$w_\infty(A, p, f, q.s)$ PARANORMLU DİZİ UZAYI

Zafer ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996 - TOKAT

GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$w_\infty(A,p,f,q,s)$ PARANORMLU DİZİ UZAYI

Zafer ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, 19./08./ 1996 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı,Adı veSoyadı	İmza
Başkan	: Yrd.Doç.Dr. Osman ÖZDEMİR	
Üye	: Yrd.Doç.Dr. Adem EROĞLU	
Üye	: Yrd.Doç.Dr. Zülfikar AKDOĞAN	Z. Akdoğan

ONAY:

Bu tez, 05./09./ 1996 tarih ve 10 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu tarafından belirlenen jüri üyelerince kabul edilmiştir.

../09./1996

Enstitü Müdürü

ÖZET

$w_\infty(A,p,f,q,s)$ PARANORMLU DİZİ UZAYI

Zafer ÇAKIR

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

1996, 57 sayfa

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Adem EROĞLU

Jüri :Yrd. Doc. Dr. Adem EROĞLU
Jüri :Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR
Jüri :Yrd. Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN

Bu çalışmada, (X,q) seminormlu uzayı üzerinde f modülüsü kullanılarak $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı tanımı verildi. Üç bölümden oluşan bu çalışmada;

Birinci bölümde, İlk olarak temel kavramlar, ikinci olarak çalışmamız boyunca karşılaşacağımız uzayların listesi verildi.

İkinci bölümde, modülüs fonksiyonunun çalışmamızda kullandığımız bazı özellikleri ve (X,q)'nun tam olması durumunda $w_\infty(A,p,f,q,s)$'nin tam paranormlu uzay olduğu gösterilerek bazı kapsama bağıntıları verildi. $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ dizi uzayı oluşturulup, $v,n \in IN$'nin durumlarına göre $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ ve $w_\infty(A,p,f^n,q,s)$ dizi uzayları arasındaki bağıntılar incelendi.

Üçüncü bölümde, (X,q) seminormlu uzayının tam olmaması durumu göz önüne alınarak $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ dizi uzayınında tam olmadığı gösterildi. Ayrıca $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı ile diğer bazı dizi uzayları arasındaki ilişkiler gösterildi.

Anahtar kelimeler: Modülüs fonksiyonu, dizi uzayı.

ABSTRACT

$w_\infty(A,p,f,q,s)$ PARANORMED SEQUENCE SPACE

Zefer ÇAKIR

Gaziosmanpaşa University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Master Thesis
1996, 57 page

Supervisor : Asst. Prof. Adem EROĞLU

Jury : Asst. Prof. Adem EROĞLU
Jury : Asst. Prof. Osman ÖZDEMİR
Jury : Asst. Prof. Zülfigar AKDOĞAN

In this study, the definition of the $w_\infty(A,p,f,q,s)$ sequence is given by using f modulus and a semi-normed space (X,q). This work consists of three chapters;

In the first chapter, the basic concepts and the list of the spaces that will be used troughout this study are given.

In the second chapter, some properties of modulus function are established. Furthermore, in the case of (X,q) is complete, we showed that the sequence space $w_\infty(A,p,f,q,s)$ is complete and in addition some inclusion relations are also given. By constructing the sequence spaces $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ the relations between the sequence spaces $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ and $w_\infty(A,p,f^n,q,s)$ are examined, where $v,n \in IN$.

In the third chapter, if the semi-normed space (X,q) is not complete, it is shown that $w_\infty(A,p,f,q,s)$ sequence space is incomplete. In addition, the relations between $w_\infty(A,p,f,q,s)$ sequence space and some other sequence spaces are shown.

Key words: Modulus function. sequence space.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarım süresince yardımlarını esirgemeyen muhterem hocam **Yrd. Doç. Dr. Adem EROĞLU**'na ve **Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR**'e teşekkür eder, saygılar sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

IN :Doğal sayılar cümlesi

$\Re$:Reel sayılar cümlesi

H :$\sup\limits_{m} p_k$

C :$\max\left(1,2^{H-1}\right)$

Φ :Sıfırdan fark terimleri sonlu olan kompleks ya da reel termli dizilerin uzayı

θ :X'in sıfır elemanı

$\otimes$:$w_\infty(A,p,f,q,s)$'nin sıfır elemanı

S(X) :X üzerinde tanımlanan bütün dizilerin uzayı

$[t]$:t'nin tam kısmı

$|t|$:t'nin mutlak değeri

$\sum\limits_{k}$:$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$

$\sum\limits_{k>k_0}$:$\sum\limits_{k=k_0+1}^{\infty}$

BİRİNCİ BÖLÜM

1.1. Giriş

Kompleks sayıların tüm sonsuz dizilerinin S uzayı üzerinde $w_0(f)$, $w_0(A)$, $w_0(A,f)$, $w_0(A,p,q,s)$ ve $w_0(A,p,f,q,s)$ dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzaylar üzerinde bir çok çalışmalar yapılmıştır. (Maddox,1970,1986; Nanda, 1983; Bulut and Çakar, 1979). Ayrıca, $w(A)$, ve $w(A,f)$ toplanabilme metodları üzerinde de yapılmış çalışmalar bulunmaktadır (Connor, 1989; Maddox, 1986).

Modülüs fonksiyonu, Nakano(1953) tarafından tanımlandı. Maddox (1986), kuvvetli Cesa'ro toplanabilme tanımının genelleştirmesi olan, modülüse göre kuvvetli Cesa'ro toplanabilen dizilerin sınıfını $w(f)$ olarak tanımladı. Connor (1989), Maddox (1986)'un tanımını Cesa'ro matrisi yerine herhangi negatif olmayan regüler matris toplanabilme metodu alarak $w(A,f)$ toplanabilme metoduna genelleştirdi.

Biz bu çalışmamızda, (X,q) seminormlu uzay üzerinde; f bir modülüs fonksiyonu, $p=(p_k)$ pozitif terimli bir dizi ve $A=(a_{mk})$ pozitif terimli bir matris olmak üzere $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı tanımını; f modülüs fonksiyonu iken $v \in IN$ için f^v'nin de modülüs fonksiyonu olduğundan hareketle, $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ dizi uzayı tanımına genelleştirmek suretiyle $v,n \in IN$ 'nin çeşitli durumlarını içeren teoremleri ifade ve ispat ettik.

1.2. Temel Kavramlar

Bu kısımda, çalışmamız süresince sıkça kullanacağımız temel tanım, teorem ve eşitsizlikleri vereceğiz.

Tanım 1.2.1. X boş olmayan bir cümle, K kompleks ya da reel sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\bullet : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir (Maddox, 1970). $\forall \lambda, \mu \in$ K ve $\forall x,y,z \in X$ için,

$V_1)$ $x+y=y+x$
$V_2)$ $(x+y)+z=x+(y+z)$
$V_3)$ $x+\theta=x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.
$V_4)$ $\forall x \in X$ için $x+(-x)=\theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.
$V_5)$ $1 \cdot x = x$
$V_6)$ $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
$V_7)$ $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu y$
$V_8)$ $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

Tanım 1.2.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y, X'in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer $\forall \lambda, \mu \in$ K ve $\forall x,y \in Y$ için $\lambda x+\mu y \in Y$ oluyorsa, Y'ye X'in lineer alt uzayı denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.2.3. X, K skalerler cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$q : X \rightarrow \Re$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, q'ya bir seminorm (yarınorm), (X,q)'ya da seminormlu uzay denir (Maddox, 1970). $\forall \lambda \in$ K ve $\forall x,y \in X$ için,

(i) $q(x) \geq 0$

(ii) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$

(iii) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$

Tanım 1.2.4. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$g : X \longrightarrow \Re$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, g ' ye bir paranorm, (X, g)'ye de paranormlu uzay denir (Maddox and Willey,1974). $\forall \lambda \in$ K ve $\forall x, y \in X$ için,

(i) $g(\theta) = 0$

(ii) $g(x) = g(-x)$

(iii) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

(iv) $\lambda_0 \in$K ve $x_0 \in X$ için $\lambda \to \lambda_0$ ve $g(x - x_0) \to 0$ iken $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \to 0$'dır.

Tanım 1.2.5. Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g'ye total paranorm denir (Willansky, 1964).

Tanım 1.2.6. q_1 ve q_2, X üzerinde iki seminorm olsun. q_1 kuvvetli q_2 olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in X$ için,

$$q_2(u) \leq M q_1(u)$$

olacak şekilde M sabitinin var olmasıdır (Willansky, 1964).

Tanım 1.2.7. X boş olmayan bir cümle olsun.Eğer,

$$d : X \times X \longrightarrow \Re$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d'ye bir semimetrik, (X, d)'ye de semimetrik uzay denir (Maddox, 1970). $\forall x, y, z \in X$ için,

(i) $d(x,x) = 0$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Tanım 1.2.8. Aynı zamanda bir lineer uzay olan bir semimetrik uzaya; eğer semimetrik, sırasıyla bir paranorm, bir total paranorm, bir seminorm veya bir normdan elde edilmiş ise bir lineer semimetrik uzay, bir lineer metrik uzay, bir seminormlu uzay veya bir normlu uzay denir (Willansky, 1964).

Tanım 1.2.9. (X,d) semimetrik uzayında bir $a=(a_k)$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart, herhangi $\varepsilon>0$ için $i,j>\mathrm{N}$ iken,

$$d(a_i,a_j)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir N sayısının bulunmasıdır.

Eğer semimetrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise semimetrik uzaya, tam semimetrik uzay denir.

Eğer d semimetriği

$$d(x,y)=g(x-y)$$

şeklinde bir g paranormundan elde edilmiş ise d'ye invaryant semimetrik denir.

Ayrıca semimetrik uzayda aşağıdaki özelliklerde geçerlidir. Cauchy dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse kendiside yakınsaktır. Her Cauchy dizisi sınırlı ve her yakınsak dizi Cauchy dizisidir (Willansky, 1964).

Tanım 1.2.10. Eğer,

$$f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, f'ye bir modülüs fonksiyonu denir (Connor, 1989). $\forall t,z\in[0,\infty)$ için,

(i) $f(t)=0 \Leftrightarrow t=0$
(ii) $f(t+z)\leq f(t)+f(z)$
(iii) f artandır.
(iv) f, sıfırda sağdan süreklidir.

$f(t)=t^r$, $0<r\leq 1$ için bir modülüs fonksiyonudur (Maddox, 1988).

Tanım 1.2.11. S kompleks (ya da reel) değerli dizilerin uzayı ve E, S'nin lineer alt uzayı olsun. Bu takdirde E'nin sırasıyla α ve β dualleri,

$$E^{\alpha}=\left\{a\in S:\sum_k |a_k x_k|<\infty, \forall x\in E \ \ için\right\}$$

$$E^{\beta}=\left\{a\in S:\sum_k a_k x_k \ \ yakınsak, \ \forall x\in E \ \ için\right\}$$

olrak tanımlanır (Maddox, 1991).

Tanım 1.2.12. S kompleks (ya da reel) değerli dizilerin uzayı ve E, S ' nin lineer alt uzayı olsun. Bu takdirde E ' nin çarpım uzayı,

$$M[E]=\{a\in S: ax\in E, \ \forall x\in E \ \ için\}$$

olarak tanımlanır (Maddox, 1986).

Tanım 1.2.13. $x=(x_k)$ reel veya kompleks terimli bir dizi ve $A=(a_{mk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. $\forall m\in IN$ için,

$$\sum_k a_{mk}x_k$$

yakınsak olmak kaydıyla, (t_m) dizisi

$$t_m=\sum_k a_{mk}x_k$$

eşitliğiyle tanımlanmış olsun. (t_m) dizisine, x dizisinin A-dönüşümü veya x'in A-dönüşüm dizisi denir.

$$\lim_{m\to\infty} t_m=t$$

ise, x dizisi A metodu tarafından t değerine limitlenebilirdir denir. A'ya da bir limitleme veya toplanabilme metodu denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.2.14. Kısmi toplamlar dizisi (s_m) olan bir $\sum a_k$ serisi verilmiş olsun. $\sum a_k$ serisinin veya (s_m) dizisinin matris elemanları,

$$a_{mk} = \begin{cases} \dfrac{1}{m}, & k \leq m \\ 0, & k > m \end{cases}$$

ile verilen $A = (a_{mk})$ matrisi yardımıyla elde edilen (t_m) dönüşüm dizisi,

$$t_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} s_k$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ortalamaya Cesa'ro Ortalaması veya kısaca (C,1) ortalaması denir. (C,1) ortalaması regülerdir (Petersen, 1966).

Tanım 1.2.15. Bir $A = (a_{mk})$ matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti koruyorsa, A matrisine regülerdir denir (Fadden, 1942).

Teorem 1.2.16. Bir A= (a_{mk}) matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar,

(i) $\forall m$ için $\sum_k |a_{mk}| < \infty$

(ii) $\forall k$ için $\lim_{m\to\infty} (a_{mk}) = 0$

(iii) $\lim_{m\to\infty} \sum_k a_{mk} = 1$

olmasıdır (Petersen, 1966).

Tanım 1.2.17. Bir A= (a_{mk}) matrisi verilmiş olsun. Bu A matrisinin her satırında sıfır olmayan elemanların sayısı sonlu ise bu takdirde bu matrise satır-sonlu, aynı şeyler her sütun için geçerli ise sütun sonludur denir. Bu ise q_m, m'nin bir fonksiyonu olduğunda $k \geq q_m$ için $a_{mk} = 0$ ise A satır-sonludur demektir. Eğer q, m'den bağımsız olduğunda $k \geqslant q$ için $a_{mk}=0$ ise A satır-sonlu matris olarak adlandırılır. Benzer şekilde, r_k, k'ya bağlı bir fonksiyon olduğunda $m \geqslant r_k$ için $a_{mk}=0$ ise A'ya sütun sonlu, eğer r, k'dan bağımsız olduğunda $m \geqslant r$ için $a_{mk}=0$ oluyorsa A'ya sütun-sınırlıdır denir (Cooke, 1950).

Eşitsizlik 1.2.18.

(i) $a, a_1, a_2, \ldots, a_m \geq 0$ ve $b, b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$ olsun. Bu takdirde,

(a-) $i > 1$ ve $\frac{1}{i}+\frac{1}{j}=1$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^i\right)^{1/i} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^j\right)^{1/j}$$

(b-) $i \geqslant 1$ ise,

$$\left\{\sum_{k=1}^{m} (a_k+b_k)^i\right\}^{1/i} \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{m} a_k^i\right\}^{1/i} + \left\{\sum_{k=1}^{m} b_k^i\right\}^{1/i}$$

(c-) $0 < i \leqslant 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{m} (a_k+b_k)^i \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^i + \sum_{k=1}^{m} b_k^i$$

(d) $i>1$ ve $\frac{1}{i}+\frac{1}{j}=1$ ise $|a\,b| \leq |a|^i + |b|^j$

dir.

(ii) $\forall k$ için $p_k > 0$ ve $H = \sup_k p_k$ olmak üzere $a_k, b_k \in C$ olsun. Bu takdirde,

$|a_k+b_k|^{p_k} \leq C \left\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\right\}$, $C = \max\left(1, 2^{H-1}\right)$ dir (Maddox and Willey, 1974; Bulut and Çakar, 1979).

1.3. Dizi Uzayları Listesi

Burada çalışmamız boyunca karşılaşacağımız dizi uzaylarının listesi verilecektir.

Önce reel ya da kompleks terimli dizi uzaylarını verelim.

$$l_\infty = \left\{ a \in s : \sup_k |a_k| < \infty \right\}$$

$$[C,I]_\infty = \left\{ a \in s : \sup_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |a_k| < \infty \right\}$$

$$[C,I,p]_\infty = \left\{ a \in s : \sup_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |a_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

$$w_\infty(f) = \left\{ a \in s : \sup_m \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(|a_k|)^{p_k} < \infty \right\}$$

$$w_\infty(A) = \left\{ a \in s : \sup_m \sum_k a_{mk} |a_k| < \infty \right\}$$

$$w_\infty(A,f) = \left\{ a \in s : \sup_m \sum_k a_{mk} f(|a_k|) < \infty \right\}$$

$$w_\infty(A,p,f,s) = \left\{ a \in s : \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(|a_k|) \right]^{p_k} < \infty, s \geq 0 \right\}$$

$$[A,p]_\infty = \left\{ a \in s : \sup_m \sum_k a_{mk} |a_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

Şimdi de X değerli dizi uzaylarını verelim.

$$l_\infty(q) = \left\{ x \in S(X) : \sup_k q(x_k) < \infty \right\}$$

$$l(p,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sum_k k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \ s\geq 0\right\}$$

$$l_\infty(p,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_k k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \ s\geq 0\right\}$$

$$w_\infty(p,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_k \sum_k k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \ s\geq 0\right\}$$

$$w_\infty(A,q)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}q\left(x_k\right)<\infty\right\}$$

$$w_\infty(A,p,q)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}\left[q\left(x_k\right)\right]^{p_k}<\infty\right\}$$

$$w_\infty(A,f,q)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}f\left(q\left(x_k\right)\right)<\infty\right\}$$

$$w_\infty(A,p,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[q\left(x_k\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \ s\geq 0\right\}$$

$$w_\infty(A,p,f,q)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}<\infty\right\}$$

$$w_\infty(A,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]<\infty,\ \ s\geq 0\right\}$$

$$w_\infty(A,p,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \ s\geq 0\right\}$$

$$w_\infty(A,p,f^v,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f^v\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}<\infty,\ \ s\geq 0,\ \ v\in IN\right\}$$

İKİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde, ilk olarak modülüs fonksiyonunun çalışmamızda kullanacağımız bazı özellikleri verilecek. İkinci olarak $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı tanımlanarak bazı özellikleri ve kapsam bağıntıları verilecek. Son olarak da $w_\infty(A,p,f^\nu,q,s)$ dizi uzayı oluşturularak $\nu \in IN$'nin durumuna göre incelenecektir.

2.1. Modülüs Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

Teorem 2.1.1. f bir modülüs fonksiyonu ise, $\forall \nu \in IN$ için f^ν de bir modülüs fonksiyonudur. Burada $f^\nu = fofo. \ . \ . \ of$ (f^ν, f'in ν defa bileşkesi) şeklindedir (Bilgin, 1992).

Lemma 2.1.2. f bir modülüs fonksiyonu ve $0< \delta < 1$ olsun. Bu takdirde $\nu \in IN$ ve $t\in [0,\infty)$ için,

$$f^{\nu-1}(t) > \delta \quad \text{ise} \quad f^\nu(t) \leq \frac{2f(1)}{\delta}\{f^{\nu-1}(t)\}$$

olur. Burada $f^0 = I$ özdeşlik dönüşümüdür (Bilgin, 1992).

Lemma 2.1.3. f ve h herhangi iki modülüs fonksiyonu ise, $f^{-1}, f.h$, f/h ve $f-h$ fonksiyonlarının modülüs fonksiyonu olması gerekmez (Bilgin, 1992).

Lemma 2.1.4. f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu ise fog, $a.f$ $(a \geq 0)$, $f/(1+f)$ ve $f+g$ fonksiyonları da modülüs fonksiyonlarıdır (Rucle, 1973).

f modülüs fonksiyonu sınırlı yada sınırsız olabilir. Örneğin, $\forall x \in [0,\infty)$ için $f(x) = x/(1+x)$ ile verilen f sınırlı, $f(x) = x/(1+x)^{1/2}$ ile verilen f sınırsız modülüs fonksiyonlarıdır.

Lemma 2.1.5. Her $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ için $f(x \cdot y) \leq f(x) + f(y)$ olacak şekilde bir modülüs fonksiyonu vardır. Örneğin, $f(x) = \log(1+x)$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu yukarıdaki özelliği sağlar.

2.2. $w_\infty(A,p,f,q,s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, ilk olarak $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı tanımı verilerek, (X,q)'nun tam olması durumunda, tam paranormlu uzay olduğu gösterilecek. İkinci olarak dual uzayı ve çarpım uzayı ile ilgili birer teorem verilecek. Son olarak da bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

X, θ-sıfır elemanlı kompleks (veya reel) lineer uzay ve $X=(X,q)$, q seminormu ile seminormlu bir uzay olsun. x-değerli dizilerin uzayını S(X) ile gösterelim. S(X); $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ ve λ bir skaler olmak üzere,

$$x+y = (x_k + y_k)$$

$$\lambda x = (\lambda x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. f herhangi bir modülüs fonksiyonu, A= (a_{mk}) pozitif terimli bir matris ve $p=(p_k)$ pozitif terimli reel bir dizi olmak üzere X'de

$$w_\infty(A,p,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_m\sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}<\infty, s\geq 0\right\}$$

dizi uzayını tanımlayalım. $\Phi(x)$ ile θ'dan farklı terimleri sonlu olan x-değerli dizilerin uzayını gösterirsek,

$$\Phi(x)\subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$$

olduğu kolayca görülür. O halde tanımladığımız dizi uzayının bir anlamı vardır. Çalışmamız boyunca $p=(p_k)$ dizisini $\forall k\in IN$ için $0<p_k\leq\sup_k p_k=H$ olarak alacağız. Yine $w_\infty(A,p,f,q,s)$'de bir diziyi $x=(x^n)$ ile göstereceğiz. Burada her bir $n\in IN$ için,

$$x^n=\left(x_1^n,x_2^n,x_3^n\ldots\right)\in w_\infty(A,p,f,q,s)$$

dir.

Eğer $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayında A, p, f, q, s 'den bir veya birkaçı özel seçilirse; Çakar (1973) 'da tanımlı L_r ve L_s , Bulut and Çakar (1979)'da tanımlı $l(p,s)$, Bilgin (1992)'de tanımlı $l(p,f,q,s)$, Eroğlu (1994)'da tanımlı $l_\infty(p,f,q,s)$, Rucle (1973)'de tanımlanan ve aynı zamanda bir FK uzayı olan $L(f)$, Kuttner (1946)'de tanımlı $[C,I]_\infty$, Maddox (1976,1968,1986)'da tanımlı $[C,I,p]_\infty$, $[A,p]_\infty$ ve $w_\infty(f)$, Connor (1989) 'da tanımlı $w_\infty(A)$ *ve* $w_\infty(A,f)$ uzayları elde edilir.

Lemma 2.2.1. $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı lineerdir.

İspat: $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayının lineer olduğunu göstermek için, S(X) lineer uzay ve $w_\infty(A,p,f,q,s)\subseteq$S($X$) olduğundan $\forall x,y\in w_\infty(A,p,f,q,s)$ ve λ,μ skalerler olmak üzere $\lambda x+\mu y\in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. A matrisi, p dizisi, f ve q fonksiyonlarının özellikleri dikkate alınırsa λ,μ skalerleri, $\forall k\in IN$ ve $x_k,y_k\in X$ için,

$$\left[f\left(q(\lambda x_k+\mu y_k)\right)\right]^{p_k}\leq\left[f\left(q(\lambda x_k)+q(\mu y_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \left[f\left(q(\lambda x_k)\right)+f\left(q(\mu y_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$=\left[f\left(|\lambda| q(x_k)\right)+f\left(|\mu| q(y_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq \left[Tf\left(q(x_k)\right)+Kf\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k} \qquad (2.1)$$

olur. Burada T, K; $|\lambda| \leq$ T ve $|\mu| \leq$ K olacak şekilde pozitif tam sayılardır. Ayrıca eşitsizlik 1.2.18.-(ii) gözönüne alınırsa,

$$\left[Tf\left(q(x_k)\right)+Kf\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k} \leq C\left\{\left[Tf\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}+\left[Kf\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}\right\}$$

$$\leq CT^H\left[f\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}+CK^H\left[f\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}$$

olacaktır. Bu ve 2.1 eşitsizliğinden,

$$\left[f\left(q(\lambda x_k+\mu y_k)\right)\right]^{p_k} \leq CT^H\left[f\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}+CK^H\left[f\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k}$$

olur. Böylece $\forall k \in IN$ için $k^{-s}>0$, $a_{mk}>0$ olduğundan λ,μ skalerleri ve $\forall k$ ve $x_k, y_k \in X$ için,

$$a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q(\lambda x_k+\mu y_k)\right)\right]^{p_k} \leq a_{mk}k^{-s}CT^H\left[f\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}+a_{mk}k^{-s}CK^H\left[f\left(q(y_k)\right)\right]^{p_k} \quad (2.2)$$

eşitsizliği elde edilir. CT^H ve CK^H ifadeleri sabit ve $x=(x_k), y=(y_k) \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğundan 2.2 eşitsizliğinde k=1'den ∞'a kadar toplam alındıktan sonra m üzerinden supremum alınırsa,

$$\lambda x+\mu y \in w_\infty(A,p,f,q,s)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2. $w_\infty(A,p,f,q,s)$, M= max (1,H) olmak üzere,

$$G(x)= \sup_m \left\{\sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q(x_k)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

ile bir paranormlu uzaydır.

İspat: $G: w_\infty(A,p,f,q,s) \to \Re$'ye bir fonksiyon olduğunu ve aşağıdaki paranorm şartlarını sağladığını gösterelim. $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğundan $\forall m$ için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(x_k)) \right]^{p_k} < \infty$$

olup $G(x) \in \Re$'dir. Şimdi f ve q'nun özelliklerini dikkate alarak şartlara bakalım.

(i) $\otimes \in w_\infty(A,p,f,q,s)$, $\theta \in X$ olmak üzere

$\otimes = \{\theta, \theta, \theta, \ldots\}$ şeklindedir. Buna göre,

$$G(\otimes) = \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(\theta_K)) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(0) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= 0$$

olur.

(ii) $$G(-x) = \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(-x_k)) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(|-1| q(x_k)) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(x_k)) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= G(x)$$

olur

(iii) M$\geqslant$1 ve $\forall k$ için $\frac{p_k}{M} \leq 1$ olduğundan eşitsizlik 1.2.18- (i) (c) ve (b)'den $\forall m \in IN$ için,

$$G(x+y) = \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k + y_k\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$\leqslant \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right) + f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_k \left\{ \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right) + f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k/M} \right\}^M \right\}^{1/M}$$

$$\leq \sup_m \left\{ \sum_k \left\{ \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left(\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k/M} + \left[f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k/M} \right) \right\}^M \right\}^{1/M}$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_k \left\{ \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k/M} + \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left[f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k/M} \right\}^M \right\}^{1/M}$$

$$\leqslant \sup_m \left[\left\{ \sum_k \left\{ \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k/M} \right\}^M \right\}^{1/M} \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_k \left\{ \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left[f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k/M} \right\}^M \right\}^{1/M} \right]$$

$$\leqslant \sup_m \left\{ \sum_k \left\{ \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k/M} \right\}^M \right\}^{1/M}$$

$$+ \sup_m \left\{ \sum_k \left\{ \left(a_{mk} k^{-s}\right)^{1/M} \left[f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k/M} \right\}^M \right\}^{1/M} \tag{2.3}$$

$$G(x+y) \leq G(x) + G(y)$$

elde edilir.

(iv) $w_\infty(A,p,f,q,s)$'de herhangi bir dizi $x=(x^n)$ şeklinde olduğundan, karışıklığa sebep vermemek için skalerlerin dizisini de $\lambda=(\lambda^n)$ olarak alacağız. Burada $\forall n\in IN$ için λ^n bir skalerdir. Şimdi kabul edelim ki $\lambda^n\to\lambda^0$ ve G $(x^n-x^0)\to 0$ $(n\to\infty)$'dir. $\lambda=(\lambda^n)$ skalerler dizisi yakınsak olduğundan, $\forall n\in IN$ için $|\lambda^n|\leq$ K olacak şekilde K pozitif tamsayısı bulunabilir. Dolayısıyla $\sup_k K^{p_k}\leq K^H$ dır. Eşitsizlik 1.2.18-(i) (c), (b) den $\forall m,n\in IN$ için,

$$G(\lambda^n x^n-\lambda^0x^0)=\sup_m\left\{\sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(\lambda^n x_k^n-\lambda^0x_k^0\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$=\sup_m\left\{\sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(\lambda^n x_k^n-\lambda^n x_k^0+\lambda^n x_k^0-\lambda^0x_k^0\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$\leq\sup_m\left\{\sum_k\left\{\left(a_{mk}k^{-s}\right)^{1/M}\left(\left[Kf\left(q\left(x_k^n-x_k^0\right)\right)\right]^{p_k/M}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[f\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^0\right]x_k^0\right)\right)\right]^{p_k/M}\right)\right\}^M\right\}^{1/M}$$

$$=\sup_m\left\{\sum_k\left\{\left(a_{mk}k^{-s}\right)^{1/M}\left[Kf\left(q\left(x_k^n-x_k^0\right)\right)\right]^{p_k/M}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(a_{mk}k^{-s}\right)^{1/M}\left[f\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^0\right]x_k^0\right)\right)\right]^{p_k/M}\right\}^M\right\}^{1/M}$$

$$\leq\sup_m\left[\left\{\sum_k\left\{\left(a_{mk}k^{-s}\right)^{1/M}\left[Kf\left(q\left(x_k^n-x_k^0\right)\right)\right]^{p_k/M}\right\}^M\right\}^{1/M}\right.$$

$$\left.+\left\{\sum_k\left\{\left(a_{mk}k^{-s}\right)^{1/M}\left[f\left(q\left(\left[\lambda^n-\lambda^0\right]x_k^0\right)\right)\right]^{p_k/M}\right\}^M\right\}^{1/M}\right]$$

$$\leq \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[K f\left(q\left(x_k^n - x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$+ \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$\leq K^H G\left(x^n - x^0\right) + \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} \qquad (2.4)$$

olur. K^H sabit, $G\left(x^n - x^0\right) \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan bu eşitsizlikteki birinci ifade sıfıra gider. Şimdi ikinci ifadenin sıfıra gittiğini gösterelim.

$\lambda^n \to \lambda^0$ $(n \to \infty)$ olduğundan, $\forall n \in IN$ için $\left|\lambda^n \to \lambda^0\right| \leq T$ olacak şekilde T≯0 sayısı var ve lemma 2.2.1. 'den $Tx^0 = \left(Tx_k^0\right) \in w_\infty(A, p, f, q, s)$'dir. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için, $\exists m_0 \in IN \ni \forall m > m_0$ için,

$$\sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(Tx_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Dolayısıyla $\forall m, n \in IN$ ve $m > m_0$ için,

$$\sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} \leq \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(T\left(q\left(x_k^0\right)\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

olacağından ∀n ve ∀ε>0 ve $m > m_0$ için,

$$\sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.5)$$

kalır. Ayrıca ∀n ve $m \leq m_0$ için,

$$\sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \infty$$

olduğu gözönüne alınırsa, $\forall\varepsilon>0$ için $\exists k_0$ vardır öyleki $\forall$n ve $m \leq m_0$ için,

$$\sup_m \left\{ \sum_{k>k_0} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.6}$$

kalır. Yine $\forall m \leq m_0$ ve $\lambda^n \to \lambda^0$ $(n \to \infty)$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_m \left\{ \sum_{k=1}^{k_0} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} \right]$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_{k=1}^{k_0} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(\lim_{n\to\infty} \left|\lambda^n - \lambda^0\right| q\left(x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$=0$$

olduğundan $\forall m \leq m_0$ ve $\forall\varepsilon>0$için $\exists n_0 \in IN \ni \forall n > n_0$ için,

$$\sup_m \left\{ \sum_{k=1}^{k_0} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(\left|\lambda^n - \lambda^0\right| q\left(x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.7}$$

kalır. Böylece 2.6 ve 2.7 'den $\forall\varepsilon>0$ ve m $\leqslant m_0$ için $\exists n_0$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ iken,

$$\sup_m \left\{ \sum_{k} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Bu ve 2.5 den $\forall m$ ve $\varepsilon > 0$ için n > n_0 iken

$$\sup_m \left\{ \sum_{k} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde ederiz ki, bu da

$$\sup_m \left\{ \sum_{k} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(\left[\lambda^n - \lambda^0\right] x_k^0\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

olduğunu gösterir. Böylece 2.4 eşitsizliğindeki ikinci ifadenin de sıfıra gittiğini göstermiş oluruz. O halde G bir paranorm fonksiyonu olup, $(w_\infty(A,p,f,q,s)\ ,\ G)$ bir paranormlu uzaydır.

Bu G paranormu total değildir. Bu durum f ve q'nun tanımları gözönüne alınırsa kolayca görülebilir.

Eğer,

$$d:\ w_\infty(A,p,f,q,s)\ \times\ w_\infty(A,p,f,q,s)\ \to \Re$$

fonksiyonunu

$$d(x,y)=G(x-y)$$

olarak tanımlarsak, d bir invaryant semimetriktir. O halde $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı aynı zamanda bir lineer semimetrik uzaydır. Şimdi uzayın tamlığını gösteren teoremi verelim.

Teorem 2.2.3. A regüler bir matris olmak üzere, (X,q) tam ise $w_\infty(A,p,f,q,s)$, G paranormu ile tamdır.

İspat: Bunun için $w_\infty(A,p,f,q,s)$'de bir (x^n) Cauchy dizisi alalım. (x^n) Cauchy dizisi olduğundan, $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_0\ \in IN\ \ni \forall r,n>n_0$ için,

$$G(x^n-x^r)=\sup_m\left\{\sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n-x_k^r\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon \qquad (2.8)$$

kalır. Ayrıca her bir k sabiti ve $\forall m$ için,

$$\left\{a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n-x_k^r\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}\le\left\{\sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n-x_k^r\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

olacağından $n,r>n_0$ için,

$$\left\{a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n-x_k^r\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}<\varepsilon$$

ve f modülüs fonksiyonu olduğundan, $\forall k$ sabiti için,

$$\lim_{r,n\to\infty}\left\{a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n - x_k^r\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} = \left\{a_{mk}k^{-s}\left[f\left(\lim_{r,n\to\infty} q\left(x_k^n - x_k^r\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M}$$

$$= 0$$

eşitliği

$$\lim_{r,n\to\infty} q\left(x_k^n - x_k^r\right) = 0$$

olmasını gerektirir. O halde $\forall k$ sabiti için (x^n), (X,q)'da bir Cauchy dizisidir. (X,q) tam olduğundan $\forall k$ için,

$$q\left(x_k^n - y_k\right) \to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{2.9}$$

olacak şekilde X' de bir $y=(y_k)$ dizisi vardır. Şimdi biz $y\in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğunu gösterelim. $w_\infty(A,p,f,q,s)$ lineer semimetrik uzay ve (x^n) Cauchy dizisi olduğundan $G(x^n)\leq K$ olacak şekilde pozitif K sabiti vardır. Dolayısıyla herhangi bir t için,

$$\left\{\sum_{k=1}^{t} a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \leq K$$

olur.

$$\left|q\left(x_k^n\right) - q\left(y_k\right)\right| \leq q\left(x_k^n - y_k\right)$$

olduğundan, 2.9 ve f 'nin sürekliliğinden,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{t} a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \leq K$$

$$\Rightarrow \left\{\sum_{k=1}^{t} a_{mk}k^{-s}\left[f\left(\lim_{n\to\infty} q\left(x_k^n\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \leq K$$

$$\Rightarrow \left\{\sum_{k=1}^{t} a_{mk}k^{-s}\left[f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} \leq K$$

elde edilir. Burada $t \to \infty$ için limit alınırsa $\forall m$ için

$$\sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(y_k\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} \leq K$$

olur. Bu da $y \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğunu gösterir. Şimdi de

$$G\left(x^n - y\right) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

olduğunu gösterelim. 2.8'den dolayı herhangi bir t için $r,n > n_0$ olduğunda,

$$\left\{ \sum_{k=1}^{t} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k^n - x_k^r\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \varepsilon$$

kalır. Ayrıca,

$$\left| q\left(x_k^n - x_k^r\right) - q\left(x_k^n - y_k\right) \right| \leq q\left(x_k^r - y_k\right)$$

eşitsizliği ve 2.9 'dan

$$q\left(x_k^n - x_k^r\right) \to q\left(x_k^n - y_k\right) \qquad (r \to \infty)$$

olacağından, f'in sürekliliğini de kullanarak

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{t} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(\lim_{r \to \infty} q\left(x_k^n - x_k^r\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{t} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(\lim_{r \to \infty} q\left(x_k^n - x_k^r\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{t} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k^n - y_k\right)\right)\right]^{p_k} \right\}^{1/M} < \varepsilon$$

olur.Burada $t \to \infty$ için limit alırsak $\forall n > n_0$ için,

$$\left\{\sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n - y_k\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} < \varepsilon$$

kalır. Burada her iki tarafın m üzerinden supremumu alınırsa,

$$\sup_m \left\{\sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^n - y_k\right)\right)\right]^{p_k}\right\}^{1/M} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da,

$$G\left(x^n - y\right) \to 0 \ (n \to \infty)$$

olduğunu gösterir.

Böylece $w_\infty(A,p,f,q,s)$'nin tam paranormlu (veya tam lineer semimetrik) uzay olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.2.4. f sınırlı bir modülüs fonksiyonu, (a_{mk}) pozitif terimli regüler bir matris ve s>1 olsun. Bu takdirde $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğunda,

$$\sum_k t_k x_k \text{ yakınsaktır } \Leftrightarrow (t_k) \in \Phi$$

dir.

İspat: Şart yeterdir: $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olsun. $(t_k) \in \Phi$ iken

$$\sum_k t_k x_k$$

sonlu toplama dönüşeceğinden yakınsaktır.

Şart gerektir: Kabul edelimki $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ için $\sum_k t_k x_k$ yakınsak, fakat $(t_k) \notin \Phi$ olsun. Bu takdirde pozitif tam sayıların artan bir (n_k) alt dizisi vardır öyleki

$\left|t_{n_k}\right| > 0 \quad (k \in \{1,2,3, \ . \ . \ . \ \})$

dır. Şimdi $q(u) > 0$ olacak şekilde $u \in X$ sabit vektörü için (y_k) dizisini,

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{u}{q(u)t_{n_k}}, & k = n_k \\ \\ \theta \quad , & k \neq n_k \end{cases} \tag{2.10}$$

olarak tanımlayalım. f sınırlı olduğundan $\forall t \in [0,\infty)$ için $f(t) \leq K$ olacak şekilde K>1 sabiti bulunabilir. $\forall k$ ve $x_k \in X$ için $q(x_k) \in [0,\infty)$ olacağından,

$$f(q(x_k)) \leq K \tag{2.11}$$

ve dolayısıyla 2.10 'daki dizi için de,

$$\begin{aligned} \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(y_k))\right]^{p_k} &\leq \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} [K]^{p_k} \\ &\leq K^H \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğundan $y \in w_\infty(A,p,f,q,s)$'dir. Fakat $I_1 = \{n_k : k \in \{1,2, \ . \ . \ . \ \}\}$ dersek,

$$\begin{aligned} \sum_k t_k y_k &= \sum_{k \in I_1} t_{n_k} \frac{u}{t_{n_k} q(u)} \\ &= \frac{u}{q(u)} \sum_{k \in I_1} 1 \end{aligned}$$

olacağından $\sum_k t_k y_k$ ıraksaktır. Çünkü $I_2 = \{n_k : n_k \leq r\}$ dersek,

$$s_r = \frac{u}{q(u)} \sum_{k \in I_2} 1$$

olur. Buradan da

$$\lim_{r\to\infty} q(s_r) = \lim_{r\to\infty} \frac{q(u)}{q(u)} \sum_{k\in I_2} 1$$

$$= \lim_{r\to\infty} \sum_{k\in I_2} 1$$

$$= \sum_{k\in I_2} 1$$

$$= \infty$$

elde edilir. Bu ise kabülümüzle çelişir. O halde $(t_k)\in\Phi$'dir.

Teorem 2.2.5. $l_\infty \subseteq M[w_\infty(A,p,f,q,s)] \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$'dir.

İspat: $t=(t_k)\in l_\infty$ olsuun. Bu takdirde $\forall k$ için $|t_k|\le K$ olacak şekilde K pozitif tamsayısı bulunabilir. Böylece $\forall x\in w_\infty(A,p,f,q,s)$ ve $\forall m$ için,

$$\sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(t_k x_k)) \right]^{p_k} \right\} = \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(|t_k| q(x_k)) \right]^{p_k} \right\}$$

$$\le \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(Kq(x_k)) \right]^{p_k}$$

$$\le K^H \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(x_k)) \right]^{p_k}$$

$$< \infty$$

olacaktır. Bu da $t\in M[w_\infty(A,p,f,q,s)]$ demektir. Şimdi kabul edelimki $t\in M[w_\infty(A,p,f,q,s)]$ dir. Bu takdirde $\forall x\in w_\infty(A,p,f,q,s)$ için $t\cdot x\in w_\infty(A,p,f,q,s)$ 'dir. $q(u)>0$ olacak şekilde $u\in X$ sabit vektörü için $r\in IN$ olmak üzere,

$$x^r = \left(\theta, \theta, \ldots, \frac{u}{q(u)}, \ldots \right)$$

dizisini gözönüne alalım. Buna göre,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k^r\right)\right)\right]^{p_k} = a_{mr} r^{-s}[f(1)]^{p_r}$$

olup, $\forall m$ ve $r \in IN$ için bu ifade sınırlı olduğundan $\forall r \in IN$ için $x^r \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ 'dir. O halde $\forall r \in IN$ için $t \cdot x^r \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olmalıdır. Buna göre $\forall r \in IN$ için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f\left(q\left(t_k x_k\right)\right)\right]^{p_k} = \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f\left(|t_k| q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k}$$

$$= a_{mr} r^{-s}\left[f\left(|t_r|\right)\right]^{p_r}$$

$$< \infty$$

dur. Bu da $t \in w_\infty(A,p,f,s)$ demektir.

Teorem 2.2.6. $A=(a_{mk}) \geq 0$ regüler bir matris olmak üzere, herhangi f, f_1, f_2 modülüs fonksiyonları ile q, q_1, q_2 seminorm fonksiyonları ve s, s_1, $s_2 \geq 0$ için,

(i) s>1 ise $w_\infty(A,p,f_1,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f o f_1,q,s)$

(ii) $w_\infty(A,p,f_1,q,s) \cap w_\infty(A,p,f_2,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f_1+f_2,q,s)$

(iii) $w_\infty(A,p,f,q_1,s) \cap w_\infty(A,p,f,q_2,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q_1+q_2,s)$

(iv) q_1 kuvvetli q_2 ise $w_\infty(A,p,f,q_1,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q_2,s)$

(v) $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{f_1(t)}{f_2(t)} < \infty$ ise $w_\infty(A,p,f_2,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f_1,q,s)$

(vi) $s_1 \leq s_2$ ise $w_\infty(A,p,f,q,s_1) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s_2)$

olur.

İspat: (i) f sıfırda sağdan sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $0<\delta<1$ olacak şekilde $\exists \delta > 0 \ni 0 \leq t \leq \delta$ iken $f(t) < \varepsilon$'dur.

$$I_1 = \{k \in IN : f_1(q(x_k)) \le \delta\}$$

$$I_2 = \{k \in IN : f_1(q(x_k)) > \delta\}$$

dersek, Lemma 2.1.2.'den

$$f_1(q(x_k)) > \delta \text{ iken } f(f_1(q(x_k))) \le \left\{\frac{2f(1)}{\delta}\right\} f_1(q(x_k))$$

elde edilir. Böylece $x \in w_\infty(A, p, f_1, q, s)$ ve s>1 için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} [f \circ f_1(q(x_k))]^{p_k} = \sup_m \sum_{k \in I_1} a_{mk} k^{-s} [f \circ f_1(q(x_k))]^{p_k}$$

$$+ \sup_m \sum_{k \in I_2} a_{mk} k^{-s} [f \circ f_1(q(x_k))]^{p_k}$$

$$\le \sup_m \sum_{k \in I_1} a_{mk} k^{-s} [\varepsilon]^{p_k} + \sup_m \sum_{k \in I_2} a_{mk} k^{-s} \left[\left\{\frac{2f(1)}{\delta}\right\} f_1(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$\le \max(e^1, e^2) \sum_k a_{mk} k^{-s} + \max(d^1, d^2) \sum_k a_{mk} k^{-s} [f_1(q(x_k))]^{p_k}$$

$$< \infty$$

bulunur. Burada

$$e^1 = \varepsilon^{\inf p_k}, e^2 = \varepsilon^H, d^1 = \left\{\frac{2f(1)}{\delta}\right\}^{\inf p_k}, d^2 = \left\{\frac{2f(1)}{\delta}\right\}^H \tag{2.12}$$

şeklindedir. Böylece $x \in w_\infty(A, p, f o f_1, q, s)$ olduğu ispatlanmış olur.

(ii) $\forall k$ ve $x_k \in X$ için $q(x_k) \ge 0$ olduğundan, Eşitsizlik 1.2.18.-(ii)'den,

$$[(f_1 + f_2)(q(x_k))]^{p_k} = [f_1(q(x_k)) + f_2(q(x_k))]^{p_k}$$

$$\le C[f_1(q(x_k))]^{p_k} + C[f_2(q(x_k))]^{p_k}$$

ve $\forall k$ için $a_{mk} \geq 0$ ve $k^{-s} > 0$ olduğundan,

$$a_{mk}k^{-s}\left[(f_1+f_2)(q(x_k))\right]^{p_k} \leq Ca_{mk}k^{-s}\left[f_1(q(x_k))\right]^{p_k} + Ca_{mk}k^{-s}\left[f_2(q(x_k))\right]^{p_k}$$

olur. Burada m üzerinden supremum ve k=1'den ∞'a kadar toplam alınırsa

$$\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[(f_1+f_2)(q(x_k))\right]^{p_k} \leq C\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f_1(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$+ C\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f_2(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$< \infty$$

elde edilir Bu ise $x \in w_\infty(A,p,f_1,q,s) \cap w_\infty(A,p,f_2,q,s)$ iken $x \in w_\infty(A,p,f_1+f_2,q,s)$ olduğunu gösterir.

(iii) $\forall k$ için $a_{mk} \geq 0$ ve $k^{-s} > 0$ olduğundan, eşitsizlik 1.2.18-(ii)'den de faydalanarak

$$a_{mk}k^{-s}\left[f(q_1+q_2)(x_k)\right]^{p_k} = a_{mk}k^{-s}\left[f(q_1(x_k)+q_2(x_k))\right]^{p_k}$$

$$\leq a_{mk}k^{-s}\left[f(q_1(x_k))+f(q_2(x_k))\right]^{p_k}$$

$$\leq Ca_{mk}k^{-s}\left[f(q_1(x_k))\right]^{p_k} + Ca_{mk}k^{-s}\left[f(q_2(x_k))\right]^{p_k}$$

yazabiliriz. Buradan da (ii)'dekine benzer olarak her iki tarafın m üzerinden supremumunu ve k=1'den ∞'a kadar toplamını alırsak

$$\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f(q_1+q_2)(x_k)\right]^{p_k} \leq C\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f(q_1(x_k))\right]^{p_k}$$

$$+C\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f(q_2(x_k))\right]^{p_k}$$

$$< \infty$$

elde edilirki, bu da $x \in w_\infty(A,p,f,q_1,s) \cap w_\infty(A,p,f,q_2,s)$ iken $x \in w_\infty(A,p,f,q_1+q_2,s)$ olduğunu gösterir.

(iv) q_1 kuvvetli q_2 ise Tanım 1.2.6'dan $\forall k$ ve $x_k \in X$ için $q_2(x_k) \le Kq_1(x_k)$ olacak şekilde K pozitif tamsayısı bulunabilir. Böylece $x \in w_\infty(A,p,f,q_1,s)$ ise

$$
\begin{aligned}
\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f(q_2(x_k))\right]^{p_k} &\le \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f(Kq_1(x_k))\right]^{p_k} \\
&\le K^H \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f(q_1(x_k))\right]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

olur ki, bu da $x \in w_\infty(A,p,f,q_2,s)$ demektir.

(v) $\limsup\limits_{t \to \infty} \dfrac{f_1(t)}{f_2(t)} < \infty$ olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,\infty)$ için $\dfrac{f_1(t)}{f_2(t)} \le K$ olacak şekilde K>1 sabiti bulunabilir. $\forall k$ ve $x_k \in X$ için $q(x_k) \in [0,\infty)$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
\frac{f_1(q(x_k))}{f_2(q(x_k))} \le K \quad &\Rightarrow \frac{\left[f_1(q(x_k))\right]^{p_k}}{\left[f_2(q(x_k))\right]^{p_k}} \le K^{p_k} \le K^H \\
&\Rightarrow \left[f_1(q(x_k))\right]^{p_k} \le K^H \left[f_2(q(x_k))\right]^{p_k}
\end{aligned}
$$

olur. Burada $\forall k$ için $a_{mk} \ge 0$ ve $k^{-s} > 0$ olduğundan,

$$
a_{mk} k^{-s}\left[f_1(q(x_k))\right]^{p_k} \le K^H a_{mk} k^{-s}\left[f_2(q(x_k))\right]^{p_k}
$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte her iki tarafın m üzerinden supremumu ve k=1'den ∞'a kadar toplamı alınırsa, $\forall x \in w_\infty(A,p,f_2,q,s)$ için,

$$
\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f_1(q(x_k))\right]^{p_k} \le K^H \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f_2(q(x_k))\right]^{p_k}
$$

$< \infty$

elde edilir. Bu ise $x \in w_\infty(A,p,f_1,q,s)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(vi) $s_1 \le s_2$ olsun. Bu takdirde $\forall k$ için $0 < k^{-1} \le 1$ olduğundan $\forall k$ için $k^{-s_2} < k^{-s_1}$ olur. Böylece $\forall k$ ve $x_k \in X$, $x \in w_\infty(A,p,f,q,s_1)$ için,

$$a_{mk} k^{-s_2} \left[f(q(x_k)) \right]^{p_k} \le a_{mk} k^{-s_1} \left[f(q(x_k)) \right]^{p_k}$$

olur. Burada m üzerinden supremum ve k=1'den ∞'a kadar toplam alınırsa sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.7.

(i) s>1 ise $w_\infty(A,p,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$

(ii) $q_1 \equiv q_2$ ise $w_\infty(A,p,f,q_1,s) \equiv w_\infty(A,p,f,q_2,s)$

(iii) $w_\infty(A,p,f,q) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$

(iv) $w_\infty(A,p,q) \subseteq w_\infty(A,p,q,s)$

(v) $w_\infty(A,f,q) \subseteq w_\infty(A,f,q,s)$

İspat: (i) Teorem 2.1.6-(i)'de $f_1(t) = t$ alınırsa, s>1 için

$w_\infty(A,p,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğu görülür.

(ii) $q_1 \equiv q_2$ ise $\forall x_k \in X$ için $\dfrac{q_1(x_k)}{q_2(x_k)} \le T$ olacak şekilde T pozitif sayısı vardır. Buradan,

$$\frac{q_1(x_k)}{q_2(x_k)} \le T \quad \Rightarrow q_1(x_k) \le T q_2(x_k)$$

yazılabilir. Böylece Teorem 2.1.6-(iv)'dekine benzer olarak $x \in w_\infty(A,p,f,q_2,s)$ ise,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q_1(x_k)\right)\right]^{p_k} \leq \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(T.q_2(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq T^{H} \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q_2(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$< \infty$$

elde edilir ki, bu bize $x \in w_\infty(A,p,f,q_1,s)$ olduğunu, dolayısıyla da

$$w_\infty(A,p,f,q_2,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q_1,s) \qquad (2.13)$$

olduğunu gösterir.

Benzer olarak $q_1 \equiv q_2$ ise $\forall x_k \in X$ için $\dfrac{q_2(x_k)}{q_1(x_k)} \leq K$ olacak şekilde K pozitif sabiti vardır. Yine benzer düşünce ile

$$\frac{q_2(x_k)}{q_1(x_k)} \leq K \quad \Rightarrow q_2(x_k) \leq K q_1(x_k)$$

yazılabilir. Buradan da $\forall x \in w_\infty(A,p,f,q_1,s)$ için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q_2(x_k)\right)\right]^{p_k} \leq \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(K q_1(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$\leq K^H \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q_1(x_k)\right)\right]^{p_k}$$

$$< \infty$$

olur ki bu da $x \in w_\infty(A,p,f,q_2,s)$ olduğunu ve dolayısıyla

$$w_\infty(A,p,f,q_1,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q_2,s) \qquad (2.14)$$

olduğunu gösterir. 2.13 ve 2.14 'den $q_1 \equiv q_2$ iken

$$w_\infty(A,p,f,q_1,s) \equiv w_\infty(A,p,f,q_2,s)$$

elde edilir.

(iii) Teorem 2.1.6- (vi)'da $s_1 = 0$ *ve* $s_2 = s$ alınırsa,

$w_\infty(A,p,f,q) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğu görülür.

(iv) Teorem 2.1.6- (vi)'da $s_1 = 0$, $s_2 = s$ ve $f(t) = t$ alınırsa,

$w_\infty(A,p,q) \subseteq w_\infty(A,p,q,s)$ olduğu görülür.

(v) Teorem 2.1.6- (vi)'da $s_1 = 0$, $s_2 = s$ ve $\forall k$için $p_k = 1$ alınırsa,

$w_\infty(A,f,q) \subseteq w_\infty(A,f,q,s)$ elde edilir.

Şimdi de hangi şartlar altında bu uzayların X üzerinde tanımlı bütün dizilerin uzayına eşit olduğunu karakterize eden bir teoremi verelim.

Teorem 2.2.8. s>1 ve A=(a_{mk}) matrisi için $\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$ şartı sağlansın. Bu takdirde,

(i) $w_\infty(A,q) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$

(ii) f sınırlı ise $w_\infty(A,p,f,q,s) \equiv S(X)$

(iii) q sınırlı ise $w_\infty(A,p,q,s) \equiv w_\infty(A,p,f,q,s) \equiv S(X)$

dir.

İspat: (i) $x \in w_\infty(A,q)$ olsun. Bu takdirde $\forall k$ için $f(q(x_k)) \le f(K) \le T$ olacak şekilde T>1 pozitif sabiti bulunabilir. Böylece (a_{mk}) matrisinin özelliği de dikkate alınarak, s>1 ve $\forall m$ için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f(q(x_k))\right]^{p_k} \le \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} [T]^{p_k}$$

$$\le T^H \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}$$

$$< \infty$$

olacağından $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ elde edilir.

(ii) f sınırlı olsun. Bu takdirde 2.11 'den herhangi $x=(x_k)\in S(X)$ için s>1 olduğunda,

$$\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f(q(x_k))\right]^{p_k} \le \sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}[K]^{p_k}$$

$$\le K^H \sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}$$

$$< \infty$$

elde edilirki, bu da $x\in w_\infty(A,p,f,q,s)$ demektir. O halde $S(X)\subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$ dir. $w_\infty(A,p,f,q,s)\subseteq S(X)$ olduğu tanımdan açıktır. Çünkü $w_\infty(A,p,f,q,s)$ uzayını;

$$w_\infty(A,p,f,q,s)=\left\{x\in S(X):\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f(q(x_k))\right]^{p_k}<\infty, s\ge 0\right\}$$

şeklinde tanımlamıştık. Bu tanım, $w_\infty(A,p,f,q,s)$ uzayını oluşturan bütün elemanların S(X) uzayından alındığını ifade eder. Dolayısıyla $w_\infty(A,p,f,q,s)\subseteq S(X)$'dir. Bu ikisinden de $w_\infty(A,p,f,q,s)\equiv S(X)$ elde edilir.

(iii) q sınırlı olsun Bu takdirde $\forall k$ ve $x_k\in X$ için

$$q(x_k)\le T \qquad (2.15)$$

olacak şekilde T>1 sabiti bulunabilir. O halde herhangi $x=(x_k)\in S(X)$ için s>1 olduğunda

$$\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[q(x_k)\right]^{p_k} \le \sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}[T]^{p_k}$$

$$\le T^H \sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}$$

$$< \infty$$

elde edilirki, bu da $x\in w_\infty(A,p,q,s)$ demektir. Böylece $S(X)\subseteq w_\infty(A,p,q,s)$ olur. $w_\infty(A,p,q,s)\subseteq S(X)$ olduğu tanımdan açıktır. Bu ikisinden de $w_\infty(A,p,q,s)\equiv S(X)$ olduğu görülür. Ayrıca 2.15 ile f'in sürekli ve artan oluşundan $\forall k$ ve $x_k \in X$ için $f(q(x_k)) \leq K$ olacak şekilde K>1 sabiti vardır. Bu yüzden herhangi $x=(x_k) \in S(X)$ için s>1 olduğunda (ii)'dekine benzer şekilde $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ elde edilir ki, bu da $S(X) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$ demektir.

$w_\infty(A,p,f,q,s) \subseteq S(X)$ olduğundan $w_\infty(A,p,f,q,s) \equiv S(X)$ bulunur. Buradan da,

$$w_\infty(A,p,q,s) \equiv w_\infty(A,p,f,q,s) \equiv S(X)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.9. $t \in [0,\infty)$ olmak üzere $A=(a_{mk})$ matrisi için $\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$ şartı sağlansın. Bu takdirde,

(i) $t \leq f(t)$ ise $w_\infty(A,f,q) \subseteq w_\infty(A,q)$

(ii) $t \geq f(t)$ ise $w_\infty(A,q) \subseteq w_\infty(A,f,q)$

dur.

İspat: (i) Kabul edelimki $x \in w_\infty(A,f,q)$ olsun. Bu takdirde $\forall t \in [0,\infty)$ için $t \leq f(t)$ ve $q(x_k)$ reel, aynı zamanda non-negatif tanımlı olduğundan $q(x_k) \leq f(q(x_k))$ için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} q(x_k) \leq \sup_m \sum_k a_{mk} f(q(x_k))$$

$$< \infty$$

elde edilir ki, bu da $x \in w_\infty(A,q)$ demektir.

(ii) Kabul edelimki $x \in w_\infty(A,q)$ olsun. Bu takdirde (i)' deki benzer düşünce ile

$$f(q(x_k)) \leq q(x_k)$$

için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} f(q(x_k)) \leq \sup_m \sum_k a_{mk} q(x_k)$$

$< \infty$

elde edilir ki, bu da $x \in w_\infty(A,f,q)$ demektir.

Teorem 2.2.10. $A=(a_{mk})$ matrisi için $\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$ şartı sağlansın. Ayrıca $t=(t_k)$ ve $r=(r_k)$ sınırlı diziler ve $\forall k \in IN$ için $0 \le t_k \le r_k$ olsun. Bu takdirde

$$w_\infty(A,t,f,q) \subseteq w_\infty(A,r,f,q)$$

dur.

İspat: $x \in w_\infty(A,t,f,q)$ olsun. Bu takdirde yakınsaklık tanımından $\forall 0<\varepsilon<1$ için $\exists k_0$ vardır. $\ni$ $\forall k>k_0$ iken,

$$[f(q(x_k))]^{t_k} < \varepsilon < 1$$

dir. $\forall k$ için $t_k \le r_k$ olacağından $k>k_0$ iken

$$[f(q(x_k))]^{r_k} \le [f(q(x_k))]^{t_k}$$

olur. Burada $A=(a_{mk})$ matrisine konulan şartlar altında,

$$\sup_m \sum_k a_{mk}[f(q(x_k))]^{r_k} \le \sup_m \sum_k a_{mk}[f(q(x_k))]^{t_k}$$

$$< \infty$$

olur. Bu ise $x \in w_\infty(A,r,f,q)$ demektir.

Sonuç 2.2.11. $\forall k \in IN$ için,

(i) $0<p_k \le 1$ ise $w_\infty(A,p,f,q) \subseteq w_\infty(A,f,q)$

(ii) $p_k \ge 1$ ise $w_\infty(A,f,q) \subseteq w_\infty(A,p,f,q)$

İspat: (i) Teorem 2.2.10.'da $\forall k \in IN$ için $p_k = t_k$ ve $r_k = 1$ alınırsa, $w_\infty(A,p,f,q) \subseteq w_\infty(A,f,q)$ olduğu görülür.

(ii) Teorem 2.2.10.'da $\forall k \in IN$ için $p_k = r_k$ ve $t_k = 1$ alınırsa, $w_\infty(A,f,q) \subseteq w_\infty(A,p,f,q)$ olduğu görülür.

Sonuç 2.2.12. $\forall k \in IN$ için,

(i) $0 < p_k \leq 1$ ise $w_\infty(A,p,q) \subseteq w_\infty(A,q)$

(ii) $p_k \geq 1$ ise $w_\infty(A,q) \subseteq w_\infty(A,p,q)$

İspat: (i) Teorem 2.2.10.'da $\forall t \in [0,\infty)$ için $f(t) = t$, $\forall k \in IN$ için $p_k = t_k$ ve $r_k = 1$ seçilirse $w_\infty(A,p,q) \subseteq w_\infty(A,q)$ elde edilir.

(ii) Yine Teorem 2.2.10.'da $\forall t \in [0,\infty)$ için $f(t) = t$, $\forall k \in IN$ için $p_k = r_k$ ve $t_k = 1$ alınırsa $w_\infty(A,q) \subseteq w_\infty(A,p,q)$ olduğu görülür.

Sonuç 2.2.13. $\forall k \in IN$, $\forall t \in [0,\infty)$ için $t \leq f(t)$ olmak üzere,

(i) $0 < p_k \leq 1$ ise $w_\infty(A,p,f,q) \subseteq w_\infty(A,q)$

(ii) $p_k \geq 1$ ise $w_\infty(A,q) \subseteq w_\infty(A,p,q,s)$

dir.

İspat: (i) Teorem 2.2.9.'da

$$w_\infty(A,f,q) \subseteq w_\infty(A,q) \tag{2.16}$$

olduğu ve Sonuç 2.2.11.'de

$$w_\infty(A,p,f,q) \subseteq w_\infty(A,f,q) \tag{2.17}$$

olduğu gösterilmişti. 2.17 ve 2.16'dan,

$$w_\infty(A,p,f,q) \subseteq w_\infty(A,f,q) \subseteq w_\infty(A,q)$$

yazılabilir. Kapsama bağıntısının geçişme özelliği kullanılarak da

$$w_\infty(A,p,f,q)\subseteq w_\infty(A,q)$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

(ii) Sonuç 2.2.7- (iv) ve sonuç 2.2.12-(ii) gözönüne alınırsa

$$w_\infty(A,q)\subseteq w_\infty(A,p,q,s)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.14. A=(a_{mk}) matrisi için $\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$ şartı sağlansın. Ayrıca, $p_k = 0(r_k)$ ve $r_k = 0(p_k)$ olsun. Bu takdirde,

$$w_\infty(A,p,f,q) = w_\infty(A,r,f,q)$$

dur.

İspat: $x=(x_k)\in w_\infty(A,p,f,q)$ olsun. Yani $\forall k \in IN$ için

$F=\left[f(q(x_k))\right]^{p_k} = 0(1)$ ve $r_k = 0(p_k)$ olduğundan $\frac{r_k}{p_k}\le M$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı vardır. Buradan,

$$\left[f(q(x_k))\right]^{r_k} = \left[\left[f(q(x_k))\right]^{r_k}\right]^{\frac{p_k}{p_k}}$$

$$= \left[f(q(x_k))\right]^{r_k\frac{p_k}{p_k}}$$

$$= \left[f(q(x_k))\right]^{p_k\frac{r_k}{p_k}}$$

$$\left[f(q(x_k))\right]^{r_k} \le F^M$$

olur. A=(a_{mk}) matrisi için hipotezdeki kabul göz önüne alınarak,

$$\sup_m \sum_k a_{mk}\left[f(q(x_k))\right]^{r_k} \le \sup_m \sum_k a_{mk} F^M$$

$< \infty$

elde edilir. Bu ise $w_\infty(A,p,f,q) \subset w_\infty(A,r,f,q)$ demektir. Benzer şekilde $w_\infty(A,r,f,q) \subset w_\infty(A,p,f,q)$ olduğu gösterilebilir. Bu ikisinden de $w_\infty(A,p,f,q) = w_\infty(A,r,f,q)$ bulunur.

Sonuç 2.2.15. A=(a_{mk}) matrisi için $\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$ şartı sağlansın. $p_k = 0(r_k)$ ve $r_k = 0(p_k)$ ise

$$w_\infty(A,p,q) = w_\infty(A,r,q)$$

dır.

İspat: Teorem 2.2.14 'de f modülüs fonksiyonu $\forall t \in [0,\infty)$ için $f(t) = t$ olacak şekilde seçilirse sonuç görülür.

2.3. $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ Dizi Uzayı Üzerinde Bağıntılar

$w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayında f modülüsü yerine Teorem 2.1.1 'den dolayı $\forall v \in IN$ için f^v modülüs fonksiyonu alınırsa,

$$w_\infty(A,p,f^v,q,s) = \left\{ x \in S(X) : \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f^v(q(x_k)) \right]^{p_k} < \infty, s \geq 0, v \in IN \right\}$$

olur. $w_\infty(A,p,f,q,s)$'de geçerli olan bütün ifadeler f yerine f^v alınırsa $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$'de de aynen geçerlidir. Örneğin; $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ de tam paranormlu uzaydır. Tabii buradaki paranorm fonksiyonu;

$$G_v(x) = \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f^v(q(x_k)) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

şeklinde olacaktır. Bu kısımdaki amaç, $v \in IN$'in durumuna göre $w_\infty(A,p,f^v,q,s)$ dizi uzayını incelemektir.

Teorem 2.3.1. s>1 ve $n<v$, $n,v \in IN$ olsun. Bu takdirde,

$$w_\infty(A,p,f^n,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^v,q,s)$$

olup, bu kapsama bağıntısının tersi genelde doğru değildir.

İspat: İspatı tüme varım metoduyla yapacağız. $v-n=r$ dersek $r \in IN$ ve r≥1 olur. Şimdi r=1 için doğruluğunu gösterelim. Bunun için,

$$w_\infty(A,p,f^n,q,s) \subset w_\infty(A,p,f^{n+1},q,s)$$

olduğunu göstermek gerekir.

f sıfırda sağdan sürekli olduğundan, $\varepsilon>0$ için $0<\delta<1$ olacak şekilde $\exists\delta>0$ vardır öyleki $0<t<\delta$ iken $f(t)<\varepsilon$'dur.

$$I_1=\{k \in IN: f^n(q(x_k)) \le \delta\}$$

$$I_2=\{k \in IN: f^n(q(x_k)) > \delta\}$$

dersek, Lemma 2.1.2. ve 2.12 ifadesinden s>1 ve $x \in w_\infty(A,p,f^n,q,s)$ olduğunda,

$$\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f^{n+1}(q(x_k))\right]^{p_k} = \sup_m \sum_k a_{mk}k^{-s}\left[f(f^n(q(x_k)))\right]^{p_k}$$

$$= \sup_m \left[\sum_{k\in I_1} a_{mk}k^{-s}\left[f(f^n(q(x_k)))\right]^{p_k} + \sum_{k\in I_2} a_{mk}k^{-s}\left[f(f^n(q(x_k)))\right]^{p_k}\right]$$

$$\le \sup_m \sum_{k\in I_1} a_{mk}k^{-s}\left[f(f^n(q(x_k)))\right]^{p_k} + \sup_m \sum_{k\in I_2} a_{mk}k^{-s}\left[f(f^n(q(x_k)))\right]^{p_k}$$

$$\le \sup_m \sum_{k\in I_1} a_{mk}k^{-s}[\varepsilon]^{p_k} + \sup_m \sum_{k\in I_2} a_{mk}k^{-s}\left[\{2f(1)/\delta\}f^n(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$\leq \max(e^1,e^2)\sup_m \sum_{k\in I_1} a_{mk}k^{-s} + \max(d^1,d^2)\sup_m \sum_{k\in I_2} a_{mk}k^{-s}\left[f^n(q(x_k))\right]^{p_k}$$

$$< \infty$$

olur. Bu da $x \in w_\infty(A,p,f^{n+1},q,s)$ olduğunu gösterir. Böylece r=1 için doğruluğu gösterilmiş olur. Şimdi r için doğruluğunu kabul edelim. Yani,

$$w_\infty(A,p,f^n,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^{n+r},q,s) \qquad (2.18)$$

olsun. r+1 için doğruluğunu gösterelim. Bunun için

$$w_\infty(A,p,f^n,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^{n+r+1},q,s)$$

olmalıdır. Bunun yerine 2.18 'den dolayı

$$w_\infty(A,p,f^{n+r},q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^{n+r+1},q,s)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. Halbuki bu da r=1 için yapılan yolla kolayca elde edilebilir. Çünkü orada n yerine n+r almak yeterlidir. Böylece r+1 içinde doğruluğu gösterilmiş olur.

Şimdi de bu kapsama bağıntısının tersinin genelde doğru olmadığını gösterelim. Bunun için bir ters örnek vermek yeterlidir. Kabul edelim ki,

$X = IR$, $\quad q(u)=|u|$, $\quad f(t)=t^{1/3}$, $\quad s=2$ ve $\forall k$ için $p_k=5$ olsun. Buna göre,

$$w_\infty(A,p,f^v,q,s) = \left\{ x \in S(X): \sum_k a_{mk}k^{-2}|x_k|^{5/3^v} < \infty, v \in IN \right\}$$

olacaktır.

$$w_\infty(A,p,f^v,q,s) \not\subset w_\infty(A,p,f^n,q,s)$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $x \in w_{\infty}(A,p,f^{v},q,s)$ ve $x \notin w_{\infty}(A,p,f^{n},q,s)$ olacak şekilde $\Re$'de bir $x=(x_k)$ dizisi bulmamız yeterlidir. $v,m,k \in IN$ olmak üzere,

$$a_{mk}=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$$

ve $x=\left(k^{\frac{3^{v-1}}{5}}\right)$ seçilişi için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-2}|x_k|^{5/3^v} = \sup_k \sum_k 1\cdot k^{-2}\left(k^{\frac{3^{v-1}}{5}}\right)^{5/3^v}$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-2}\left(k^{\frac{3^{v-1}}{5}\cdot\frac{5}{3^v}}\right)$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-2}k^{3^{v-1}.3^{-v}}$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-2}k^{3^{-1}}$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-2}k^{1/3}$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-\frac{5}{3}}$$

$$= \sup_k \sum_k \frac{1}{k^{5/3}}$$

$$< \infty$$

olduğundan $x \in w_{\infty}(A,p,f^{v},q,s)$'dir. Fakat,

$$\sup_m \sum_k a_{mk}k^{-2}|x_k|^{5/3^n} = \sup_k \sum_k 1.k^{-2}\left(k^{\frac{3^{v-1}}{5}}\right)^{5/3^n}$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-2} \left(k^{\frac{3^{\nu-1}}{5} \cdot \frac{5}{3^n}} \right)$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-2} k^{3^{\nu-n-1}}$$

$$\geq \sup_k \sum_k k^{-2} . k$$

$$= \sup_k \sum_k k^{-1}$$

$$= \sup_k \sum_k \frac{1}{k}$$

$$= \infty$$

olacağından $x \notin w_\infty(A,p,f^n,q,s)$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.3.2. s>1 ve $\nu \in IN$ olsun. Bu takdirde,

(i) $w_\infty(A,p,f,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^\nu,q,s)$

(ii) $w_\infty(A,p,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^\nu,q,s)$

İspat: (i) Teorem 2.3.1'de n=1 alınırsa sonuç kolayca elde edilir.

(ii) Bu da (i) ve sonuç 2.2.7-(i)'den kolayca görülür.

Teorem 2.3.3. $n < \nu$, $n,\nu \in IN$ olsun. Bu takdirde,

(i) $f(t) < t$ ise $w_\infty(A,p,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^n,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^\nu,q,s)$

(ii) $f(t) \geq t$ ise $w_\infty(A,p,f^\nu,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^n,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,q,s)$

İspat: (i) $f(t) < t$ ise, f modülüs fonksuyonu artan olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$f^\nu(t) \leq f^{\nu-1}(t) \leq \ldots \leq f^n(t) \leq \ldots \leq f^2(t) \leq f(t) < t$$

$\forall k$ ve $x_k \in X$ için $q(x_k) \geq 0$ olacağından,

$$f^{v}(q(x_k)) \leq f^{v-1}(q(x_k)) \leq \ldots \leq f^{n}(q(x_k)) \leq \ldots \leq f^{2}(q(x_k)) \leq f(q(x_k)) < q(x_k)$$

elde edilir. Buradan da $\forall k$ için $p_k > 0$ olduğundan,

$$\left[f^{v}(q(x_k))\right]^{p_k} \leq \left[f^{v-1}(q(x_k))\right]^{p_k} \leq \ldots \leq \left[f^{n}(q(x_k))\right]^{p_k} \leq \ldots \leq \left[f(q(x_k))\right]^{p_k} < \left[q(x_k)\right]^{p_k}$$

olur. $a_{mk} > 0$ ve $k^{-s} > 0$ olduğundan $\forall k$ ve $x_k \in X$, $p_k > 0$ için,

$$\left.\begin{aligned} a_{mk}k^{-s}\left[f^{v}(q(x_k))\right]^{p_k} &\leq a_{mk}k^{-s}\left[f^{v-1}(q(x_k))\right]^{p_k} \leq \ldots \leq a_{mk}k^{-s}\left[f^{n}(q(x_k))\right]^{p_k} \\ &\leq \ldots \leq a_{mk}k^{-s}\left[f(q(x_k))\right]^{p_k} \leq a_{mk}k^{-s}\left[q(x_k)\right]^{p_k} \end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada k üzerinden toplam ve m üzerinden supremum alınırsa,

$$w_\infty(A,p,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^{n},q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^{v},q,s)$$

olduğu görülür.

(ii) $f(t) \geq t$ iken (i) dekine benzer şekilde

$\forall k$ ve $x_k \in X$, $p_k > 0$, $k^{-s} > 0$, $a_{mk} > 0$ için,

$$\left.\begin{aligned} a_{mk}k^{-s}\left[f^{v}(q(x_k))\right]^{p_k} &\geq a_{mk}k^{-s}\left[f^{v-1}(q(x_k))\right]^{p_k} \geq \ldots \geq a_{mk}k^{-s}\left[f^{n}(q(x_k))\right]^{p_k} \\ &\geq \ldots \geq a_{mk}k^{-s}\left[f(q(x_k))\right]^{p_k} \geq a_{mk}k^{-s}\left[q(x_k)\right]^{p_k} \end{aligned}\right\} \quad (2.20)$$

elde edilir ki, bu da,

$$w_\infty(A,p,f^{v},q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f^{n},q,s) \subseteq w_\infty(A,p,q,s)$$

olduğunu gösterir.

Sonuç 2.3.4. $s>1$, $f(t)\geq t$ ve $v\in IN$ ise

$$w_\infty\left(A,p,f^v,q,s\right)\equiv w_\infty(A,p,q,s)$$

dir.

İspat: sonuç 2.3.2-(ii) ve Teorem 2.3.3-(ii) birlikte düşünülürse sonuç görülür.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Bu bölümde, (X,q) seminormlu, kompleks (ya da reel) lineer uzayının tam olmadığını kabul ederek, $w_\infty(A,p,f,q,s)$ 'nin de tam olmadığı gösterilip, $w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizi uzayı ile diğer bazı dizi uzayları arasında ki kapsama bağıntıları verilecektir.

3.1. $w_\infty(A,p,f,q,s)$'nin Tam Olmayışı

Teorem 3.1.1. (X,q) tam değilse, $w_\infty(A,p,f,q,s)$'de G paranormuna göre tam değildir.

İspat: (X,q) tam olmasın. Bu takdirde X'de Cauchy, fakat yakınsak olmayan bir $u=(u_k)$ dizisi vardır. $x=(x^n)$ dizisi,

$$x^1=(u_1,\theta,\theta\ldots)$$
$$x^2=(u_2,\theta,\theta\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^n=(u_n,\theta,\theta\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

olacak şekilde tanımlansın. Buna göre,

$$x^n-x^r=(u_n-u_r,\theta,\theta,\ldots)$$

olur. Burada,

$$x_k^n - x_k^r = \begin{cases} u_n - u_r, & k = 1 \\ \theta \ , & k \neq 1 \end{cases}$$

olacağından,

$$G(x^n - x^r) = \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q(x_k^n - x_k^r) \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$= \sup_m \left\{ a_{m1} \left[f\left(q(u_n - u_r) \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

olacaktır. f modülüs ve u, (X,q)'da bir Cauchy dizisi olduğundan,

$$\lim_{n,r\to\infty} G(x^n - x^r) = \lim_{n,r\to\infty} \sup_m \left\{ a_{m1} \left[f\left(q(u_n - u_r) \right) \right]^{p_1} \right\}^{1/M}$$

$$= \sup_m \left\{ a_{m1} \left[f\left(\lim_{n,r\to\infty} q(u_n - u_r) \right) \right]^{p_1} \right\}^{1/M}$$

$$= 0$$

olur. O halde (x^n), $w_\infty(A,p,f,q,s)$' de bir Cauchy dizisidir. (x^n)'in $w_\infty(A,p,f,q,s)$'de yakınsak olmadığını gösterirsek ispat tamamlanır. Kabul edelim ki,

$$G(x^n - t) \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{3.1}$$

olacak şekilde $t = (t_k) \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ dizisi vardır. Buna göre,

$$x^n - t = (u_n - t_1, \theta - t_2, \theta - t_3, \ldots \ldots)$$

$$= (u_n - t_1, -t_2, -t_3, \ldots \ldots)$$

ve

$$G(x^n - t) = \sup_m \left\{ a_{m1} \left[f\left(q(u_n - t_1) \right) \right]^{p_1} + \sum_{k\geq 2} a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q(-t_k) \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

$$\geq \sup_m \left\{ a_{m1} \left[f\left(q\left(u_n - t_1 \right) \right) \right]^{p_1} \right\}^{1/M}$$

olup, 3.1 ve f modülüs olduğundan

$$\lim_{n,r \to \infty} q\left(u_n - t_1 \right) = 0$$

olur ki, bu da u'nun seçilişi ile çelişir. O halde $\left(x^n \right)$ yakınsak olamaz.

Sonuç 3.1.2. (X,q) tam değilse $w_\infty(A,p,q,s)$ de

$$G^*(x) = \sup_m \left\{ \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[q\left(x_k \right) \right]^{p_k} \right\}^{1/M}$$

paranormuna göre tam değildir.

İspat: Teorem 3.1.1'de $f(t)=t$ alınırsa sonuç kolayca elde edilir.

3.2. $w_\infty(A,p,f,q,s)$ Dizi Uzayı ile Diğer Bazı Dizi Uzayları Arasındaki Kapsama Bağıntıları

Teorem 3.2.1. A $=(a_{mk})$ matrisi için $\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$ şartı sağlansın. Bu takdirde,

(i) $l(p,f,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$

(ii) s>0 ise $l_\infty(q) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$

İspat: $x \in l(p,f,q,s)$ olsun. Bu takdirde,

$$k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olur. Burada A=(a_{mk}) matrisinin özelliği kullanılarak

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki bu da $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ demektir.

(ii) $x \in l_\infty(q)$ olsun. Bu takdirde $\forall k$ için $q(x_k) \le K$ olacak şekilde pozitif K sabiti vardır. f sürekli ve artan olduğundan $\forall k$ için $f(q(x_k)) \le f(K) \le T$ olacak şekilde T>1 pozitif sabiti bulunabilir. Böylece $\forall m$ için,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$$

olduğundan,

$$\sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k} \le \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s} [T]^H$$

$$< \infty$$

elde edilir ki, bu da $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ demektir.

Teorem 3.2.2. $w_\infty(p,f,q,s) \subseteq l_\infty(p,f,q,s)$ 'dir.

İspat: Kabul edelim ki $x \in w_\infty(p,f,q,s)$ olsun. Bu takdirde,

$$\sup_k \sum_k k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

olduğundan

$$k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

dur. Buradan da

$$\sup_k k^{-s} \left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki bu, $x \in l_\infty(p,f,q,s)$ demektir.

Teorem 3.2.3. $A=(a_{mk})$ matrisi için, $\sup_m \sum_k a_{mk} < \infty$ şartı sağlansın. Bu takdirde $l_\infty(p,f,q,s) \subseteq w_\infty(A,p,f,q,s)$'dir.

İspat: Kabul edelim ki, $x \in l_\infty(p,f,q,s)$ olsun. Bu takdirde

$$k^{-s}\left[f\left(q\left(X_k\right)\right)\right]^{Pk} < \infty$$

dır. A=(a_{mk}) matrisinin özelliği kullanılarak,

$$\sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_m \sum_k a_{mk} k^{-s}\left[f\left(q\left(x_k\right)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki, bu da $x \in w_\infty(A,p,f,q,s)$ olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

BİLGİN, T., 1992. $l(p,f,q,s)$ Dizi Uzayı ve Bu Uzayda Bazı Matris Dönüşümleri, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Erciyes Ünv. Fen Bil. Enst.

BULUT, E. and ÇAKAR, Ö., 1979. The Sequence Space $l(p,s)$ and Related Matrix Transformations, Comm. Fac.Scie. Ankara Ünv., 33-34.

CONNOR, J., 1989. On Strong Matrix Summability with Respect to a Modulus and Statisticial Convergence, Canad. Mat h. Bull. Vol. 32,2, 194-198O.

COOKE, R.G., 1950. Infinite Matrices and Sequence Spaces, Mac-Millian and co., Limited St. Martin's Street. London.

ÇAKAR, Ö., 1973. ON Matrix Transformations of Sequence Spaces Defined in an Incomplete Space. comm. Fac. Scie. Ankara University, Ser.A, 22 , 105-121.

EROĞLU, A., 1994$l_\infty(p,f,q,s)$ Paranormlu Uzayı ve Bu Uzayda Bazı Matris Dönüşümleri. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Erciyes Ünv. Fen Bil. Enst. Kayseri.

FADDEN, L.Mc., 1942. Absolute Norlund Summability, Duke Math. J., 168-207.

KUTTNER, B., 1946 Note On Strong Summability, J. London Math. Soc., 118-122.

MADDOX,I.J.,1968. Paranormed Sequence Spaces Genareted by Infinite Matrices, Proc. Camb. Phil. Soc., 335-340.

MADDOX,I.J., 1970. Elements of Functional Analises, Cambridge University Press.

MADDOX,I.J. and WİLLEY, M.A.L.,1974. Continuous Operators On Paranormed Spaces and Matrix Transformations, Pasific J. Math., 217-228.

MADDOX, I.J. 1976. Spaces of Strongly Summable Sequences, Quaterly J.Math. Oxford, 345-355.

MADDOX, I.J., 1986. Sequence Spaces Defined by a Modulus, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 161-166.

MADDOX, I.J., 1988. Statisticial Convergence in a Locally Convex Space, Math. Proc. Camb. Phil.Soc., 141-145.

MADDOX, I.J., 1991. Solidity in Sequence Spaces, Revista Matematice Dela Üniversidad Coplutense de Madrid Vol.4, 185-192.

NAKANO, H., 1953. Concave Modulars, J. Math. Soc. Japon, 29-49.

NANDA, S., 1983. Matrix Transformations and Sequence Spaces, Miramare-Trieste.

PETERSEN, M.G., 1966. Reguler Matrix Transformations, Mc. Graw-Hill.

RUCLE, W.H., 1973. FK Spaces in Which The Sequence of Coordinate Vectors is Bounded, Canad. J. Math., 973-987.

WILANSKY, A., 1964. Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:Zafer ÇAKIR
Baba Adı	:Halit
Ana Adı	:Emine
Doğum Yeri ve Yılı	:Gölköy-1970

İlk ve orta tahsilini Gölköy'de, lise tahsilini ise Erzincan'da tamamladı. Uludağ Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi'nden lisans diploması alarak 1993 yılında mezun oldu. Şubat 1994'de Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisansa başladı. Aynı yıl Eylül ayında Tokat'ın Almus ilçesine bağlı Çevreli Ortaokulu'na matematik öğretmeni olarak atandı. Evli olup, halen Ağustos 1995'de girdiği Kafkas Üniversitesi'nde matematik okutmanı olarak görev yapmaktadır.