k_{2j}} \cdots x_s^{k_{sj}}$ olmak üzere, \wp_G sunuşu için $\prod_{j=1}^t W_{R_j}^{\varepsilon_j} = 1$ eşitliği sağlanmış

olup, (iii) koşulundan, $k_{ij} \equiv 0 \pmod{p}$ olduğunu biliyoruz. Aslında bu paragrafta anlatılan yukarıdaki iki durum \mathcal{M}_1 resminde bulunan her $[x_i, x_n]$ ($1 \leq i < n \leq s$) komutatör diskinin üstler toplamını da etkileyeceğini söylemektedir. Kısaca (iii) ve (4.5) den, \mathcal{M}_1 resminde bulunan $[x_i, x_n]$ komutatör disklerinin üstler toplamı p moduna göre 0 sayısına denk olur.

Şimdi \mathcal{M}_2 resmini göz önüne alarak, içindeki disk için üstler toplam hesabına bakalım. Aslında her bir $1 \leq i < s$ için, \mathcal{M}_2 alt resminde bulunan $x_i^{m_i}$ disklerinin

sayısının $\frac{\lambda_i(Q)}{m_i}$ olduğunu yukarıda belirtmiştik. Buradan

$$\exp_{x_i^{m_i}}(\mathbb{Q}^\#) = \exp_{x_i^{m_i}}(\mathbb{Q}^{**}) = \exp_{x_i^{m_i}}(\mathcal{M}_2) = \frac{\lambda_i(Q)}{m_i}$$

olacağı açıktır. Dolayısıyla, her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ ve $\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ için,

$$\lambda_i(\mathbb{Q}) \equiv 0 \pmod{m_i p}$$

şartı sağlanmalıdır. O halde (vi) koşulunun varlığı gösterilmiş olur.

(ii) $m = 0$ durumu:

$m = (m_1, m_2, \dots, m_s) = 0$ (her bir $m_i = 0$) olsun. Böylece K grubu s elemanlı üreteç kümesine sahip bir *serbest değişmeli grup* olacağından, 4.2.2 Teoremde verilen (i) ve (vi) koşulları çıkarılarak gerekli olan koşullar

ii) Her $a \in \mathbf{a}$ ve $R \in \mathbf{r}$ için, $\exp_a(R) \equiv 0 \pmod{p}$,

iii) Her $1 \leq i \leq s$ ve $1 \leq j \leq t$ için, $k_{i,j} \equiv 0 \pmod{p}$,

iv) \wp_Q sunuşu *p-Cockcroft*,

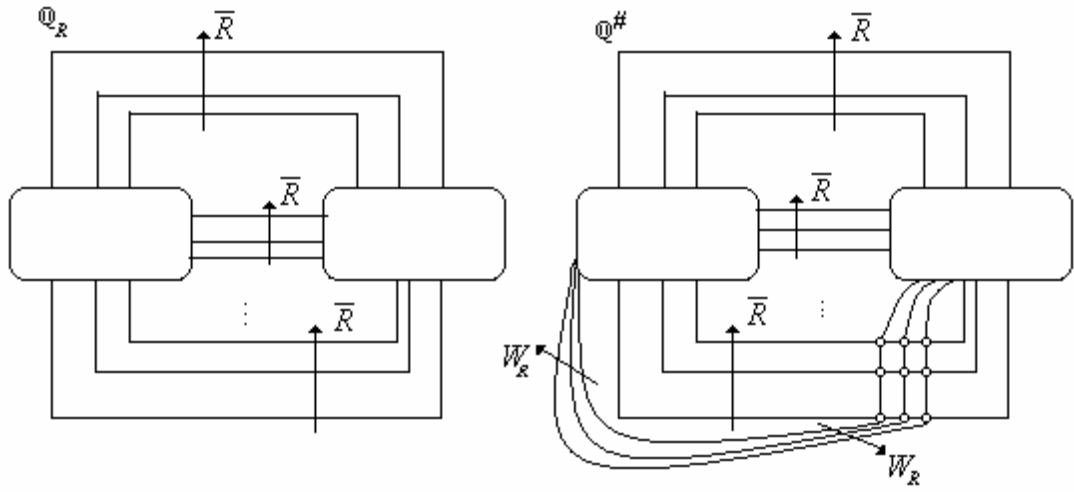
v) Her $a \in \mathbf{a}$, $\mathbb{Q} \in \mathbf{Y}$ ve $1 \leq i \leq s$ için, $\alpha_{a,i}(\mathbb{Q}) \equiv 0 \pmod{p}$

şeklinde ifade edilir. Burada ispat $m \neq 0$ durumunun aynısı olarak yapılır. \diamond

4.2.3 Örnek: Q , *Combinatorial Apsheral (CA)* sunuşa sahip bir grup olsun. Bu durumda $\wp_Q = \langle \mathbf{a}; \mathbf{r} \rangle$ olmak üzere, her bir $R \in \mathbf{r}$ için, $R = \bar{R}^{l_R}$ ($l_R \geq 1$) biçimindedir. Ayrıca, K sunuşu (4.2) de verildiği gibi bir grup olsun. O halde, her $R \in \mathbf{r}$ için, G merkezi genişleme grubunun sunuşu

$$\wp_G = \langle \mathbf{a}, x_1, x_2, \dots, x_s; \bar{R}^{l_R} W_R^{-1}, x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_s^{m_s}, C_{i,n}, C_{a,i} (a \in \mathbf{a}) \rangle \quad (4.8)$$

biçimindedir. Burada, W_R kelimesi $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}$ ($0 \leq k_i < m_i, 1 \leq i \leq s$) formunda olup, $C_{a,i} = [a, x_i]$ ($a \in \mathbf{a}, 1 \leq i \leq s$) ve $C_{i,n} = [x_i, x_n]$ ($1 \leq i < n \leq s$) şeklinde bağıntılardır. \wp_Q sunuşu (CA) olduğundan dolayı *Cockcroft* dur ve böylece bazı p asalları için, *p-Cockcroft* olur. Aslında, her bir $R \in \mathbf{r}$ için, $\pi_2(\wp_Q)$ nin üreteç resmi \mathbb{Q}_R ve bununla bağlantılı olan $\mathbb{Q}^\#$ resmi Şekil 4.14 ile gösterildiği gibidir.



Şekil 4.14

Şekil 4.14 de verilen \mathbb{Q}_R resmini incelendiğinde, 4.2.1 Teoremin sağlanmış olduğunu kolaylıkla görülür. Ayrıca, her $R \in \mathfrak{r}$ ve $a \in \mathfrak{a}$ için, $\exp_a(\bar{R}) = l_R$ olup, $1 \leq i \leq s$ olmak üzere, $\exp_{x_i}(W_R) = k_i$ dir. Bununla beraber,

$$\alpha_{a,i}(\mathbb{Q}_R) = \exp_a(\bar{R}) k_i$$

biçimindedir. Sonuç olarak, $\mathbb{Q}^\#$ resmi incelediğinde, her bir $1 \leq i \leq s$ için, $\lambda_i(\mathbb{Q}_R) = 0$ olduğu görülür. •

Yukarıdaki örnekten hareketle, 4.2.2 Teoremin bir sonucu olarak, aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

4.2.4 Önerme: \wp_G sunuşu (4.8) de verildiği gibi olsun. Bu durumda, p asal sayı olmak üzere, \wp_G nin p -Cockcroft olması için gerek ve yeter koşul, her bir $1 \leq i \leq s$ ve $R \in \mathfrak{r}$ için,

$$k_i \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{ve} \quad l_R \equiv 0 \pmod{p}$$

olmasıdır. Başka bir deyişle, \wp_G nin etkili olması için gerek ve yeter koşul

$$(k_i, l_R) \neq 1$$

olmasıdır.

4.2.3 Örnek (Devam): Q grubu (r, q, n) -üçgensel grubu olarak alındığında, bu grubun sunuşu, $r, q, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n} \leq 1$ olmak üzere,

$$\wp_Q = \langle a, b ; a^r, b^q, (ab)^n \rangle$$

biçimindedir. Burada, weight testinden [15], [35] hareketle, \wp_Q grubu (CA) dır. Böylece, 4.2.4 Önermeden hareketle, K grubunun Q ile oluşturduğu merkezi genişlemesinin etkili olması için gerek ve yeter koşul

$$(k_i, r, q, n) \neq 1$$

olmasıdır. •

5. BÖLÜM

SONLU DEVİRLİ MONOİDLERİN YARI DİREKT ÇARPIMININ MİNİMAL ANCAK ETKİSİZ SUNUŞUNUN BULUNMASI

5.1 Giriş

Γ bir graf olsun (1.3.2 Bölüm). Böyle bir Γ grafindaki yoldan, tersinir kenar çiftlerinin silinmesi (eklenmesi) veya alt yollardaki yer değiştirme işlemleri ile yeni bir yol elde edilebileceğini, böylece Γ daki yollar üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturulabileceğini ve yollar üzerindeki bu bağıntıyla beraber Γ grafına, \emptyset monoid sunuşunun, *Squier kompleksi* dendiğini biliyoruz.

Pride 1995 de “Geometric Methods in Combinatorial Semigroup Theory” isimli çalışmasında [63], Squier kompleksini bir takım geometrik figürler (*resimler*) yardımıyla ifade etmiştir (1.3.2 Bölüm). Ayrıca, yine bu çalışmasında, *resimler* üzerinde *p-Cockcroft* olma özelliğini tanımlamıştır. Bununla beraber, [50] deki ortak çalışmada, *p-Cockcroft* olma ile *etkililik* arasındaki ilişkiyi veren 1.3.14 Teoremi ispatlanmıştır.

Squier, [69] deki çalışmasında, “*Sonlu Türetilme Özelliğini*” (FDT) tanımlamış ve monoid sunuşlarının FDT sinin belirlenmesiyle ilgili bir takım çalışmalar yapmıştır. Wang ise, [74] de, bu çalışmalardan hareketle FDT ye sahip monoidlerin yarı direkt çarpımının da FDT ye sahip olduğunu göstermiştir. Çevik, [28] ve [30] da, Wang’ın bu çalışmasını figürsel olarak gösterip (yani üreteç resimlerini çizip), yarı direkt çarpımının etkiliğini (*p-Cockcroft*) veren koşulları ortaya koymuştur.

Bununla beraber, tezin 1. Bölümünde ifade edildiği gibi, verilen bir monoidin etkisiz olduğunu göstermek de bir sonuç verecektir. Çünkü bir monoidin birden fazla sunuşu olabilir. Bu sunuşlardan birinin etkisiz olması o monoidin etkisiz olmasını

gerektirmez. Etkisiz olan σ sunuş, bir takım işlemlerle (örneğin, Tietze Transformasyonları [57] vs.) etkili hale getirilebilir. Bu yüzden verilen bir monoidin etkisiz olduğunu göstermek için, her şeyden önce σ monoidin etkisiz sunuşun *minimal* liğini çalışmak yeterli olacaktır. Minimallik ile ilgili bazı sonuçlar [6], [7] ve [30] daki çalışmalardan elde edilebilir.

Bu bölümde ilk olarak monoidler üzerinde yarı direkt çarpım tanımlanıp, bu çarpım ile ilgili olan sunuş verilecektir. Ayrıca verilen bu sunuşun Squier kompleksinin üreteç kümesi tanımlanacaktır. Son olarak ise, monoidlerin yarı direkt çarpımını etkili yapan koşulların belirlenmiş olduğu sonuç [28; Teorem 3.1] kullanılarak, bu bölümün ana teoremi olarak, sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpım monoidini *minimal* ancak *etkisiz* yapan koşullar ortaya konulacaktır.

5.2 Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımı

Monoidlerin yarı direkt çarpımını tanımlamadan önce, monoidlerin sunuşu ile ilgili bazı temel bilgilerin verilmesi gerekir.

Aslında, monoid sunuşu ile ilgili genel bilgiler tezimizin birinci bölümde verilmişti. Bu kısımda ise verilen bir sunuşun bir monoid cebirsel yapısını temsil edebilmesi için gerek ve yeter koşulları vereceğiz. Buna göre M bir monoid ve \mathbf{x} bir küme olsun. Ayrıca

$$\psi : \mathbf{x} \rightarrow M, \quad x \rightarrow m_x$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada \mathbf{x} kümesi üzerinde, boştan farklı bir $W = x_1 x_2 \cdots x_r$ ($x_1, x_2, \cdots, x_r \in \mathbf{x}$) kelimesi için,

$$(W)\psi^* = m_{x_1} m_{x_2} \cdots m_{x_r} \tag{5.1}$$

kuralı ile tanımlı $\psi^* : F(\mathbf{x}) \rightarrow M$ homomorfizmasının varlığını biliyoruz. Özel olarak W boş kelime ise, $(W)\psi^* = 1_M$ dir. Şimdi (5.1) ile tanımlanan ψ^* homomorfizması yardımıyla, bir M monoidinin sunuşunun oluşturulmasında kullanılan aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

5.2.1 Önerme [28]: $\bar{\wp} = [\mathbf{x} : \mathbf{r}]$ bir monoid sunuşu olsun. (5.1) de verilen ψ^* homomorfizmasının

$$\psi_* : M(\bar{\wp}) \rightarrow M, \quad [x]_{\bar{\wp}} \mapsto m_x$$

şeklindeki homomorfizmaya genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul, her $R \in \mathbf{r}$ için,

$$(R_+) \psi = (R_-) \psi$$

olmasıdır.

5.2.2 Örnek: $Mat_n(\mathbb{Z}^+)$ kümesi, her bir bileşeni negatif olmayan tam sayılardan oluşan $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi ve $\bar{\wp} = [x, y : x^2 y^3 = yx]$ bir monoid sunuşu olsun. Buna göre $m_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\psi : \{x, y\} \rightarrow Mat_n(\mathbb{Z}^+), \quad x \mapsto m_1, \quad y \mapsto m_2,$$

fonksiyonunu düşünelim. Burada $(x^2 y^3) \psi = (yx) \psi$ olduğundan, 5.2.1 Önermeden, ψ dönüşümü

$$\psi_* : M(\bar{\wp}) \rightarrow Mat_n(\mathbb{Z}^+) \text{ öyleki } [x]_{\bar{\wp}} \mapsto m_1, \quad [y]_{\bar{\wp}} \mapsto m_2$$

homomorfizmasına genişletilir. •

5.2.3 Tanım: M bir monoid, $\mathbf{m} = \{m_x : x \in \mathbf{x}\}$ kümesi M için bir üreteç kümesi ve $\bar{\wp} = [\mathbf{x} : \mathbf{r}]$ olsun. Eğer

$$\psi : \mathbf{x} \rightarrow M, \quad x \rightarrow m_x$$

dönüşümü,

$$\psi_* : M(\overline{\wp}) \rightarrow M, \quad [x]_{\overline{\wp}} \mapsto m_x$$

izomorfizmasına genişletilebiliyorsa, bu $\overline{\wp}$ sunuşuna M monoidinin sunuşu denir.

Bu bölümün temel yapısını oluşturan “devirli (cyclic veya monogenic [41]) monoidler” ile ilgili detaylı bilgiler, elemanlar ve sunuşlar [6], [28] ve [41] gibi kaynaklarda bulunabilir.

5.2.4 Önerme: M mertebesi $k > 1$ olan ve m ile üretilen sonlu devirli monoid olsun. O zaman $\mathbf{m} = \{m\}$ üreteç kümesi üzerinde M nin sunuşu

$$\overline{\wp}_{k,l} = [x : x^k = x^l] \quad (5.2)$$

biçimindedir.

İspat: (5.1) de verilen $x \xrightarrow{\psi} m$ dönüşümünü düşünelim. O zaman $(x^k)\psi = (x^l)\psi$ olduğundan, 5.2.1 Önermeden

$$\psi_* : M(\overline{\wp}_{k,l}) \rightarrow M, \quad [x]_{\overline{\wp}_{k,l}} \mapsto m$$

genişletilmiş homomorfizmasını elde ederiz. Burada $m \in \text{Gör}(\psi_*)$ olduğundan, ψ_* örtendir. $\overline{\wp}_{k,l}$ sunuşundan elde edilecek olan birbirinden farklı elemanlar

$$1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$$

biçiminde olup, 5.2.3 Tanım yardımıyla, $M(\overline{\wp}_{k,l})$ nin farklı elemanları

$$[1], [x], [x^2], \dots, [x^{k-1}]$$

olacaktır. Buradan $|M(\overline{\wp}_{k,l})| = k$ elde edilir. Özel olarak, ψ_* nin birebir olmamasının kabulü $|\text{Im}(\psi_*)| < |M(\overline{\wp}_{k,l})| = k$ eşitsizliğini vereceğinden, ψ_* birebir olmak zorundadır. Bu ise ispatı bitirir. \diamond

Tezimizin bundan sonraki kısımlarında $M(\overline{\vartheta}_{k,l})$ yi kısalık sağlaması açısından sadece $M_{k,l}$ ile göstereceğiz. Şimdi 5.2.4 Önermenin ispatında kısaca değindiğimiz $M_{k,l}$ nin elemanlarını detaylı olarak inceleyelim. Aslında bu elemanlar, [6] ve [28] de belirtildiği gibi, $0 \leq i < k$ olmak üzere, $[x^i]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. Burada $0 \leq i < l$ için, $[x^i]$ denklik sınıfı sadece x^i elemanından oluşur. Öte taraftan, $i \geq l$ olduğunda $[x^i]$ denklik sınıfı

$$[x^i] = \{x^{i+q(k-l)} : q = 0, 1, 2, \dots\}$$

biçimindeki sonsuz sayıda elemanlardan oluşur.

5.2.5 Örnek: $M_{4,2}$ monoidini düşünelim. Dolayısıyla denklik sınıfları

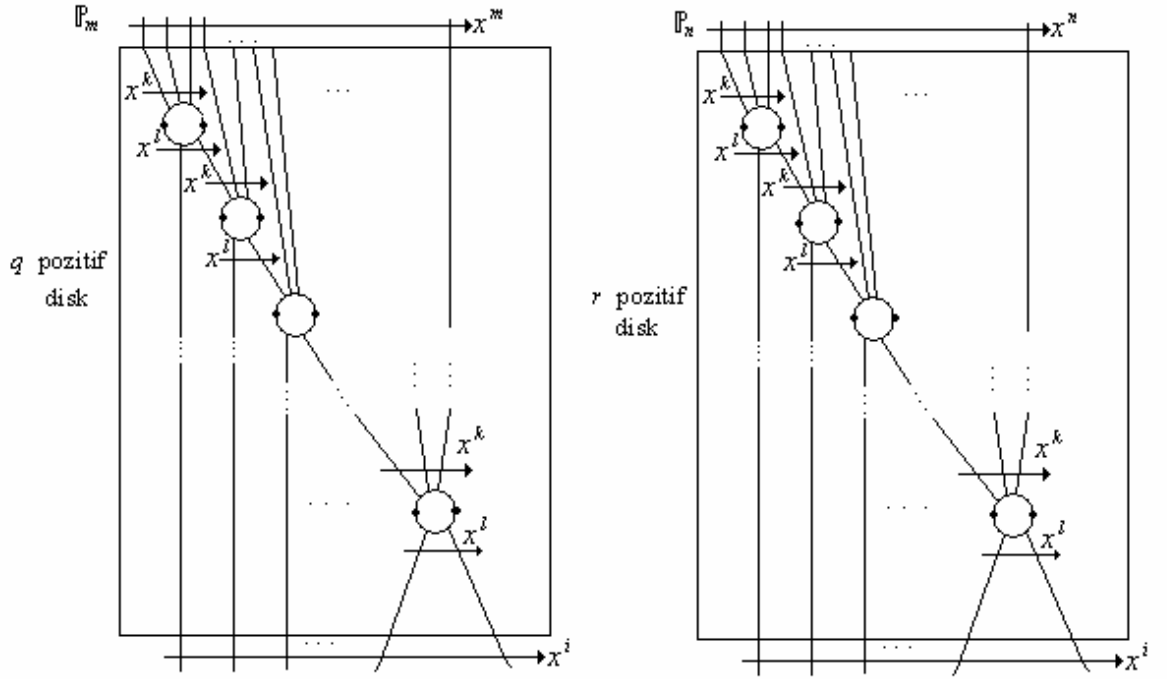
$$[x^0] = \{1\}, \quad [x^1] = \{x\}, \quad [x^2] = \{x^2, x^4, x^6, \dots\} \quad \text{ve} \quad [x^3] = \{x^3, x^5, x^7, \dots\}$$

biçiminde olacaktır. •

Kabul edelim ki, x^m ve x^n ($m \leq n$) elemanları aynı $[x^i]$ denklik sınıfına ait olsun. Eğer $i < l$ ise $m = n$ olacaktır. O halde $i \geq l$ olsun. O zaman q ve r negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$m = i + q(k-l) \quad \text{ve} \quad n = i + r(k-l)$$

olur. Böylece x^m den x^i ye uzunluğu q olan ve x^n den x^i ye uzunluğu r olan pozitif yollar (yani, $x^k = x^l$ bağıntısı ile pozitif yönde etiketlenmiş olan bütün disklerle oluşturulmuş monoid resmi) Squier kompleks içinde bulunacaktır. Bu durumu geometrik olarak aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



Dolayısıyla $\mathbb{P}_n \mathbb{P}_m^{-1}$ resmi, aslında, x^n den x^m ye bir yol tanımlar. Ayrıca

$R : x^k = x^l$ bağıntısı için

$$\exp_R(\mathbb{P}_n \mathbb{P}_m^{-1}) = r - q$$

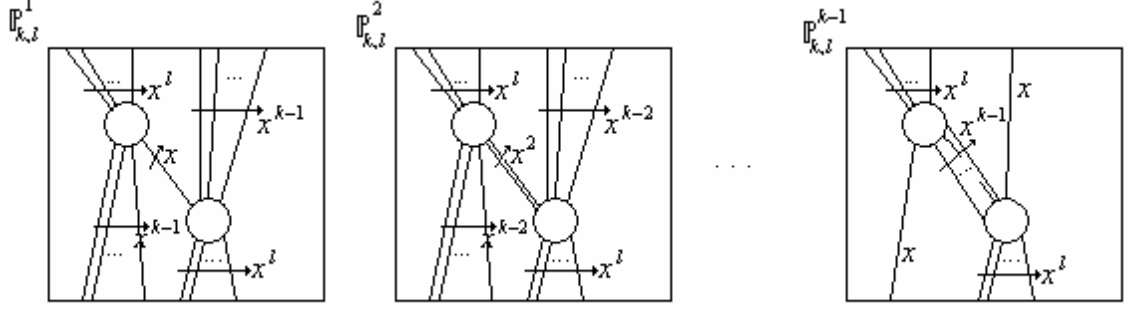
dır. Böylece $r - q = \frac{n - m}{k - l}$ olduğundan,

$$\exp_R(\mathbb{P}_n \mathbb{P}_m^{-1}) = \frac{n - m}{k - l} \quad (5.3)$$

elde edilir.

Aşağıdaki önerme, $M_{k,l}$ devirli monoidinin Squier kompleksinin üreteç kümesini tanımlar.

5.2.6 Önerme [28]: M monoidinin sunuşu (5.2) ile verildiği gibi olsun. Bu durumda $D(\overline{\varphi}_{k,l})$ Squier kompleksinin üreteç kümesi, Şekil 5.1 de gösterildiği gibi, $\mathbb{P}_{k,l}^i$ ($1 \leq i \leq k-1$) resimlerinden oluşmaktadır.



Şekil 5.1

Şimdi, 2. Bölümde “gruplar” üzerinde tanımladığımız yarı direkt çarpım kavramını, genel anlamda “monoidlere” taşıyıp, bu tür monoidlerin sunuşu verebiliriz.

5.2.7 Tanım: Bir M monoidinin kendisinden, kendisi üstüne tanımlanan homomorfizmasına *endomorfizma* adı verilir. Aslında M nin bütün endomorfizmalarının kümesi bileşke işlemi altında bir monoid oluşturur ve $End(M)$ ile gösterilir. Burada birim eleman $id : M \rightarrow M$ dir.

Endomorfizma örnekleri [32] de bulunabilir.

5.2.8 Tanım: A ve K herhangi iki monoid olmak üzere, her $a \in A, k \in K$ için,

$$\theta : A \rightarrow End(K), \quad a \rightarrow \theta_a \quad (a \in A), \quad 1 \mapsto id_{End(K)}$$

şeklinde tanımlanan θ homomorfizması

$$(k)\theta_{a_1 a_2} = ((k)\theta_{a_1})\theta_{a_2}$$

şartını sağlasın. Buna göre K nın A ile olan yarı direkt çarpımı, her (a, k) sıralı çifti için,

$$(a, k)(a', k') = (aa', (k)\theta_a k') \quad (5.4)$$

kuralını sağlayan bir kümedir.

5.2.8 Tanımı sağlayan kümeye M diyelim. Aşağıda verilen 5.2.9 ve 5.2.11 Teoremlerinin ispatları, 2.2.2 ve 2.2.5 Teoremin ispatına benzer olarak yapılır.

5.2.9 Teorem: M kümesi (5.4) de verilen işlem altında bir monoidtir.

5.2.10 Tanım: (5.4) de verilen işlem ile tanımlanmış olan M monoidine K nın A ile olan yarı direkt çarpımı denir ve $M = K \times_{\theta} A$ ile gösterilir.

5.2.11 Teorem ([68], [74]): A ve K monoidlerinin sunuşları sırasıyla $\wp_A = [\mathbf{x} : \mathbf{r}]$ ve $\wp_K = [\mathbf{y} : \mathbf{s}]$ olsun. Özel olarak T_{yx} simgesi ile

$$yx = x(y)\theta_x \quad (x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y})$$

biçimindeki bir bağıntıyı gösterelim. Ayrıca \mathbf{t} kümesi, T_{yx} formundaki bütün bağıntuların kümesi olsun. O zaman M yarı direkt çarpım monoidinin sunuşu

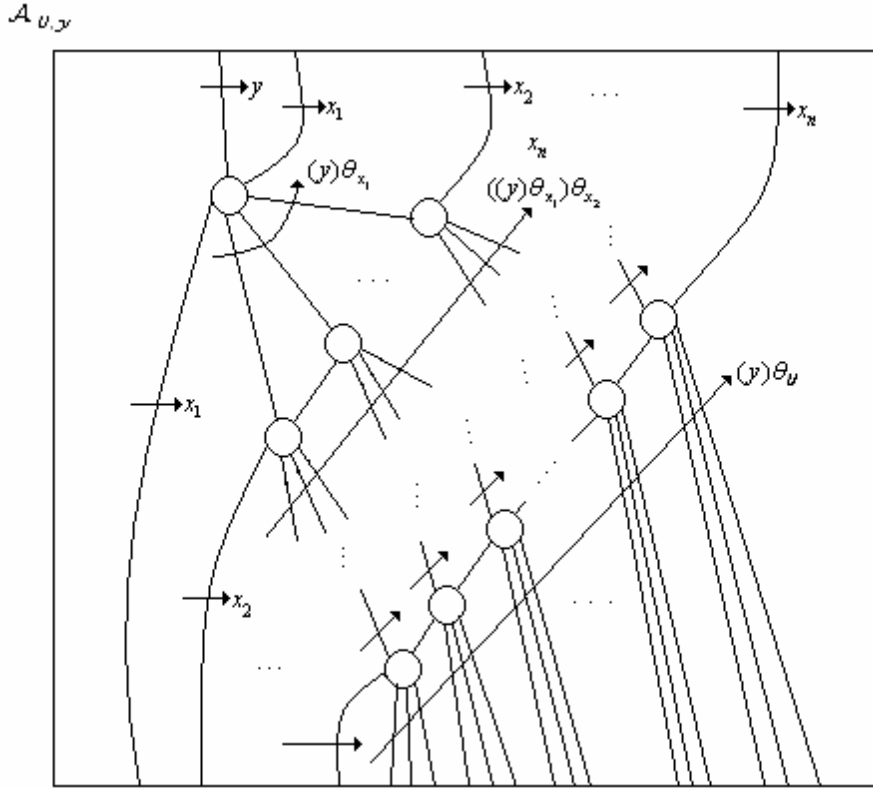
$$\overline{\wp}_M = [\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}] \quad (5.5)$$

biçimindedir.

$W = y_1 y_2 \cdots y_m$ kelimesi \mathbf{y} kümesi üzerinde tanımlanmış pozitif bir kelime olsun. O zaman, her $x \in \mathbf{x}$ için, $(W)\theta_x = (y_1)\theta_x (y_2)\theta_x \cdots (y_m)\theta_x$ eşitliği vardır. Benzer olarak $U = x_1 x_2 \cdots x_n$ kelimesi \mathbf{x} kümesi üzerinde tanımlanan pozitif bir kelime olmak üzere,

$$(y)\theta_U = (\cdots((y)\theta_{x_1})\theta_{x_2})\theta_{x_3} \cdots \theta_{x_n}$$

olarak ifade edilir. Bu ikinci durum, resimsel olarak, Şekil 5.2 deki gibi gösterilebilir [28]. Bu resme $\mathcal{A}_{U,y}$ diyelim.



Şekil 5.2

Bu bölümdeki esas amacımız; sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpımını *minimal ancak etkisiz kılan koşulları* belirlemek olduğundan, öncelikle bu yarı direkt çarpımı etkili yapan koşulların belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için etkililik kavramı ile *p-Cockcroftluk* kavramlarının denliğini göz önünde bulundurarak, yarı direkt çarpımın üreteç resimlerini belirlememiz gerekmektedir. Bu resimler kullanılarak, etkililik koşulları belirlenebilecektir. Yine bu resimler kullanılarak minimallik testi uygulanabilecektir.

Dolayısıyla, bundan sonraki kısımda, yarı direkt çarpımın üreteç resimlerini, yani $D(\overline{\varphi}_M)$ Squer Kompleksini (üreteç resimlerini) belirleyerek yukarıdaki paragrafta açıkladığımız amaçlarımıza ulaşacağız.

Yukarıda (5.5) ile verilen $\overline{\wp}_M$ sunuşunu göz önüne alalım.

Ayrıca $S \in \mathbf{S}$ ve $x \in \mathbf{X}$ olsun. Bu durumda $[(S_+) \theta_x]_{\overline{\wp}_K}^- = [(S_-) \theta_x]_{\overline{\wp}_K}^-$ olduğundan, $\overline{\wp}_K$ sunuşu üzerinde, $\mathbb{Q}_{S,x}$ küresel olmayan bir resim oluşur. Bu küresel resmin başlangıcı

$$\iota(\mathbb{Q}_{S,x}) = (S_+) \theta_x$$

ve bitişi

$$\tau(\mathbb{Q}_{S,x}) = (S_-) \theta_x$$

dir.

Benzer olarak, $R \in \mathbf{r}$ ve $y \in \mathbf{Y}$ olsun. Böylece, Şekil 5.2 de gösterilmiş olduğu gibi, $\mathcal{A}_{R_+,y}$ ve $\mathcal{A}_{R_-,y}$ küresel olmayan resimleri elde ederiz. Elde edilen bu resimler sadece T_{yx} bağıntısını barındıran disklerden oluşur. Ayrıca $[(y) \theta_{R_+}]_{\overline{\wp}_K}^- = [(y) \theta_{R_-}]_{\overline{\wp}_K}^-$ olduğundan, $\overline{\wp}_K$ sunuşu üzerinde, küresel olmayan, \mathbb{C}_{y,θ_R} resmi oluşur. Bu resmin başlangıcı

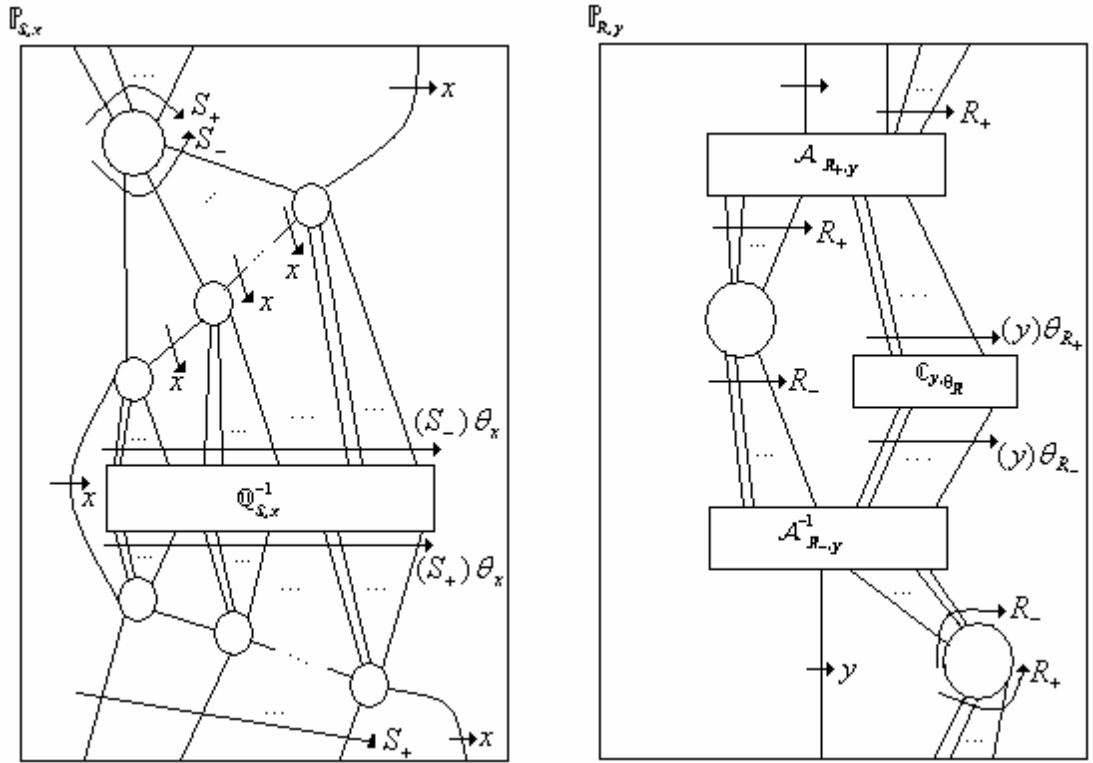
$$\iota(\mathbb{C}_{y,\theta_R}) = (y) \theta_{R_+}$$

ve bitişi

$$\tau(\mathbb{C}_{y,\theta_R}) = (y) \theta_{R_-}$$

biçimindedir.

[74] de yukarıda verilen küresel olmayan resimler kullanarak, Şekil 5.3 de çizilen, küresel olan $\mathbb{P}_{S,x}$ ve $\mathbb{P}_{R,y}$ resimleri elde edilmiş ve bu resimlerin yarı direkt çarpımın üreteç resimleri olduğunu gösteren 5.2.12 Teoremi ispatlanmıştır.



Şekil 5.3

A ve K monoidlerinin yarı direkt çarpımı olan $K \times_{\theta} A$ yı oluşturabilmek için,

$$\theta : A \rightarrow \text{End}(K)$$

homomorfizmasını tanımlamak gerekmektedir. Şimdi bu homomorfizmayı tanımlayalım.

A ve K monoidlerinin sunuşları sırasıyla $\bar{\phi}_A = [\mathbf{x} : \mathbf{r}]$ ve $\bar{\phi}_K = [\mathbf{y} : \mathbf{s}]$ olsun. Ayrıca, her $x \in \mathbf{x}$ için, $\psi_x \in \text{End}(K)$ olsun. Böylece

$$\mathbf{x} \rightarrow \text{End}(K), \quad x \mapsto \psi_x \quad (5.6)$$

dönüşümüne sahip oluruz. Burada $W = x_1 x_2 \cdots x_n$ ($x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{x}$) kelimesi için,

$$\psi_W = \psi_{x_1} \psi_{x_2} \cdots \psi_{x_n}$$

olsun. Bu durumda, 5.2.1 Önermeden, (5.6) ile verilen dönüşümün

$$\theta : A \rightarrow \text{End}(K)$$

homomorfizmasına genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul, her $R \in \mathbf{r}$ için,

$$\psi_{R_+} = \psi_{R_-}$$

olmasıdır. Dolayısıyla $K \times_{\theta} A$ nın elde edilebilmesi için gerek ve yeter koşul, her $R \in \mathbf{r}$, $y \in \mathbf{y}$ için,

$$[y]\psi_{R_+} = [y]\psi_{R_-} \quad (5.7)$$

olmasıdır.

5.2.12 Teorem [28], [74]: $M = K \times_{\theta} A$ sunuşu (5.5) de belirtildiği gibi $\overline{\wp}_M$ ile gösterilmiş olan ve (5.7) koşulunu sağlayan bir yarı direkt çarpım olsun. Ayrıca \mathbf{X}_A ve \mathbf{X}_K , sırasıyla $D(\overline{\wp}_A)$ ve $D(\overline{\wp}_K)$ Squier komplekslerinin üreteç kümeleri olsun. O zaman

$$\mathbf{C}_1 = \{ \mathbb{P}_{S,x} : S \in \mathbf{s}, x \in \mathbf{x} \} \quad \text{ve} \quad \mathbf{C}_2 = \{ \mathbb{P}_{R,y} : R \in \mathbf{r}, y \in \mathbf{y} \}$$

olmak üzere, $D(\overline{\wp}_M)$ nin üreteç kümesi

$$\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_A \cup \mathbf{X}_K \cup \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$$

biçimindedir.

Çevik [28] deki çalışmasında, 5.2.12 Teoremden hareketle, (5.5) ile verilen sunuşun p -Cockcroft olması için gerek ve yeter koşulları ortaya koyan aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

5.2.13 Teorem[28, Teorem 3.1]: $M = K \times_{\theta} A$ olmak üzere, M nin sunuşu (5.5) de gösterildiği gibi olsun. Bu durumda, p bir asal sayı veya sıfır olmak üzere, $\overline{\wp}_M$ sunuşunun p -Cockcroft olması için gerek ve yeter koşullar

- i) $\overline{\wp}_A$ ve $\overline{\wp}_K$ sunuşları p -Cockcroft dur,
- ii) Her $S \in \mathbf{s}$ ve $y \in \mathbf{y}$ için, $\exp_y(S) \equiv 0 \pmod{p}$ dır,
- iii) Her $S \in \mathbf{s}$ ve $x \in \mathbf{x}$ için, $\exp_S(\mathbb{Q}_{S,x}) \equiv 1 \pmod{p}$ dır,
- iv) Her $S \in \mathbf{s}$, $y \in \mathbf{y}$ ve $R \in \mathbf{r}$ için, $\exp_S(\mathbb{C}_{y,\theta_R}) \equiv 0 \pmod{p}$,
- v) Her $x \in \mathbf{x}$, $y \in \mathbf{y}$ ve $R \in \mathbf{r}$ için,

$$\exp_{T_{yx}}(\mathcal{A}_{R+,y}) \equiv \exp_{T_{yx}}(\mathcal{A}_{R-,y}) \pmod{p}$$

dır.

5.3 Sonlu Devirli Monoidlerin Yarı Direkt Çarpımı

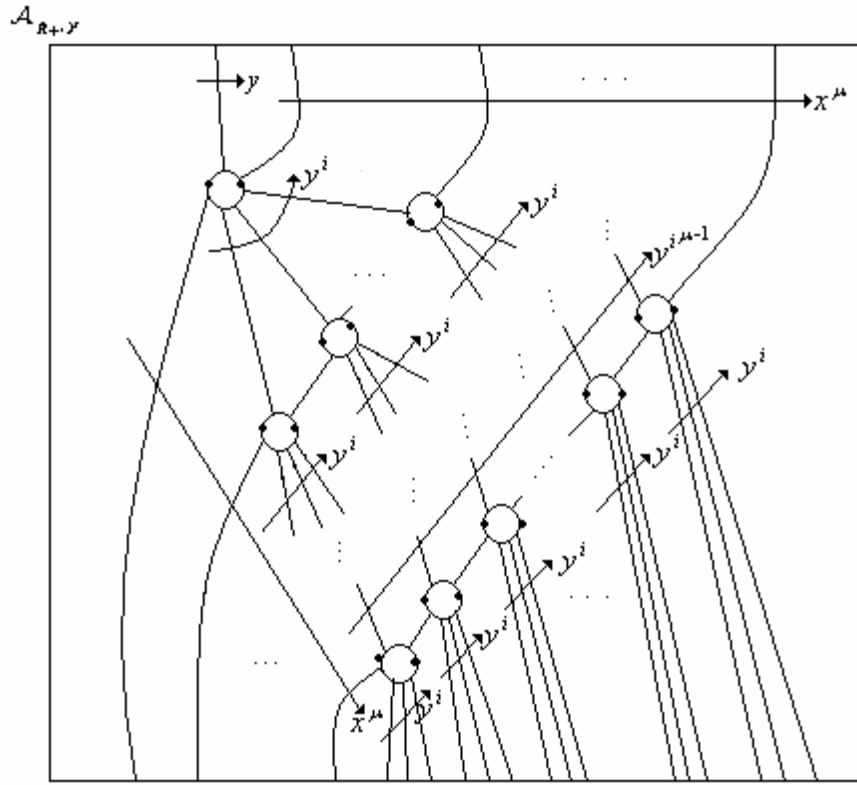
A ve K sunuşları sırasıyla, $\overline{\wp}_A = [x : x^{\mu} = x^{\lambda}]$ ve $\overline{\wp}_K = [y : y^k = y^l]$ ($k, l, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}^+$, $l < k, \lambda < \mu$) olan sonlu devirli iki monoid, ayrıca ψ_i ($0 \leq i \leq k-1$), K nın endomorfizmaları olsun. O zaman

$$x \rightarrow \text{End}(K), \quad x \rightarrow \psi_i$$

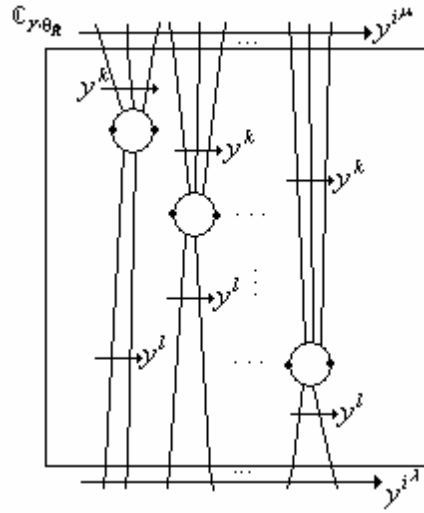
dönüşümünün

$$\theta : A \rightarrow \text{End}(K), \quad x \rightarrow \psi_i$$

homorfizmasına genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul, (5.6) dan, $[y]\psi_i^{\mu} = [y]\psi_i^{\lambda}$ olmasıdır. Böylece A ve K devirli monoidlerinin yarı direkt çarpımını elde etmek için $[y^{i\mu}] = [y^{i\lambda}]$ eşitliğinin sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $M = K \times_{\theta} A$ olmak üzere, M nin sunuşu,



Şekil 5.5



Şekil 5.6

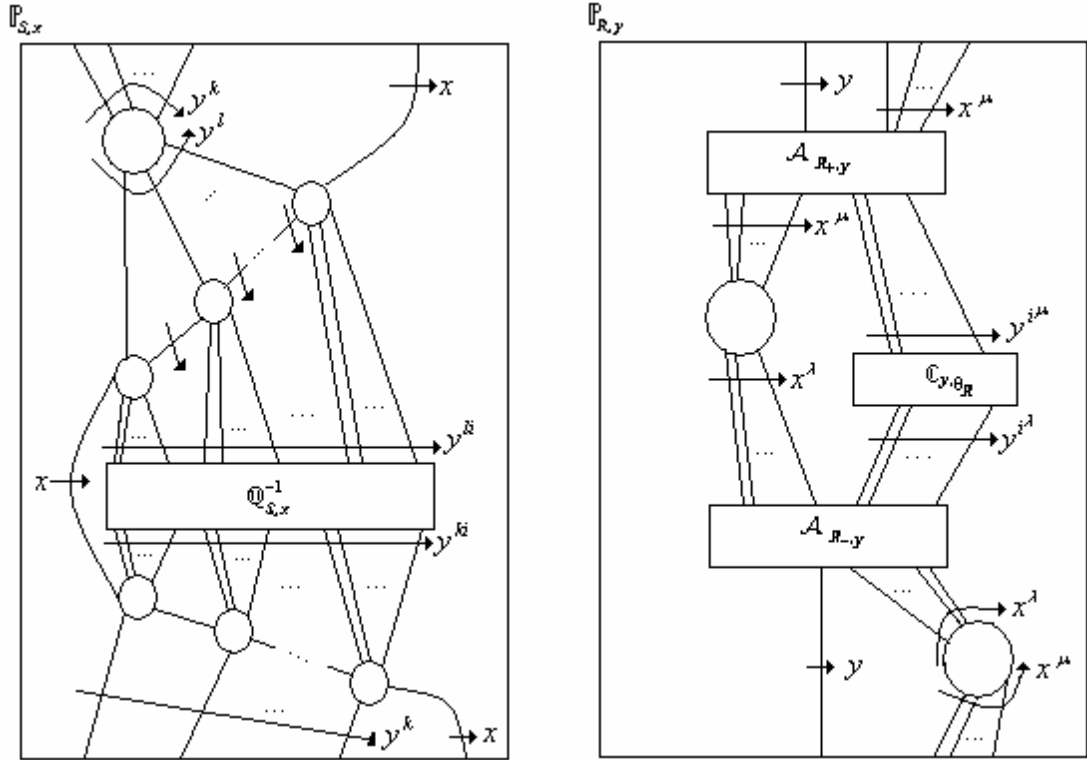
$\mathcal{A}_{R+,y}$ ve $\mathcal{A}_{R-,y}$ resimleri bizi

$$\exp_{T_{yx}}(\mathcal{A}_{R+,y}) = 1 + i + i^2 + \dots + i^{\mu-1} = \frac{i^\mu - 1}{i - 1} \quad \text{ve}$$

$$\exp_{T_{yx}}(\mathcal{A}_{R,y}) = 1 + i + i^2 + \dots + i^{\lambda-1} = \frac{i^\lambda - 1}{i - 1}$$

eşitliklerine ulaştıracaktır.

Özel olarak $\mathbb{P}_{S,x}$ ve $\mathbb{P}_{R,y}$ üreteç resimleri, Şekil 5.7 de gösterildiği gibi çizilebilir.



Şekil 5.7

Yukarıda verilen eşitliklerdeki $k-l$, $i-1$ ve $i^\mu - i^\lambda$ ifadelerini, sırasıyla, m , n ve t ile gösterelim. Şimdi 5.2.13 Teoremin bir sonucu olan, sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpımını p -Cockcroft yapan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.3.1 Teorem: $M = K \times_{\theta} A$ olmak üzere, M nin sunuşu (5.8) ile gösterildiği gibi olsun. Bu durumda, p asal sayı veya sıfır olmak üzere, $\overline{\wp}_M$ sunuşunun p -Cockcroft olması için gerek ve yeter koşul

$$p \mid m, p \mid n, p \mid \frac{t}{m}, p \mid \frac{t}{n}$$

olmasıdır.

İspat: \Rightarrow : $\overline{\wp}_M$ sunuşu p -Cockcroft olsun. Buna göre 5.2.13 Teoremin koşullarının sağlandığını göstermeliyiz.

i) 5.2.6 Önermeden, \mathbf{X}_A ve \mathbf{X}_K nin sırasıyla $D(\overline{\wp}_A)$ ve $D(\overline{\wp}_K)$ Squier komplekslerinin üreteç kümelerinin resimleri Şekil 5.1 de verilmiştir. Bu resimlerden $\overline{\wp}_A$ ve $\overline{\wp}_K$ nin p -Cockcroft olduğu kolayca görülür. Böylece 5.2.13 Teoremin (i). koşulunu sağlanmış olur.

ii) Her $S \in \mathbf{s}$ ve $y \in \mathbf{y}$ için, $\exp_y(S) = k - l$ olduğundan, 5.2.13 Teoremin (ii). koşulu olan $\exp_y(S) \equiv 0 \pmod{p}$ sağlanması için $p \mid k - l$ olmalıdır.

iii) Her $S \in \mathbf{s}$ ve $x \in \mathbf{x}$ için, $\exp_S(\mathbb{Q}_{S,x}) = i$ olduğundan (iii). koşulunun sağlanması için, $i \equiv 1 \pmod{p}$ olmalıdır. O halde $p \mid i - 1$ dir.

iv) Her $S \in \mathbf{s}$, $y \in \mathbf{y}$ ve $R \in \mathbf{r}$ için, \mathbb{C}_{y,θ_R} alt resmi için Şekil 5.6 dan, $\exp_S(\mathbb{C}_{y,\theta_R}) \equiv 0 \pmod{p}$ koşulunun sağlanması için $p \mid \frac{i^\mu - i^\lambda}{k - l}$ olmalıdır.

v) Her $x \in \mathbf{x}$, $y \in \mathbf{y}$ ve $R \in \mathbf{r}$ için, 5.2.13 Teoremin (v). koşulu olan $\exp_{T_{yx}}(\mathcal{A}_{R_+,y}) \equiv \exp_{T_{yx}}(\mathcal{A}_{R_-,y}) \pmod{p}$ nin sağlanması için, Şekil 5.5 den,

$$\frac{i^\mu - 1}{i - 1} \equiv \frac{i^\lambda - 1}{i - 1} \pmod{p}$$

olmalıdır. Buradan da

$$\frac{i^\mu - i^\lambda}{i - 1} \equiv 0 \pmod{p}$$

sonucuna ulaşılır.

\Leftarrow : Tersine $p \mid m, p \mid n, p \mid \frac{t}{m}, p \mid \frac{t}{n}$ olsun. Bu durumda,

$\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_A \cup \mathbf{X}_K \cup \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$ üreteç resimlerinin kümesinden hareketle, $\overline{\wp}_M$ sunuşunun p -Cockcroft olduğu kolayca görülür.

5.3.2 Örnek: 5.3.1 Teoremde, $k = 10, l = 6, \mu = 4, \lambda = 2$ ve $i = 3$ olarak alalım. Böylece

$$m = 4, n = 2, t = 3^4 - 3^2 = 72, \frac{t}{m} = 18 \text{ ve } \frac{t}{n} = 36$$

dır. Özel olarak, $p = 2$ asalı için Teorem 5.3.1 den, $\overline{\wp}_M$ sunuşu 2-Cockcroft olur. •

5.4 Ana Teorem

Birinci bölümde, *İkinci Fox İdealler* yardımıyla, Pride tarafından ispatlanan ve bir monoid sunuşunun minimalliği veren 1.3.15 Teorem ifade edilmişti. 5.3. Bölüm’de ise sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpımını etkili yapan koşulları veren 5.3.1 Teorem ifade ve ispat edilmişti. Tezimizin bu bölümünde ise, 1.3.15 ve 5.3.1 Teoremlerinden hareketle, (5.8) ile verilen $\overline{\wp}_M$ sunuşunu, minimal ancak etkisiz yapan (ki bu bölümün ana sonucu olan) 5.4.1 Teoreminin ifadesi verilip, ispatı için gerekli olacak bir takım önermeler sunulacaktır. Bununla beraber bu sonucun ispatı, bir alt bölüm olarak bağımsız şekilde yapılacaktır.

Verilen bir sunuşun etkili olabilmesi için gerek ve yeter şartın bu sunuşun p -Cockcroft olmasından hareketle, 5.2.13 ve 5.3.1 Teoremlerini kullanarak, (5.8) ile gösterilmiş olan $\overline{\wp}_M$ sunuşunun etkili olması için gerek ve yeter koşullar, p asal sayı veya sıfır olmak üzere,

$$\exp_y(S) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$\exp_S(\mathbb{Q}_{S,x}) \equiv 1 \pmod{p},$$

$$\exp_S(\mathbb{C}_{y,\theta_R}) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$\exp_{T_{yx}}(\mathcal{A}_{R,y}) \equiv 0 \pmod{p}$$

şeklinde özetlenebilir. Bu noktada, özel olarak, $\exp_S(\mathbb{Q}_{S,x}) = i = 0$ veya 2 alınırsa $\overline{\wp}_M$ nin etkisiz olduğu kolayca görülür.

Şimdi, kolaylık olması açısından, $d = \exp_y(S) = k - l$ olarak alalım. Aslında sonlu devirli monoidler üzerinde çalıştığımızdan $d \neq 0$ olacağı açıktır.

Bu durumda aşağıdaki ana teoremini elde ederiz.

5.4.1 Teorem: $M = K \times_{\theta} A$ olmak üzere, $l, k, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}^+$ ve $l < k$, $\lambda < \mu$ için, M nin sunuşu

$$\overline{\wp}_M = [x, y ; x^{\mu} = x^{\lambda}, y^k = y^l, yx = xy^l]$$

olsun. O halde $i = 2$ ve $d \neq 2n$ ($d \neq 1, n \in \mathbb{Z}^+$) ise $\overline{\wp}_M$ minimal ancak etkisiz bir sunuştur.

5.4.1 Teoremin ispatı için gerekli olan İkinci Fox İdealin üreteç elemanlarının belirlenmesi ilgili bazı temel materyalleri aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Şekil 5.7 de çizilmiş olan $\mathbb{P}_{S,x}$ resmini göz önüne alalım. Bu resim içindeki

y üreteç elemanı için $\frac{\partial}{\partial y}$ ile y ye bağlı Fox türevini ifade edersek, $\frac{\partial^M}{\partial y}$ yi

$$\mathbb{Z} F(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \mathbb{Z} F(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \mathbb{Z} M$$

Fox türevlerinin serisi olarak alabiliriz. (Burada $F(y)$ kümesi y üzerindeki serbest monoidi göstermektedir). Ayrıca $S : y^k = y^l$ bağıntısı için, $\frac{\partial^M S}{\partial y}$ ile

$$\frac{\partial^M S_+}{\partial y} - \frac{\partial^M S_-}{\partial y}$$

farkını tanımlayalım.

Aslında $\mathbb{P}_{S,x}$ resmindeki T_{yx} disklerini içeren pozitif atomik monoid resimlerinin sol değerlendirmeleri (*left evaluation*)

$$\frac{\partial^M S_+}{\partial y} = \bar{1}e_{T_{yx}} + \bar{y}e_{T_{yx}} + \bar{y}^{-2}e_{T_{yx}} + \dots + \bar{y}^{-l-1}e_{T_{yx}}$$

ve $\mathbb{P}_{S,x}$ resmindeki T_{yx} disklerini içeren negatif atomik monoid resimlerinin sol değerlendirmeleri

$$\frac{\partial^M S_-}{\partial y} = -(\bar{1}e_{T_{yx}} + \bar{y}e_{T_{yx}} + \bar{y}^{-2}e_{T_{yx}} + \dots + \bar{y}^{-k-1}e_{T_{yx}})$$

biçimindedir. Böylece $eval^{(l)}(\mathbb{P}_{S,x})$ deki $e_{T_{yx}}$ in katsayısı

$$\bar{1} + \bar{y} + \bar{y}^{-2} + \dots + \bar{y}^{-l-1} - (\bar{1} + \bar{y} + \bar{y}^{-2} + \dots + \bar{y}^{-k-1}) = \frac{\partial^M S}{\partial y} \quad (5.9)$$

olacaktır. Not etmeliyiz ki, $eval^{(l)}(\mathbb{P}_{S,x})$ deki $e_{T_{yx}}$ in katsayısı, genel kelimeler üzerinde, [30] da Çevik tarafından tanımlanmıştır.

5.4.2 Önerme: (5.8) ile verilen $\bar{\wp}_M$ sunuşunun İkinci Fox İdeali olan $I_2^{(l)}(\bar{\wp}_M)$ kümesi

$$1 - \bar{x}(eval^{(l)}(\mathbb{Q}_{S,x})), \quad \frac{\partial^M S}{\partial y},$$

$$eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_+,x}) - eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_-,x}), \quad eval^{(l)}(\mathbb{C}_{y,\theta_R}),$$

$$1 - \bar{y}^{-k-1}, 1 - \bar{y}^{-k-2}, \dots, 1 - \bar{y} \quad \text{ve} \quad 1 - \bar{x}^{-\mu-1}, 1 - \bar{x}^{-\mu-2}, \dots, 1 - \bar{x}$$

elemanlarından oluşmaktadır.

İspat: Kolaylık sağlaması açısından $I_2^{(l)}(\bar{\wp}_M)$ kümesi içinde yer alan elemanların, kalan sınıflarını tanılamak için kullanılan, “ $\bar{}$ ” notasyonu ispat içerisinde göz ardı edilecektir.

\mathbf{X}_A ve \mathbf{X}_K kümeleri sırasıyla $D(\overline{\varphi}_A)$ ve $D(\overline{\varphi}_K)$ Squier komplekslerinin üreteç kümeleri ve $\mathbf{C}_1 = \{ \mathbb{P}_{S,x} : S \in \mathbf{s}, x \in \mathbf{x} \}$ ile $\mathbf{C}_2 = \{ \mathbb{P}_{R,y} : R \in \mathbf{r}, y \in \mathbf{y} \}$ olmak üzere, 5.2.12 Teorem ile, $D(\overline{\varphi}_M)$ nin üreteç kümesinin

$$\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_A \cup \mathbf{X}_K \cup \mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$$

olduğunu biliyoruz. O halde bu birleşimi oluşturan her bir üreteç kümesinden alınacak resimler için, ayrı ayrı değerlendirmeleri hesaplamamız gerekmektedir. Diğer bir deyişle, $eval^{(l)}(\mathbb{P}_{S,x})$, $eval^{(l)}(\mathbb{P}_{R,y})$, $eval^{(l)}(\mathbb{P}_{k,l}^m)$ ($1 \leq m \leq k-1$) ve $eval^{(l)}(\mathbb{P}_{\mu,\lambda}^n)$ ($1 \leq n \leq \mu-1$) değerlerini bulmamız gerekmektedir. Bu değerler (5.9) dan hareketle,

$$\begin{aligned} eval^{(l)}(\mathbb{P}_{S,x}) &= \delta_{P_{S,x}, S} e_S + \delta_{P_{S,x}, T_{yx}} e_{T_{yx}} \\ &= (1 - x(eval^{(l)}(\mathbb{Q}_{S,x}))) e_S + \left(\frac{\partial^M S}{\partial y} \right) e_{T_{yx}}, \\ eval^{(l)}(\mathbb{P}_{R,y}) &= \delta_{P_{R,y}, T_{yx}} e_{T_{yx}} + \delta_{P_{R,y}, R} e_R + \delta_{P_{R,y}, S} e_S \\ &= (eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R+,y}) - eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R-,y})) e_{T_{yx}} + \\ &\quad (1-y) e_R + eval^{(l)}(\mathbb{C}_{y,\theta_R}) e_S \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, her bir $1 \leq m \leq k-1$ ve $1 \leq n \leq \mu-1$ için,

$$\delta_{P_{k,l}^m, S} = 1 - y^{k-m} \quad \text{ve} \quad \delta_{P_{\mu,\lambda}^n, R} = 1 - x^{\mu-n}$$

olmak üzere,

$$eval^{(l)}(\mathbb{P}_{k,l}^m) = \delta_{P_{k,l}^m, S} e_S \quad \text{ve} \quad eval^{(l)}(\mathbb{P}_{\mu,\lambda}^n) = \delta_{P_{\mu,\lambda}^n, R} e_R$$

dir. Dolayısıyla, 1.3.6 Teoremden istenilen sonuca çıkarılır. \diamond

Yapılan değerlendirme hesaplamalarına ek olarak, *artırma dönüşümünü* (augmentation map)

$$aug : \mathbb{Z}M \rightarrow \mathbb{Z}, \quad b \rightarrow 1$$

olarak aldığımızda, aşağıdaki önermeleri elde ederiz:

5.4.3 Önerme:

$$aug(eval^{(l)}(\mathbb{Q}_{S,x})) = \exp_S(\mathbb{Q}_{S,x}).$$

İspat: Her $1 \leq a \leq j$ için, $\varepsilon_a = 1$ ve W_a kelimesi x üreteç elemanından oluşan kelimeler olmak üzere,

$$eval^{(l)}(\mathbb{Q}_{S,x}) = \varepsilon_1 \overline{W_1} e_S + \varepsilon_2 \overline{W_2} e_S + \cdots + \varepsilon_j \overline{W_j} e_S$$

dır. Açıkça görüleceği üzere, her bir $\varepsilon_a \overline{W_a} e_S$ ifadesi tek bir S diskiyle ilişkili olup, ayrıca her bir ε_a ise S diskinin işaretini göstermektedir. Böylece $aug(eval^{(l)}(\mathbb{Q}_{S,x}))$ değeri $\mathbb{Q}_{S,x}$ resmindeki S diskinin üstler toplamını verecektir. Bu da istenilen sonuçtur. \diamond

5.4.4 Önerme:

$$aug\left(\frac{\partial^M S}{\partial y}\right) = \exp_y(S) = k - l.$$

İspat: İspat birinci bölümde verilen 1.3.1 Önermenin özel bir sonucudur. \diamond

5.4.5 Önerme:

$$aug(eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_+,y}) - eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_-,y})) = \exp_{T_{yx}}(\mathbb{P}_{R,y}) = \frac{i^\mu - i^\lambda}{i - 1}.$$

İspat: Her $1 \leq a \leq j$, $1 \leq b \leq q$ için, $\varepsilon_a = 1$, $\gamma_b = -1$ ve W_a ile U_b kelimeleri

$\{x, y\}$ kümesindeki elemanlardan oluşan kelimeler olmak üzere,

$$eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_+, y}) = \varepsilon_1 \overline{W}_1 e_{T_{yx}} + \varepsilon_2 \overline{W}_2 e_{T_{yx}} + \cdots + \varepsilon_j \overline{W}_j e_{T_{yx}},$$

$$eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_-, y}) = \gamma_1 \overline{U}_1 e_{T_{yx}} + \gamma_2 \overline{U}_2 e_{T_{yx}} + \cdots + \gamma_q \overline{U}_q e_{T_{yx}}$$

olacaktır. Bu değerlendirmelerin sağ taraflarını düşünürsek, her bir $\varepsilon_a \overline{W}_a e_{T_{yx}}$ ve $\gamma_b \overline{U}_b e_{T_{yx}}$ aslında tek bir T_{yx} diskiyle ilişkilidir. Ayrıca, her bir ε_a ve γ_b ise T_{yx} diskinin işaretidir. Böylece T_{yx} diski sadece $\mathcal{A}_{R_+, y}$ ve $\mathcal{A}_{R_-, y}$ alt resimlerinde yer aldığından,

$$aug(eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_+, y}) - eval^{(l)}(\mathcal{A}_{R_-, y}))$$

değeri, $\mathbb{P}_{R, y}$ resmindeki T_{yx} diskinin üstler toplamını verir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. \diamond

5.4.6 Önerme:

$$aug(eval^{(l)}(\mathbb{C}_{y, \theta_R})) = \exp_S(\mathbb{P}_{R, y}) = \frac{i^\mu - i^\lambda}{k - l}.$$

İspat: Şekil 5.6 da gösterildiği gibi, $\mathbb{P}_{R, y}$ resminin alt resmi olan \mathbb{C}_{y, θ_R} resminde bulunan S disklerini göz önüne aldığımız zaman,

$$eval^{(l)}(\mathbb{C}_{y, \theta_R}) = \overline{x}^{-\mu} (\varepsilon_1 \overline{V}_1 e_S + \varepsilon_2 \overline{V}_2 e_S + \cdots + \varepsilon_g \overline{V}_g e_S)$$

değerlendirmesiyle istenen sonuca kolayca ulaşılır. \diamond

5.4.7 Önerme: Her $1 \leq m \leq k - 1$ ve $1 \leq n \leq \mu - 1$ için,

$$aug(eval^{(l)}(\mathbb{P}_{k, l}^m)) = 0 \quad \text{ve} \quad aug(eval^{(l)}(\mathbb{P}_{\mu, \lambda}^n)) = 0$$

dır.

İspat: Her $1 \leq m \leq k-1$ ve $1 \leq n \leq \mu-1$ için, sırasıyla, $\mathbb{P}_{k,l}^m$ ve $\mathbb{P}_{\mu,\lambda}^n$ resimleri sadece iki S -disk ve R -disk (biri pozitif , diğeri negatif) içerdiğinden dolayı, W_i^m kelimesi y üzerinde ve U_j^n kelimesi x üzerinde ($1 \leq i, j \leq 2$) kelime olmak üzere,

$$\text{eval}^{(l)}(\mathbb{P}_{k,l}^m) = -\overline{W_1^m} e_S + \overline{W_2^m} e_S \quad \text{ve} \quad \text{eval}^{(l)}(\mathbb{P}_{\mu,\lambda}^n) = -\overline{U_1^n} e_R + \overline{U_2^n} e_R$$

biçimindedir. Buradan arttırma dönüşümüne geçildiğinde,

$$\text{aug}(\text{eval}^{(l)}(\mathbb{P}_{k,l}^m)) = \exp_S(\mathbb{P}_{k,l}^m) = -1 + 1 = 0 = \exp_S(\mathbb{P}_{\mu,\lambda}^n) = \text{aug}(\text{eval}^{(l)}(\mathbb{P}_{\mu,\lambda}^n))$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. \diamond

5.5 Ana Teoremin İspatı

5.4 Bölümün'de belirtildiği gibi, $d = \exp_y(S) = k - l$ olarak alalım. Aslında sonlu devirli monoidler üzerinde çalıştığımızdan $d \neq 0$ dır. Ayrıca $\exp_S(\mathbb{Q}_{S,x}) = i = 2$ olsun.

Bunlardan başka $M_{\mu,\lambda}$ sembolü x ile üretilen devirli grubu ifade etsin. Bu durumda, M monoidinden $M_{\mu,\lambda}$ ya

$$y \mapsto 1, \quad x \mapsto x$$

gönderen homomorfizmasını ele alalım. Bu homomorfizma

$$\gamma : \mathbb{Z}M \rightarrow M_{\mu,\lambda}[x]$$

halka homomorfizmasına genişletilebilir. Şimdi, $\mathbb{Z}K \subseteq \mathbb{Z}M$ alt halkası için,

$$aug : \mathbb{Z}K \rightarrow \mathbb{Z}$$

arttırma dönüşümünü ele alalım. Böylece, 5.4.4 ve 5.4.5 Önermelerinden, $(I_2^{(l)}(\overline{\phi}_M))\gamma$ görüntüsü, aslında, $M_{\mu,\lambda}[x]$ nin

$$\{1 - \overline{x}(\exp_S(\mathbb{Q}_{S,x})) = 1 - 2\overline{x}, \exp_y(S), \exp_{T_{yx}}(\mathbb{P}_{R,y}), \exp_S(\mathbb{P}_{R,y})\}$$

kümesi ile üretilen idealidir.

Ayrıca η dönüşümünü, γ ile

$$M_{\mu,\lambda}[x] \rightarrow \mathbb{Z}_d[x], \quad x \rightarrow x, \quad n \rightarrow \overline{n} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

dönüşümünün bileşkesi olarak alalım. Bu durumda, $\exp_y(S) = d \equiv 0 \pmod{d}$, $\exp_{T_{yx}}(\mathbb{P}_{R,y}) \equiv 0 \pmod{d}$ ve $\exp_S(\mathbb{P}_{R,y}) \equiv 0 \pmod{d}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (I_2^{(l)}(\overline{\phi}_M))\eta &= \langle 1 - \overline{2x} \rangle \\ &= I \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.

Bu durumda aşağıdaki önermenin ispatı [30; Önerme 4.6] ya benzer olarak yapılabilir.

5.5.1 Önerme:

$$I \neq \mathbb{Z}_d[x].$$

Şimdi ψ dönüşümünü, η ile

$$\mathbb{Z}_d[x] \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}_d[x] / I$$

şeklinde tanımlanan ϕ nin bileşkesi olarak alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(1 - \bar{x}(\text{eval}^{(l)}(\mathbb{Q}_{S,x})))\psi &= (1 - \bar{x}(\text{eval}^{(l)}(\mathbb{Q}_{S,x})))\eta\phi \\
&= (1 - \overline{\bar{x}(\text{exp}_S(\mathbb{Q}_{S,x}))})\phi \quad (5.4.4 \text{ Önerme}) \\
&= (1 - \overline{\bar{x}^2})\phi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^M S}{\partial y}\right)\psi &= \left(\frac{\partial^M S}{\partial y}\right)\eta\phi = \overline{(\text{exp}_y(S))}\phi \quad (5.4.5 \text{ Önerme}) \\
&= (0)\phi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{eval}^{(l)}(\mathcal{A}_{R_+,y}) - \text{eval}^{(l)}(\mathcal{A}_{R_-,y}))\psi &= \\
&= (\text{eval}^{(l)}(\mathcal{A}_{R_+,y}) - \text{eval}^{(l)}(\mathcal{A}_{R_-,y}))\eta\phi \\
&= \overline{(\text{exp}_{T_{yx}}(\mathbb{P}_{R,y}))}\phi \quad (5.4.6 \text{ Önerme}) \\
&= \overline{\left(\frac{i^\mu - i^\lambda}{i-1}\right)}\phi \\
&= (0)\phi \quad (i^\mu - i^\lambda \equiv 0 \pmod{p}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{eval}^{(l)}(\mathbb{C}_{y,\theta_R}))\psi &= (\text{eval}^{(l)}(\mathbb{C}_{y,\theta_R}))\eta\phi \\
&= \overline{(\text{exp}_S(\mathbb{P}_{R,y}))}\phi \quad (5.4.7 \text{ Önerme}) \\
&= \overline{\left(\frac{i^\mu - i^\lambda}{k-l}\right)}\phi \\
&= (0)\phi \quad (i^\mu - i^\lambda \equiv 0 \pmod{p}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, $(I_2^{(l)}(\wp_M))\psi = 0$ ve $(1)\psi = 1$ elde edilir. Böylece 1.3.15 Teoremden, $\overline{\wp_M}$ sunuşunun M monoidi için etkisiz ancak minimal bir sunuş olduğunu göstermiş oluruz. \diamond

Ana teoremden belirtilen $d \neq 2n$ ve $i = 2$ olma zorunlulukları, aşağıdaki, 5.5.2 Önerme ve 5.5.3 Not ile açıklanmaktadır.

5.5.2 Önerme: $n \in \mathbb{Z}^+$ için $d = 2n$ olsun. Bu durumda, $I = \mathbb{Z}_d[x]$ dir.

İspat: Kolaylık sağlaması açısından, \bar{x} yerine x ve $\bar{2}$ yerine 2 kullanalım:

Burada $1 - 2x \in I$ olduğundan,

$$2(n-1)(1-2x) \in I$$

olur. Böylece,

$$2(n-1) - 4(n-1)x = 2(n-1) - 4nx + 4x \in I$$

dır. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_d[x]$ de, $4nx = 0$ ve $4x = 0$ olduğundan,

$$2(n-1) \in I$$

olur.

Benzer bir biçimde,

$$\begin{aligned} 2(n-2)(1-2x) &= 2(n-2) - 4(n-2)x \in I \Rightarrow \\ 2(n-2) - 4(n-1-1)x &= 2(n-2) - (4(n-1)x - 4x) \\ &= 2(n-2) - 2(2(n-1)x - 2x) \in I \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $2(n-1) \in I$ olduğundan, $2(n-1)x \in I$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_d[x]$

de, $2x = 0$ olduğundan,

$$2(n-2) \in I$$

olur.

Bu prosedür $n-1$ sayısına kadar ilerletildiğinde

$$2 \in I$$

sonucuna ulaşılır. Bu bize $1 \in I$ sonucunu verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. \diamond

5.5.3 Not: Özel olarak, $i = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (5.8) ile verilen $\overline{\wp}_M$ sunuşu

$$\overline{\wp}_M = [x, y ; x^\mu = x^\lambda, y^k = y^l, yx = x]$$

haline gelir. O halde \mathbb{C}_{y, θ_R} ve $\mathbb{Q}_{s, x}$ alt resimleri tekil olacaktır. Ayrıca

$[y^{i^\mu}] = [y^{i^\lambda}]$ eşitliği daima sağlanacağından, $d = k - l$ gibi bir kısıtlamaya da gerek yoktur. Ancak, 5.4.1 Teoremin ispatındaki benzer aşamaları kullanarak,

$$(I_2(\overline{\wp}_M)\eta = \langle 1 \rangle) = I$$

elde edilir. Bu sonuç bize, 5.4.1 Teoremin ispatı için kullandığımız, minimallik testinin, $i = 0$ durumu için çalışmayacağını ifade eder. Böylece, $i = 0$ durumu açık problem olarak kalır.

5.5.4 Örnek: t pozitif tek tam sayı olmak üzere, 5.4.1 Teoremden, $k = 4t, l = t, \mu = 3t, \lambda = 2$ ve $i = 2$ olsun. Böylece,

$$\overline{\wp}_M = [x, y ; x^{3t} = x^t, y^{4t} = y^t, yx = xy^2] \quad (5.10)$$

dır. Bu durumda, 5.3.1 Teorem den $\overline{\wp}_M$ sunuşu etkisizdir. Ayrıca, $d = 3t \neq 2n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olduğundan, 5.4.1 Teoremden $\overline{\wp}_M$ minimal ve etkisiz bir sunuştur. •

Dolayısıyla aşağıdaki sonuca ulaşırız.

5.5.5 Sonuç: Her $t \in \mathbb{Z}^+$ tam sayısı için, (5.10) ile verilen sunuş, minimal ancak etkisizdir.

5.5.6 Örnek: $t, s \in \mathbb{Z}^+$ ve $s < t$ olmak üzere, 5.4.1 Teoremden, $k = 2t + 1, l = 2s, \mu = k - l, \lambda = 1$ ve $i = 2$ olsun. Böylece

$$\overline{\wp}_M = [x, y ; x^{k-l} = x, y^{2t+1} = y^{2s}, yx = xy^2] \quad (5.11)$$

dır. Bu durumda, 5.3.1 Teorem den, $\overline{\varphi}_M$ sunuşu etkisizdir. Ayrıca $d = 2(t - s) + 1 \neq 2n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olduğundan, 5.4.1 Teoremden, $\overline{\varphi}_M$ minimal ve etkisiz bir sunuştur. •

5.5.6 Örnek ile ilgili olarak ve 5.4.1 Teoremden hareketle aşağıdaki sonuca ulaşırız.

5.5.5 Sonuç: Her $t, s \in \mathbb{Z}^+$ ($s < t$) tam sayısı için, (5.11) ile verilen sunuş, minimal ancak etkisizdir.

6. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen yeni sonuçlar, tezin ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde bulunmaktadır. Bu sonuçlar aşağıda paragraflar halinde belirtilmiştir.

İkinci bölümde, serbest grupların HNN genişlemesini devirli alt grup ayrıştırılabilir yapan koşullar ortaya konmuştur. Ayrıca bazı özel ayrık genişlemelerin, bir takım alt grupları için alt grup ayrıştırılabilirliği gösterilmiş olup, bunlarla ilgili bir takım sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, standart wreath çarpımın minimal üreteç ve bağıntılı sunuşu Cayley graf kullanarak oluşturulmuş ve oluşan bu sunuşun etkiliği gösterilmiştir. Sonrada bu grubunun minimal üreteçli etkili bir sunuşa sahip iken, özel bir alt grubu için, alt grup ayrıştırılabilirliğine dair sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, alınacak bir değişmeli grubun herhangi bir grup ile oluşturacağı merkezi genişlemenin sunuşunun etkiliğini veren gerek ve yeter koşullar incelenip, sonuçlar ortaya konmuştur.

Beşinci bölümde, sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpımını minimal ancak etkisiz yapan gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

4. KAYNAKLAR

[1] Allenby, R.B.J.T. and Gregorac, R.J., “On locally extended residually finite groups”, Conference on Group Theory, University of Wisconsin 1972, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1973), 9.

[2] Almeida, J., Finite semigroups and universal algebra, World Scientific, Singapore, (1994).

[3] Ateş, F. and Çevik, A. S., “Separability and efficiency under standart wreath product in terms of Cayley graphs”, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, (2007) (basım aşamasında).

[4] Ateş, F. and Çevik, A. S., “(Cyclic) Subgroup separability of HNN and split extensions”, *Mathematica Slovaca*, 1, **57**, (2007), 33.

[5] Ateş, F. and Çevik, A. S., “The p -Cockcroft property of central extensions of groups II”, *Monatshefte Für Mathematik*, **150**, (2007), 181.

[6] Ateş, F. and Çevik, A. S., “Minimal but inefficient presentations for semi-direct products of finite cyclic monoids”, Groups St. Andrews 2005 in St. Andrews, Cambridge University Press, *L.M.S. Lecture Note Series*, **339**, (2006), 170.

[7] Ayık, H., Campbell, C.M., O’Connor, J.J. and Ruskuc, N., “Minimal presentations and efficiency of semigroups”, *Semigroup Forum*, **60**, (2000), 231.

- [8] Ayik, H., Campbell, C.M., O'Connor, J.J. and Ruskuc, N., "On the efficiency of wreath products of groups", in *Groups Korea 98* (Eds: Y.G. Baik, D.L. Johnson and A.C. Kim), Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2000), 39.
- [9] Baik, Y.G., *Generators of second homotopy module of group presentations with applications*, Ph.D Thesis, University of Glasgow, (1992).
- [10] Baik, Y.G. and Pride, S.J., "On the efficiency of coxeter groups", *Bulletin of the London Mathematical Society*, **29**, (1997), 32.
- [11] Baik, Y.G., Harlender, J. and Pride, S.J., "The geometry of group extensions", *Journal of Group Theory*, **1**, (1998), 395.
- [12] Baumslag, G., *Topics in combinatorial group theory*, Lectures in Mathematics, Birkhauser Verlag, (1993).
- [13] Beyl, F.R. and Tappe, J., "Group extensions, representations and the schur multiplier", *Lecture Notes in Mathematics 958*, Springer-Verlag, (1982).
- [14] Beyl, F.R., "The Schur-multiplier of metacyclic groups", *Proceeding of the American Mathematical Society*, **40**, (1973), 413.
- [15] Bogley, W.A. and Pride, S.J., "Calculating generators of π_2 ", in *Two Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory* (Eds: C. Hog-Angeloni, W. Metzler, A. Sieradski), Cambridge University Press, L.M.S. Lecture Note Series, (1993), 157.
- [16] Bogley, W.A. and Pride, S.J., "Aspherical relative presentations", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **35**, (1992), 1.
- [17] Brown, R. and Huebschmann, J., "Identities among relations", in *Low Dimensional Topology*, Cambridge University Press, L.M.S. Lecture Note Series, **48** (1982), 153.
- [18] Brown, K.S., *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, 87 Springer Verlag, (1982).

- [19] Burns, R.G., Karrass A. and Solitar, D., “A note on groups with separable finitely generated subgroup”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **36**, (1987), 153.
- [20] Campbell, C.M., Robertson, E.F. and Williams, P.D., “Efficient presentation for finite simple groups and related groups”, Proceedings Groups-Korea 1988, Lecture Notes in Mathematics 1398, Springer-Verlag, (1989), 65.
- [21] Campbell, C.M., Robertson, E.F. and Williams, P.D., “On the efficiency of some direct covers of groups”, Groups-Caberra 1989, Lecture Notes in Mathematics 1456, Springer-Verlag, (1990), 106.
- [22] Chiswell, I.M., Collins, D.J. and Huebschmann, J., “Aspherical group presentations”, *Mathematische Zeitschrift*, **178**, (1981), 1.
- [23] Cho, J.R. and Pride, S.J., “Embedding semigroups into groups and asphericity of semigroups”, *International Journal of Algebra and Computation*, **3** (1993), 1.
- [24] Cohen, D.E., Combinatorial group theory: topological approach, Cambridge University Press, (1989).
- [25] Collins, D.J. and Turner, E.C., “All automorphisms of free groups with maximal rank fixed subgroups”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **119**, (1996), 615.
- [26] Conway, J.R., Coxeter, H.S.M. and Shephard, G.C., “The center of a finitely generated group”, *Tensor*, **25**, (1972), 405.
- [27] Cremanns, R. and Otto, F., “Finite derivation type implies the homological finiteness condition FP_3 ”, *Journal of Symbolic Computation*, **18**, (1994), 91.
- [28] Çevik, A.S., “The p -Cockcroft property of the semi-direct product of some monoids”, *International Journal of Algebra and Computation*, **13**, (2003), 1.

- [29] Çevik, A.S., “The efficiency of standart wreath product”, *Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society*, **43**, (2000), 415.
- [30] Çevik, A.S., “Minimal but inefficient peresentations of the semidirect product of some monoids”, *Semigroup Forum*, **66**, (2003), 1.
- [31] Çevik, A.S., “The p -Cockcroft property of central extensions of groups”, *Communication in Algebra*, **29**, (2001), 1085.
- [32] Dlab, V. and Neumann B.H., “Semigroups with few endomorphisms”, *Journal of the Australian Mathematic Society Ser. A.*, **10**, (1969), 162.
- [33] Dyer, M.N., “Cockcroft 2-complexes”, preprint, Universty of Oregon, (1992).
- [34] Epstein, D.B.A., “Finite presentations of groups and 3-manifolds”, *Quart Journal of Mathematic Oxford Ser(2)*, **12**, (1961), 205.
- [35] Gersten, S.M., “Reducible diagrams and equations over groups”, *Essays in Group Theory*, S.M. Gerstein ed., Springer-Verlag, Math. Sci. Research Inst. Publications, (1987).
- [36] Gilbert, N.D. and Howie, J., “Theshold subgroups for Cockcroft 2-complexes”, *Communications in Algebra*, **23**, (1995), 255.
- [37] Gilbert, N.D. and Howie, J., “Cockcroft properties of graphs of 2-complexes”, *Proceeding Royal Society of Edinburgh Section A-Mathematics*, **124**, (1994), 363.
- [38] Harlender, J., “Closing the relation gap by direct-product stablition”, *Journal of Algebra*, **182**, (1996), 511.
- [39] Harlender, J., “Minimal Cockcroft subgroups”, *Glasgow Journal of Mathematics*, **36**, (1994), 87.

- [40] Harlender, J., “Embedding into efficient groups”, *Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society*, **40**, (1997), 313.
- [41] Howie, J.M., *Fundamentals of semigroup theory*, Oxford Clarendon Press, (1995).
- [42] Huebschmann, J., “On the cohomology of the holomorph of a finite cyclic group”, *Journal of Algebra*, **279**, (2004), 79.
- [43] Hungerford, T.W., *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., (1974).
- [44] Jajcay, R., “The structure of automorphism groups of Cayley graphs and maps”, *Journal of Algebra*, **12**, (2000), 73.
- [45] Johnson, D.L., *Presentation of groups*, London Mathematic Society Student Series 15, Cambridge University Press, (1990).
- [46] Johnson, D.L., “Minimal relations for certain wreath products of groups”, *Canadian Journal of Mathematics*, **XXII**, (1970), 1005.
- [47] Johnson, D.L. and Robertson, E.F., “Finite groups of deficiency zero”, in *Homological Group Theory*, L.M.S. Lecture Note Series, **36**, (1979), 275.
- [48] Karpilovsky, G., *The Schur Multiplier*, L.M.S. Monographs New Series 2, Oxford Science Publications, (1987).
- [49] Kenne, P.E., “Some new efficient soluble groups”, *Communication in Algebra*, **18**, (1990), 2747.
- [50] Kilgour, C.W. and Pride, S.J., “Cockcroft presentations”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **106**, (1996), 275.
- [51] Kim, G., “Cyclic subgroup separability of HNN extensions”, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **30**, (1993), 285.

[52] Kovacs, L.G., “Finite groups with trivial multiplier and large deficiency”, *Proceedings Groups-Korea 1994*, Walter de Gruyter, (1995), 277.

[53] Lustig, M., “On the rank, the deficiency and the homological dimension of groups: the computation of a lower bound via Fox ideals”, in *Topological and Combinatorial Group Theory*, Lecture Notes in Mathematics 1440, Springer-Verlag (1991), 164.

[54] Lustig, M., “Fox ideals, N -torsion and applications to groups and 3-manifolds”, in *Two Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory*, Cambridge University Press, (1993), 219.

[55] Lyndon, R.C., “Cohomology theory of groups with a single defining relation”, *Annals of Mathematics*, **52**, (1950), 23.

[56] Lyndon, R.C. and Schupp P.E., *Combinatorial group theory*, Classic in Mathematics, Reprint of the 1997 Edition, Springer-Verlag, (1977).

[57] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., *Combinatorial group theory*, Dover Publications, Inc., (1976).

[58] Motowski, A.W., “On the decidability of some problems in special classes of groups”, *Fundamenta Mathematicae*, **59**, (1996), 123.

[59] Neumann, B.H., “Some groups with trivial multipliers”, *Publication Mathematic Debrecen*, **4**, (1955), 190.

[60] Niblo, G.A., “HNN extension of a free group by \mathbb{Z} which are subgroup separable”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **61**, (1990), 18.

[61] Park, S.A., “Projective representations of some finite groups”, *Journal of Korean Mathematical Society*, **22**, (1985), 173.

[62] Pride, S.J., “Identities among the relations of group presentations”, in *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, Trieste 1990, World Scientific Publishing (1991), 687.

- [63] Pride, S.J., “Geometric methods in combinatorial semigroup theory”, *Semigroups, Formal Languages and Groups*, Kluwer Academic Publishers, (1995), 215.
- [64] Pride, S.J., “Low-dimensional homotopy theory for monoids”, *International Journal of Algebra and Computation*, **5**, (1995), 631.
- [65] Pride, S.J. and Wang, J., “Relatively aspherical monoids”, preprint, University of Glasgow, (1996).
- [66] Robertson, E.F., Thomas, R.M. and Wotherspoon C.I., “A class of inefficient groups with symmetric presentations”, *Proceedings Group-Korea 1994*, Walter de Gruyter, (1995).
- [67] Rotman, J.J., *Theory of Groups*, Wm. C. Brown Publishers, Third edition, Iowa, (1988).
- [68] Ruskuc, N., *Semigroup presentations*, PhD. Thesis, University of St. Andrews, (1996).
- [69] Squier, C.C., “Word problems and a homological finiteness condition for monoids”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **49**, (1987), 201.
- [70] Swan, R.G., “Minimal resolutions for finite groups”, *Topology*, **4**, (1965), 193.
- [71] Wamsley, J.W., “The deficiency of metacyclic groups”, *Proceeding of the American Mathematical Society*, **24**, (1970), 724.
- [72] Wamsley, J.W., “Minimal presentations for finite groups”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **5**, (1973), 129.
- [73] Wamsley, J.W., “The defficiency of wreath products of groups”, *Journal of Algebra*, **27**, (1973), 48.

[74] Wang, J., “Finite derivation type for semi-direct products of monoids”, *Theoretical Computer Science*, **191**, (1998), 219.

[75] Wiegold, J., “The Schur multiplier: an elementary approach”, *Groups St. Andrews 1981*, Cambridge University Press, L.M.S. Lecture Note Series, **71**, (1982), 137.