MUTLAK VE KUVVETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLİRLİLİK

Şaban YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996 - TOKAT

GAZIOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MUTLAK VE KUVVETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLİRLİLİK

ŞABAN YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez, 19./.8/1996 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı ve Soyadı		İmza
Başkan	Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Adem EROĞLU	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Zülfiye AKDOĞAN	

ONAY

Bu tez, 5../9./1996 tarih ve 11 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu tarafından belirtilen jüri üyelerince kabul edilmiştir.

09.09.1996

Doç. Dr. [illegible]

Enstitü Müdürü

ÖZET

MUTLAK VE KUVVETLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLİRLİLİK

Şaban YILMAZ

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi
1996, 66 sayfa

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR
: ....
: ....

Bu çalışmada, (N, p_n) ve $|N, p_n|$- toplanabilme metotlarının bir genellemesi olan (N, p, q), $|N, p, q|$ ve $\lambda \geq 1$ olmak üzere $|N, p, q|_\lambda$ - toplanabilme metotları tanımları verilerek, mutlak ve kuvvetli *genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik incelendi. İlk önce genelleştirilmiş* Nörlund toplanabilirlilik için temel tanım ve teoremler verilerek, bazı önemli sonuçlar elde edildi. İkinci bölümde ise, genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik metodu ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi. Bu bölüm üç ana kısımdan oluşuyor. Bunlardan birincisi, $q_n > 0$ ve $(p_n) \in \mathcal{M}$ dizileri için limitleme teoremleri, ikincisi (p_n) ve (q_n) reel veya kompleks diziler için limitleme teoremleri, üçüncüsü de regülerlik şartı için limitleme teoremleridir. Daha sonra da elde edilen bu teoremlerden yararlanarak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için etkisizlik teoremleri incelendi. Bundan sonra üçüncü bölümde ise, mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliliğin tanım ve teoremleri ile bazı etkisizlik ve denklik teoremleri incelendi. Bu bölümde, önce $|N, p, q|$ - toplanabilirlilik ile ilgili teoremler verildi. Bundan sonra da en genel olarak $\lambda \geq 1$ olmak üzere $|N, p, q|_\lambda$ - toplanabilirlilik incelendi. Son olarak dördüncü bölümde kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için tanım ve teoremleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik, Mutlak Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik, Kuvvetli Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik

ABSTRACT

ABSOLUTE AND STRONG GENERALISED NÖRLUND SUMMABILITY

Şaban YILMAZ
Gaziosmanpaşa Üniversity
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics Science

Master Thesis
1996, 66 pages

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Osman ÖZDEMİR

Jury: Asst. Prof. Dr. Osman ÖZDEMİR
: ....
: ....

In this study, absolute and strong generalised Nörlund summability was studied by giving the definitions of summability methods which are the generalisation of (N,p_n) and $|N,p_n|$-summability methods such that (N,p,q) , $|N,p,q|$ and $|N,p,q|_\lambda$ for $\lambda\geq1$. First, basic definitions and theorems for Nörlund summability were given and some important results obtained. In the second section some results involving generalised Nörlund summability method were obtained. This section consisted of three main parts. The first part dealt with the limitation teorems for $q_n > 0$ and $(p_n) \in \mathcal{M}$ sequences; the second part dealt with the limitation theorems for (p_n) and (q_n) real or complex sequences and the part dealt with the limitation theorems for the regularity condition. Then with the help of these theorems, ineffectiveness theorems for generalised Nörlund summability were studied. After this in the third part absolute generalised Nörlund summability definitions and theorems with some ineffectiveness and equivalence theorems were studied. In this section first, theorems related with $|N,p,q|$- summability were given. Then at most generality $|N,p,q|_\lambda$ for $\lambda\geq1$ was studied. In the fourth section, which is the last section of this thesis, definitions and theorems for strong generalised Nörlund summability were studied.

Key Words: Generalised Nörlund Summability, Absolute Generalised Nörlund Summability, Strong Generalised Nörlund Summability.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada araştırmalarımın başından sonuna kadar tüm safhalarında yardımını esirgemiyen, değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan muhterem hocam ve tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR Bey'e teşekkürlerimi borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

sayfa

ÖZET....i
ABSTRACT....ii
TEŞEKKÜR....iii
İÇİNDEKİLER....iv
SİMGELER LİSTESİ....v
1.Giriş....1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler....1
2. (N,p,q) - Metodu....7
2.1. Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik....7
2.2. $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve (q_n) Pozitif Diziler İçin Limitleme Teoremleri....8
2.3. $(p_n),(q_n)$ Reel veya Kompkeks Diziler İçin Limitleme Teoremleri....17
2.4. Regülerlik Şartı İçin Limitleme Teoremleri....19
2.5. Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik İçin Etkisizlik Teoremleri....27
3. |N,p,q| - Metodu....30
3.1. Mutlak Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik....30
3.2. |N,p,q| Toplanabilirlilik....31
3.3. $|N,p,q|_\lambda$ Toplanabilirlilik....37
4. $[N,p,q]_\lambda$ - Metodu....51
4.1. Kuvvetli Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik....51
4.2. Kuvvetli Toplanabilme İçin Sonuçlar....52
Sonuçlar ve Tartışmalar....67
Kaynaklar....68
Özgeçmiş....69

SİMGELER LİSTESİ

Bv	Sınırlı-Salınımlı Diziler Uzayı
(C,k)	k. mertebeden Ce'sora Toplanabilirlilik
$\mathcal{M}$	Monoton Azalan Ve Sınırlı Diziler Uzayı
IN	Doğal Sayılar
(N,p_n)	Nörlund Toplanabilirlilik
$(\overline{N},p_n)$	Rięsz Toplanabilirlilik
$\|N,p_n\|_\lambda$	λ. mertebeden Mutlak Nörlund Toplanabilirlilik
$\|\overline{N},p_n\|_\lambda$	λ. mertebeden Mutlak Riesz Toplanabilirlilik
$s_n \to s(N,p,q)$	(s_n) , s-değerine genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik
$s_n \to s(N,p,q)_\lambda$	λ. mertebeden Kuvvetli Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik
$s_n \to s(c,0,Q)_\lambda$	λ. mertebeden Kuvvetli Genelleştirilmiş Yakınsak
$(s_n) \in \|N,p,q\|_\lambda$	λ. mertebeden Mutlak Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik
$(t_n) \in \|c,0,r\|_\lambda$	λ. mertebeden Mutlak Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik

1. GİRİŞ

(N,p_n) ve $|N,p_n|$- toplanabilme metotlarının incelenmesinin uzun bir tarihi geçmişi vardır. Bu güne kadar (N,p_n) ve $|N,p_n|$- toplanabilme metotların bir çok konuda incelemesi yapılmıştır. Bu çalışmada ise, (N,p_n) ve $|N,p_n|$- toplanabilme metotlarının bir genellemesi olan (N,p,q) , $|N,p,q|$ ve $\lambda\geq 1$ olmak üzere $|N,p,q|_\lambda$ toplanabilme metotları tanımları verilerek, mutlak ve kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için yapılan bir çok çalışmalar incelenecektir. İlk önce genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için temel tanım ve teoremler verilerek, bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. İkinci bölümde ise, genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik metodu ile ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir. Bu bölüm üç ana kısımdan oluşuyor. Bunlardan birincisi, $q_n > 0$ ve $(p_n) \in \mathcal{M}$ diziler için limitleme teoremleri, İkincisi (p_n) ve (q_n) reel veya kompleks diziler için limitleme teoremleri, üçüncüsü de regülerlik şartı için limitleme teoremleridir. Daha sonra da elde edilen bu teoremlerden yararlanarak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için etkisizlik teoremleri incelenecektir. Bundan sonra üçüncü bölümde ise, mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliliğin tanım ve teoremleri ile bazı etkisizlik ve denklik teoremleri incelenecektir. Bu bölümde, önce $|N,p,q|$-toplanabilirlilik ile ilgili teoremler verilecek. Bundan sonrada en genel olarak $\lambda>1$ için $|N,p,q|_\lambda$ incelenecektir. Son olarak dördüncü bölümde kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için tanım ve teoremleri incelenecektir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. F, reel veya kompleks sayıların bir cismi v=0,1,2,... için $a_{nv} \in F$ olmak üzere bir $A=(a_{nv})$ sonsuz matris ve (s_n) de F de bir dizi olsun. (s_n) dizisinden (t_n) dizisine bir dönüşüm,

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v \qquad (n=0,1,2,...) \tag{1.1.1}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde (t_n) dizisine (s_n) dizisinin A-dönüşümü dizisi denir. Bu dönüşümün var olabilmesi için 1.1.1 ' deki toplamın her n için yakınsak olması gerekirdir (Petersen, 1966).

Tanım 1.1.2. Bir $A=(a_{nv})$ matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi, yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürür ve aynı zamanda limitide korursa, A matrisine regülerdir denir (Petersen, 1966).

Teorem 1.1.1. Bir $A=(a_{nv})$ matrisinin regülerdir $\Leftrightarrow$

i) Her v için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nv}=0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_{nv}=0$

iii) Her n için $\sum\limits_{v=0}^{\infty}|a_{nv}|\leq M$ olacak şekilde n'den bağımsız bir M pozitif reel sayısı vardır (Petersen, 1966). Bu teorem, Silverman-Teoplitz teoremi olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.3. Reel veya kompleks terimli bir sonsuz matrisi $B=(b_{nv})$, $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_n$ serisi verilmiş olsun.

$$t_n=\sum_{v=0}^{\infty} b_{nv}a_v \tag{1.1.2}$$

olacak şekilde tanımlanan (t_n) dizisine, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin B-dönüşümü dizisi ve bu dönüşüme de seriden- diziye bir döüşüm denir. Bu dönüşümün tanımlı olması için 1.1.2'deki toplamın her n için yakınsak olması gerektir (Petersen, 1966).

Tanım 1.1.4. Verilen bir $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Ayrıca $A=(a_{nv})$ matrisi yardımıyla , $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin (t_n) dönüşüm dizisi, $t_n=\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v$ olarak tanımlansın. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v=s$ ise, $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s-değerine A-toplanablirdir denir (Petersen, 1966).

Tanım 1.2.5. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_n$ serisi verilmiş olsun. $A=(a_{nv})$ matisi ile $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin (t_n) dönüşüm dizisi, $t_n=\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v$ olacak şekilde tanımlanmış olsun. Eğer $(t_n)\in Bv$ ise, bu takdirde $\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (s_n) dizisine Mutlak A-toplanabilir veya |A|-toplanabilir denir. Eğer $\sum_{v=0}^{\infty} a_n$ serisi |A|-toplanabilir ise, bu $\sum_{v=0}^{\infty} a_n \in |A|$ veya $(s_n) \in |A|$ sembollerinden biri ile gösterilir (Petersen, 1966).

Tanım 1.1.6. Hepsi birden sıfır olayan, non-negatf sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun.

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n \qquad \text{ve} \qquad p_0 > 0 \quad , \qquad (n=0,1,2,3,\ldots)$$

olmak üzere bir (s_n) dizisinden bir (U_n) dizisine

$$U_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v \qquad (1.1.4)$$

ile verilen dönüşüme, Nörlund dönüşümü veya Nörlund ortalaması denir ve (N, p_n) ile gösterilir. (N, p_n) ortalamasının matrisinin elemanları,

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}}{P_n} & , \quad v \le n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

şeklinde tanımlanır (Petersen, 1966).

Teorem 1.1.2. (N, p_n) ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{P_n} = 0$ olmasıdır (Petersen, 1966).

Tanım 1.1.7. Hepsi birden sıfır olayan, non-negatf sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n \quad , \qquad p_0 > 0 \quad , \qquad (n=0,1,2,3,\ldots)$$

olmak üzere bir (s_n) dizisinden bir (T_n) dizisine

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v s_v \qquad (1.1.6)$$

ile verilen dönüşüme, Riesz dönüşümü veya Riesz ortalaması denir ve $(\overline{N}, p_n)$ ile gösterilir (Petersen, 1966). $(\overline{N}, p_n)$ ortalamasının matrisinin elemanları,

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_v}{P_n} & , \quad v \le n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \qquad (1.1.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.1.2. $(\overline{N},p_n)$ ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$ olmasıdır (Petersen, 1966).

Tanım 1.1.8. Bir (s_n) dizisinden (t_n^k) dizisine,

$$t_n^k = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{v=0}^{n} \binom{n-v+k-1}{k-1} s_v \tag{1.1.8}$$

şeklinde tarif edilen dönüşüme, k. mertebeden Cesa'ro dönüşümü denir (Petersen, 1966). Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n-v+k-1}{k-1}}{\binom{n+k}{k}}, & v \le n \\ 0, & v > n \end{cases} \tag{1.1.9}$$

şeklinde tarif edilir.

Tanım 1.1.9. Her sonlu veya sonsuz s için $s_n \to s \Rightarrow t_n \to s$ ise bu reel dönüşüme totally regülerdir denir (Hardy, 1949)

Teorem 1.1.3. Bir (s_n) dizisinden bir $(\tilde{t}_n)$ dizisine,

$$\tilde{t}_n = \sum_{v=0}^{n} c_{nv} s_v \qquad (v > n \text{ için } c_{nv} = 0) \tag{1.1.10}$$

ile tanımlanan reel dönüşümün totally regüler olması için gerek ve yeter şart bu dönüşümün pozitif ve regüler olmasıdır (Hardy, 1949)

Tanım 1.1.10. $p_n \neq 0$ olmak üzere (s_n) dizisinin (N,p_n) dönüşüm dizisi (U_n) olsun. Eğer $\lambda > 0$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{P_n}{p_n}\right|^{\lambda-1} |U_n - U_{n+1}|^{\lambda} < \infty \tag{1.1.11}$$

ise (s_n) dizisine λ. mertebeden mutlak Nörlund toplanabilir veya $|N,p_n|_\lambda$ -toplanabilir denir (Bor, 1986).

Tanım 1.1.11. $q_n \neq 0$ olmak üzere (s_n) dizisinin (N,q_n) dönüşüm dizisi (V_n) olsun. Eğer $\lambda > 0$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{Q_n}{q_n} \right|^{\lambda-1} |V_n - V_{n+1}|^{\lambda} < \infty \tag{1.1.12}$$

ise (s_n) dizisine λ. mertebeden mutlak Riesz toplanabilir veya $|\bar{N},q|_{\lambda}$-toplanabilir denir (Bor, 1986).

Tanım 1.1.12. $\forall \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

i) $p_n > 0$

ii) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \leq \dfrac{p_{n+2}}{p_{n+1}} \leq 1$

olacak şekilde tariflenen (p_n) dizilerin cümlesini, $\mathcal{M}$ ile gösterilir (Tripathy, 1982).

Kabul edelim ki $P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v$, $Q_n = \sum_{v=0}^{n} q_v$ olsun. Buna göre $p_0 \neq 0$ olmak üzere (c_n) dizisi de,

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} c_v = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases} \tag{1.1.13}$$

olarak tarif edilir. Aynı zamanda da

$$c_n^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} c_v \quad \text{ve} \quad \Delta p_n = p_n - p_{n-1}$$

olarak kabul edilir (Tripathy, 1982).

Tanım 1.1.13. (a_n) ve (b_n) verilen iki dizi olmak üzere, a_n, b_n'nin iki pozitif sabit ile çarpımları arasında kalıyorsa, bu notasyon $a_n \overset{\cup}{\cap} b_n$ ile gösterilir. Yani;

$$k_1.b_n \leq a_n \leq k_2 b_n$$

olacak şekilde k_1, k_2 pozitif reel sabitleri varsa, bu $a_n \overset{\cup}{\cap} b_n$ notasyonu ile gösterilir (Nurcombe, 1989)

Tanım 1.2.14. (A) ve (B) iki toplanabilme metodu olmak üzere; her (A) toplanabilen dizi aynı değere (B) toplanabiliyorsa, (A) toplanabilme metodu (B) toplanabilme metodunu gerektirir denir. $(A) \subseteq (B)$ ile gösterilir (Nurcombe, 1989)

Tanım 1.1.15. (A) ve (B) iki toplanabilme metodu olmak üzere bu iki metot biri diğerini gerektiriyorsa, (A) ve (B) metotlarına denktir denir. (A) ve (B) gibi iki toplanabilme metodunun denkliği

$$(A) = (B) \Leftrightarrow (A) \subseteq (B) \wedge (B) \subseteq (A)$$

ile gösterilir (Tripathy, 1982).

2.(N,p,q) - METODU

2.1. Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik

Bu bölümde genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik tanımını vererek, bu metot ile ilgili etkisizlik ve limitleme teoremlerini ifade ve ispat edeceğiz.

Tanım 2.1.1. $(p_n),(q_n)$ ve (r_n) birer dizi $\forall\ n \geq 0$ için $r_n \neq 0$ ve $r_{-1} = 0$ olmak üzere

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde reel veya kompleks sayıların dizileri olsun. Bu takdirde verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olmak üzere (s_n) dizisinden (t_n) dizisine

$$t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v \tag{2.1.2}$$

ile verilen dönüşüme genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü veya genelleştirilmiş Nörlund ortalaması denir ve (N,p,q) ile gösterilir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s \tag{2.1.3}$$

ise, bu takdirde $\sum_{v=0}^{\infty} a_n$ serisine ya da (s_n) dizisine s değerine genelleştirilmiş Nörlund toplanabilir denir ve $s_n \to s(N,p,q)$ şeklinde gösterilir (Hardy, 1949). 2.1.2 ile verilen dönüşümde;

i) Her n için $q_n = 1$ alınırsa,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}.1 = P_n \text{ ve } t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v$$

olduğundan (N,p,q) toplanabilirlilik, tanım 1.2.6'da verilen (N,p_n) toplanabilirliğe indirgenir.

ii) Her n için $p_n = 1$ alınırsa,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} q_n .1 = Q_n \text{ ve } t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} q_v s_v$$

olduğundan (N,p,q) toplanabilirlilik, tanım 1.2.7'da verilen $(\overline{N}, q_n)$ toplanabilirliğe indirgenir.

iii) Her $k \in Z$ olmak üzere her n için $q_n = 1$ ve $p_n = \begin{pmatrix} v+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ seçersek,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} \begin{pmatrix} v+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$$

ve

$$t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}} \sum_{v=0}^{n} \begin{pmatrix} v+k-1 \\ k-1 \end{pmatrix} s_{n-v}$$

olduğundan (N,p,q) toplanabilirlilik, (C,k) toplanabilirliğe indirgenir (Nurcombe, 1989)

Tanım 2.1.3. Eğer (A) metodu yakınsaklığa denkse (A) metoduna etkisizdir denir. Yani; (A) metodunun dönüşüm ve ters dönüşüm matrisleri regülerse (A) metoduna etkisizdir denir. (Tripathy, 1982).

2.2. $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve (q_n) Pozitif Diziler İçin Limitleme Teoremleri

Teorem 2.2.1. Her $n \in IN \cup \{0\}$ için $q_n > 0$ ve $(p_n) \in \mathcal{M}$ olmak üzere

$$s_n = \frac{1}{q_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v$$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: Her $n \in IN \cup \{0\}$ için $q_n > 0$ ve $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu takdirde Her $n \in N \cup \{0\}$ için,

$$\frac{1}{q_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v = \frac{1}{q_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v \sum_{k=0}^{v} \frac{p_{v-k} q_k}{r_v} s_k = \frac{1}{q_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} \sum_{k=0}^{v} p_{v-k} q_k s_k$$

$$= \frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n} c_{n-v}\left(p_v q_0 s_0 + p_{v-1}q_1 s_1 + \ldots + p_0 q_v s_v\right)$$

$$= \frac{1}{q_n}\left[c_n\left(p_0 q_0 s_0\right) + c_{n-1}\left(p_1 q_0 s_0 + p_0 q_1 s_1\right) + \ldots + c_0\left(p_n q_0 s_0 + \ldots + p_0 q_n s_n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{q_n}\left[\left(c_n p_0 + \ldots + c_0 p_n\right)q_0 s_0 + \left(c_{n-1}p_0 + \ldots + c_0 p_{n-1}\right)q_1 s_1 + \ldots + \left(c_0 p_0\right)q_n s_n\right]$$

$$= \frac{1}{q_n}\left[\left(\sum_{v=0}^{n} c_{n-v}p_{v-0}\right)q_0 s_0 + \left(\sum_{v=1}^{n} c_{n-v}p_{v-1}\right)q_1 s_1 + \ldots + \left(\sum_{v=n}^{n} c_{n-v}p_{v-n}\right)q_n s_n\right]$$

$$= \frac{1}{q_n}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{v=k}^{n} c_{n-v}p_{v-k}\right)q_k s_k$$

$$= \frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=k}^{n} c_{n-v}p_{v-k}\right)q_k s_k + \left(\sum_{v=n}^{n} c_{n-v}p_{v-n}\right)q_n s_n\right]$$

$$= \frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=0}^{n-k} c_{n-v-k}p_v\right)q_k s_k + c_0 p_0 q_n s_n\right]$$

$$= \frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=0}^{n-k} c_{n-k-v}p_v\right)q_k s_k\right] + \frac{c_0 p_0}{q_n} q_n s_n$$

$$= \frac{1}{q_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} 0.\, q_k s_k\right] + s_n$$

$$= s_n$$

yazılabilir. Buna göre; $\forall \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $s_n = \dfrac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v$ elde edilir.

Lemma 2.2.1. $\forall \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $s_n = \sum_{v=0}^{n} j_{n,v} t_v$

olsun. $\left(t_n \to 0 (n \to \infty) \Rightarrow s_n \to 0 (n \to \infty)\right)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\sum_{v=0}^{n} \left|j_{n,v}\right| \leq K$ olacak şekil de en az bir pozitif K sabiti vardır.

ii) $\forall \quad v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\lim_{n \to \infty} j_{n,v} = 0$

olmasıdır (Mears, 1937).

Teorem 2.2.2. $(p_n) \in \mathcal{M}$, $q_n > 0$ olsun. Bu takdirde;

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(G_n)\right) \Leftrightarrow \left(c_n = o(q_n G_n) \;\text{ ve }\; r_n = O(q_n G_n)\right)$$

dir (Nurcombe, 1989)

İspat: Kabul edelim ki $s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(G_n)$ olsun. Genelliği bozmaksızın s=0 alabiliriz. Buna göre $t_n \to 0 \Rightarrow s_n / G_n \to 0$ yazılabilir. Teorem 2.2.1'den dolayı, $n \to \infty$ için

$$\frac{s_n}{G_n} = \frac{1}{q_n G_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v = o(1)$$

yazılabilir. Buna göre lemma 2.2.1'den dolayı

$$\frac{s_n}{G_n} = \frac{1}{q_n G_n} \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v t_v$$

olduğundan,

(i) $\forall \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sum_{v=0}^{n} \left| \frac{c_{n-v} r_v}{G_{n-v} q_n} \right| \le K \Leftrightarrow \sum_{v=0}^{n} \left| c_{n-v} r_v \right| = O(q_n G_n) \tag{2.2.1}$$

(ii) Her v ve $n \to \infty$ için

$$c_{n-v} r_v = o(G_n q_n) \tag{2.2.2}$$

yazılabilir. Eğer $r_n = O(G_n q_n)$ alınırsa bu takdirde 2.2.1 ifadesi sağlanır. Çünkü $(p_n) \in \mathcal{M}$ olması, $c_0 > 0$, $n \ge 1$ için $c_n \le 0$ olduğunu gerekdirir (Hardy, 1949). Bu yüzden

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v} r_v| = |c_0 r_n| + \sum_{v=0}^{n-1} |c_{n-v} r_v| = |c_0| r_n + \sum_{v=0}^{n-1} |c_{n-v}| r_v = c_0 r_n - \sum_{v=0}^{n-1} c_{n-v} r_v$$

$$= c_0 r_n + c_0 r_n - c_0 r_n - \sum_{v=0}^{n-1} c_{n-v} r_v$$

$$= 2c_0 r_n - \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v \tag{2.2.3}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v = \sum_{v=0}^{n} c_{n-v} \sum_{k=0}^{v} p_{v-k} q_k$$

$$= \sum_{v=0}^{n} c_{n-v}(p_v q_0 + p_{v-1} q_1 + \ldots + p_0 q_v)$$

$$= c_n(p_0 q_0) + c_{n-1}(p_1 q_0 + p_0 q_1) + \ldots + c_0(p_n q_0 + \ldots + p_0 q_n)$$

$$= (c_n p_0) q_0 + (c_{n-1} p_1 q_0 + c_{n-1} p_0 q_1) + \ldots + (c_0 p_n q_0 + \ldots + c_0 p_0 q_n)$$

$$= (c_n p_0 + c_{n-1} p_1 + \ldots + c_0 p_n) q_0 + (c_{n-1} p_0 + \ldots + c_0 p_{n-1}) q_1 + \ldots + (c_0 p_0) q_n$$

$$= \left(\sum_{v=0}^{n} c_{n-v} p_{v-0}\right) q_0 + \left(\sum_{v=1}^{n} c_{n-v} p_{v-1}\right) q_1 + \ldots + \left(\sum_{v=n}^{n} c_{n-v} p_{v-n}\right) q_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{v=k}^{n} c_{n-v} p_{v-k}\right) q_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{v=k}^{n} c_{n-v} p_{v-k}\right) q_k + \left(\sum_{v=n}^{n} c_{n-v} p_{v-n}\right) q_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{v=k}^{n-k} c_{n-v-k} p_v\right) q_k + c_0 p_0 q_n$$

$$= q_n$$

olduğundan

$$\sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v = q_n \tag{2.2.4}$$

dir. 2.2.4 eşitliği 2.2.3 eşitliğinde yerine konursa,

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}| = 2c_0 r_n - q_n \tag{2.2.5}$$

elde edilir. $r_n = O(q_n G_n)$ olduğundan $\forall \ v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\frac{r_n}{q_n G_n} < K$ olacak şekilde $\exists K>0$ vardır. O halde 2.2.5 eşitliği

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v} r_v| = 2c_0 r_n - q_n < 2c_0 K G_n q_n - q_n < 2c_0 K G_n q_n$$

$$\Rightarrow \sum_{v=0}^{n} |c_{n-v} r_v| = O(G_n q_n) \tag{2.2.6}$$

elde edilir. Diğer taftan eğer $c_n = O(q_n G_n)$ ise 2.2.2 ifadesi sağlanır. Gerçekten;

$$\sum_{v=0}^{n} |p_{n-v} c_v| = p_n c_o - \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} c_v = p_n c_o + p_n c_o - p_n c_o - \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} c_v$$

$$= 2p_n c_0 - \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} c_v = 2p_n c_0 \tag{2.2.7}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\sum_{v=0}^{n} \left| p_{n-v} c_v \right| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| + \left| c_n \right| p_0 \tag{2.2.8}$$

olduğundan 2.2.7 ve 2.2.8 den,

$$\sum_{v=0}^{n} \left| p_{n-v} c_v \right| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| + \left| c_n \right| p_0$$

$$\Rightarrow p_n c_0 = \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| + \left| c_n \right| p_0$$

$$\Rightarrow \left| c_n \right| p_0 = p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-1} \left| p_{n-v} c_v \right| \tag{2.2.9}$$

yazılabilir. $(p_n) \in \mathscr{M}$ olduğundan $0 \leq v \leq n-1$ için $\frac{p_{n-v}}{p_{n-v-1}} \leq \frac{p_n}{p_{n-1}}$ olduğundan

$$-\frac{p_{n-v}}{p_{n-v-1}} \geq -\frac{p_n}{p_{n-1}} \Rightarrow -\frac{p_{n-v}}{p_{n-v-1}} \left| c_v \right| \geq -\frac{p_n}{p_{n-1}} \left| c_v \right|$$

$$\Rightarrow \quad -p_{n-v} \left| c_v \right| \geq -\frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right|$$

$$\Rightarrow \quad -\sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v} \left| c_v \right| \geq -\sum_{v=1}^{n-2} \frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right|$$

$$\Rightarrow \quad p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v} \left| c_v \right| - p_1 \left| c_{n-1} \right| \geq p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} \frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right| - p_1 \left| c_{n-1} \right|$$

$$\Rightarrow \quad p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-1} p_{n-v} \left| c_v \right| \geq p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} \frac{p_n p_{n-v-1}}{p_{n-1}} \left| c_v \right| - p_1 \left| c_{n-1} \right| \tag{2.2.10}$$

elde edilir. 2.2.9 eşitliği 2.2.10 da

$$p_0 \left| c_n \right| \geq \frac{p_n}{p_{n-1}} \left\{ p_{n-1} c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v-1} \left| c_v \right| \right\} - p_1 \left| c_{n-1} \right| \tag{2.2.11}$$

elde edilir. Her n için geçerli olduğundan özel olarak (n-1) içinde geçerlidir.

$$\left| c_{n-1} \right| p_0 = p_{n-1} c_0 - \sum_{v=1}^{n-2} p_{n-v-1} \left| c_v \right| \tag{2.2.12}$$

yazılabilir. Bu yüzdende

$$p_o|c_n| \geq \frac{p_n}{p_{n-1}}\{p_0|c_{n-1}|\} - p_1|c_{n-1}| \Rightarrow p_o|c_n| \geq \left\{p_0\frac{p_n}{p_{n-1}} - p_1\right\}|c_{n-1}| \qquad (2.2.13)$$

elde edilir. 2.2.13 ifadesin de köşeli parantez non-negatif ve azalmayandır. Gerçekten, $(p_n) \in \mathscr{M}$ olduğundan (p_n / p_{n-1}) azalmayandır. Bu yüzden de her $n \geq 1$ için $\frac{p_n}{p_{n-1}} \geq \frac{p_1}{p_o}$ dır. Buna göre

$$\frac{p_0 p_n}{p_{n-1}} - p_1 = p_0\left(\frac{p_n}{p_{n-1}} - \frac{p_1}{p_o}\right) \geq 0$$

elde edilir. Yani; 2.2.12 de köşeli parantez non-negatiftir. Şimdi bunun azalmayan olduğunu gösterelim.

$$\alpha_n = p_0\left(\frac{p_n}{p_{n-1}} - \frac{p_1}{p_o}\right)$$

ile tanımlanan (α_n) dizisini gözönüne alırsak. $\forall \quad v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = p_0\left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_1}{p_o}\right) - p_0\left(\frac{p_n}{p_{n-1}} - \frac{p_1}{p_o}\right) = p_0\left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_n}{p_{n-1}}\right) \geq 0$$

dır. Bu ise (α_n) dizisinin azalmayan olduğunu gösterir. (α_n) dizisi, artan ve non-negatif olduğundan $\forall \quad n \geq n_o$ için $\alpha_n > 0$ dır. Bu yüzden de $\forall \quad n \geq n_o$ için

$$|c_{n-1}| \leq p_0|c_n|\frac{1}{\alpha_n}$$

olduğundan dolayı

$$c_{n-1} \leq |c_{n-1}| \leq p_0|c_n|\frac{1}{\alpha_{n_0}}$$

yazılabilir. Bu ise her $n \geq n_0$ için $c_{n-1} = O(|c_n|)$ olduğunu gösterilir. Bu ifade her $n \geq n_0$ için geçerli olduğundan özel olarak n, n-1, n-2, ..., n-v+1 içinde geçerlidir. Buna göre,

$$|c_n| \geq \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-1}|,\ |c_{n-1}| \geq \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-2}|,\ \ldots,\ |c_{n-v+1}| \geq \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-v}|$$

elde edilir. Bu yüzden

$$|c_n| \geq \frac{\alpha_{n_0}}{p_0}|c_{n-1}| \geq \left(\frac{\alpha_{n_0}}{p_0}\right)^2|c_{n-2}| \geq \ldots \geq \left(\frac{\alpha_{n_0}}{p_0}\right)^v|c_{n-v}| \qquad (2.2.14)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$|c_n| \geq \left(\frac{\alpha_{n_0}}{p_0}\right)^v|c_{n-v}| \Rightarrow |c_{n-v}| \leq \left(\frac{p_0}{\alpha_{n_0}}\right)^v|c_n| \Rightarrow c_{n-v}r_v \leq r_v\left(\frac{p_0}{\alpha_{n_0}}\right)^v|c_n|$$

$$\Rightarrow c_{n-v}r_v = O(|c_n|) = o(q_n G_n) \tag{2.2.15}$$

elde edilir.

Tersine olarak; 2.2.1 ve 2.2.2 sağlanırsa, bu takdirde;

i) 2.2.1' de v=n alınırsa

$$|c_{n-v}r_v| \leq \sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}r_v| = O(q_n G_n)$$

elde edilir. Bu ise $c_0 r_n = O(q_n G_n) \Leftrightarrow r_n = O(q_n G_n)$ olduğunu gösterir.

ii) (2.2.1) de özel olarak v=0 alınırsa $c_n r_0 = o(q_n G_n) \Leftrightarrow c_n = o(q_n G_n)$ elde edilir.

Sonuç 2.2.1. $(p_n) \in \mathcal{M}$, $q_n > 0$ olsun. Buna göre

$$[(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)] \Leftrightarrow [c_n = o(r_n)]$$

olmasıdır (Nurcombe, 1989).

Ispat: $(p_n) \in \mathcal{M}$, $q_n > 0$ olsun. Eğer teorem 2.2.2'de $\forall \ v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $G_n = \frac{r_n}{q_n}$ seçilirse,

$c_n = o(q_n G_n) = o\left(q_n \frac{r_n}{q_n}\right) = o(r_n)$ ve $r_n = O(q_n G_n) = O\left(q_n \frac{r_n}{q_n}\right) = O(r_n)$ yazılabilir. Buna göre teorem 2.2.2.'den

$$[s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)] \Leftrightarrow [c_n = o(r_n)]$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.2.2. Aşağıdaki şartların herhangi birini sağlayan (p_n) dizisi için $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve $q_n > 0$ olsun.

(a) (N,p,q) regüler
(b) $P_n \to \infty$
(c) $Q_n \to \infty$

bu takdirde $(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n))$ dır (Tanaka, 1980)

Ispat: Sonuç 2.2.1'den (a) ,(b) ,(c) 'nin her birinin $c_n = o(r_n)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi kabul edelim ki (a) sağlanmış olsun. Yani (N,p,q) regüler olsun. Bu takdirde

$$t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v$$

ile verilen dönüşüme karşılık gelen matrisin elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v} q_v}{r_n} & , \ v \le n \\ 0 & , \ v > n \end{cases}$$

ile gösterilsin. Bu teorem 1.1.1'in şartlarını sağlar.Bu yüzden de teorem 1.1.1'in (b) özelliğinden her $v \le n$ için

$$\lim_{n\to\infty} a_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-v} q_v}{r_n} = 0$$

yazılabilir. Bu yüzdende her $v \le n$ için

$$p_{n-v} q_v = o(r_n) \Leftrightarrow p_{n-v} = o(r_n) \qquad (n \to \infty)$$

elde edilir. Bu ifade her $v \le n$ için geçerli olduğundan özel olarak $v=0$ için de geçerlidir. Bu yüzden

$$p_n = o(r_n) \tag{2.2.16}$$

yazılabilir. 2.2.7' den dolayı $\sum_{v=0}^{n} |p_{n-v} c_v| = 2 p_n c_0$ olduğundan

$$\sum_{v=0}^{n} |p_{n-v} c_v| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n} |p_{n-v} c_v| \Rightarrow 2 p_n c_0 = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} |c_v|$$

$$\Rightarrow p_n c_0 = \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} |c_v| \tag{2.2.17}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\sum_{v=0}^{n} |c_v| p_{n-v} = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1} |c_v| p_{n-v} + p_0 |c_n| \ge p_0 |c_n| \tag{2.2.18}$$

olduğundan 2.2.17 ve 2.2.18' dan dolayı

$$p_n c_0 = \sum_{v=1}^{n} |c_v| p_{n-v} \ge p_0 |c_n| \tag{2.2.19}$$

elde edilir. Bu yüzden $\dfrac{|c_n|}{p_n} \le \dfrac{c_0}{p_0} < K$ olacak şekilde $\exists K>0$ sayısı vardır. O halde

$$c_n = O(p_n) \qquad (n \to \infty) \tag{2.2.20}$$

yazılabilir. 2.2.16 ve 2.2.20' yı kullanarak,

$$c_n = O(p_n) = O(o(r_n)) = o(r_n) \Rightarrow c_n = o(r_n)$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki (b) sağlanmış olsun. n>0 için $\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}c_v = 0$ dır. (p_n) artmayan bir dizi olduğundan her $v,n \in \mathbb{N}$ için n-v<n ise $p_{n-v} \geq p_n$ yazılabilir. Bu yüzden de n>0 için $c_n \leq 0$ olduğundan her $v,n \in \mathbb{N}$ için $p_{n-v}c_v \leq p_n c_v$ elde edilir. Buna göre

$$\sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v}c_v \leq \sum_{v=0}^{n-1} p_n c_v = p_n \sum_{v=0}^{n-1} c_v = p_n c_{n-1}^{(1)} \tag{2.2.21}$$

yazılabilir. 2.2.7' yi kullanarak,

$$\sum_{v=0}^{n} |p_{n-v}c_v| = |p_0 c_n| + \sum_{v=0}^{n-1} |p_{n-v}c_v| \Rightarrow 2p_n c_0 = |p_0 c_n| + p_n c_0 - \sum_{v=1}^{n-1} p_{n-v}c_v$$

$$\Rightarrow p_0 |c_n| = p_n c_0 + \sum_{v=1}^{n-1} p_{n-v}c_v$$

$$\Rightarrow p_0 |c_n| = \sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v}c_v \tag{2.2.22}$$

buluruz. 2.2.21 ve 2.2.22' yı kullanarak,

$$p_0 |c_n| = \sum_{v=0}^{n-1} p_{n-v}c_v \leq p_n c_{n-1}^{(1)} \Rightarrow p_0 |c_n| \leq p_n c_{n-1}^{(1)} \tag{2.2.23}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}c_v^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} c_k = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}(c_0 + c_1 + \ldots + c_n)$$

$$= p_n c_0 + p_{n-1}(c_0 + c_1) + \ldots + p_0(c_0 + c_1 + \ldots + c_n)$$

$$= (p_n c_0 + p_{n-1}c_1 + \ldots + p_0 c_n) + (p_{n-1}c_0 + \ldots + p_0 c_{n-1}) + \ldots + p_0 c_0$$

$$= \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}c_v + \sum_{v=1}^{n} p_{n-v}c_{v-1} + \ldots + \sum_{v=n}^{n} p_{n-v}c_{v-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{v=k}^{n} p_{n-v}c_{v-k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{v=0}^{n-k} p_{n-v-k}c_v \right) + \sum_{k=n}^{n} p_{n-v}c_{v-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{v=0}^{n-k} p_{n-v-k}c_v \right) + p_0 c_0$$

$$=1 \tag{2.2.24}$$

elde dilir. Her v için $c_v^{(1)} = \sum_{k=0}^{v} c_k \geq c_v$ ve (p_n) artmayan dizi olduğundan

$$c_v^{(1)} p_{n-v} \geq c_v p_{n-v} \Rightarrow \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} p_{n-v} \geq \sum_{v=0}^{n} c_v p_{n-v} \geq \sum_{v=0}^{n} c_v p_n$$

$$\Rightarrow \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} p_{n-v} \geq \sum_{v=0}^{n} c_v p_n = p_n \sum_{v=0}^{n} c_v = p_n c_n^{(1)} \qquad (2.2.25)$$

yazılabilir. 2.2.24 ve 2.2.25 ifadelerini kullanarak,

$$1 = \sum_{v=0}^{n} c_v^{(1)} p_{n-v} = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{j=0}^{v} c_j = \sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{v=j}^{n} p_{n-v} = \sum_{j=0}^{n} c_j P_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} c_j \frac{P_{n-j}}{P_j} P_j$$

$$\Rightarrow 1 \geq K P_j \sum_{j=0}^{n} c_j \geq K P_j c_n^{(1)}$$

olacak şekilde K>0 sayısı vardır. Bu yüzden

$$p_n c_n^{(1)} \leq \frac{1}{K} \qquad (2.2.26)$$

yazılabilir. $P_n \to \infty$ ise $c_n^{(1)} \to 0$ dır. Bu yüzden

$$c_n = o(p_n) \qquad (2.2.27)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=1}^{n} p_{n-v} q_v + p_n q_0 \geq p_n q_0$$

$$r_n \geq p_n q_0 \Leftrightarrow p_n = O(r_n) \qquad (2.2.28)$$

olduğundan 2.2.27 ve 2.2.28 ifadesini kullanarak,

$$c_n = o(p_n) = o(O(r_n)) = o(r_n) \Rightarrow c_n = o(r_n)$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $Q_n \longrightarrow \infty$ olsun. (p_n) artmayan bir dizi olduğundan

$$p_n Q_n = p_n \sum_{v=0}^{n} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_n q_v \leq \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = r_n$$

$$\Rightarrow \quad p_n Q_n \leq r_n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_n} \leq \frac{1}{p_n Q_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{|c_n|}{r_n} \leq \frac{|c_n|}{p_n Q_n} \qquad (2.2.29)$$

yazılabilir. $Q_n \to \infty$ ve $|c_n| = O(p_n)$ olduğundan 2.2.29 ifadesinden $|c_n| = O(r_n)$ elde edilir.

Sonuç 2.2.3. $(p_n) \in \mathcal{M}$, $q_n > 0$ olsun. Bu takdirde

$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \Leftrightarrow (c_n = o(q_n)$ ve $r_n = O(q_n))$

dır (Nurcombe, 1989).

İspat: Teorem 2.2.2 de özel olarak her n için $G_n = 1$ seçilirse istenen elde edilir.

2.3. $(p_n),(q_n)$ Reel veya Kompkeks Diziler İçin Limitleme Teoremleri

Teorem 2.3.1. $\sum |c_n| < \infty$ ve $\max_{0 \le v \le n} |r_v| = O(|r_n|)$ olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(G_n)\right) \Leftrightarrow |r_n| = O(|q_n| G_n)$$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelim ki $|r_n| = O(|q_n| G_n)$ olsun. Bu takdirde 2.2.1 ve 2.2.2' nin şartlarının sağlandığını göstermeliyiz. Eğer $|r_n| = O(|q_n| G_n)$ ise $\forall \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\left|\frac{r_n}{q_n G_n}\right| < K$ olacak şekilde $\exists K>0$ sayısı vardır. Diğer taraftan $\sum |c_n|$ yakınsak olduğundan kısmi toplamlar diziside yakınsaktır. Yakınsak her dizinin bir toplamı var olduğundan,

$$\sum_{v=0}^{n} |c_{n-v} r_v| = \sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}| |r_v| = \max_{0 \le v \le n} |r_v| \sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}| = O(|r_n|) O(1) = O\left(O(|q_n| G_n)\right) O(1) = O(|q_n| G_n)$$

yazılabilir. Buna göre $\sum_{v=0}^{n} \left|\frac{c_{n-v}}{q_n G_n}\right| < K$ olacak şekilde $\exists K>0$ sayısı vardır. Bundan başka $\sum |c_n|$ yakınsak olduğundan $c_n \to 0$ dır. $\max_{0 \le v \le n} |r_v| = O(|r_n|)$ olduğundan $\max_{0 \le v \le n} |r_v| = h$ dersek $\frac{h}{|r_n|} \le K_1$ olacak şekilde $\exists K_1>0$ sayısı vardır. Buna göre $|r_n| \ge \frac{h}{K_1} = K > 0$ yazılabilir. Bu yüzden de (c_{n-v}) sıfır dizisi ve $(|1/r_n|)$ sınırlı dizi olduğundan $c_{n-v} = o(r_n)$ yazılabilir. Diğer taraftan $|r_n| = O(|q_n| G_n)$ ve $c_{n-v} = o(r_n)$ olduğundan,

$$c_{n-v} = o(r_n) = o\left(O(q_n G_n)\right) = o(q_n G_n) \qquad (2.3.1)$$

elde edilir.

Tersine olarak; $\sum|c_n|<\infty$ ve $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v|=O(|r_n|)$ ve $(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s+o(G_n))$ olsun.

Bu takdirde Teorem 2.2.2'den 2.2.1 ve 2.2.2' nin şartlarını sağlatmalıyız. Yani, $c_n = o(q_nG_n)$ ve $r_n = O(q_nG_n)$ olmalıdır. Bu yüzden de,

(i) Her n için $\sum\limits_{v=0}^{n}|c_{n-v}r_v| = O(q_nG_n)$

(ii) Her v ve $c \to \infty$ için $c_{n-v} = o(q_nG_n)$

yazılabilir. Buradanda $|r_n| = O(q_nG_n)$ elde edilir.

Uyarılar: 1) Eğer (G_n), $\max\limits_{0\le v\le n}|G_v| = O(G_n)$ ile verilen reel veya kompleks terimli bir dizi ise, bu takdirde teorem 2.3.1'nin $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(r_n)$ şartı, sonucu etkilemeksizin $\max\limits_{0\le v\le n}|q_v| = O(q_n)$ ile değiştirilebilir. Gerçekten;

$$\left|\frac{r_v}{r_n}\right| = \left|\frac{r_v}{q_v}\frac{q_v}{r_n}\right| = \left|O(G_v)\frac{q_v}{r_n}\right| = \left|O(G_v)\frac{q_v}{q_n}\frac{q_n}{r_n}\right| = \left|\frac{q_v}{q_n}\right|\left|O(G_v)\right|\left|\frac{q_n}{r_n}\right| \tag{2.3.2}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{q_n}{r_n} = \frac{q_n}{q_np_0+\ldots+q_0p_n} \le \frac{q_n}{q_np_0} = \frac{1}{p_0}$$

olduğundan (q_n / r_n) sınırlı bir dizidir. $\max\limits_{0\le v\le n}|G_v| = O(G_n)$ ve $\max\limits_{0\le v\le n}|q_v| = O(q_n)$ olduğundan her $0 \le v \le n$ için $|G_v| \le K_1|G_n|$ olacak şekilde $K_1 > 0$ vardır. Her $0 \le v \le n$ için $|q_v| \le K_2|q_n|$ olacak şekilde vardır. Buna göre her $0 \le v \le n$ için (2.3.2) ifadesinden

$$\left|\frac{r_v}{r_n}\right| \le K_1K_2|G_n|\frac{1}{p_0} = K \Rightarrow \max_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$$

elde edilir.

2) Kabul edelim ki (G_n),reel veya kompleks azalmayan bir dizi olsun. Bu takdirde $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(r_n)$ ile $\max\limits_{0\le v\le n}|q_v| = O(q_n)$ şartları değiştirilebilir. Gerçekten, (G_n) azalmayan dizisi ise her $0 \le v \le n$ için $G_v \le G_n$ yazılabilir. Buna göre $\max\limits_{0\le v\le n}\left|\frac{G_v}{G_n}\right| \le 1$ olduğundan $\max\limits_{0\le v\le n}|G_v| = O(G_n)$ elde edilir ki bu bize (1) ifadesine dönüştüğünü gösterir.

3) $(r_n) \notin c_0$ ve (r_n) monoton olmak üzere her bir durumda $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ şartı gerçekleştirilebilir. Gerçekten;

i) Kabul edelim ki $(r_n) \notin c_0$ ve (r_n) monoton artan olsun. Bu takdirde her $0 \le v \le n$ için; $r_0 \le r_v \le r_n$ olduğundan $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(r_n)$ yazılabilir.

ii) Şimdi kabul edelim ki $(r_n) \notin c_0$ ve (r_n) monoton azalan olsun. Bu takdirde her $0 \le v \le n$ için; $r_0 \ge r_v \ge r_n$ olduğundan $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(r_n)$ elde edilir.

4) Eğer $(N, \Delta r)$ regüler ise, $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ sağlanır. Gerçekten; her $0 \le v \le n$ için;

$$\sum_{k=0}^{v} \Delta r_k = \Delta r_0 + \Delta r_1 + \ldots + \Delta r_v = (r_0 - r_{-1}) + (r_1 - r_0) + \ldots + (r_v - r_{v-1}) = r_v \tag{2.3.3}$$

olduğundan

$$\max_{0\le v\le n}|r_v| = \max_{0\le v\le n}\left|\sum_{k=0}^{v} \Delta r_k\right| \tag{2.3.4}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden her $0 \le v \le n$ için;

$$\left|\sum_{k=0}^{v} \Delta r_k\right| \le \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \tag{2.3.5}$$

elde edilir. Buna göre her $0 \le v \le n$ için;

$$\sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \le \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| \tag{2.3.6}$$

olduğundan dolayı

$$\max_{0\le v\le n} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| = \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| \tag{2.3.7}$$

elde edilir. Ayrıca $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan teorem 1.1.1in (i) özelliğinden her $0 \le v \le n$ için;

$$\sum_{v=0}^{n} \left|\frac{\Delta r_{n-v}}{r_n}\right| = O(1) \tag{2.3.8}$$

yazılabir. 2.3.8 eşitliğini den her $0 \le v \le n$ için,

$$\sum_{v=0}^{n} |\Delta r_{n-v}| = O(|r_n|) \tag{2.3.9}$$

elde edilir. 2.3.4 , 2.3.5 , 2.3.7 ve 2.3.8 ifadelerini kullanarak,

$$\max_{0\le v\le n}|r_v| = \max_{0\le v\le n}\left|\sum_{k=0}^{v}\Delta r_v\right| = \max_{0\le v\le n}\sum_{k=0}^{v}|\Delta r_k| \le \sum_{k=0}^{n}|\Delta r_k| = O(|r_n|)$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.1. $\sum|c_n| < \infty$ ve $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ olsun. Bu takdirde

$$s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)$$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelim ki $\sum|c_n| < \infty$ ve $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ olsun. Teorem 2.3.1 'de $\forall \quad v \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

için $G_n = \left|\dfrac{r_n}{q_n}\right|$ seçilirse $\left|\dfrac{r_n}{q_n}\right| = O(G_n)$ şartı sağlanır. Buna göre teorem 2.3.1'den

$$s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.2. $\sum|c_n| < \infty$, $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ veya $\max\limits_{0\le v\le n}|q_v| = O(|q_n|)$ olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s\right) \Leftrightarrow |r_n| = O(|q_n|)$$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: Teorem 2.3.1' de özel olarak her n için $G_n = 1$ seçilirse, istenen sonuç elde edilir.

2.4. Regülerlik Şartı İçin Limitleme Teoremleri

Teorem 2.4.1. $\left|\dfrac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\dfrac{1}{G_n}\right)$ *ve* $(N,\Delta r)$ *regüler olsun. Bu takdirde*

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(G_n)\right) \Leftrightarrow \left|\frac{r_n}{q_n}\right| = O(G_n) \quad \text{ve} \quad \sum|c_n| < \infty$$

dır (Nurcombe, 1989)

İspat: $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan teorem 2.3.1'in 3. uyarısından dolayı $\max\limits_{0\le v\le n}|r_v| = O(|r_n|)$ yazılabilir.

Bu yüzden $\sum|c_n| < \infty$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Teorem 2.3.1'de

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}r_v| = O(|q_n|G_n) \tag{2.4.1}$$

elde etmiştik. Hipotezden $\left|\dfrac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\dfrac{1}{G_n}\right)$ olduğundan

$$(|q_n|G_n) = O(|r_n|) \tag{2.4.2}$$

yazılabilir. 2.4.2 yi (2.4.1) da yerine konulursa,

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}r_v| = O(|q_n|G_n) = O(O(|r_n|)) = O(|r_n|)$$

elde edilir. Ayrıca $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan $\forall \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\sum\limits_{k=0}^{v}|\Delta r_k| = O(|r_v|)$ yazılabilir.

Buna göre $\sum\limits_{k=0}^{v}\Delta r_k = r_v$ olduğundan

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}r_v| = \sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\sum_{k=0}^{v}\Delta r_k\right| = \sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}|\left|\sum_{k=0}^{v}\Delta r_k\right| = O(|r_n|)$$

yazılabilir. Bu yüzdende

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}|\left|\sum_{k=0}^{v}\Delta r_k\right| \le \sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}|\sum_{k=0}^{v}|\Delta r_k| = O(|r_n|)$$

elde edilir. Buna göre

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}|\sum_{k=0}^{v}|\Delta r_k| = \sum_{k=0}^{n}|\Delta r_k|\sum_{v=k}^{n}|c_{n-v}| = \sum_{k=0}^{n}|\Delta r_k|\sum_{v=0}^{n-k}|c_v| = \sum_{k=0}^{n}|\Delta r_{n-k}|\sum_{v=0}^{k}|c_v|$$

elde edilir. Bu ise,

$$\sum_{k=0}^{n}|\Delta r_{n-k}|\sum_{v=0}^{k}|c_v| = O(|r_n|)$$

olduğunu gösterir. $(N, |\Delta r_n|)$ totally regüler olduğundan $\sum|c_n|$ sınırlı değilse, aşikar olarak bu son durum sağlanmaz (Hardy, 1949). Bu yüzden $\sum|c_n| < \infty$

Uyarı 2.4.1: $(N,\Delta G)$ regülerse $(N,\Delta r)$ regülerliği yerine teorem 2.4.1'de $(N,\Delta q)$ regülerliği yazılabilir. Yani; $(N,\Delta q)$ ve $(N,\Delta G)$ reğülerliği $(N,\Delta(qG))$ reğülerliğini gerektirir. Gercekten; $(N,\Delta q)$, $(N,\Delta G)$ ve $(N,\Delta(qG))$ dönüşümlerine karşılık gelen matrislerin elemanları, sırasıyla

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{\Delta q_{n-v}}{q_n}, & v \le n \\ 0 & ,v > n \end{cases} \qquad b_{nv} = \begin{cases} \dfrac{\Delta G_{n-v}}{G_n}, & v \le n \\ 0 & ,v > n \end{cases} \qquad c_{nv} = \begin{cases} \dfrac{\Delta(q_{n-v}G_{n-v})}{q_n G_n}, & v \le n \\ 0 & ,v > n \end{cases}$$

ile verilsin.

$$\begin{aligned} \Delta(q_{n-v}G_{n-v}) &= q_{n-v}G_{n-v} - q_{n-v-1}G_{n-v-1} \\ &= q_{n-v}G_{n-v} - q_{n-v}G_{n-v-1} + q_{n-v}G_{n-v-1} - q_{n-v-1}G_{n-v-1} \\ &= q_{n-v}(G_{n-v} - G_{n-v-1}) + G_{n-v-1}(q_{n-v} - q_{n-v-1}) \\ &= q_{n-v}\Delta G_{n-v} + G_{n-v-1}\Delta q_{n-v} \end{aligned}$$

olduğundan

$$c_{nv} = \begin{cases} \dfrac{q_n\Delta G_{n-v} + G_{n-v}\Delta q_{n-v}}{q_n G_n} & , \ v \le n \\ 0 & , \ v > n \end{cases}$$

elde edilir. Buna göre;

i) $(N,\Delta q)$ ve $(N,\Delta G)$ reğüler olduğundan her v için,

$$\lim_{n\to\infty} a_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta q_{n-v}}{q_n} = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta G_{n-v}}{G_n} = 0$$

dır. Ayrıca $n-v-1 \le n-v \le n$ olduğundan (q_{n-v}/q_n) ve (G_{n-v}/G_n) sınırlıdır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} c_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{n-v}\Delta G_{n-v} + G_{n-v-1}\Delta q_{n-v}}{q_n G_n} = 0$$

elde edilir.

ii) Her n için

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty}|c_{nv}| &= \sum_{v=0}^{n}|c_{nv}| + \sum_{v=n+1}^{\infty}|c_{nv}| \\ &= \sum_{v=0}^{n}\left|\frac{q_{n-v}\Delta G_{n-v} + G_{n-v-1}\Delta q_{n-v}}{q_n G_n}\right| \\ &\le \sum_{v=0}^{n}\frac{q_{n-v}}{q_n}\left|\frac{\Delta G_{n-v} + \Delta q_{n-v}}{G_n}\right| + \sum_{v=0}^{n}\frac{G_{n-v-1}}{G_n}\left|\frac{\Delta q_{n-v}}{q_n}\right| \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

yazılabilir. $(N,\Delta q)$ ve $(N,\Delta G)$ reğüler olduğundan teorem 1.1.1'in (i) özelliğinden,

$$\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{\Delta q_{n-v}}{q_n}\right| = O(1) \quad \wedge \quad \sum_{v=0}^{n}\left|\frac{\Delta G_{n-v}}{G_n}\right| = O(1) \tag{2.4.4}$$

yazılabilir. (q_{n-v}/q_n) ve (G_{n-v}/G_n) diziler sınırlı olduğundan ve 2.4.3 de 2.4.4'ü kullanarak, her n için

$$\sum_{v=0}^{n}|c_{nv}| \le \sum_{v=0}^{n}\frac{q_{n-v}}{q_n}\left|\frac{\Delta G_{n-v}+\Delta q_{n-v}}{G_n}\right| + \sum_{v=0}^{n}\frac{G_{n-v-1}}{G_n}\left|\frac{\Delta q_{n-v}}{q_n}\right| = O(1)$$

eşitsizliği elde edilir. Buyüzden de $\sup_n \sum_{v=0}^{\infty}|c_{nv}| \le \infty$ elde edilir.

iii) Her n için

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^{n}c_{nv} &= \sum_{v=0}^{n}\frac{\Delta(q_{n-v}G_{n-v})}{q_nG_n} \\
&= \frac{1}{q_nG_n}\left[\sum_{v=0}^{n}q_{n-v}G_{n-v} - \sum_{v=0}^{n}q_{n-v-1}G_{n-v-1}\right] \\
&= \frac{1}{q_nG_n}\left[q_nG_n + \sum_{v=1}^{n}q_{n-v}G_{n-v} - \sum_{v=0}^{n-1}q_{n-v-1}G_{n-v-1} - q_{-1}G_{-1}\right] \\
&= \frac{1}{q_nG_n}\left[q_nG_n + \sum_{v=1}^{n}q_{n-v}G_{n-v} - \sum_{v=1}^{n}q_{n-v}G_{n-v}\right] \\
&= \frac{1}{q_nG_n}(q_nG_n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{\infty}c_{nv} = \lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{n}c_{nv} = \lim_{n\to\infty}1 = 1$$

elde edilir. O halde $(N,\Delta(qG))$ regülerdir.

Sonuç 2.4.1. Kabul edelim ki $(N,\Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n/q_n)\right) \Leftrightarrow \sum|c_n| < \infty$$

dır (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelimki $(N,\Delta r)$ regüler. Eğer teorem 2.3.2' de $\forall \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $G_n = \frac{r_n}{q_n}$ seçilirse, $\left|\frac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\frac{1}{G_n}\right)$ ve $\left|\frac{r_n}{q_n}\right| = O(G_n)$ şartlarının her ikiside sağlanacağından dolayı, teorem 2.3.2'den

$$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)) \Leftrightarrow \sum |c_n| < \infty$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.2. Kabul edelim ki $|q_n| = O(|r_n|)$, $(N,\Delta q)$ veya $(N,\Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde

$$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \Leftrightarrow |r_n| = O(|q_n|) \ \text{ve} \ \sum |c_n| < \infty$$

dır. (Nurcombe, 1989).

İspat: Eğer $(N,\Delta r)$ regüler ise, teorem 2.4.1'de özel olarak her n için $G_n = 1$ seçilirse, teorem 2.3.2'de $\left|\frac{q_n}{r_n}\right| = O\left(\frac{1}{G_n}\right)$ ve $\left|\frac{r_n}{q_n}\right| = O(G_n)$ şartları sırasıyla, $|q_n| = O(|r_n|)$ ve $|r_n| = O(|q_n|)$ şartlarına dönüşür. Bu durumda her n için $G_n = 1$ seçilirse, teorem 2.3.2, sonuç 2.3.2'ye indirgenir.

Eğer $(N,\Delta q)$ regüler ise, teorem 2.4.1'nin ispatından sonraki açıklamalardan dolayı; $(N,\Delta q)$nun regülerliği $(N,\Delta r)$ nin regülerliği ile yer değiştirilmesi için $(N,\Delta G)$ regüler olmalıdır. Bunun için özel olarak; genel terimi her n için $G_n = \frac{n+1}{n+2}$ olan (G_n) dizisini göz önüne alalım. Buna göre (G_n) ve $(1/G_n)$ dizileri sınırlıdır. (G_n) dizisinin dönüşüm matrisinin elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{\Delta G_{n-v}}{G_n} & , \ v \le n \\ 0 & , \ v > n \end{cases}$$

ile verilsin. Bu dönüşümün regüler olduğunu göstermek için teorem 1.1.1'i uygulayalım.

i) $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)$ alınırsa $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ olduğundan f fonksiyonu artan fonksiyondur. Dolayısıyla $\forall \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $G_n = \frac{n+1}{n+2}$ ile tanımlanan (G_n) dizisi artan dizidir.

Bu yüzden $0 \le v \le n$ ve $\forall \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\Delta G_n = G_{n-v} - G_{n-v-1} > 0$ yazılabilir. Dolayısıyla her n için,

$$\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| = \sum_{v=0}^{n} |a_{nv}| + \sum_{v=n+1}^{\infty} |a_{nv}| = \sum_{v=0}^{n} \left| \frac{\Delta G_{n-v}}{G_n} \right| + \sum_{v=n+1}^{\infty} |0| = \frac{1}{G_n} \sum_{v=0}^{n} |\Delta G_{n-v}|$$

$$= \frac{1}{G_n} \sum_{v=0}^{n} \left| \frac{n-v+1}{n-v+2} - \frac{n-v}{n-v+1} \right|$$

$$= \frac{1}{G_n} \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{n-v+1}{n-v+2} - \frac{n-v}{n-v+1} \right)$$

$$= \frac{1}{G_n} \left[\sum_{v=0}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} - \sum_{v=0}^{n} \frac{n-v}{n-v+1} \right]$$

$$= \frac{1}{G_n} \left[\sum_{v=0}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} - \sum_{v=1}^{n+1} \frac{n-v+1}{n-v+2} \right]$$

$$= \frac{1}{G_n} \left[\frac{n+1}{n+2} + \sum_{v=01}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} - \sum_{v=1}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} \right]$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+2} \right)} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$=1$$

olduğundan $\sup\limits_{n} \sum_{v=0}^{\infty} |c_{nv}| < \infty$ elde edilir.

ii) Her *n* için

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} + \sum_{v=n+1}^{\infty} a_{nv} = \sum_{v=0}^{n} \frac{\Delta G_{n-v}}{G_n} + \sum_{v=n+1}^{\infty} 0 = \frac{1}{G_n} \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{n-v+1}{n-v+2} - \frac{n-v}{n-v+1} \right)$$

$$= \frac{1}{G_n} \left[\sum_{v=0}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} - \sum_{v=0}^{n} \frac{n-v}{n-v+1} \right]$$

$$= \frac{1}{G_n} \left[\sum_{v=0}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} - \sum_{v=1}^{n+1} \frac{n-v+1}{n-v+2} \right]$$

$$= \frac{1}{G_n} \left[\frac{n+1}{n+2} + \sum_{v=1}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} - \sum_{v=1}^{n} \frac{n-v+1}{n-v+2} \right]$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$=1$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{\infty}a_{nv}=\lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{n}a_{nv}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

elde edilir. Bu yüzden teorem 1.1.1'in bütün şartları sağlandığından dolayı $(N,\Delta G)$ regülerdir. Diğer taraftan sınırlı olduğundan $|q_n|=O(|r_n|)$ dır. Bu ise $|q_n|=O(|r_n|)$ olduğunu gösterir.■

(p_n) ve (q_n) pozitif diziler iken, $|q_n|=O(|r_n|)$ ihmal edilebilir . Bu teoremden aşağıdaki sonuçları çıkarılır.

Teorem 2.4.2. Her n için $p_n>0$ ve $q_n>0$, $(N,\Delta q)$ veya $(N,\Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n\to s(N,p,q)\Rightarrow s_n\to s\right)\Leftrightarrow\left((P_n)\text{dizisi sınırlı ve}\sum|c_n|<\infty\right)$$

dır (Nurcombe, 1989).

İspat: Teorem 2.4.1'in sonuç 2.4.1'den dolayı Her n için $p_n>0$, $q_n>0$, $(N,\Delta q)$ veya $(N,\Delta r)$ regüler olmak üzere "$\left(s_n\to s(N,p,q)\Rightarrow s_n\to s\right)\Leftrightarrow|r_n|=O(|q_n|)$ ve $\sum|c_n|<\infty$" önermesi yazılabilir. Bu yüzden de bu teoremi ispat etmek için "$r_n=O(q_n)$ olması ancak ve ancak (P_n) dizisinin yakınsak" olduğunu göstermek kafidir.

Şimdi kabul edelim ki (P_n) dizisi yakınsak olsun. Bu takdrde (P_n) dizisinin limiti pozitif olmak zorundadır. Çünkü: $\sum p_n$ ve $\sum c_n$ nin her ikiside mutlak yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n}p_vx^vc_{n-v}x^{n-v}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n}p_vc_{n-v}x^n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n}p_vc_{n-v}\right)x^n+p_0c_0x^0=\sum_{n=1}^{\infty}0.x^n+1.1=1$$

elde edilir.

i) Şimdi eğer $(N,\Delta q)$ regüler ve (P_n) dizisi yakınsak olduğundan ve abel kısmi toplama formulünden

$$r_n=\sum_{v=0}^{n}q_{n-v}p_v=\sum_{v=0}^{n-1}\Delta q_{n-v}\sum_{j=0}^{v}p_j+q_{n-n}\sum_{j=0}^{n}p_j=\sum_{v=0}^{n-1}\Delta q_{n-v}\sum_{j=0}^{v}p_j+q_0P_n=\sum_{v=0}^{n}\Delta q_{n-v}P_v \qquad (2.4.5)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\frac{r_n}{q_n}=\frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n}\Delta q_{n-v}P_v \to L$$

elde edilir.

Tersine olarak, eğer $(N,\Delta q)$ regüler ve $r_n=O(q_n)$ olsun. Bu takdirde teorem 1.1.1'den dolayı $\sum_{k=0}^{v}|\Delta q_k|\le Kq_v$ olacak şekilde K>0 sayısı vardır. Bu ifadenin her iki tarafını p_{n-v} ile çarpar, daha sonrada her iki tarafı v=0'dan n'e kadar toplamını alırsak

$$\begin{aligned}
p_{n-v}\sum_{k=0}^{v}|\Delta q_k|\le Kp_{n-v}q_v \quad &\Rightarrow \sum_{V=0}^{n}p_{n-v}\sum_{k=0}^{v}|\Delta q_k|\le K\sum_{V=0}^{n}p_{n-v}q_v\\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}|\Delta q_k|\sum_{v=k}^{n}p_{n-v}\le Kr_n\\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}|\Delta q_k|P_{n-k}\le Kr_n\\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}|\Delta q_{n-v}|P_k\le Kr_n \qquad (2.4.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.6) nın her iki tarafını q_n ile bölünürse, $r_n=O(q_n)$ olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|\Delta q_{n-k}|}{q_n}P_k\le K\frac{r_n}{q_n}=O(1)\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{|\Delta q_{n-k}|}{q_n}P_k=O(1)$$

elde edilir. Bu yüzden $(N,|\Delta q|)$, totally regüler olduğundan $P_n=O(1)$ yazılabilir. Bu yüzden de (P_n) yakınsaktır.

ii) Eğer $(N,\Delta r)$ regüler ve (P_n) de $P_n\to L\ne 0$ olacak şekilde yakınsak bir dizi ise, bu takdirde

$$p(x)=P(x)(1-x) \qquad (2.4.7)$$

$$c(x)=c_{(x)}^{(1)}(1-x) \qquad (2.4.8)$$

yazılabileceğinden dolayı 2.4.7 ve 2.4.8 taraf tarafa çarpılırsa $|x|<1$ için

$$p(x)c(x)=(1-x)^2P(x)c^{(1)}_{(x)} \tag{2.4.9}$$

elde edilir. Ayrıca $p(x)c(x)=1$, $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n$ ve $c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(1)}(x)$ olduğundan,

$$P(x)c^{(1)}_{(x)}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(1)}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)^2$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n}P_{n-v}c_v^{(1)}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}x^{n-v}x^v$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n}P_{n-v}c_v^{(1)}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\Rightarrow\forall\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\text{ için }\sum_{v=0}^{n}P_{n-v}c_v^{(1)}=n+1$$

$$\Rightarrow\forall\quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\text{ için }\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n}P_{n-v}c_v^{(1)}=1 \tag{2.4.10}$$

elde edilir. Bu yüzdende $\forall \quad v\in\{0,1,2,\dots,n\}$ için $\lim_{v\to\infty}c_v^{(1)}P_{n-v}=1$ olmalıdır. Aksi takdirde

$$\lim_{v\to\infty}c_v^{(1)}P_{n-v}\neq 1 \qquad (v=0,1,2,\dots,n)$$

ise, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n}P_{n-v}c_v^{(1)}\neq 1$ elde edilir ki bu 2.4.10 sonucu ile çelişir.

(P_n), $L\neq 0$ a yakınsayan bir dizi olduğundan $\forall \quad v\in\{0,1,2,\dots,n\}$ için (P_{n-v}), $L\neq 0$ a yakınsayan bir birimdir. Bu yüzdende,

$$\sum_{v=0}^{n}(\Delta r_{n-v})c_v^{(1)}=\sum_{v=0}^{n}\Delta r_{n-v}\sum_{k=0}^{v}c_k=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{k=v}^{n}\Delta r_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{k=v}^{n}(r_{n-k}-r_{n-k-1})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\left[\sum_{k=v}^{n}r_{n-k}-\sum_{k=v+1}^{n+1}r_{n-k}\right]=\sum_{k=0}^{n}c_k\left[r_{n-v}+\sum_{k=v+1}^{n}r_{n-k}-\sum_{k=v+1}^{n}r_{n-k}-r_{-1}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_kr_{n-v}=\sum_{k=0}^{n}c_{n-k}\sum_{k=0}^{v}p_{v-k}q_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_{n-k}(p_vq_0+p_{v-1}q_1+\dots+p_0q_1)$$

$$=(c_np_0q_0)+c_{n-1}(p_1q_0+p_0q_1)+\dots+c_0(p_nq_0+\dots+p_0q_n)$$

$$=(c_np_0+c_{n-1}p_1+\dots+c_0p_n)q_0+(c_{n-1}p_0+\dots+c_0p_{n-1})q_1+\dots+(c_0p_0)q_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{v=0}^{n-1} c_{n-v-k} p_v\right) q_k + (c_0 p_0) q_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 0.q_k + 1.q_n = q_n \qquad (2.4.11)$$

elde edilir. 2.4.11 ve $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan

$$c_v^{(1)} \to \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{q_n}{r_n} = \sum_{v=0}^{n}\left(\frac{\Delta r_{n-v}}{r_n}\right) c_v^{(1)} \to \frac{1}{L}$$

yazılabilir.

Tersine, eğer $r_n = O(q_n)$ ise , $\forall \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $r_n < K_1 q_n$ olacak şekilde $K_1 > 0$. sayısı vardır. Bu yüzden de,

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} r_v \le \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} K_1 q_v = K_1 \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \Rightarrow \frac{1}{K_1} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} r_v \le \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \qquad (2.4.12)$$

yazılabilir. $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan dolayı $\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{\Delta r_v}{r_n}\right| \le K_2$ olacak şekilde $K_2 > 0$ sayısı vardır. Bu yüzden de, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sum_{v=0}^{n} |\Delta r_v| \le K_2 |r_n| \qquad (2.4.13)$$

yazılabilir. 2.4.13' ü 2.4.12' da yerine konulursa,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \ge \frac{1}{K_1} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} r_v \ge \frac{1}{K_1 K_2} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \Rightarrow r_n \ge M \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| \qquad (2.4.14)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \sum_{k=0}^{v} |\Delta r_k| = \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| \sum_{v=k}^{n} p_{n-v} = \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| P_{n-k} \qquad (2.4.15)$$

olduğundan 2.4.15 , 2.4.14' de yerine yazılırsa

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \ge M \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| P_{n-k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |\Delta r_k| P_{n-k} \le K_1 K_2 r_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{\Delta r_k}{r_n}\right| P_{n-k} = O(1)$$

elde edilir. $(N, \Delta r)$ regüler olduğundan $P_n = O(1)$ yazılabilir. Bu yüzden de (P_n) yakınsaktır.

2.5. Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik İçin Etkisizlik Teoremleri

Teorem 2.5.1. $(p_n) \in \mathcal{M}$, $q_n > 0$ olsun. Bu takdirde; (N,p,q) etkisizdir ancak ve ancak $r_n = O(q_n)$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelim ki $r_n = O(q_n)$ olsun. (s_n) dizisinin (N,p,q) dönüşüm dizisi (t_n) ile gösterelim. Buna göre

$$t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v s_v = \sum_{v=0}^{n} b_{n-v}s_v \tag{2.5.1}$$

olup, bu dönüşüme karşılık gelen matrisin elemanları

$$b_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}q_v}{r_n} & , \ v \le n \\ 0 & , \ v > n \end{cases} \tag{2.5.2}$$

ile tanımlıdır. B= (b_{nv}) matrisi regülerdir. Gerçekten,

i) Her n için $\displaystyle\sum_{v=0}^{\infty}|b_{nv}| = \sum_{v=0}^{n}|b_{nv}| + \sum_{v=n+1}^{\infty}|b_{nv}| = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v = 1$

olduğundan $\displaystyle\sup_n \sum_{v=0}^{\infty}|b_{nv}| < \infty$ dır.

ii) $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve (p_n) artmayan bir dizi ise $\forall \ v \le n$ için $\dfrac{p_{n-v}}{p_n} = o(1)$ yazılabilir. $(p_n) \in \mathcal{M}$

$(p_n) \in \mathcal{M}$ ve $Q_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ ise, 2.2.29' da $\dfrac{1}{r_n} \le \dfrac{1}{p_n Q_n}$ olduğu gösterildi. 2.2.29' un her iki tarafı $p_{n-v}q_v$ ile çarpılırsa,

$$\frac{p_{n-v}q_v}{r_n} \le K\frac{p_{n-v}}{p_n Q_n} \le \frac{K}{Q_n} = o(1) \tag{2.5.3}$$

yazılabilir. (2.5.3) den de her v için,

$$\lim_{n\to\infty} b_{nv} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-v}q_v}{r_n} = 0$$

elde edilir.

iii) $\displaystyle\sum_{v=0}^{n}|b_{nv}| = \sum_{v=0}^{n}\frac{p_{n-v}q_v}{r_n} = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v = \frac{1}{r_n}r_n = 1$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} b_{nv} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

elde edilir. $B=(b_{nv})$ matrisi teorem 1.1.1'in bütün şartları sağlandığından dolayı, B regülerdir. Dolayısıyla (N,p,q) regülerdir. Şimdi (N,p,q) metodunun ters dönüşümünün regüler olduğunu gösterelim. (N,p,q) metodunun ters dönüşümü; (t_n),(s_n) dizisinin (N,p,q) dönüşümü dizisi olmak üzere (t_n) dizisinden (s_n) dizisine,

$$s_n = \frac{1}{q_n}\sum_{v=0}^{n} r_v c_{n-v} t_v = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} t_v \tag{2.5.4}$$

ile verilen bir dönüşüm olduğu teorem 2.2.1'de gösterildi. (N,p,q) metodunun etkisiz olduğu için, 2.5.4 dönüşümüne karşılık gelen, ve matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \dfrac{r_v c_{n-v}}{q_n} & , \ v \le n \\ 0 & , \ v > n \end{cases}$$

ile verilen $A=(a_{nv})$ matrisi regüler olduğunu gösterelim.

(N,p,q) metodu regüler olduğundan sonuç 2.2.2'den dolayı

$$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n))$$

yazılabilir. Sonuç 2.2.1'den dolayı da

$$((s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n = s + o(r_n / q_n)) \Leftrightarrow (c_n = o(r_n))$$

yazılabileceğinden hipotezden dolayı $r_n = O(q_n)$ olması nedeniyle $c_n = o(r_n) = o(O(q_n)) = o(q_n)$ elde edilir. Bu yüzden de $c_n = o(q_n)$ve $r_n = O(q_n)$ olduğundan sonuç 2.2.3'ün yeterlilik kısmından dolayı

$$s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s$$

yazılabilir. Bu ise $t_n \to s \Rightarrow s_n \to s$ olduğunu gösterir. Bu yüzden de (2.5.4) ile verilen dönüşüm regüler bir dönüşümdür.

Sonuç 2.5.1. Kabul edelim ki $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun bu takdirde (N,p) etkisizdir ancak ve ancak (P_n) yakınsaktır (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelim ki $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu takdirde teorem 2.5.1 de özel olarak her n için $q_n = 1$ seçilirse,

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}.1 = P_n \text{ ve } \ t_n = \frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v$$

olduğundan (N,p,q) metodu (N,p) metoduna indirgenir. Ayrıca $r_n = O(q_n) \Leftrightarrow (P_n) = O(1)$ elde edilir. Bu yüzden de $(p_n) \in \mathcal{M}$ olduğundan teorem 2.5.1'den dolayı

$$(N,p,1) = (N,p) \quad \text{etkisizdir} \Leftrightarrow P_n = O(1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve (P_n) sınırlı dizi olduğundan (P_n) yakınsaktır.

Teorem 2.5.2. $\sum|c_n| < \infty$, $\sum|p_n| < \infty$, ya $\max\limits_{0\le v\le n}(|q_v|) = O(|q_n|)$ yada $\max\limits_{0\le v\le n}(|r_v|) = O(|r_n|)$ olsun. Bu takdirde (N,p,q) etkisizdir ancak ve ancak $|r_n| \overset{\cup}{\cap} |q_n|$ olmasıdır. (Nurcombe, 1989).

İspat: $\sum|c_n| < \infty$, $\sum|p_n| < \infty$, ya $\max\limits_{0\le v\le n}(|q_v|) = O(|q_n|)$ yada $\max\limits_{0\le v\le n}(|r_v|) = O(|r_n|)$ sağlansın. Bu takdirde (N,p,q) etkisiz ise (N,p,q) ve (N,c,r) regülerdir. Bu yüzden de sonuç 2.3.2'den dolayı

$$(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \Leftrightarrow (|r_n| = o(|q_n|)) \text{ ve } (t_n \to s(N,c,r) \Rightarrow t_n \to s) \Leftrightarrow (|q_n| = o(|r_n|))$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\left[(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \wedge (t_n \to s(N,c,r) \Rightarrow t_n \to s)\right] \Leftrightarrow \left[(|r_n| = o(|q_n|)) \wedge (|q_n| = o(|r_n|))\right]$$

elde edilir. Bu yüzden de

$$\begin{aligned}(N,p,q) \text{ etkisizdir} &\Leftrightarrow \left[(s_n \to s(N,p,q) \Rightarrow s_n \to s) \wedge (t_n \to s(N,c,r) \Rightarrow t_n \to s)\right] \\ &\Leftrightarrow \left[(|r_n| = o(|q_n|)) \wedge (|q_n| = o(|r_n|))\right] \\ &\Leftrightarrow |r_n| \overset{\cup}{\cap} |q_n|\end{aligned}$$

dir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3.|N,p,q| - METODU

3.1. Mutlak Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik

Bundan önceki bölümde genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliğin tanım ve teoremleri ile bazı etkisizlik teoremleri verilmişti. Bu bölümde de mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliğin tanım ve teoremleri ile bazı etkisizlik ve denklik teoremleri verilecektir ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenecek.

Tanım 3.1.1. Eğer $\lambda > 0$ için $t_n \to s$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{r_n}{\Delta r_n}\right|^{\lambda-1} \left|t_n - t_{n+1}\right|^{\lambda} < \infty$ ise (s_n)dizisine mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilir denir ve $(s_n) \in |N,p,q|_\lambda$ veya $(t_n) \in |c,0,r|_\lambda$ simgeleri ile gösterilir. (Nurcombe, 1949).

Bu metotda,

i) Her n için $q_n = 1$ alınırsa

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \cdot 1 = P_n \,,\; t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} s_v$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{r_n}{\Delta r_n}\right|^{\lambda-1} \left|t_n - t_{n+1}\right|^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{P_n}{p_n}\right|^{\lambda-1} \left|\sum_{v=0}^{n} \frac{p_{n-v}}{P_n} - \sum_{v=0}^{n+1} \frac{p_{n-v-1}}{P_{n+1}}\right|^{\lambda} < \infty$$

olduğundan $|N,p,q|_\lambda$ -metodu $|N,p|_\lambda$ -metoduna indirgenir.

ii) Her n için $p_n = 1$ alınırsa

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v = \sum_{v=0}^{n} 1 \cdot q_v = Q_n \,,\; t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} q_v s_v$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r_n}{\Delta r_n}\right|^{\lambda-1}\left|t_n-t_{n+1}\right|^{\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{Q_n}{q_n}\right|^{\lambda-1}\left|\sum_{v=0}^{n}\frac{q_v}{Q_n}-\sum_{v=0}^{n+1}\frac{q_v}{Q_{n+1}}\right|^{\lambda}<\infty$$

olduğundan $|N,p,q|_{\lambda}$ -metodu $|\overline{N},q|_{\lambda}$ -metoduna indirgenir.

iii) Eğer $\lambda=1$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|t_n-t_{n+1}\right|<\infty$$

olduğundan $|N,p,q|_{\lambda}$ -metodu $|N,p,q|$ ya indirgenir.

Tanım 3.1.2. Eğer bir mutlak toplanabilirlilik metodu, hem mutlak regüler ve hem de sadece mutlak yakınsak dizilere toplanabiliryorsa, bu metoda etkisizdir denir (Nurcombe, 1989).

3.2. IN,p,ql Toplanabilirlilik

Lemma 3.2.1. Kabul edelim ki $J_n=\sum_{v=0}^{n}\lambda_{n,v}s_v$ olsun. Bu takdirde $(s_n)\in bv$ olduğu her zaman $(J_n)\in bv$ olması için gerek ve yeter şart

i) Her n için $\sum_{v=0}^{\infty}\lambda_{n,v}$ yakınsak

ii) Her ρ için $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=\rho}^{n}\left(\lambda_{n,v}-\lambda_{n-1,v}\right)\right|\le K$ $\quad(\rho=0,1,2,\ldots)$ olacak şekilde K>0 sayısı vardır

(Mears, 1937).

Teorem 3.2.2. (p_n) , (q_n) pozitif diziler ve (r_n) de azalmayan bir dizi olmak üzere $\sum|c_n|<\infty$ ve $\left(\frac{q_n}{r_n}\right)\in bv$ olsun. Bu takdirde $(s_n)\in|N,p,q|\Rightarrow\left(\frac{s_nq_n}{r_n}\right)\in bv$ dir (Nurcombe, 1989)

Ispat: Kabul edelim ki (p_n) , (q_n) pozitif diziler, (r_n) azalmayan bir dizi, $\sum|c_n|<\infty$, $\left(\frac{q_n}{r_n}\right)\in Bv$ ve $(s_n)\in|N,p,q|$ olsun. Buna göre $(s_n)\in|N,p,q|$ olduğundan $(t_n)\in|c,0,r|$ dır. Bu yüzden de

$(s_n) \in |N, p, q| \Rightarrow \left(\frac{s_n q_n}{r_n}\right) \in Bv$ olduğunu ispat edebilmek için

$$(t_n) \in Bv \Rightarrow \left(\frac{s_n q_n}{r_n}\right) \in Bv$$

olduğunu göstermek kafidir. Bunu göstermek içinde lemma 3.2.1'i kullanmalıyız. Teorem 2.2.1'de

$$\frac{s_n q_n}{r_n} = \sum_{v=0}^{n} \frac{c_{n-v} r_v}{r_n} t_v \tag{3.2.1}$$

olduğu gösterildiğinden dolayı $J_n = \frac{s_n q_n}{r_n}$ (n=0,1,2,...) ve

$$J_{n,v} = \begin{cases} \frac{c_{n-v} r_v}{r_n} & , \ v \le n \\ 0 & , \ v > n \end{cases} \tag{3.2.2}$$

olmak üzere (3.2.1) ifadesi,

$$J_n = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{n,v} t_v \tag{3.2.3}$$

ile verilen (t_n) dizisinden (J_n) dizisine bir dönüşüm belirler. Diğer taraftan hipotezden dolayı (r_n) azalmayan olduğundan $\forall v \in \{0.1.2....\}$ için $r_v = O(r_n)$ yazılabilir. Bu yüzdende

$$\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{n,v} = \sum_{v=0}^{n} \lambda_{n,v} = \sum_{v=0}^{n} \left| c_{n-v} \frac{r_v}{r_n} \right| = O(1) \sum_{v=0}^{n} |c_{n-v}| = O(1) \sum_{v=0}^{n} |c_n|$$

elde edilir. Hipotezden dolayı $\sum_{v=0}^{\infty} |c_v| < \infty$ olduğundan $\left(\sum_{v=0}^{n} |c_v|\right)$ dizisi yakınsak olup, aynı zamanda sınırlıdır. Bu yüzden de $\left(\sum_{v=0}^{n} |\lambda_{n,v}|\right)$ dizisi sınırlıdır. $\left(\sum_{v=0}^{n} |\lambda_{n,v}|\right)$ dizisi sınırlı olduğundan dolayı her $n \in \{0.1.2....\}$ için $\left(\sum_{v=0}^{\infty} |\lambda_{n,v}|\right)$ serisi yakınsaktır.

Ayrıca $\left(\frac{q_n}{r_n}\right) \in Bv$ ve $\sum_{v=0}^{n} c_{n-v} r_v = q_n$ olduğu kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{n} (\lambda_{n,v} - \lambda_{n-1,v}) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{c_{n-v} r_v}{r_n} - \frac{c_{n-v-1} r_v}{r_{n-1}} \right) \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{q_n}{r_n} - \frac{q_{n-1}}{r_{n-1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta\left(\frac{q_n}{r_n}\right) \right| \le \infty$$

elde edilir. Her $n\in\{0,1,2,...\}$ için $\sum_{v=0}^{\infty}\left|\lambda_{n,v}\right|<\infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=p}^{n}\left(\lambda_{n,v}-\lambda_{n-1,v}\right)\right|$, (p=0) yakınsak olduğundan lemma 3.2.1'in (i) ve (ii) şartlarının sağlandığını gösterir. Bu yüzdende $(t_n)\in bv$ olduğu her zaman $(J_n)\in Bv$ dir.

Teorem 3.2.3. (p_n), (q_n) ve (G_n) pozitif diziler, (r_n) ve (r_nG_n) azalmayan ve $\sum\left|c_n\right|<\infty$ olsun. Bu takdirde

$$\left((s_n)\in |N,p,q| \Rightarrow \left(\frac{s_nq_n}{r_nG_n}\right)\in Bv\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{q_n}{r_nG_n}\right)\in Bv \text{ ve her } n \text{ için } G_n\geq K>0\right)$$

dır (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabu edelim ki (p_n), (q_n) ve (G_n) pozitif diziler, (r_n) ve (r_nG_n) azalmayan ve $\sum\left|c_n\right|<\infty$ olsun. 3.2.1 eşitliğinin her iki tarafını $1/G_n$ ile çarpılırsa,

$$\frac{q_ns_n}{r_nG_n}=\frac{1}{r_nG_n}\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_vt_v \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_v=q_n$ olduğundan

$$\frac{q_n}{r_nG_n}=\sum_{v=0}^{n}\frac{c_{n-v}r_v}{r_nG_n} \tag{3.2.7}$$

yazılabilir. $\tilde{J}_n=\frac{s_nq_n}{r_nG_n}$ (n=0,1,2,...) ve

$$\tilde{\lambda}_{n,v}=\begin{cases}\dfrac{c_{n-v}r_v}{r_nq_n}, & v\leq n\\ 0, & v>n\end{cases} \tag{3.2.8}$$

yazılabilir. (3.2.6) ifadesi,

$$\tilde{J}_n=\sum_{v=0}^{\infty}\tilde{\lambda}_{n,v}t_v \tag{3.2.9}$$

ile verilen (t_v) dizisinden $(\tilde{J}_n)$ dizisine bir dönüşüm belirler. 3.2.9 dönüşümüne teorem 3.2.2'yi uygularsak,

$$\left[(t_v)\in bv \Rightarrow (\tilde{J}_v)\in bv\right] \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\forall\ \ n\in\{0,1,2,\ldots\}\ \ \text{için}\ \sum_{v=0}^{\infty}\left|\tilde{J}_{n,v}\right|\ \ \text{yakınsak} \\ (ii)\exists K>0\ \ \ni\ \ \forall\rho\in\{0,1,2,\ldots\}\ \ \text{için}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=\rho}^{n}\left(\tilde{\lambda}_{n,v}-\tilde{\lambda}_{n-1,v}\right)\right| \end{cases}$$

yazılabilir. $\forall\ \rho\in\{0,1,2,\ldots\}$ için sağlandığına özel olarak $\rho=0$ içinde sağlanır. Buna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}\left(\lambda_{n,v}-\lambda_{n-1,v}\right)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{c_{n-v}r_v}{r_nG_n}-\frac{c_{n-v-1}r_v}{r_{n-1}G_{n-1}}\right)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{q_n}{r_nG_n}-\frac{q_{n-1}}{r_{n-1}G_{n-1}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\Delta\left(\frac{q_n}{r_nG_n}\right)\right| < K$$

elde edilir. Bu ise $\left(\dfrac{q_n}{r_nG_n}\right)\in bv$ olduğunu gösterir. Ayrıca (ii) den dolayı $\exists K>0$ öyleki $\forall$

$\rho\in\{0,1,2,\ldots\}$ için

$$\left|\sum_{v=n}^{n}\left(\tilde{\lambda}_{n,v}-\tilde{\lambda}_{n-1,v}\right)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=\rho}^{n}\left(\tilde{\lambda}_{n,v}-\tilde{\lambda}_{n-1,v}\right)\right| \le \tilde{K}$$

kalır. Özel olarak $v=\rho=n$ için de, $\exists K>0$ öyleki $\forall\ n\in\{0,1,2,\ldots\}$

$$\left|\sum_{v=n}^{n}\left(\tilde{\lambda}_{n,v}-\tilde{\lambda}_{n-1,v}\right)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=\rho}^{n}\left(\tilde{\lambda}_{n,v}-\tilde{\lambda}_{n-1,v}\right)\right| \le \tilde{K} \Rightarrow \left|\tilde{\lambda}_{n,v}-\tilde{\lambda}_{n-1,v}\right| \le \tilde{K}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{c_0r_n}{r_nG_n}-\frac{c_{-1}r_{n-1}}{r_{n-1}G_{n-1}}\right| \le \tilde{K} \Rightarrow \left|\frac{c_0}{G_n}\right| \le \tilde{K} \Rightarrow G_n \ge \frac{c_0}{\tilde{K}} > 0 \Rightarrow G_n \ge K > 0$$

kalır. Diğer taraftan (r_nG_n) azalmayan bir dizi ve $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n| < \infty$ olduğundan $\forall\ n\in\{0,1,2,\ldots\}$ için

$$\sum_{v=0}^{\infty}\left|\tilde{\lambda}_{n,v}\right| = \sum_{v=0}^{n}\left|\frac{c_{n-v}r_v}{r_nG_n}\right| = O(1)\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{c_{n-v}r_vG_v}{r_nG_nG_v}\right| = O(1)\sum_{v=0}^{n}|c_{n-v}| = O(1)\sum_{v=0}^{n}|c_v| = O(1)$$

yazılabilir. Bu yüzden de $\forall\ n\in\{0,1,2,\ldots\}$ için $\sum_{v=0}^{\infty}\left|\tilde{\lambda}_{n,v}\right|$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.2. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (r_n) azalmayan ve $\sum|c_n| < \infty$ olsun. Bu takdirde

$$\left((s_n)\in |N,p,q| \Rightarrow \left(\frac{s_nq_n}{r_n}\right)\in BV\right) \Leftrightarrow \left(\frac{q_n}{r_n}\right)\in BV$$

dır (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelim ki (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (r_n) azalmayan ve $\sum|c_n| < \infty$ olsun. Eğer her n için $G_n = 1$ seçilirse, $r_nG_n = r_n$ olduğundan (r_nG_n) dizisi azalmayandır. Bu yüzden teorem 3.2.3'den dolayı,

$$\left((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow \left(\frac{s_nq_n}{r_nG_n}\right) \in bv\right) \Leftrightarrow \left(\frac{q_n}{r_nG_n}\right) \in bv$$

$$\left((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow \left(\frac{s_nq_n}{r_n}\right) \in bv\right) \Leftrightarrow \left(\frac{q_n}{r_n}\right) \in bv$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.2. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (q_n) azalmayan ve $\sum|c_n| < \infty$ olsun. Bu takdirde $\left((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in BV\right) \Leftrightarrow r_n = O(q_n)$ dır (Nurcombe, 1989)

İspat: Kabul edelim ki (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (q_n) azalmayan ve $\sum|c_n| < \infty$ olsun. Her n için $G_n = \frac{q_n}{r_n}$ seçersek, (q_n) azalmayan (r_nG_n) azalmayandır. Ayrca (q_n) azalmayan

$$r_n - r_{n-1} = \sum_{v=0}^{n} q_{n-v}p_v - \sum_{v=0}^{n-1} q_{n-v-1}p_v = \sum_{v=0}^{n} q_{n-v}p_v - \sum_{v=0}^{n} q_{n-v-1}p_v + q_{-1}p_n = \sum_{v=0}^{n} (q_{n-v} - q_{n-v-1})p_v > 0$$

yazılabilir. Bu yüzden de (r_n) azalmayandır. Dolayısıyla (p_n), (q_n) ve (G_n) pozitif diziler, (r_n) ve (r_nG_n) azalmayan ve $\sum|c_n| < \infty$ olduğundan teorem 3.2.3'den dolayı

$$\left((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow \left(\frac{s_nq_n}{r_nG_n}\right) \in bv\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{q_n}{r_nG_n}\right) \in bv \text{ ve } \exists K > 0 \text{ öyleki } \forall n \text{ için } G_n \geq K > 0\right)$$

yazılabilir. $G_n = \frac{q_n}{r_n}$ olduğunu kullanarak,

$$\left((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in bv\right) \Leftrightarrow \left((1) \in bv \text{ ve } \exists K > 0 \text{ öyleki } \forall n \text{ için } \frac{q_n}{r_n} \geq K > 0\right)$$

$$\left((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in bv\right) \Leftrightarrow \left(\exists K > 0 \text{ öyleki } \forall n \text{ için } r_n \leq \frac{q_n}{K}\right)$$

$$\left((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in bv\right) \Leftrightarrow r_n = O(q_n)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (q_n) azalmayan, $\sum|c_n| < \infty$ olsun ya $(N,\Delta q)$ yada $(N,\Delta r)$ regüler olsun. Bu takdirde $((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in BV) \Leftrightarrow (P_n)$ yakınsaktır (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelimki (P_n) yakınsak olsun. Bu takdirde (P_n) sınırlıdır. Buyüzdende $\exists K>0$ öyleki her n için $0 < P_n \le K$ kalır. Dolayısıyla $\forall n \in IN \cup \{0\}$ için

$$r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v \le \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} . \max_v q_v = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_n = q_n P_n \le K q_n \Rightarrow r_n = O(q_n)$$

elde edilir.

Tersine olarak $r_n = O(q_n)$ olsun. Bu takdirde ya $(N,\Delta q)$ yada $(N,\Delta r)$ regüler olduğu durumda (P_n) yakınsak olduğu gösterildi. Dolayısıyla "$r_n = O(q_n) \Leftrightarrow (P_n)$ yakınsaktır" önermesi yazılabilir. Bu yüzdende sonuç 3.2.2.'den dolayı,

"$((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in bv) \Leftrightarrow r_n = O(q_n) \Leftrightarrow (P_n)$ yakınsak"

veya

"$((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in Bv) \Leftrightarrow (P_n)$ yakınsak"

önermesi yazılabilir.

Teorem 3.2.4. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (p_n) artmayan, (q_n) azalmayan, $\sum|c_n| < \infty$ olsun. Bu takdirde "$|N,p,q|$ etkisizdir ancak ve ancak $r_n = O(q_n)$" dir (Nurcombe, 1989).

İspat: (p_n) pozitif ve artmayan, (q_n) pozitif ve azalmayan diziler ve $\sum|c_n| < \infty$ olsun. Bu takdirde $\forall \; n \in IN \cup \{0\}$ için

$$r_n - r_{n-1} = \sum_{v=0}^{n} q_{n-v} p_v - \sum_{v=0}^{n-1} q_{n-v-1} p_v + q_{-1} p_n = \sum_{v=0}^{n} q_{n-v} p_v - \sum_{v=0}^{n} q_{n-v-1} p_v = \sum_{v=0}^{n} \Delta q_{n-v} p_v \ge 0 \quad (3.2.10)$$

olduğundan (r_n) azalmayandır. Sonuç 3.2.2'de

$$((s_n) \in |N,p,q| \Rightarrow (s_n) \in Bv) \Leftrightarrow r_n = O(q_n) \quad (3.2.11)$$

olduğu gösterildi. Şimdi $t_n = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda_{n,v} s_v$ ile verilen dönüşüme karşılık gelen

$$\lambda_{n,v}=\begin{cases}\dfrac{p_{n-v}q_v}{r_n} & , \ v\le n\\ 0 & , \ v>n\end{cases}$$

olarak tarif edilen $\lambda=(\lambda_{n,v})$ matrisinin lemma 3.2.1'in (i) ve (ii) şatlarını sağladığını gösterelim.

$$\text{i)}\sum_{v=0}^{\infty}\lambda_{n,v}=\sum_{v=0}^{n}\lambda_{n,v}=\sum_{v=0}^{n}\frac{p_{n-v}q_v}{r_n}=\frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n}p_{n-v}q_v=\frac{1}{r_n}r_n=1$$

elde edilir.

ii) $\rho=0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}\left(\lambda_{n,v}-\lambda_{n-1,v}\right)\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{p_{n-v}q_v}{r_n}-\frac{p_{n-v-1}q_v}{r_{n-1}}\right)\right|$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}\frac{p_{n-v}q_v}{r_n}-\sum_{v=0}^{n}\frac{p_{n-v-1}q_v}{r_{n-1}}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r_n}{r_n}-\frac{r_{n-1}}{r_{n-1}}\right|<K$$

olacak şekilde K>0 sayısı vardır. Buna göre lemma 3.2.1'in (i) ve (ii) şatları sağladığından

$$(s_n)\in Bv\Rightarrow(s_n)\in |N,p,q| \qquad (3.2.12)$$

yazılabilir. Buna göre 3.2.11 ve 3.2.12 ifadelerinden

$$\left((s_n)\in Bv\Rightarrow(s_n)\in|N,p,q|\wedge(s_n)\in|N,p,q|\Rightarrow(s_n)\in Bv\right)\Leftrightarrow r_n=O(q_n)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (p_n) artmayan, (q_n) azalmayan, $\sum|c_n|<\infty$ olsun. Eğer $(N,\Delta q)$ veya $(N,\Delta r)$ regüler ise, bu takdirde "$|N,p,q|$ etkisizdir ancak ve ancak (P_n) yakınsaktır." (Nurcombe, 1989).

İspat: (p_n) pozitif ve artmayan, (q_n) pozitif ve azalmayan diziler ve $\sum|c_n|<\infty$ olsun. Bu takdirde teorem 3.2.4'den dolayı

"$|N,p,q|$-metodu etkisizdir ancak ve ancak $r_n=O(q_n)$" (3.2.13)

yazılabilir. Eğer ya $(N,\Delta q)$ yada $(N,\Delta r)$ regüler ise "$r_n=O(q_n)\Leftrightarrow(P_n)$ yakınsaktır" önermesi yazılabileceğinden 3.2.13' dan dolayı, eğer ya $(N,\Delta q)$ yada $(N,\Delta r)$ regüler ise

"$|N,p,q|$-metodu etkisizdir ancak ve ancak (P_n) yakınsaktır"

yazılabilir.

Sonuç 3.2.4. $(p_n)\in\mathcal{M}$ ve (q_n) pozitif ve azalmayan olsun. Bu takdirde $|N,p,q|$-metodu etkisizdir ancak ve ancak $r_n = O(q_n)$ dir (Nurcombe, 1989).

İspat: $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu takdirde $(p_n) \in \mathcal{M}$'in tanımından dolayı (p_r), artmayan ve sınırlıdır. (q_n) pozitif ve azalmayan dizi ve $\sum |c_r| < \infty$ olduğundan teorem 3.2.4'ün şartları sağlanır. Bu yüzdende "$|N,p,q|$-metodu etkisizdir ancak ve ancak $r_n = O(q_n)$" elde edilir.

Şimdi de $|N,p,q|$-toplanabilme metodunun bir genellemesi olan $|N,p,q|_\lambda$ toplanabilirlilik metodu ile ilgili teoremleri ifade ve ispat edelim.

3.3. $|N,p,q|_\lambda$ Toplanabilirlilik

Teorem 3.3.1. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (r_n) ve (f_n) de, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta r_n}{r_n f_{n+1}^{\lambda/\lambda-1}}$ yakınsak olacak şekilde artan pozitif iki dizi olsun. Eğer $\sum |c_n| < \infty$ ve $\left(\frac{q_n}{r_n f_n}\right) \in Bv$ ise, bu takdirde

$$(s_n) \in |N,p,q|_\lambda \Rightarrow \left(\frac{s_n q_n}{r_n f_n}\right) \in Bv$$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: (p_n) ve (q_n) pozitif diziler, (r_n) ve (f_n) de, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta r_n}{r_n f_{n+1}^{\lambda/\lambda-1}}$ yakınsak, olacak şekilde iki pozitif artan dizi, $\sum |c_n| < \infty$ ve $\left(\frac{q_n}{r_n f_n}\right) \in Bv$ ve $(s_n) \in |N,p,q|_\lambda$ olsun. (r_n) ve (f_n) monoton artan pozitif diziler olduğundan her $n \in \{0,1,2,...\}$ için

$$r_{n-1} \le r_n \text{ ve } f_{n-1} \le f_n \tag{3.3.1}$$

yazılabilir. (3.3.1) eşitliğinden de

$$r_{n-1} f_{n-1} \le r_n f_{n-1} \le r_n f_n \tag{3.3.2}$$

yazılabilir. Bu yüzden de Ayrıca (r_n) ve (f_n) artan olduğundan her $0 \le v \le n$ için $r_v \le r_n$ ve $f_v \le f_n$ yazılabilir. Bu yüzden de her $n \in \{0,1,2,...\}$ için

$$r_v = O(r_n) \text{ ve } f_v = O(f_n) \tag{3.3.3}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta\left(\frac{q_n s_n}{r_n f_n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{q_n s_n}{r_n f_n} - \frac{q_{n-1} s_{n-1}}{r_{n-1} f_{n-1}}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\frac{r_v t_v}{r_n t_n}-\sum_{v=0}^{n-1}c_{n-v}\frac{r_{v-1}t_{v-1}}{r_{n-1}t_{n-1}}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{r_n t_n}\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_v t_v-\frac{1}{r_{n-1}t_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}c_{n-v}r_{v-1}t_{v-1}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\frac{r_v t_v}{r_n t_n}+\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\frac{r_v t_{v-1}}{r_n t_n}-\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\frac{r_v t_{v-1}}{r_n t_n}-\sum_{v=0}^{n-1}c_{n-v}\frac{r_{v-1}t_{v-1}}{r_{n-1}t_{n-1}}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{v=0}^{n}\frac{r_v c_{n-v}}{r_n t_n}\Delta t_v+\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}\left(\frac{r_v}{r_n f_n}-\frac{r_{v-1}}{r_{n-1}f_{n-1}}\right)t_{v-1}\right|$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|\frac{r_v c_{n-v}}{r_n t_n}\right|\left|\Delta t_v\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\left(\frac{r_v}{r_n f_n}-\frac{r_{v-1}}{r_{n-1}f_{n-1}}\right)t_{v-1}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\right|\frac{\left|\Delta t_v\right|}{f_v}\frac{f_v}{f_n}\frac{r_v}{r_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\right|\left|\frac{r_v r_{n-1}f_{n-1}-r_n f_n r_{v-1}}{r_n f_n r_{n-1}f_{n-1}}\right|\left|t_{v-1}\right|$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\right|\frac{\left|\Delta t_v\right|}{f_v}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\right|\frac{r_{n-1}f_{n-1}\left|r_v-r_{v-1}\right|}{r_n f_n r_{n-1}f_{n-1}}\left|t_{v-1}\right|$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\right|\frac{\left|\Delta t_v\right|}{f_v}+O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left|c_{n-v}\right|\frac{\left|\Delta r_v\right|}{r_{v-1}f_v}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta t_v\right|}{f_v}+O(1)\sum_{v=0}^{n}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_v\right|\frac{\left|\Delta r_{n-v}\right|}{r_{n-v-1}f_{n-v}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta t_v\right|}{f_v}+O(1)\sum_{v=0}^{n}\left|c_v\right|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta r_{n-v}\right|}{r_{n-v-1}f_{n-v}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta t_v\right|}{f_v}+O(1)\sum_{v=0}^{\infty}\left|c_v\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta\left(\frac{q_n s_n}{r_n f_n}\right)\right|=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta t_v\right|}{f_v}+O(1) \tag{3.3.4}$$

elde edilir. $(s_n)\in\left|N,p,q\right|_{\lambda}$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta r_n}{r_n f_{n+1}^{\lambda/\lambda-1}}$ yakınsak olduğundan Hölder eşitsizliğini kullanarak ve $p=\lambda$, $q=\lambda/\lambda-1$ seçersek,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Delta t_n\right|}{f_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1/\lambda}\left|\frac{\Delta r_{n-1}}{r_{n-1}}\right|^{\lambda-1/\lambda}\frac{\left|\Delta t_n\right|}{f_n}$$

$$\le \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1/\lambda}|\Delta t_n|\right)^{\lambda}\right\}^{1/\lambda}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{\Delta r_{n-1}}{r_{n-1}}\right|^{\lambda-1/\lambda}\frac{1}{f_n}\right)^{\lambda/\lambda-1}\right\}^{\lambda-1/\lambda}$$

$$=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|\Delta t_n|^{\lambda}\right\}^{1/\lambda}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta r_{n-1}}{r_{n-1}f_n^{\lambda/\lambda-1}}\right\}^{\lambda-1/\lambda}<\infty \qquad (3.3.5)$$

elde edilir. Bu yüzden de 3.3.5 , 3.3.4'de yerine konulursa, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta\left(\frac{q_n s_n}{r_n f_n}\right)\right|<\infty$ yazılabilir. Bu yüzden de $\left(\frac{q_n s_n}{r_n f_n}\right)\in Bv$ elde edilir.

Sonuç 3.3.1. (p_n) pozitif dizi ve $\sum|c_n|<\infty$ olsun. Bu takdirde $\lambda\ge1$ için $(s_n)\in|N,p,q|_{\lambda}\Rightarrow\left(\frac{s_n}{P_n^{\lambda}}\right)\in Bv$ dir (Nurcombe, 1989).

Ispat: Kabul edelim ki (p_n) pozitif dizi , $\sum|c_n|<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_n^{\lambda+1}}$ yakınsak olacak şekilde pozitif dizi olsun. Eğer her $n\in\{0,1,2,...\}$ için $q_n=1$ ve $f_n=P_n^{\lambda-1}$ seçilirse, $r_n=P_n$ her $n\in\{0,1,2,...\}$ için

$$\frac{s_n q_n}{r_n f_n}=\frac{s_n.1}{P_n P_n^{\lambda-1}}=\frac{s_n}{P_n^{\lambda}} \qquad (3.3.6)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta r_n}{r_n f_{n+1}^{\lambda/\lambda-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{P_n\left(P_{n+1}^{\lambda-1}\right)^{\lambda/\lambda-1}}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{P_n^{\lambda+1}} \qquad (3.3.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan (p_n) , pozitif dizi olduğundan (P_n) dizisi pozitif azalan bir dizidir. Bu yüzden de her $n\in\{0,1,2,...\}$ ve $\lambda\ge1$ için $\frac{1}{P_n^{\lambda}}\le\frac{1}{P_{n-1}^{\lambda}}$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{s_n}{r_n f_n}-\frac{s_{n-1}}{r_{n-1}f_{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{P_n^{\lambda}}-\frac{1}{P_{n-1}^{\lambda}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{P_{n-1}^{\lambda}}-\frac{1}{P_n^{\lambda}}\right) \qquad (3.3.8)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{P_{n-1}^{\lambda}}-\frac{1}{P_n^{\lambda}}\right)$ serisinin kısmi toplamlar dizisine (s_n) dersek,

$$0 \le s_n = \sum_{v=1}^{n}\left(\frac{1}{P_{v-1}^{\lambda}} - \frac{1}{P_v^{\lambda}}\right) = \left(\frac{1}{P_0^{\lambda}} - \frac{1}{P_n^{\lambda}}\right) \le \frac{1}{P_0^{\lambda}}$$

olduğundan (s_n) dizisi üstten sınırlıdır. Pozitif terimli bir serinin kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlı olduğu zaman yakınsak olacağından

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{P_n^{\lambda}} - \frac{1}{P_{n-1}^{\lambda}}\right)$$

serisi yakınsaktır. 3.3.8 'den dolayı da $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{P_n^{\lambda}} - \frac{1}{P_{n-1}^{\lambda}}\right|$ serisi yakınsaktır. Bu yüzden de $\left(\frac{q_n}{r_n f_n}\right) \in Bv$ dır. Dolayısıyla teorem 3.3.1'in bütün hipotezleri sağlanır. Bu yüzden de $\lambda \ge 1$ için $(s_n) \in |N, p, q|_{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{s_n}{P_n^{\lambda}}\right) \in Bv$ yazılabilir.

Sonuç 3.3.2: Her n için $q_n > 0$ ve $\sum |c_n| < \infty$ olsun. Bu takdirde $(s_n) \in |\overline{N}, q|_{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{s_n q_n}{Q_n^{\lambda}}\right) \in Bv$ dir (Nurcombe, 1989).

İspat Kabul edelim ki (q_n), $\left(\frac{q_n}{Q_n^{\lambda}}\right) \in Bv$ olacak şekilde pozitif bir dizisine $\sum |c_n| < \infty$ olsun. Eğer her $n \in N \cup \{0\}$ için $p_n = 1$ ve $f_{n+1} = Q_n^{\lambda-1}$ seçilirse, bu takdir de her $n \in N \cup \{0\}$ için $r_n = Q_n$ olacağından dolayı,

$$\frac{s_n q_n}{r_n f_n} = \frac{s_n \cdot q_n}{Q_n Q_n^{\lambda-1}} = \frac{s_n q_n}{Q_n^{\lambda}} \qquad (3.3.9)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta r_n}{r_n f_{n+1}^{\lambda/\lambda-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{Q_n\left(Q_{n+1}^{\lambda-1}\right)^{\lambda/\lambda-1}} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{Q_n^{\lambda+1}} \qquad (3.3.10)$$

elde edilir. Diğer taraftan (q_n), pozitif dizi olduğundan (Q_n) pozitif artan bir dizidir. Bu yüzden de her yüzden de $\left(\frac{q_n}{r_n f_n}\right) \in Bv$ dir. Dolayısıyla teorem 3.3.1'in bütün şartları sağlandığından dolayı,

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\lambda \ge 1$ için $\frac{1}{Q_n^{\lambda}} \le \frac{1}{Q_{n-1}^{\lambda}}$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{q_n}{r_n f_n}-\frac{q_{n-1}}{r_{n-1}f_{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{q_n}{Q_nQ_n^{\lambda-1}}-\frac{q_{n-1}}{Q_{n-1}Q_{n-1}^{\lambda-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{q_n}{Q_n^{\lambda}}-\frac{q_{n-1}}{Q_{n-1}^{\lambda}}\right|$$

3.3.11 yazılabilir. 3.3.11 eşitliğinin sağındaki seri yakınsak olduğundan solundaki seride yakınsaktır. Bu $(s_n)\in|\bar{N},q|_{\lambda}\Rightarrow\left(\frac{s_nq_n}{Q_n^{\lambda}}\right)\in Bv$

elde edilir.

Teorem 3.3.2: (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $\sum|c_n|<\infty$ olsun. Bu takdirde

$$\Delta\left(\frac{s_nq_n}{r_n^{\lambda}}\right)=-\Delta\left(\frac{1}{r_n^{\lambda}}\right)\sum_{v=1}^{n-1}(\Delta t_v)\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k+\left(\frac{1}{r_n^{\lambda}}\right)\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}$$
$$-\left(\frac{1}{r_n^{\lambda}}\right)\sum_{v=1}^{n-1}(\Delta t_v)\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}\Delta r_k+t_{n-1}\Delta\left(\frac{q_n}{r_n^{\lambda}}\right)+\frac{(\Delta t_n)(\Delta q_n)}{r_n^{\lambda}} \tag{3.3.12}$$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: $s_nq_n=\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_vt_v$ $(n=0,1,2,\ldots)$eşitliğinin sağındaki toplama Abel kısmı toplama formülünü

uygulayarak,

$$s_nq_n=-\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}r_k+t_n\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_v \tag{3.3.13}$$

yazılabilir. 3.3.13 eşitliği her n için geçerli olduğundan özel olarak n-1 için de geçerlidir. Buna göre

$$s_{n-1}q_{n-1}=-\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k+t_{n-1}\sum_{v=0}^{n-1}c_{n-v-1}r_v \tag{3.3.14}$$

elde edilir. Diğer taraftan her n için $q_n=\sum_{v=0}^{n}c_{n-v}r_v$ olduğundan bu ifade 3.3.13 ve 3.3.14' de yerine konulursa

$$s_nq_n=-\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}r_k+t_nq_n \tag{3.3.15}$$

ve

$$s_{n-1}q_{n-1}=-\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k+t_{n-1}q_{n-1} \tag{3.3.16}$$

elde edilir. 3.3.15 ve 3.3.16 eşitlikleri bazı elementer işlemler yaparak,

$$\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}r_k = t_nq_n - s_nq_n \tag{3.3.17}$$

ve

$$\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k = t_{n-1}q_{n-1} - s_{n-1}q_{n-1} \tag{3.3.18}$$

elde edilir. 3.3.17 ve 3.3.18 eşitlikleri 3.3.12 nin sağındaki toplamda yerine konularak,

$$-\Delta\left(\frac{1}{r_n^\lambda}\right)\sum_{v=1}^{n-1}(\Delta t_v)\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k + \left(\frac{1}{r_n^\lambda}\right)\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v c_{n-v}r_{v-1} - \left(\frac{1}{r_n^\lambda}\right)\sum_{v=1}^{n-1}(\Delta t_v)\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}\Delta r_k$$

$$+t_{n-1}\Delta\left(\frac{q_n}{r_n^\lambda}\right) + \frac{(\Delta t_n)(\Delta q_n)}{r_n^\lambda}$$

$$= -\Delta\left(\frac{1}{r_n^\lambda}\right)(t_{n-1}q_{n-1} - s_{n-1}q_{n-1}) + \frac{1}{r_n^\lambda}\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v c_{n-v}r_{v-1} - \frac{1}{r_n^\lambda}(t_nq_n - s_nq_n)$$

$$+\frac{1}{r_n^\lambda}\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}r_{k-1} + \frac{t_{n-1}q_n}{r_n^\lambda} - \frac{t_{n-1}q_{n-1}}{r_{n-1}^\lambda} + \frac{t_nq_n}{r_n^\lambda} - \frac{t_{n-1}q_n}{r_n^\lambda} - \frac{t_nq_{n-1}}{r_n^\lambda} + \frac{t_{n-1}q_{n-1}}{r_n^\lambda}$$

$$= \frac{t_{n-1}q_{n-1}}{r_{n-1}^\lambda} - \frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_{n-1}^\lambda} - \frac{t_{n-1}q_{n-1}}{r_n^\lambda} + \frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_n^\lambda} - \frac{t_nq_n}{r_n^\lambda} + \frac{s_nq_n}{r_n^\lambda} - \frac{t_{n-1}q_{n-1}}{r_{n-1}^\lambda} + \frac{t_nq_n}{r_n^\lambda}$$

$$-\frac{t_nq_{n-1}}{r_n^\lambda} + \frac{t_{n-1}q_{n-1}}{r_n^\lambda} + \frac{1}{r_n^\lambda}\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\left(c_{n-v}r_{v-1} + \sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}r_{k-1}\right)$$

$$= \frac{s_nq_n}{r_n^\lambda} - \frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_{n-1}^\lambda} + \frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_n^\lambda} - \frac{t_nq_{n-1}}{r_n^\lambda} + \frac{1}{r_n^\lambda}\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v}c_{n-k}r_{k-1} \tag{3.3.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan her n için

$$\sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v}c_{n-k}r_{k-1} = \sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\left(\sum_{k=1}^{v}c_{n-k}r_{k-1} + c_nr_{-1}\right) = \sum_{v=1}^{n}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k$$

$$= \sum_{v=1}^{n}(t_v - t_{v-1})\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k = \sum_{v=1}^{n}t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k - \sum_{v=1}^{n}t_{v-1}\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k$$

$$= \sum_{v=1}^{n}t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k - \sum_{v=0}^{n-1}t_v\sum_{k=0}^{v}c_{n-k-1}r_k + t_0\sum_{k=0}^{-1}c_{n-k-1}r_k$$

$$= \sum_{v=0}^{n}t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k - \sum_{v=0}^{n-1}t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k - \sum_{v=0}^{n-1}t_vc_{n-v-1}r_v$$

$$= t_n\sum_{k=0}^{n-1}c_{n-k-1}r_k + \sum_{v=0}^{n-1}t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k - \sum_{v=0}^{n-1}t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k - \sum_{v=0}^{n-1}t_vc_{n-v-1}r_v$$

$$= t_nq_{n-1} - s_nq_{n-1} \tag{3.3.20}$$

olduğundan 3.3.20 ifadesi 3.3.19' de yerine kon ularak,

$$\frac{s_nq_n}{r_n^\lambda}-\frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_{n-1}^\lambda}+\frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_n^\lambda}-\frac{t_nq_{n-1}}{r_n^\lambda}+\frac{t_nq_{n-1}}{r_n^\lambda}-\frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_n^\lambda}=\frac{s_nq_n}{r_n^\lambda}-\frac{s_{n-1}q_{n-1}}{r_{n-1}^\lambda}=\Delta\left(\frac{s_nq_n}{r_n^\lambda}\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.3. (p_n) ve (q_n), $\max\limits_{0\le v\le n}\Delta r_k \le K\Delta r_n$, $\left(\frac{q_n}{r_n^\lambda}\right)\in|c,0,r|_\lambda$ ve $\sum|c_n|<\infty$ olacak şekilde pozitif diziler olsun. Bu takdirde $(s_n)\in|N,p,q|_\lambda \Rightarrow \left(\frac{s_nq_n}{r_n^\lambda}\right)\in|c,0,r|_\lambda$ dir (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelim ki $j_1=-\Delta\left(\frac{1}{r_n^\lambda}\right)\sum\limits_{v=1}^{n-1}(\Delta t_v)\sum\limits_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k$, $j_2=\left(\frac{1}{r_n^\lambda}\right)\sum\limits_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}$,

$j_3=-\left(\frac{1}{r_n^\lambda}\right)\sum\limits_{v=1}^{n-1}(\Delta t_v)\sum\limits_{k=0}^{v-1}c_{n-k}\Delta r_k$, $j_4=t_{n-1}\Delta\left(\frac{q_n}{r_n^\lambda}\right)$, $j_5=\frac{(\Delta t_n)(\Delta q_n)}{r_n^\lambda}$ olsun. Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}\left|\Delta\left(\frac{q_ns_n}{r_n^\lambda}\right)\right|^\lambda\right\}^{1/\lambda}\le\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_1|^\lambda\right\}^{1/\lambda}+\ldots+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_5|^\lambda\right\}^{1/\lambda}$$

yazılabilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}\left|\Delta\left(\frac{q_ns_n}{r_n^\lambda}\right)\right|^\lambda<\infty$$

olduğunu ispat etmek için her $v\in\{1,2,3,4,5\}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|J_v|^\lambda<\infty$$

olduğu ispat edilmelidr. Şimdi bunu v'nin herbir durumu için gösterelim.

(i)Teoremin hipotezinden $\max\limits_{0\le v\le n}\Delta r_v\le K\Delta r_n$ olduğundan (r_n) artan bir dizidir. $\sum|c_n|<\infty$ olduğundan α uygun bir pozitif sabit sayı olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_1|^\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-1/\lambda}|j_1|\right)^\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-1/\lambda}\left|-\Delta\left(r_n^{-\lambda}\right)\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k-1}r_k\right|\right)^\lambda$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-1/\lambda}\left|\Delta\left(r_n^{-\lambda}\right)\right|\left|\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v \sum_{k=0}^{v-1} c_{n-k-1} r_k\right|\right)^{\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\left|\frac{1}{r_n^{\lambda}} - \frac{1}{r_{n-1}^{\lambda-1}}\right|\left|\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v \sum_{k=0}^{v-1} c_{n-k-1} r_k\right|\right)^{\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\left(\frac{1}{r_{n-1}^{\lambda}} - \frac{1}{r_n^{\lambda-1}}\right)\left|\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v \sum_{k=0}^{v-1} c_{n-k-1} r_k\right|\right)^{\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\left(\frac{r_n^{\lambda} - r_{n-1}^{\lambda}}{r_n^{\lambda} r_{n-1}^{\lambda}}\right)\left|\sum_{v=1}^{n-1}\Delta t_v \sum_{k=0}^{v-1} c_{n-k-1} r_k\right|\right)^{\lambda}$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\left(\frac{r_n^{\lambda} - r_{n-1}^{\lambda}}{r_n^{\lambda} r_{n-1}^{\lambda}}\right)\sum_{v=1}^{n-1}\left|\Delta t_v\right|\sum_{k=0}^{v-1}\left|c_{n-k-1}\right| r_k\right)^{\lambda}$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\left(\frac{r_n^{\lambda} - r_n^{\lambda-1}}{r_n^{\lambda} r_{n-1}^{\lambda-1}}\right)\sum_{v=1}^{n-1} r_{v-1}\left|\Delta t_v\right|\sum_{k=0}^{v-1}\left|c_{n-k-1}\right|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\left(\frac{r_n^{\lambda} - r_n^{\lambda-1}}{r_n^{\lambda} r_{n-1}^{\lambda-1}}\right)\sum_{v=1}^{n-1} r_{v-1}^{\frac{\alpha+1}{\lambda}+1-\frac{\alpha+1}{\lambda}}\left|\Delta t_v\right|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\frac{\Delta\left(r_n^{\lambda}\right)}{r_n^{\lambda} r_{n-1}^{\lambda-1}}\sum_{v=1}^{n-1} r_{v-1}^{\frac{\alpha+1}{\lambda}} r_{v-1}^{1-\frac{\alpha+1}{\lambda}}\left|\Delta t_v\right|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\frac{\Delta\left(r_n^{\lambda}\right)}{\left(r_{n-1} r_n\right)^{\lambda}} r_{n-1}^{\alpha+1/\lambda}\sum_{v=1}^{n-1} r_{v-1}^{1-\frac{\alpha+1}{\lambda}}\left|\Delta t_v\right|\right)^{\lambda} \qquad (3.3.21)$$

yazılabilir. Diğer taraftan hipotezden dolayı $\max\limits_{0\le v\le n} \Delta r_v \le K\Delta r_n$ olduğundan $r_1 \le K\Delta r_{n-1}$ yazılabilir. Buna göre (r_n) azalandır. $\lambda>1$ olduğundan $1-\dfrac{1}{\lambda}>0$ yazılabilir. Bu yüzdende

$$r_1^{1-\frac{1}{\lambda}} \le K\Delta r_{n-1}^{1-\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \left(\Delta r_{n-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \le K \qquad (3.3.22)$$

elde edilir. Buna göre 3.3.22 ifadesini 3.3.21' de yerine koyarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-1/\lambda}\left|j_1\right|\right)^{\lambda} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-1/\lambda}\frac{\Delta\left(r_n^{\lambda}\right)}{\left(r_{n-1} r_n\right)^{\lambda}} r_{n-1}^{\alpha+1/\lambda}\sum_{v=1}^{n-1} r_{v-1}^{1-\frac{\alpha+1}{\lambda}}\left|\Delta t_v\right|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta(r_n)^{\lambda}}{r_n^{\lambda}} r_{n-1}^{1-\frac{1}{\lambda}-\lambda+\frac{\alpha+1}{\lambda}} \sum_{v=1}^{n-1} r_{v-1}^{1-\frac{\alpha+1}{\lambda}} |\Delta t_v|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta(r_n)^{\lambda}}{r_n^{\lambda}} r_{n-1}^{1-\frac{1}{\lambda}-\lambda+\frac{\alpha+1}{\lambda}}\right)^{\lambda}\left(\sum_{v=1}^{n-1} r_{v-1}^{1-\frac{\alpha+1}{\lambda}} |\Delta t_v|\right)^{\lambda} \tag{3.3.23}$$

elde edilir. 3.3.23 eşitliğinin sağındaki ifadeye Hölder eşitsizliğini uygulanarak,

$$\sum_{v=1}^{\infty} r_{v-1}^{1-\frac{\alpha+1}{\lambda}} |\Delta t_v| = \sum_{v=1}^{\infty}\left|\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right|^{\lambda-1} |\Delta t_v|^{\lambda} r_{v-1}^{-\alpha/\lambda}(\Delta r_{v-1})^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\leq \left\{\sum_{v=1}^{\infty}\left|\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right|^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\lambda} |\Delta t_v|^{\lambda}\right\}^{1/\lambda}\left\{\sum_{v=1}^{\infty} r_{v-1}^{-\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)} |\Delta r_{v-1}|^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)}\right\}^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \left\{\sum_{v=1}^{\infty}\left|\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right|^{\lambda-1} |\Delta t_v|^{\lambda}\right\}^{1/\lambda}\left\{\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\Delta r_{v-1}}{r_{v-1}^{\alpha/\lambda-1}}\right\}^{1-\frac{1}{\lambda}} \tag{3.3.24}$$

elde edilir.

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\Delta r_{v-1}}{r_{v-1}^{\alpha/\lambda-1}} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta(r_n^{\lambda})}{r_n^{\lambda} r_{n-1}^{\lambda-\frac{\alpha}{\lambda}-1}}\right)^{\lambda} \tag{3.3.25}$$

serileri yakınsak α, $\lambda-\dfrac{\alpha}{\lambda}>1$ ve $\dfrac{\alpha}{\lambda-1}>1$ veya $\lambda-1<\alpha<\lambda(\lambda-1)$ şartını sağlayan pozitif sabit olsun. Bu yüzden $\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\Delta r_{v-1}}{r_{v-1}^{\alpha/\lambda-1}}$ yakınsak ve $(s_n)\in|N,p,q|_{\lambda}$ olduğundan 3.3.24 eşitliğinden dolayı

$$\sum_{v=1}^{\infty} r_{v-1}^{1-\frac{\alpha+1}{\lambda}} |\Delta t_v| < \infty \tag{3.3.26}$$

yazılabilir. Bu yüzdende, 3.3.25 ve 3.3.26' yi kullanarak, 3.3.23 eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-1/\lambda} |j_1|\right)^{\lambda} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta(r_n^{\lambda})}{(r_n)^{\lambda}} r_{n-1}^{1-\lambda+\frac{\alpha}{\lambda}}\right)^{\lambda} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-1/\lambda} |j_1|\right)^{\lambda} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1} |j_1|^{\lambda}\right) < \infty \tag{3.3.27}$$

elde edilir.

(ii) $\sum |c_n|$ serisi yakınsak olduğundan dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_2|^{\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}\left|\frac{1}{r_n^{\lambda}}\right|^{\lambda}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}r_n^{-\lambda^2}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}r_n^{-\lambda^2}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda-1}$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}r_n^{-\lambda^2}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|\left|\sum_{v=1}^{n}|\Delta t_v||c_{n-v}||r_{v-1}|\right|^{\lambda-1}$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}r_n^{-\lambda^2}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda}\left\{\max_{1\le v\le n}(r_{v-1}|\Delta t_v|)\sum_{v=1}^{n}|c_{n-v}|\right\}^{\lambda-1} \qquad (3.3.28)$$

yazılabilir. $(s_n)\in|N,p,q|_{\lambda}$ olduğundan her n için

$$\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}|\Delta t_n|^{\lambda}\le K \qquad (3.3.29)$$

olacak şekilde K>0 vardır. Bu yüzden de 3.3.29 eşitliği kullanırak,

$$r_{n-1}|\Delta t_n|\le K^{1/\lambda}r_{n-1}^{\frac{1}{\lambda}}\Delta r_{n-1}^{1-1/\lambda} \qquad (3.3.30)$$

elde edilir. Buna göre 3.3.30 den her v=1,2,...,n için

$$r_{v-1}|\Delta t_v|\le K r_{n-1}^{1/\lambda}\Delta r_{n-1}^{\lambda-1/\lambda}$$

olduğundan teoremin hipotezindeki $\max_{0\le v\le n}\Delta r_v\le K\Delta r_n$ olduğu kullanılarak

$$\max_{1\le v\le n}(r_{v-1}|\Delta t_v|)\le K^{1/\lambda}\max_{0\le v\le n}r_{v-1}^{1/\lambda}\Delta r_{v-1}^{\lambda-1/\lambda}\le K^{1/\lambda}r_{n-1}^{1/\lambda}\max_{0\le v\le n}\Delta r_{v-1}^{\lambda-1/\lambda}\le K^{1/\lambda}r_{n-1}^{1/\lambda}\Delta r_{n-1}^{\lambda-1/\lambda} \qquad (3.3.31)$$

yazılabilir. 3.3.22, 3.3.28 ve 3.3.31 ifadeleri kullanılarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_2|^{\lambda}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}r_n^{-\lambda^2}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda}\left(K^{1/\lambda}r_n^{\frac{1}{\lambda}}(\Delta r_{n-1})^{\frac{(\lambda-1)}{\lambda}}\right)^{\lambda-1}\left(\sum_{v=1}^{n}|c_{n-v}|\right)^{\lambda-1}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}r_n^{-\lambda^2}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda}r_n^{1-\frac{1}{\lambda}}(\Delta r_{n-1})^{\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda}}\left(\sum_{v=1}^{n}|c_{n-v}|\right)^{\lambda-1}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}r_n^{-\lambda^2}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda}r_n^{1-\frac{1}{\lambda}}(\Delta r_{n-1})^{\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda}}\left(\sum_{v=1}^{n}|c_{n-v}|\right)^{\lambda-1} \qquad (3.3.32)$$

yazılabilir. Diğer tarafatan (r_n) monoton artan olduğundan $\lambda>1$ için $r_{n-1}\le r_n$ ise $r_n^{-\lambda^2}\le r_{n-1}^{-\lambda^2}$ yazılabilir. Buna göre 3.3.32 ifadesinden,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_2|^{\lambda}=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta r_{n-1})^{\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda}-(\lambda-1)}(r_{n-1})^{\lambda-1}r_{n-1}^{-\lambda^2}r_{n-1}^{1-\frac{1}{\lambda}}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)c_{n-v}r_{v-1}\right|^{\lambda}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Delta r_{n-1})^{\frac{1}{\lambda}-1}}{r_n^{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{\lambda}}}\sum_{v=1}^{n}r_{v-1}|\Delta t_v c_{n-v}|$$

$$\le O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Delta r_{n-1})^{\frac{1}{\lambda}-1}}{r_n^{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{\lambda}}}\sum_{v=1}^{n}r_{v-1}|\Delta t_v||c_{n-v}|$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}r_{v-1}|\Delta t_v|\sum_{n=v}^{\infty}\frac{(\Delta r_{n-1})^{\frac{1}{\lambda}-1}|c_{n-v}|}{r_n^{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{\lambda}}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}r_{v-1}|\Delta t_v|\sum_{n=v}^{\infty}\frac{|c_{n-v}|}{r_n^{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{\lambda}}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}r_{v-1}|\Delta t_v|\frac{1}{r_n^{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{\lambda}}}\sum_{n=v}^{\infty}|c_{n-v}|$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}r_{v-1}|\Delta t_v|\frac{1}{r_n^{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{\lambda}}}\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}r_{v-1}\frac{|\Delta t_v|}{r_v^{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{\lambda}}} \qquad (3.3.33)$$

elde edilir. Böylece 3.3.33 eşitsizliğinin sağındaki toplama Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_2|^{\lambda}=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}\frac{|\Delta t_v|}{r_v^{\lambda^2-\lambda-1+\frac{1}{\lambda}}}=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right)^{1-1/\lambda}\left(\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right)^{-(1-1/\lambda)}\frac{|\Delta t_v|}{r_v^{\lambda^2-\lambda-1+\frac{1}{\lambda}}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right)^{1-1/\lambda}|\Delta t_v|(\Delta r_{v-1})^{1-1/\lambda}\frac{1}{r_v^{\lambda^2-\lambda}}$$

$$=O(1)\left\{\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right)^{\lambda-1}|\Delta t_v|^{\lambda}\right\}^{\frac{1}{\lambda}}\left\{\sum_{v=1}^{\infty}(\Delta r_{v-1})^{\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\lambda}{\lambda-1}}\left(\frac{1}{r_{v-1}^{\lambda^2-\lambda}}\right)^{\lambda/\lambda-1}\right\}^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$= O(1)\left\{\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right)^{\lambda-1}|\Delta t_v|^{\lambda}\right\}^{\frac{1}{\lambda}}\left\{\sum_{v=1}^{\infty}\frac{\Delta r_{v-1}}{r_{v-1}^{\lambda^2}}\right\}^{1-\frac{1}{\lambda}} \tag{3.3.34}$$

elde edilir. Diğer taraftan $(s_n) \in |N,p,q|_{\lambda}$ veya $\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{r_{v-1}}{\Delta r_{v-1}}\right)^{\lambda-1}|\Delta t_v|^{\lambda} < \infty$ ve $\sum_{v=1}\Delta r_{v-1}\frac{1}{r_{v-1}^{\lambda^2}} < \infty$ $(\lambda > 1)$

olduğundan 3.3.34' den dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-\frac{1}{\lambda}}|j_2| < \infty \tag{3.3.35}$$

elde edilir.

(iii) $\sum|c_n|$ yakınsak ve $\max\limits_{0\leq v\leq n}\Delta r_v \leq K\Delta r_n$ olduğu kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_3|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-\frac{1}{\lambda}}\left|-\frac{1}{r_n^{\lambda}}\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}\Delta r_k\right|\right\}^{\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{1-\frac{1}{\lambda}} r_n^{-\lambda}\left|\sum_{v=1}^{n}(\Delta t_v)\sum_{k=0}^{v-1}c_{n-k}\Delta r_k\right|\right\}^{\lambda}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} r_n^{-\lambda}\sum_{v=1}^{n}|\Delta t_v|\sum_{k=0}^{v-1}|c_{n-k}||\Delta r_k|\right\}^{\lambda}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} r_n^{-\lambda}\sum_{v=1}^{n}|\Delta t_v|\sum_{k=0}^{v-1}|c_{n-k}||K\Delta r_{v-1}|\right\}^{\lambda}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} K r_n^{-\lambda}\sum_{v=1}^{n}(\Delta r_{v-1})|\Delta t_v|\sum_{k=0}^{v-1}|c_{n-k}|\right\}^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} r_n^{-\lambda}\sum_{v=1}^{n}\Delta r_{v-1}|\Delta t_v|\right\}^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}(K\Delta r_{n-1})r_n^{-\lambda}\sum_{v=1}^{n}|\Delta t_v|\right\}^{\lambda} \tag{3.3.36}$$

elde edilir.

$$\sum_{v=1}^{\infty} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v| < \infty \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta(r_n)}{r_{n-1}^{\lambda^2-\lambda-\beta+1}} < \infty \tag{3.3.37}$$

olacak şekilde β, $\lambda-1<\beta<\lambda(\lambda-1)$ şatını sağlayan pozitif bir sabit olsun. Buna göre (r_n) monoton artan olduğu kullanılarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_3|^{\lambda} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}(\Delta r_{n-1})r_n^{-\lambda}\sum_{v=1}^{n}|\Delta t_v|\right\}^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} r_{n-1}^{-\lambda}\Delta r_{n-1} r_{n-1}^{-1+\frac{\beta+1}{\lambda}}\sum_{v=1}^{n} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v|\right\}^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\Delta r_{n-1})^{\frac{1}{\lambda}} r_{n-1}^{-\lambda} r_{n-1}^{1-\frac{1}{\lambda}} r_{n-1}^{-1+\frac{\beta+1}{\lambda}}\sum_{v=1}^{n} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v|\right\}^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\Delta r_{n-1}) r_{n-1}^{\left(1-\frac{1}{\lambda}-\lambda-1+\frac{\beta+1}{\lambda}-\lambda\right)\lambda}\right\}\left(\sum_{v=1}^{n} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta r_{n-1}) r_{n-1}^{\lambda-1-\lambda^2-\lambda+\beta+1}\left(\sum_{v=1}^{n} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta r_{n-1}) r_{n-1}^{\lambda-\lambda^2+\beta-1} r_{n-1}^{1-\lambda}\left(\sum_{v=1}^{n} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v|\right)^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta r_{n-1}) r_{n-1}^{\lambda-\lambda^2+\beta-1}\left\{\sum_{v=1}^{n} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v|\right\}^{\lambda}$$

$$= O(1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta r_{n-1}}{r_{n-1}^{-\lambda+\lambda^2-\beta+1}}\right)\right)\left(\sum_{v=1}^{n} r_{v-1}^{1-\frac{\beta+1}{\lambda}}|\Delta t_v|\right)^{\lambda} < \infty \tag{3.3.38}$$

elde edilir.

(iii) (t_n) sınırlı bir dizi ve $\left(\dfrac{q_n}{r_n^{\lambda}}\right) \in |c,0,r|_{\lambda}$ olduğundan dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}|j_4| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}\left|t_{n-1}\Delta\left(\frac{q_n}{r_n^{\lambda}}\right)\right|^{\lambda} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}\left|\Delta\left(\frac{q_n}{r_n^{\lambda}}\right)\right|^{\lambda} < \infty \tag{3.3.39}$$

elde edilir.

(iii) $r_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}q_v \geq p_0 q_n + p_1 q_{n-1}$ olduğundan $\min(p_0, p_1)=M$ olmak üzere

$$r_n \geq p_0 q_n + p_1 q_{n-1} \geq \min(p_0, p_1)(q_n + q_{n-1}) = M(q_n + q_{n-1}) \tag{3.3.40}$$

yazılabilir. Diğer taraftan M>0 ve $q_n + q_{n-1} = |q_n + q_{n-1}| \geq \big||q_n| - |q_{n-1}|\big| = |q_n - q_{n-1}| |\Delta q_n|$ olduğundan 3.3.40' dan dolayı,

$$r_n \ge M\left(q_n + q_{n-1}\right) = M\left|\Delta q_n\right| \qquad (3.3.41)$$

yazılabilir. Ayrıca (r_n) artan bir dizi olduğundan $\lambda>1$ için $r_n^{1-\lambda} < r_1^{1-\lambda}$ yazılabileceğinden 3.3.41' den ~~dolayı~~

$$\left|\Delta q_n\right| < \frac{1}{M} r_n = \frac{1}{M}\frac{r_n^{\lambda}}{r_n^{\lambda}} r_n \le \frac{1}{M} r_n^{\lambda} r_1^{1-\lambda} = K r_n^{\lambda} \Rightarrow \left|\Delta q_n\right| = O\left(r_n^{\lambda}\right)$$

elde edilir. Bu yüzden de $\left|\Delta q_n\right| = O\left(r_n^{\lambda}\right)$ ve $\left(t_n\right) \in \left|c,0,r\right|_{\lambda}$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}\left|j_5\right|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}\left|\Delta t_n\left(\Delta\left(\frac{q_n}{r_n^{\lambda}}\right)\right)\right|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}\left|\Delta t_n\right|^{\lambda}\left|\Delta\left(\frac{q_n}{r_n^{\lambda}}\right)\right|^{\lambda}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}\left|\Delta t_n\right|^{\lambda} < \infty \qquad (3.3.42)$$

elde edilir. Buna göre 3.3.27 , 3.3.35 , 3.3.38, 3.3.39 ve 3.3.42 den doyı $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{\Delta r_{n-1}}\right|^{\lambda-1}\left|\Delta\left(\frac{s_n q_n}{r_n^{\lambda}}\right)\right|^{\lambda}$ yakınsak olduğu elde edilir. Buna göre $\left(\frac{s_n q_n}{r_n^{\lambda}}\right) \in \left|c,0,r\right|_{\lambda}$ elde edilir.

4. $[N,p,q]_\lambda$ - METODU

4.1. Kuvvetli Genelleştirilmiş Nörlund Toplanabilirlilik

Bundan önceki bölümde mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için bazı tanım ve teoremler verilmişti, ayrıca kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliğin etkisizliği ve denkliği için yeterli şartlar elde edildi. Bu bölümde aşağıdaki kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliliğin tanımları ile limitleme teoremleri verilecek. Ayrıca kuvvetli genelleştirilmiş yakınsaklık tanımlanarak, kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik ile kuvvetli genelleştirilmiş yakınsaklık arsındaki ilişkiler incelenecek.

Tanım 4.1.1. (p_n), $p_{-1}=0$, $\Delta p_{n-v}=p_{n-v}-p_{n-v-1}$ olacak şekilde bir dizi ve (s_n) dizisi $t_n^{(\Delta p,Q)}=\dfrac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n}(\Delta p_{n-v})Q_v s_v$ ile verilen dönüşüm dizisi tariflensin. $R_n=\sum_{v=0}^{n} r_v$ olmak üzere

$$\sum_{v=0}^{n}|r_v|\left|t_v^{(\Delta p,Q)}-s\right|^{\lambda}=o(|R_n|)$$

ise, (s_n) dizisine, $\lambda>0$ indisli s-değerine kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirdir denir. Ve bu sembolik olarak $s_n \to s[N,p,Q]_\lambda$ ile gösterilir (Nurcombe, 1989).

Tanım 4.1.2. $s_n=\sum_{v=0}^{n} a_v$ olsun. Eğer, $s_n \to s$ $(n\to\infty)$ ve

$$\sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\lambda}=o(|Q_n|)\quad (n\to\infty)$$

ise, bu takdirde (s_n) dizisine, s-değerine $\lambda>0$ indisli kuvvetli genelleştirilmiş yakınsaktır denir. Ve bu sembolik olarak $s_n \to s[c,0,Q]_\lambda$ ile gösterilir (Nurcombe, 1989).

Tanım 4.1.3. Eğer bir kuvvetli genelleştirilmiş metot, kuvvetli yakınsaklığa denkse, bu takdirde bir kuvvetli genelleştirilmiş metoda etkisizidir denir(Nurcombe, 1989).

4.2. Kuvvetli Toplanabilme İçin Sonuçlar

Teorem 4.2.1. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $R_n = O(Q_n)$ ve $\sum|c_n| < \infty$ olsun. Bu takdirde

$$\left(s_n \to s[N, p, Q]\right) \Rightarrow \left(\frac{Q_n(s_n - s)}{R_n} \to O[c, O, Q]\right)$$

dır (Nurcombe, 1989).

İspat: Kabul edelim ki (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $R_n = O(Q_n)$ ve $\sum|c_n| < \infty$, $s_n \to s$ ve $s_n \to s[N, p, Q]$ olsun. Bu takdirde $\left(s_n \to s[N, p, Q]\right) \Rightarrow \left(s_n \to s[c, 0, Q]\right)$ dır (Nurcombe, 1983). Ayrıca R_n ve Q_n in tanımını kullanarak,

$$\frac{Q_n}{R_n} = \frac{Q_n}{r_0 + r_1 + \ldots + r_n}$$

$$= \frac{Q_n}{p_0 q_0 + (p_1 q_0 + p_0 q_1) + \ldots + (p_n q_0 + p_{n-1} q_1 + \ldots + p_0 q_n)}$$

$$\leq \frac{Q_n}{p_0 q_0 + p_0 q_1 + \ldots + p_0 q_n} = \frac{Q_n}{p_0(q_0 + q_1 + \ldots + q_n)} = \frac{Q_n}{p_0 Q_n} = \frac{1}{p_0}$$

yazılabilir. Bu yüzden de $Q_n = O(R_n)$ dir. $s_n \to s$ ve $Q_n = O(R_n)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(s_n - s)}{R_n} = 0$$

elde edilir. Ayrıca; $a_v = s_v - s_{v-1}$ olmak üzere her v için

$$\Delta\left\{\frac{Q_v(s_v - s)}{R_v}\right\} = \frac{Q_v}{R_v}(s_v - s) - \frac{Q_{v-1}}{R_{v-1}}(s_{v-1} - s)$$

$$= \frac{Q_v}{R_v}s_v - \frac{Q_v}{R_v}s - \frac{Q_{v-1}}{R_{v-1}}(s_{v-1} - s)$$

$$= \frac{Q_v}{R_v}s_v - \frac{Q_v}{R_v}s_{v-1} + \frac{Q_v}{R_v}s_{v-1} - \frac{Q_v}{R_v}s - \frac{Q_{v-1}}{R_{v-1}}(s_{v-1} - s)$$

$$= \frac{Q_v}{R_v}(s_v - s_{v-1}) + \frac{Q_v}{R_v}(s_{v-1} - s) - \frac{Q_{v-1}}{R_{v-1}}(s_{v-1} - s)$$

$$= \frac{Q_v}{R_v}a_v + (s_{v-1} - s)\left(\frac{Q_v}{R_v} - \frac{Q_{v-1}}{R_{v-1}}\right)$$

$$=\frac{Q_v}{R_v}a_v+(s_{v-1}-s)\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right) \tag{4.2.1}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak, her v için

$$\left|\Delta\left\{\frac{Q_v}{R_v}(s_v-s)\right\}\right|\le\left|\frac{Q_v}{R_v}a_v\right|+\left|(s_{v-1}-s)\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)\right|$$

$$\Rightarrow Q_{v-1}\left|\Delta\left\{\frac{Q_v}{R_v}(s_v-s)\right\}\right|\le Q_{v-1}\left|\frac{Q_v}{R_v}a_v\right|+Q_{v-1}\left|(s_{v-1}-s)\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)\right|$$

$$\Rightarrow\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\Delta\left\{\frac{Q_v}{R_v}(s_v-s)\right\}\right|\le\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\frac{Q_v}{R_v}a_v\right|+\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|(s_{v-1}-s)\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)\right| \tag{4.2.2}$$

elde edilir. $s_n\to s[c,0,Q]$ ve $Q_n=O(R_n)$ olduğundan dolayı,

$$\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\frac{Q_v}{R_v}a_v\right|=\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{Q_{v-1}}{R_v}\right||q_v|\left|\frac{Q_v}{q_v}a_v\right|=O(1)\sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|\frac{Q_v}{q_v}a_v\right|=O(1)o(Q_n)=o(Q_n) \tag{4.2.3}$$

ve

$$\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|(s_{v-1}-s)\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)\right|=\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\left(\frac{Q_v}{R_v}-\frac{Q_{v-1}}{R_{v-1}}\right)\right||s_{v-1}-s|$$

$$=\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\frac{Q_vR_{v-1}-Q_{v-1}R_v}{R_vR_{v-1}}\right||s_{v-1}-s|$$

$$=\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\frac{q_vR_{v-1}}{R_vR_{v-1}}+\frac{Q_{v-1}R_{v-1}}{R_vR_{v-1}}-\frac{Q_{v-1}R_{v-1}}{R_vR_{v-1}}-\frac{Q_{v-1}r_v}{R_vR_{v-1}}\right||s_{v-1}-s|$$

$$=\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\frac{q_v}{R_v}-\frac{Q_{v-1}r_v}{R_{v-1}R_v}\right||s_{v-1}-s|$$

$$\le\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left(\left|\frac{q_v}{R_v}\right|+\left|\frac{Q_{v-1}r_v}{R_{v-1}R_v}\right|\right)|s_{v-1}-s|$$

$$=\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\frac{q_v}{R_v}\right||s_{v-1}-s|+\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\left|\frac{Q_{v-1}r_v}{R_{v-1}R_v}\right||s_{v-1}-s|$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{n}q_v|s_{v-1}-s|+O(1)\sum_{v=1}^{n}r_v|s_{v-1}-s| \tag{4.2.4}$$

yazılabilir. Ayrıca $s_n\to s\ \ (n\to\infty)$ olduğundan

$$\sum_{v=1}^{n}q_v|s_{v-1}-s|=o(1)\sum_{v=1}^{n}q_v=o(1)Q_n=o(Q_n) \tag{4.2.5}$$

ve

$$\sum_{v=1}^{n} r_v |s_{v-1} - s| = o(1)\sum_{v=1}^{n} r_v = o(1)R_n = o(R_n) \tag{4.2.6}$$

yazılabilir. Bu yüzden de 4.2.5 ve 4.2.6 ifadelerini 4.2.4 ifadesinde yerine yazılırsa, $R_n = O(Q_n)$ olduğundan

$$\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\left|\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1} - s)\right| = O(1)o(Q_n) + O(1)o(R_n) = o(Q_n) + o(R_n)$$

$$= o(Q_n) + o(O(Q_n)) = o(Q_n) \tag{4.2.7}$$

elde edilir. Bu yüzden de, 4.2.3 ve 4.2.7 ifadeleri, 4.2.2' de yerine konularak,

$$\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\left|\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1} - s)\right| = o(|Q_n|) + o(|Q_n|) = o(|Q_n|) \tag{4.2.8}$$

elde edilir. Buna göre $a_v = \Delta\left\{\dfrac{Q_v(s_v - s)}{R_v}\right\}$ olmak üzere

$$\sum_{v=1}^{n} |q_v|\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right| = \sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\left|\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1} - s)\right| = o(|Q_n|)$$

elde edilir. Buna göre $\dfrac{Q_n(s_n - s)}{R_n} \to O[c, O, Q]$ elde edilir.

Uyarı: $R_n = O(Q_n)$ yerine $r_n = O(q_n)$ getirilebilir. Gerçekten; $r_n = O(q_n)$ ise her $v \geq v_0$ için $r_v \leq Kq_v$ olacak şekilde K>0 sayısı vardır. Buna göre her iki tarafın 1 den n'ye kadar toplamını alırsak

$$\sum_{v=1}^{n} r_v \leq K\sum_{v=1}^{n} q_v \Leftrightarrow R_n \leq KQ_n \Leftrightarrow R_n = O(Q_n)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $r_n = O(q_n)$ ve (r_n) veya (q_n) artan diziler olsun. Bu takdirde $\lambda \geq 1$ olmak üzere

$$\left(s_n \to s[N, p, Q]_\lambda\right) \Rightarrow \left(\frac{Q_n(s_n - s)}{R_n} \to O[c, O, Q]_\lambda\right)$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $r_n = O(q_n)$ ve (r_n) veya (q_n) artan diziler, $s_n \to s$ ve $s_n \to s[N,p,Q]_\lambda$ olsun. Bu takdirde $\left(s_n \to s[N,p,Q]_\lambda\right) \Rightarrow \left(s_n \to s[c,0,Q]_\lambda\right)$ dır (Nurcombe, 1983). Ayrıca $Q_n = O(R_n)$ ve $s_n \to s$ olsuğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(s_n \to s)}{R_n} = 0$$

elde edilir. 4.2.1 ifadesinden ve $a_v = \Delta\left\{\dfrac{Q_v(s_v - s)}{R_v}\right\}$ olmak üzere,

$$\left|Q_{v-1}\Delta\left\{\frac{Q_v(s_{v-1}-s)}{R_v}\right\}\frac{1}{q_v}\right| = \left|\frac{Q_v}{R_v}a_v + \Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\frac{1}{q_v}\right|$$

$$\Rightarrow |q_v|\left|Q_{v-1}\Delta\left\{\frac{Q_v(s_{v-1}-s)}{R_v}\right\}\frac{1}{q_v}\right|^\lambda = |q_v|\left|\frac{Q_v}{R_v}a_v + \Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\frac{1}{q_v}\right|^\lambda$$

$$\sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|Q_{v-1}\Delta\left\{\frac{Q_v}{R_v}(s_v - s)\frac{1}{q_v}\right\}\right|^\lambda = \sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|Q_{v-1}\left\{\frac{Q_v}{R_v}a_v + \Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\frac{1}{q_v}\right|^\lambda$$

$$= \sum_{v=1}^{n}\left|\frac{Q_{v-1}}{q_v^{1-\frac{1}{\lambda}}}\left\{\frac{Q_v}{R_v}a_v + \Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^\lambda \tag{4.2.8}$$

yazılabilir. 4.2.8 ifadesini Minkowski eşitsizliğine uygularsak

$$\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{1-\frac{1}{\lambda}}\left\{\frac{Q_v}{R_v}a_v + \Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^\lambda$$

$$= \left[\left(\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{1-\frac{1}{\lambda}}\left\{\frac{Q_v}{R_v}a_v\right\} + Q_{v-1}q_v^{1-\frac{1}{\lambda}}\left\{\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda$$

$$\leq \left[\left(\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{1-\frac{1}{\lambda}}\left\{\frac{Q_v}{R_v}a_v\right\}\right|^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \left(\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{1-\frac{1}{\lambda}}\left\{\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda \tag{4.2.9}$$

elde edilir. $s_n \to s[c,0,Q]_\lambda$ ve $Q_n = O(R_n)$ olduğundan;

$$\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{1-\frac{1}{\lambda}}\left\{\frac{Q_v}{R_v}a_v\right\}\right|^\lambda = \sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|\frac{Q_v}{R_v}\right|^\lambda\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^\lambda = O(1)\sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^\lambda$$

$$= O(1)o(Q_n) = o(Q_n) \tag{4.2.10}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\left\{\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^{\lambda}$$

$$=\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\left\{\left(\frac{Q_v}{R_v}-\frac{Q_{v-1}}{R_{v-1}}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^{\lambda}$$

$$=\sum_{v=1}^{n}\left(Q_{v-1}q_v^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right)^{\lambda}\left|\frac{Q_vR_{v-1}-Q_{v-1}R_v}{R_vR_{v-1}}\right|^{\lambda}|s_{v-1}-s|^{\lambda}$$

$$=\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}^{\lambda}q_v^{1-\lambda}\left|\frac{q_vR_{v-1}}{R_vR_{v-1}}+\frac{Q_{v-1}R_{v-1}}{R_vR_{v-1}}-\frac{Q_{v-1}R_{v-1}}{R_vR_{v-1}}-\frac{Q_{v-1}r_v}{R_vR_{v-1}}\right|^{\lambda}|s_{v-1}-s|^{\lambda}$$

$$=\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}^{\lambda}q_v^{1-\lambda}\left|\frac{q_v}{R_v}-\frac{Q_{v-1}r_v}{R_vR_{v-1}}\right|^{\lambda}|s_{v-1}-s|^{\lambda} \qquad (4.2.11)$$

yazılabilir. İkinci tarafa Minkowski eşitsizliği uygulanırsa ve $r_n=O(q_n)$ olduğundan

$$\left[\left(\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}^{\lambda}q_v^{1-\lambda}\left|\frac{q_v}{R_v}-\frac{Q_{v-1}r_v}{R_vR_{v-1}}\right|^{\lambda}|s_{v-1}-s|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right]^{\lambda}$$

$$\leq\left[\left(\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\frac{q_v}{R_v}(s_{v-1}-s)\right|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}+\left(\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\frac{Q_{v-1}r_v}{R_vR_{v-1}}(s_{v-1}-s)\right|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right]^{\lambda}$$

$$=\left[\left(\sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|\frac{Q_{v-1}}{R_v}\right|^{\lambda}|(s_{v-1}-s)|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}+\left(\sum_{v=1}^{n}|q_v|\left|Q_{v-1}\frac{Q_{v-1}}{R_vR_{v-1}}\right|^{\lambda}\left|\frac{r_v}{q_v}\right|^{\lambda}|s_{v-1}-s|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right]^{\lambda}$$

$$=\left[\left(O(1)\sum_{v=1}^{n}|q_v||s_{v-1}-s|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}+\left(O(1)\sum_{v=1}^{n}|q_v||s_{v-1}-s|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right]^{\lambda} \qquad (4.2.12)$$

yazılabilir. 4.2.5 ifadesi 4.2.12 de yerine yazılırsa,

$$\left[\left(\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}^{\lambda}q_v^{1-\lambda}\left|\frac{q_v}{R_v}-\frac{Q_{v-1}r_v}{R_vR_{v-1}}\right|^{\lambda}|s_{v-1}-s|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right]^{\lambda}=\left[(O(1)o(Q_n))^{1/\lambda}+(O(1)o(Q_n))^{1/\lambda}\right]^{\lambda}=o(Q_n) \qquad (4.2.13)$$

elde edilir. 4.2.13 ifadesi 4.2.11'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\left\{\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^{\lambda}=o(Q_n) \qquad (4.2.14)$$

elde edilir. 4.2.10 ve 4.2.14 ifadeleri 4.2.9'da yerine yazılırsa,

$$\sum_{v=1}^{n}\left|Q_{v-1}q_v^{1-\lambda}\left\{\frac{Q_v}{R_v}a_v+\Delta\left(\frac{Q_v}{R_v}\right)(s_{v-1}-s)\right\}\right|^{\lambda}=o(Q_n)$$

elde edilir. Buna göre $\lambda\geq 1$ için $\dfrac{Q_n(s_n-s)}{R_n}\to O[c,O,Q]_{\lambda}$ elde edilir.

Teorem 4.2.3. $\lambda>\mu>0$ olmak üzere, eğer $s_n\to s[N,p,Q]_{\lambda}$ ise, bu takdirde $s_n\to s[N,p,Q]_{\mu}$ dir (Borwein, 1960).

İspat: Kabul edelimki $\lambda>\mu>0$ ve P regüler ve $s_n\to s[N,\dot{p},Q]_{\lambda}$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\lambda}=o(1)$$

yazılabilir. Ayrıca her v<n için

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{q_v}{Q_n}<M \tag{4.2.15}$$

olacak şekilde M>0 vardır. 4.2.15 ve Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\mu}&=\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|^{\frac{\mu}{\lambda}+1-\frac{\mu}{\lambda}}\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\mu}\\&=\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|^{\frac{\mu}{\lambda}}\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\mu}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|^{1-\frac{\mu}{\lambda}}\\&\leq\left(\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|^{\frac{\mu}{\lambda}\frac{\lambda}{\mu}}\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\mu\frac{\lambda}{\mu}}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|^{\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-1}}\right)^{\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}\\&=\left(\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\lambda}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|\right)^{\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)}\\&=o(1)M^{1-\frac{\mu}{\lambda}}\\&=o(1)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre $\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_n}\right|\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\mu}=o(1)$ elde edilir.

Teorem 4.2.4: $q_n > 0$, $q_n = O(Q_{n-1})$ ve $\lambda \ge 1$ için $s_n \to s[c,O,Q]_\lambda$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{v=1}^{n} |a_v| = o(\log Q_n)$$

dir (Nurcombe, 1989).

İspat: $q_n > 0$, $q_n = O(Q_{n-1})$ ve $\lambda \ge 1$ için $s_n \to s[N,p,Q]_\lambda$ olsun. Teorem 4.2.3'de özel olarak μ=1 seçilirse,

$$\left(\sum_{v=1}^{n} |q_v| \left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^\lambda = o(Q_n)\right) \Rightarrow \left(\sum_{v=1}^{n} |q_v| \left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right| = o(Q_n)\right)$$

elde edilir. Buna göre

$$\left(s_n \to s[c,O,Q]_\lambda\right) \Rightarrow \left(s_n \to s[c,O,Q]\right)$$

yazılabilir. $\left(s_n \to s[c,O,Q]\right)$ olduğundan $\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}|a_v| = o(Q_n)$ yazılabilir. Ayrıca $q_n > 0$, $q_n = O(Q_{n-1})$ olduğundan dolayı

$$\sum_{v=1}^{n} \left|\frac{q_v}{Q_v}\right| = (\log Q_n)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{n} \frac{q_n}{Q_v} \sum_{k=1}^{v} Q_{k-1}|a_k| \frac{1}{Q_{v-1}} &= \sum_{v=1}^{n} \frac{q_n}{Q_v Q_{v-1}} \sum_{k=1}^{v} Q_{k-1}|a_k| \\
&= \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{1}{Q_{v-1}} - \frac{1}{Q_v}\right) \sum_{k=1}^{v} Q_{k-1}|a_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}|a_k| \sum_{v=k}^{n} \left(\frac{1}{Q_{v-1}} - \frac{1}{Q_v}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}|a_k| \left(\frac{1}{Q_{k-1}} - \frac{1}{Q_n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}|a_k| \frac{1}{Q_{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}|a_k| \frac{1}{Q_n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}|a_k| \frac{1}{Q_n}
\end{aligned}$$

olduğundan ikinci toplam eşitsizliğin sonuna alınarak.

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|=\sum_{k=1}^{n}Q_{k-1}|a_k|\frac{1}{Q_n}+\sum_{v=1}^{n}\frac{q_n}{Q_v}\sum_{k=1}^{v}Q_{k-1}|a_k|\frac{1}{Q_{v-1}} \tag{4.2.16}$$

elde edilir. Bu yüzden de $\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}|a_v|=o(Q_n)$ ve $\sum_{v=1}^{n}\left|\frac{q_v}{Q_v}\right|=(\log Q_n)$ olduğundan 4.2.16'dan dolayı

$$\sum_{v=1}^{n}a_v=\frac{1}{Q_n}o(Q_n)+\sum_{v=1}^{n}\frac{q_v}{Q_v}o(Q_v)\frac{1}{Q_{v-1}}$$

$$=o(1)+O(1)o(1)\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{Q_n}$$

$$=o(1)+o(1)O(\log Q_n)$$

$$=o(\log Q_n)$$

elde edilir.

Uyarılar: (1) Teorem 4.2.4, eğer eğer $s_n \to s$ ve $\frac{Q_{n-1}a_n}{q_n}=o(1)$ olması $s_n \to s[c,O,Q]_\infty$ ile tanımlanırsa $\lambda=\infty$ olduğu zaman da sağlanır. Bu durmda $s_n \to s[c,O,Q]_\infty$ ifadesi $s_n \to s(c,-1,Q)$ ile gösterilir.

(2) Teorem 4.2.4'de, (g_n) herhangi artmayan, pozitif sınırsız ve $Q_n \to \infty$ bir dizi ise bu takdirde (s_n) dizisi $s_n \to s[c,O,Q]_\lambda$ fakat $\sum_{v=1}^{n}|a_v|\neq o(g_n^{-1}\log Q_n)$ dır. Bunu görmek için işaretler $\sum a_n$ yakınsak olacak şekilde seçilmek üzere $a_n=\pm\frac{q_n}{Q_{n-1}g_n}$ koyalım. Aynı zamanda

$$\sum_{v=1}^{n}q_v\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^\lambda=\sum_{v=1}^{n}q_v\left|\frac{Q_{v-1}\frac{q_v}{Q_{v-1}g_v}}{q_v}\right|^\lambda=\sum_{v=1}^{n}q_v\left|\frac{1}{g_v}\right|=\sum_{v=1}^{n}\frac{q_v}{g_v^{-1}}=o(Q_n)$$

yazılabilir. Bu yüzden $s_n \to s[c,O,Q]_\lambda$ dır. Üstelik her n için

$$\sum_{v=1}^{n}|a_v|=\sum_{v=1}^{n}\frac{q_v}{Q_{v-1}g_v}\geq g_n^{-1}\log Q_n\neq o(g_n^{-1}\log Q_n)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5. Eğer $q_n>0, q_n=O(Q_{n-1})$ ve $s_n \to s[c,0,Q]_\lambda$ ise, bu takdirde $\lambda\geq 1$ için $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}=1$ olmak üzere

$$a_n=o\left(\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{-1/\mu}\right)$$

dir.

Ispat: Kabul edelim ki $q_n > 0, q_n = O(Q_{n-1})$ ve $s_n \to s[c,0,Q]_\lambda$ olsun, bu takdirde

$$s_n \to s \quad \text{ve} \quad \sum_{v=1}^{n} |q_v| \left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^\lambda = o(|Q_n|)$$

yazılabilir. Bu yüzden de her n için

$$|q_v| \left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^\lambda \leq \sum_{v=1}^{n} |q_v| \left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^\lambda = o(|Q_n|) \tag{4.2.17}$$

yazılabilir. $q_n > 0, q_n = O(Q_{n-1})$ olduğundan

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = 1 + \frac{q_n}{Q_{n-1}} = O(1) \tag{4.2.18}$$

elde edilir. Buna göre 4.2.17 ifadesi 4.2.18 den dolayı

$$\left|\frac{Q_{n-1}a_n}{q_n}\right|^\lambda = o\left(\frac{Q_n}{q_n}\right) = o\left(\frac{Q_{n-1}Q_n}{q_n Q_{n-1}}\right) = O(1)o\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right) = o\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{Q_{n-1}a_n}{q_n}\right| = o\left(\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{q_n}{Q_{n-1}} o\left(\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = o\left(\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = o\left(\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{-\frac{1}{\mu}}\right)$$

elde edilir.

Uyarı: Teorem 4.2.4 'de, (g_n) herhangi azalmayan, sınırsız pozitif ve $Q_n \to \infty$ olacak şekilde bir dizi ise $s_n \to s$ ve $s_n \to s[c,0,Q]_\lambda$ fakat $a_n \neq o\left(\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{-1/\mu} g_n^{-1}\right)$ olacak şekilde bir (s_n) dizisi vardır..

Gerçekten; (a_n), $\sum_{v\in M}^{n} Q_{n-v} = O(Q_n)$ olacak şekilde pozitif tam sayıların M alt cümlesi $a_n = \pm\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{-1/\mu} g_n^{-1}$ ve aksi takdirde $a_n = 0$ şekilde tanımlanan bir dizi olsun. Genelde böyle bir seçim yapmak mümkündür. Çünkü (Q_n) pozitif, monoton artan, sınırsız dizidir. Sıfır olmayan işaretli (a_n), $\sum a_n$ yakınsak yapılacak şekilde seçilebilir. Aynı zamanda

$$\sum_{v=1}^{n} q_v\left|\frac{Q_{v-1}a_v}{q_v}\right|^{\lambda} = \sum_{v\in M}^{n} q_v\left|\frac{Q_{v-1}}{q_v}\left(\frac{Q_{v-1}}{q_v}\right)^{-1/\mu}\frac{1}{g_v}\right|^{\lambda} + \sum_{v\notin M}^{n} q_v\left|\frac{Q_{v-1}}{q_v}\left(\frac{Q_{v-1}}{q_v}\right)^{-1/\mu}\frac{1}{g_v}\right|^{\lambda}$$

$$= \sum_{v\in M}^{n} q_v\left|\frac{Q_{v-1}}{q_v}\left(\frac{Q_{v-1}}{q_v}\right)^{1/\lambda}\left(\frac{Q_{v-1}}{q_v}\right)^{-1}\frac{1}{g_v}\right|^{\lambda}$$

$$= \sum_{v\in M}^{n} q_v\left|\left(\frac{Q_{v-1}}{q_v}\right)^{1/\lambda}\frac{1}{g_v}\right|^{\lambda}$$

$$= \sum_{v\in M}^{n} q_v\left(\frac{Q_{v-1}}{q_v}\right)\frac{1}{g_v^{\lambda}}$$

$$= \sum_{v\in M}^{n} \frac{Q_{v-1}}{g_v^{\lambda}}$$

$$= o(Q_n)$$

yazılabilir. Böylece $s_n \to s[N,p,Q]_\lambda$ dır. Fakat $n\in M$ için

$$a_n = \left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{-1/\mu} g_n^{-1} \neq o\left(\left(\frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)^{-1/\mu} g_n^{-1}\right)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

(N,p_n) ve $|N,p_n|$- toplanabilme metotlarının için bir çok çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmada ise, (N,p_n) ve $|N,p_n|$- toplanabilme metotlarının bir genellemesi olan (N,p,q) , $|N,p,q|$ ve $\lambda\geq 1$ olmak üzere $|N,p,q|_\lambda$ toplanabilme metotları tanımları verilerek, mutlak ve kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için yapılan bir çok çalışmalar inceldi. İlk önce genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için temel tanım ve teoremler verilerek, bazı önemli sonuçlar elde edildi. İkinci bölümde ise, genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik metodu ile ilgili bazı sonuçlar elde edilecektir. Bu bölüm üç ana kısımdan oluşturuldu. Bunlardan birincisi, $q_n > 0$ ve $(p_n) \in \mathcal{M}$ diziler için limitleme teoremleri, İkincisi (p_n) ve (q_n) reel veya kompleks diziler için limitleme teoremleri, üçüncüsü de regülerlik şartı için limitleme teoremleridir. Daha sonra da elde edilen bu teoremlerden yararlanarak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için etkisizlik teoremleri incelendi. Burada bu teoremlarin etkisizlik teoremlerine karşılık geldiği görüldü. Bundan sonra üçüncü bölümde ise, mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirliliğin tanım ve teoremleri ile bazı etkisizlik ve denklik teoremleri incelendi. Bu bölümde, önce $|N,p,q|$-toplanabilirlilik ile ilgili teoremler verildi. Bundan sonrada en genel olarak $\lambda>1$ için $|N,p,q|_\lambda$ incelendi. Son olarak dördüncü bölümde kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik için tanım ve teoremleri incelendi. Ayrıca kuvvetli genelleştirilmiş yakınsaklık tanımlanarak, kuvvetli genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirlilik ile kuvvetli genelleştirilmiş yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi. Bu teoremlerden önemli sonuçlar elde edildiği görüldü.

KAYNAKLAR

BOR, H.,1986. A note on two summability methods. Proc. the American Mathematical Society 98,

BORWEİN, D., 1960. On strong and absolute summability. Proc. Glasgow Math. Assoc. 4, 122 -139

DAS, G., 1966. On some methods of summability. Quart. J. Math. Oxford series. 17, 224-256

DAS, G., 1968. On some methods of summability (II), ibid. 19, 417-431

HARDY , G., H., 1949. Divergent Series, Oxford

MEARS, F., M., 1937. Absolute regularity and the Nörlund mean. Annals of Math. 38, 594-601

NURCOMBE, J., R., 1967. on some generalised summability methods. Submitted fur publication

NURCOMBE, J., R., 1983. A note on the strong regularity of Nörlund means. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 94, 261-263

NURCOMBE, J., R., 1989. Limitation and inefectivenss theorems for generalised Nörlund summability. Analysis, 9, 347-356

NURCOMBE, J., R., 1989. Limitation and inefectivenss theorems for absolute and strong generalised Nörlund summability. Analysis, 9, 357-365

PETERSEN, G., M., 1966. Regular Matrix Transformationns

TANAKA, M., 1980. Limitation theorems for some methods of summability. Bull. Australian Math. Soc. 22, 373-384

TRIPATHY, B., K., 1982. A note on generalised Nörlund means, J. pure appl. Math., 13 (12): 1478-1491

ÖZGEÇMIŞ

Adı Soyadı	: Şaban YILMAZ
Baba Adı	: Mustafa
Ana Adı	: Nazik
Doğum yeri ve yılı	: Tokat-1969

İlk, orta ve lise eğitimini Sivas'ta tamamladı. Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 1992 yılında bitirdi. Giresun'da özel bir dersanede bir yıl öğretmenlik yaptı. 1993'de Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksyonel Analiz Anabilim Dalında araştırma görevliliğine başladı. Halen bu göreve devam ettirmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.