T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKSTREMAL POLİNOMLARIN KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Burçin OKTAY

Balıkesir, Mayıs - 2007

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKSTREMAL POLİNOMLARIN KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Burçin OKTAY

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi : 08.05.2007
Jüri Üyeleri :
Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (BAÜ, FEF) (Danışman)
Prof. Dr. Güzin GÖKMEN (DEÜ, FEF)
Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (UÜ, FEF)
Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ, FEF)
Yrd. Doç. Dr. Ali GÜVEN (BAÜ, FEF)

Balıkesir, Mayıs – 2007

"Bu çalışma Balıkesir Üniversitesi Rektörlüğü Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından BAP 2006/39 Kodlu Proje İle desteklenmiştir. Teşekkür ederiz."

ÖZET

EKSTREMAL POLİNOMLARIN KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Burçin OKTAY
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV)

Balıkesir, 2007

Giriş ve sonuç bölümleri dışında bu tez esas olarak dört bölümden oluşmaktadır.

2. Bölümde, kompleks düzlemde yaklaşım problemlerinin incelendiği bazı bölge ve eğri sınıfları tanıtıldı. Daha sonra gereken analitik fonksiyon uzayları tanımlanarak bu uzayların önemli özellikleri incelendi. Bölümün son kısmında, pratikteki öneminden tezin giriş bölümünde söz edilen ve çalışmamızda yaklaşılan fonksiyon konumundaki konform dönüşüm ve bu dönüşümün bir genelleşmesi olan kvazikonform dönüşüm tanıtıldı.

3. Bölümde, bir bölgede analitik olan ve bazı ek koşulları sağlayan fonksiyonlar sınıfında bir ekstremal problem ve bu problemin çözümü verildi. Daha sonra benzer probleme belirli ek koşulları sağlayan polinomlar sınıfında bakılarak bu problemin çözümü olan Bieberbach polinomları tanıtıldı ve özellikleri incelendi.

4. bölümün ilk kısmında Dini-düzgün bölgelerin bir alt sınıfı tanımlanarak bu sınıftan olan bölgelerde Bieberbach polinomları ile konform dönüşüme yaklaşım problemleri incelendi. Bölümün ikinci kısmında ise aynı sınıftan olan bölgelerde genelleşmiş Bieberbach polinomları ile, konform dönüşüm yardımıyla ifade edilen özel bir fonksiyona yaklaşım problemleri araştırıldı.

5. bölümde konform dönüşüm yardımıyla ifade edilen özel fonksiyona sınırlı rotasyonlu düzgün bölgelerde, genelleşmiş Bieberbach polinomları ile yaklaşımın hızı değerlendirildi.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Dini- düzgün bölge, Sınırlı rotasyonlu bölge, Riemann konform dönüşümü, Bieberbach polinomları, Genelleşmiş Bieberbach polinomları

ABSTRACT

THE APPROXIMATION PROPERTIES OF THE EXTREMAL POLYNOMIALS IN THE COMPLEX PLANE

Burçin OKTAY

Balikesir University, Institue of Science, Department of Mathematics

(PhD. Thesis / Supervisor: Professor Daniyal M. ISRAFILOV

Balikesir- Turkey, 2007

Except the introduction and the conclusion chapters, the thesis consists of four chapters.

In Chapter 2, the classes of some domains and curves, where the approximation problems in the complex plane were investigated, were introduced. Then the required analytic function spaces were given and the important properties of these spaces were investigated. In the final part of the chapter, the conformal mapping whose importance in practice was emphasized at the introduction and which was in the position of approximated function in our work, and the quasiconformal mapping that was the generalization of the conformal mapping were introduced.

In Chapter 3, an extremal problem and its solution in the class of the analytic functions with some additional conditions were given. Then the similar problem was considered in the class of the polynomials satisfying the same additional conditions. As a solution of this problem, the Bieberbach polynomials were introduced and their properties were investigated.

In the first part of Chapter 4, a subclass of Dini-smooth domains was defined and the approximaton problems to the conformal mapping by the Bieberbach polynomials on these domains were investigated. In the second part of this chapter, on these domains, the approximation problems by the generalized Bieberbach polynomials to the special function, expressed by conformal mapping were investigated.

In Chapter 5, the rate of approximation by the generalized Bieberbach polynomials to the special function mentioned above on the smooth domains with bounded boundary rotation was studied.

KEY WORDS: Dini-smooth domain, Smooth domain bounded boundary rotation, Riemann conformal mapping, Bieberbach polynomials, Generalized Bieberbach polynomials.

İÇİNDEKİLER

sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Tanımı	Sayfa
C	Kompleks düzlem	3
$\omega(\delta)$	Süreklilik modülü	4
$\theta(t)$	Teğet yön açısı	5
$\omega_p(g,\delta)$	g'nin p. dereceden integral süreklilik modülü	7
$L^p(L)$	Lebesque uzayı	7
$E^p(G)$	Smirnov uzayı	7
$L^p(L,\omega)$	ω ağırlıklı Lebesgue uzayı	9
$E^p(G,\omega)$	ω ağırlıklı Smirnov uzayı	9
$\varepsilon_n(f)_p$	$L^p(G)$ uzaylarında en iyi yaklaşım sayısı	10
$E_n^\circ(f,\omega)_p$	$E^p(G,\omega)$ uzayında en iyi yaklaşım sayısı	10
D	Birim disk	11
T	Birim diskin sınırı	11
G^-	Bölge kapanışının tümleyeni	11
D^-	Disk kapanışının tümleyeni	11
$K(z,\zeta)$	Bergman çekirdek fonksiyonu	13
$\pi_n(z)$	Bieberbach polinomları	14
$\pi_{n,p}(z)$	Genelleşmiş Bieberbach polinomları	14
$P_j(z)$	Bölgenin ortogonal polinomları	14

ÖNSÖZ

Bilgi ve tecrübelerini benimle her zaman paylaşan, bana bilimsel düşünebilmeyi kazandıran ve bu zor yolda beni yalnız bırakmayan değerli danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi tez aşamamda da bana destek olan aileme de çok teşekkürler.

"Balıkesir, 2007 **Burçin OKTAY"**

1. GİRİŞ

Konform dönüşümler, uygulamalı matematiğin ve mekaniğin pek çok alanlarında önemli rol oynar. Fakat bu dönüşümlerin analitik ifadelerinin bulunması oldukça güçtür. Sadece bazı özel bölgelerin konform dönüşümlerinin açık ifadeleri bilinmektedir. Örneğin, bir çokgenin birim diske konform dönüşümü Schwarz-Christoffell formülleri ile ifade edilir. Genel durumda konform dönüşümlerin ifadelerini bulmak oldukça güç olduğundan ifadeleri kolaylıkla bulunabilen veriler yardımıyla bu dönüşümlere yaklaşım problemi ortaya çıkmıştır.

Bieberbach polinomlarının konform dönüşümlerin pratik olarak bulunmasında kullanılabilirliği ilk defa Bieberbach tarafından gözlenmiştir. Bilindiği gibi, kompleks düzlemde bir bölge verildiğinde bu bölgede ortogonal olan cebirsel polinomlar sistemi Gram-Schmidt yöntemi kullanılarak bulunmaktadır. Bieberbach polinomları ise bu ortogonal polinomlar yardımı ile ifade edilebildiklerinden bir bölge verildiğinde bu bölgenin Bieberbach polinomlarının bulunması her zaman çözülmesi mümkün olan bir matematiksel hesaplama problemidir. Böylece, Bieberbach polinomlarının bir bölgede konform dönüşüme yakınsaklığını bilerek bu konform dönüşümü de yaklaşık olarak bulmak mümkündür. Bergman uzaylarında polinomlarla yaklaşımın mümkünlüğü ile ilgili Markushevich - Farrel teoreminin bir sonucuna göre Caratheodory bölgelerinin kompakt altkümelerinde Bieberbach polinomlarının konform dönüşüme düzgün yakınsaklığı bilinmektedir. M. V. Keldych ilk defa kapalı bölgelerde Bieberbach polinomlarının konform dönüşüme düzgün yakınsaklık problemlerini incelemiş, bölge sınırının sınırlı eğriliğe sahip bir eğri olduğu durumda yakınsamanın kapanışta da düzgün olduğunu ispatlamış ve özel halde Bieberbach polinomlarının konform dönüşüme kapanışta yakınsamadığı bölge örneği vermiştir. Böylece Bieberbach polinomlarının kapanışta yakınsaklığı probleminin bölge sınırının geometrik yapısı ile bağlantılı olduğu görülmüştür.

Daha sonra S. N. Mergelyan [34], Wu Xue-Mou [45], P. K. Suetin [41, 42], I. B. Simonenko [39], V. Kulikov [30], V. V. Andrievskii [6,7,8], D. Gaier [13-17], D. M. İsrafilov [19-27], I. Pritsker [36] ve diğer matematikçilerin yapmış olduğu çalışmalarda yaklaşım hızının, bölge sınırının düzgünlük parametreleri ile doğru orantılı olduğu sonucuna varılmıştır. Daha düzgün özelliğe sahip bölgelerde Bieberbach polinomlarının bölgenin kapanışında konform dönüşüme yaklaşımının daha hızlı olduğu gözetlenmiştir. Bieberbach polinomlarının yaklaşım özellikleri ile ilgili araştırmalar daha sonra genelleşmiş Bieberbach polinomları durumunda da ilgi odağı olmuştur.

Bu tezde uygulamalı matematik ve mekanik problemlerinin çözümünde çok kullanılan ve Lyapunov eğrileri olarak adlandırılan eğriler sınıfının bir genelleşmesi tanımlanmış, bu eğrilerle sınırlı kapalı bölgelerde Bieberbach ve genelleşmiş Bieberbach polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiş, bu polinomların konform dönüşüme ve konform dönüşüm yardımı ile ifade edilen özel fonksiyonlara yaklaşım hızı bölge sınırının geometrik özelliklerine göre değerlendirilmiştir. Bunun dışında genelleşmiş Bieberbach polinomlarının sınırlı rotasyonlu düzgün bölgelerin kapanışında yaklaşım özelliklerini incelenerek uygun yaklaşım hızı bulunmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Kompleks Düzlemde Bazı Önemli Eğri ve Bölge Sınıfları

C ile kompleks düzlemi göstereceğiz**.**

2.1.1 Tanım. *Kompleks düzlemde birim çemberin homeomorfik bir dönüşüm altındaki görüntüsüne **Jordan eğrisi** denir* [28, s.1].

2.1.2 Tanım. $\gamma : z(t)\ (a \le t \le b)$ *kompleks düzlemde bir eğri ve* $\mathbf{P} := \{ (t_0, t_1, t_2, ..., t_n) : \ a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b \}$, $[a, b]$ *kapalı aralığının bir bölüntüsü olsun. Eğer*

$$\sup \sum_{\nu=1}^{n} \left| z(t_\nu) - z(t_{\nu-1}) \right| < \infty$$

ise γ *eğrisine **sonlu uzunluklu eğri** denir. Burada supremum* $\mathbf{P}$ *kümesi üzerinden alınır* [32, s. 246].

2.1.3 Tanım. *Bir L eğrisinin* $\gamma(\tau)\ (0 \le \tau \le 2\pi)$ *parametrik gösterimi için* $\gamma''(\tau)$ *fonksiyonu sınırlı ise L eğrisine **sınırlı eğrilikli eğri** denir* [41].

2.1.4 Tanım. *L bir Jordan eğrisi olsun. Eğer* $z_1, z_2 \in L,\ z_1 \ne z_2$ *koşullarını sağlayan bütün noktalar çifti için*

$$d\left[\gamma(z_1, z_2)\right] := \max_{t_1, t_2 \in \gamma} \left| t_1 - t_2 \right| \le c \left| z_1 - z_2 \right|$$

*olacak şekilde bir c sabiti bulunabilirse L eğrisine **kvazikonform eğri** denir. Burada* $\gamma(z_1, z_2)$, z_1 *ve* z_2 *noktalarının L eğrisini bölmüş olduğu yaylardan çapı küçük olanıdır.*

Kvazikonform eğriler sınıfı oldukça geniştir ve özel halde sonlu uzunluklu olmayan bazı eğrileri de içerebilir. Fakat sivri açıya sahip olan bir eğri kvazikonform değildir [31, s.100].

2.1.5 Tanım. *γ, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve*

$$D(z, r) := \{t \in \gamma : \quad |z - t| < r\}$$

olsun. Eğer

$$\sup_{z \in \gamma} | D(z,r) \cap \gamma | \leq cr$$

olacak şekilde r'den bağımsız bir c sabiti bulunabilirse γ eğrisine ***Regüler eğri veya Carleson eğrisi*** *denir. Burada $|\cdot|$, $D(z,r) \cap \gamma$ kümesinin Lebesgue ölçümüdür.* [28, s.2].

2.1.6 Tanım. *L Jordan eğrisi, $\gamma'(\tau)$ sürekli ve $\neq 0$ olacak şekilde bir $\gamma(\tau)$ $(0 \leq \tau \leq 2\pi)$, parametrizasyonuna sahipse bu eğriye* ***düzgün eğri*** *denir. Diğer bir deyişle düzgün eğri, sürekli değişen teğete sahip olan eğriye denir* [35, s.43].

2.1.7 Tanım. *f, bir $A \subset \mathbf{C}$ bağlantılı kümesinde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. f'nin* ***süreklilik modülü***

$$\omega(\delta) \equiv \omega(\delta, f, A) := \sup_{|h| \leq \delta} \| f(\cdot) - f(\cdot + h) \|_A$$

$$= \sup\{ | f(t_1) - f(t_2) | : t_1, t_2 \in A, \ |t_1 - t_2| \leq \delta \}, \quad \delta \in (0, \pi]$$

biçiminde tanımlanır [35, s.46].

2.1.8 Tanım. *$\omega(h,t)$, bir h fonksiyonunun süreklilik modülü olmak üzere*

$$\int_0^\pi \frac{\omega(h, t)}{t} dt < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa h fonksiyonuna ***Dini-sürekli fonksiyon*** *denir* [35, s.46].

2.1.9 Tanım. *Eğer bir L eğrisi, $\gamma'(\tau)$ Dini sürekli ve $\neq 0$ olacak şekilde*

$$L : \gamma(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi$$

*parametrizasyonuna sahipse L'ye **Dini-düzgün eğri*** denir [35, s.48].

ψ_0, birim diskin L düzgün eğrisi ile sınırlı bölgeye konform dönüşümü olsun. Bu durumda L eğrisinin $z(t) = \psi_0(e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$, konform parametrizasyonu yazılabilir. $\theta(t)$ ile L düzgün eğrisine $z(t) = \psi_0(e^{it})$ noktasında çizilen teğetin x ekseninin pozitif yönü ile oluşturduğu açıyı gösterelim.

Şimdi yeni bir eğriler sınıfı tanımlayalım.

2.1.10 Tanım. $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ *sayıları verildiğinde* δ *dan bağımsız bir c sabiti için*

$$\omega(\theta,\delta) \le c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta}, \quad \delta \in (0,\pi]$$

koşulu sağlanıyorsa L eğrisi $\boldsymbol{B}(\alpha,\beta)$ ***sınıfındandır*** *denir.*

Bu tanıma göre, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \le 1$ olduğunda

$$\boldsymbol{B}(\alpha_1,\beta) \supset \boldsymbol{B}(\alpha_2,\beta), \qquad \beta \in [0,\infty)$$

ve $0 \le \beta_1 < \beta_2 < \infty$ olduğunda

$$\boldsymbol{B}(\alpha,\beta_1) \subset \boldsymbol{B}(\alpha,\beta_2), \qquad \alpha \in (0,1]$$

bağıntıları geçerlidir.

2.1.11 Tanım. $\forall t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ *için*

$$|\theta(t_1) - \theta(t_2)| \le c|t_1 - t_2|^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1)$$

*olacak şekilde bir c sabiti bulunabilirse L eğrisine **Lyapunov eğrisi** denir* [41].

$\boldsymbol{B}(\alpha,\beta)$ sınıfının tanımından kolaylıkla görülebilir ki $\boldsymbol{B}(\alpha,0)$ $(0 < \alpha < 1)$ sınıfı Lyapunov eğrileri sınıfı ile çakışır. Üstelik $\boldsymbol{B}(\alpha,\beta)$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ sınıfı, Dini-düzgün eğrilerin bir alt sınıfıdır. Gerçekten:
$L \in \boldsymbol{B}(\alpha,\beta), \alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ aldığımızda tanım gereği

$$\int_0^c \frac{\omega(\theta,t)}{t} \ln\frac{4}{t}\, dt < \infty$$

olduğundan [42, s.139] deki teorem 2 kullanılarak

$$\int_0^c \omega\left(\psi_0', t\right)\frac{dt}{t} < \infty$$

elde edilir. Böylece L 'nin Dini-düzgün eğri olduğu görülür.

2.1.12 Tanım. *Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık kümeye **bölge** denir* [35 s. 1].

2.1.13 Tanım. *G basit bağlantılı bir bölge, G_∞ ise $\boldsymbol{C}\overline{G}$ nin sonsuz noktasını içeren bileşeni olsun. Eğer G ve G_∞ aynı sınıra sahipseler, G bölgesine **Caratheodory bölgesi** denir* [13, s.17].

Her Jordan bölgesi bir Caratheodory bölgesidir, fakat bazı basit bölgeler bile Caratheodory bölgesi olamayabilir. Örneğin yarıçapı çıkarılmış bir disk Caratheodory bölgesi değildir. Caratheodory bölgeleri polinom yaklaşımı özelliğine sahiptirler [13, s.17]: *f, G* de analitik ve

$$\|f\|_{L^p(G)} := \left\{\iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z\right\}^{1/p} < \infty, \qquad p \geq 1$$

ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\|f - P\|_{L^p(G)} < \varepsilon$ olacak biçimde bir P cebirsel polinomu vardır.

2.1.14 Tanım. *G, sonlu uzunluklu L eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun. Eğer L eğrisi $\forall \zeta \in L$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı yerel koordinat sisteminde*

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq c|x - x'|, \quad x, x' \in I$$

*koşulunu sağlayan $y = \varphi(x)$ fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilirse G bölgesine **Lipschitz bölgesi** denir. Burada I yerel koordinat sisteminde x değişkeninin ait olduğu bir aralıktır* [12].

2.1.15 Tanım. *Eğer bir G bölgesinin $\theta(t)$ teğet yön açısı sınırlı varyasyonlu ise, diğer bir deyişle,*

$$\int_0^{2\pi} |d\theta(t)| = \sup_{t_\nu} \sum_{\nu=1}^{n} |\theta(t_\nu) - \theta(t_{\nu-1})| < \infty$$

*koşulu bütün $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 2\pi$ bölüntüleri için sağlanıyorsa G'ye **sınırlı rotasyonlu bölge** denir* [35, s:63].

2.1.16 Tanım. $\theta(t)$ *teğet yön açısı sınırlı varyasyonlu olup bütün sıçramaların modülleri* π *den daha küçük olan bölgelere* ***Radon bölgeleri*** *denir* [12].

Eğer $\theta(t)$ teğet yön açısı sınırlı varyasyonlu ve bazı sıçramaların modülleri π ye eşitse G bölgesi sınırlı rotasyonlu bölgedir.

Her konveks bölge Radon bölgesidir. Sivri açısı olmayan parçalı düzgün bölgeler Radon bölgeleri sınıfındandır ve bütün Radon bölgeleri Lipschitz bölgeleridir. Her Lipschitz bölgesi de Carleson bölgeleri sınıfındandır.

2.1.17 Tanım. $g \in L^p = L^p(0,2\pi), 1 \le p < \infty,$ *için*

$$\omega_p(g,\delta) := \sup_{0<h\le\delta}\left\{\int_0^{2\pi} |\,g(x+t)-g(x)\,|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

fonksiyonuna ***g'nin p. dereceden integral süreklilik modülü*** *denir* [9, s.44].

2.1.18 Tanım. *Eğer* $g \in L^p$ *için*

$$\omega_p(g,t) = O(t^\alpha), \qquad 0 < \alpha \le 1,$$

koşulu sağlanırsa g fonksiyonu Λ_α^p ***sınıfındandır*** *denir [10, s.71].*

2.2 Analitik Fonksiyon Uzayları

2.2.1 Tanım. *G sonlu uzunluklu bir L Jordan eğrisiyle sınırlı bölge ve* $1 \le p < \infty$ *olsun. L'de Lebesgue ölçülebilir ve* $|f|^p$ *nin yay uzunluğuna göre Lebesgue integrallenebilir olduğu kompleks değerli f fonksiyonların kümesine* ***Lebesgue uzayı*** *denir ve* $L^p(L)$ *ile gösterilir* [9, s.18].

2.2.2 Tanım. *G sonlu uzunluklu L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve f, G bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun.*

Eğer

$$\int_{L_n} |f(z)|^p |dz| \le M\,, \qquad 1 \le p < \infty$$

olacak şekilde G içinde G'nin kompakt altkümelerini sınırlayan ve L eğrisine yaklaşan $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sonlu uzunluklu Jordan eğrileri dizisi varsa f fonksiyonu* ***Smirnov uzayındandır*** *denir. Smirnov uzayı* $E^p(G)$ *ile gösterilir* [10 s, 169].

$\forall f \in E^p(G)$ fonksiyonu L üzerinde hemen her yerde açısal limite sahiptir ve eğer f nin açısal limiti için aynı notasyonu kullanırsak $f \in L^p(L)$ dir.

2.2.3 Uyarı. $L^p(L)$ *ve* $E^p(G)$ *uzayları* $p \ge 1$ *olduğunda*

$$\|f\|_{E^p(G)} = \|f\|_{L^p(L)} := \left(\int_L |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdırlar.

$L^p(G)$'deki bir fonksiyonun G'nin bir noktasındaki değerini üstten $\|f\|_{L^p(G)}$ normu ile değerlendiren aşağıdaki Lemmayı ileride, ana sonuçlarımızın ispatlarında sıkça kullanacağız.

2.2.4 Lemma. *Eğer* $f \in L^p(G)\,(p \ge 1)$, $z_0 \in G$ *ve* $d_{z_0} := \min_{z \in \partial G} |z_0 - z|$ *ise*

$$|f(z_0)| \le \frac{\|f\|_{L^p(G)}}{\left(\pi\, d_{z_0}^2\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f \in L^p(G)$ olduğundan f fonksiyonu G bölgesinde analitiktir. Böylece f $D(z_0, r) \subset G$ diskinin içinde ve sınırında da analitiktir. Ortalama değer teoremi gereğince

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki yanını *rdr* ile çarpıp 0 dan d_{z_0} ' a integrallersek

$$f(z_0)\int_0^{dz_0} rdr = \frac{1}{2\pi}\iint_{D(z_0,\, d_{z_0})} f(z)d\sigma_z$$

$$f(z_0)\frac{d_{z_0}^{\ 2}}{2} = \frac{1}{2\pi}\iint_{D(z_0,\, d_{z_0})} f(z)d\sigma_z$$

veya

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi d_{z_0}^{\ 2}}\iint_{D(z_0,\, d_{z_0})} f(z)d\sigma_z$$

ve buradan da

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{\pi d_{z_0}^{\ 2}}\left(\iint_{D(z_0,\, d_{z_0})} |f(z)|^p d\sigma_z\right)^{1/p}\left(\pi d_{z_0}^{\ 2}\right)^{1/q}$$

$$\le \frac{\|f\|_{L^p(G)}}{\left(\pi d_{z_0}^{\ 2}\right)^{1-\frac{1}{q}}} = \frac{\|f\|_{L^p(G)}}{\left(\pi d_{z_0}^{\ 2}\right)^{1/p}}$$

elde edilir.

Eğer *f* analitik fonksiyonu $\overline{G}$ ye sürekli genişlemeye sahipse aşağıdaki normu tanımlıyoruz.

$$\|f\|_{\overline{G}} := \sup\left\{|f(z)| : \quad z \in \overline{G}\right\}.$$

2.2.5 Tanım. *L, sonlu uzunluklu bir eğri olsun. Eğer* $\omega : L \to [0,\infty]$ *ölçülebilir fonksiyonu için* $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ *kümesi sıfır ölçüme sahipse* ω *fonksiyonuna* ***ağırlık*** *denir* [28, s.27].

2.2.6 Tanım. *ω, L de bir ağırlık fonksiyonu olsun.*

$$L^p(L,\omega) := \left\{f \in L^1(L) : |f|^p\,\omega \in L^1(L)\right\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya ω ***ağırlıklı Labesgue uzayı*** *denir* [12].

2.2.7 Tanım. *ω, L de bir ağırlık fonksiyonu olsun.*

$$E^p(G,\omega) := \left\{f \in E^1(G) : f\omega \in L^p(L,\omega)\right\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya G'de analitik fonksiyonların p. mertebeden ω ***ağırlıklı Smirnov uzayı*** *denir* [12].

2.2.8 Tanım. *ω fonksiyonu L eğrisi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer*

$$\sup_{z\in L}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r}\int_{L\cap D(z,r)}\omega(\zeta)|d\zeta|\right)\left(\frac{1}{r}\int_{L\cap D(z,r)}[\omega(\zeta)]^{-1/(p-1)}|d\zeta|\right)^{p-1}<\infty$$

oluyorsa ω fonksiyonu ***Muckennhoupt-A_p koşulu****'nu sağlıyor denir* [28, s.28].
L üzerinde Muckenhoupt-A_p koşulunu sağlayan bütün ağırlık fonksiyonlarının kümesi ***$A_p(L)$*** ile gösterilir [28, s.28].

2.2.9 Tanım. *$G\subset \mathbf{C}$ sınırlı bir bölge, $\omega\in A_p(L)$, $f\in E^p(G,\omega)$ ve $1\le p<\infty$ olsun. P_n derecesi n'yi aşmayan polinomlar sınıfı olduğunda f fonksiyonuna $E^p(G,\omega)$ uzayında polinomlarla* ***en iyi yaklaşım sayısı***

$$E_n^{\circ}(f,\omega)_p := \inf_{p_n\in P_n}\|f-p_n\|_{L^p(L,\omega)}\ ,$$

$f\in L^p(G)$ için $L^p(G)$ uzaylarındaki ***en iyi yaklaşım sayısı*** *ise*

$$\varepsilon_n(f)_p := \inf_{p_n\in P_n}\|f-p_n\|_{L^p(G)}$$

olarak tanımlanır [12].

2.2.10 Teorem. *G bir Radon bölgesi veya düzgün sınırlı bölge, $1<p<\infty$, $\omega\in A_p(L)$ ve $f\in E^1(G)$ olsun. Bu durumda $\forall n=1,2,...$ için*

$$\varepsilon_n(f)_p \le cn^{-1/p}E_n^{\circ}(f,\omega)_p \qquad (2.2)$$

olur [11].

D. M. İsrafilov tarafından [20] ispatlanan aşağıdaki lemmayı ana sonuçlarımızın ispatlarında, normların değerlendirilmesi için kullanacağız.

2.2.11 Lemma. *G kvazikonform eğriyle sınırlı sonlu bir bölge, $p_n(z)$ derecesi n'yi aşmayan ve $z_0\in G$ noktasında $p_n(z_0)=0$ koşulunu sağlayan bir polinom olduğunda*

$$\|p_n\|_{\overline{G}} \leq \begin{cases} c\sqrt{\log n}\,\|p_n'\|_{L^p(G)}, & p = 2 \\ c\|p_n'\|_{L^p(G)}, & p > 2 \\ cn^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}\|p_n'\|_{L^p(G)}, & 1 < p < 2 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır [20].

2.3 Konform Dönüşümler

2.3.1 Tanım. ***G, C*** *de bir bölge olmak üzere* $f : \mathbf{G} \to \mathbf{C}$ *sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir* $z_0 \in G$ *noktasından geçen ve aralarında* α *açısı oluşturan herhangi iki düzgün* γ_1 *ve* γ_2 *eğrilerinin* $f(\gamma_1)$ *ve* $f(\gamma_2)$ *resim eğrileri de* $w_0 = f(z_0)$ *da aralarında yön ve büyüklük bakımından* α *açısı oluşturuyorlarsa f fonksiyonuna* z_0 *da bir* ***konform dönüşümdür*** *denir. Eğer f her* $z_0 \in \mathbf{G}$ *noktasında konform ise G de konformdur denir [33, s.120].*

2.3.2 Teorem. ***(Riemann Konform Dönüşüm Teoremi):*** $G \subset \mathbf{C}$ *sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve* $z_0 \in G$ *olsun. Bu durumda G bölgesini D diskine*,

$$f(z_0) = 0 \;\; ve \;\; f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır [32, s.8].

G, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu Jordan eğrisiyle sınırlı, basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Riemann konform dönüşüm teoremine göre *G*'yi $D_r = D(0, r)$ diskine dönüştüren ve

$$\varphi_0(z_0) = 0, \quad \varphi_0'(z_0) = 1$$

koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi_0(z)$ konform dönüşümü vardır.

$$G^- := C/\overline{G}, \quad D := D(0,1), \quad T := \partial D, \quad D^- := C/\overline{D}$$

ve $\varphi_0(z)$ fonksiyonunun tersini $\psi_0(w)$ ile gösterelim.

G^{-} nin D^{-} ye

$$\varphi(\infty)=\infty, \quad \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümünü φ ile gösterelim ve $\psi=\varphi^{-1}$ olsun.

Şimdi tezde ana sonuçların ispatlarında sıkça başvurduğumuz, konform dönüşümün türevi ile ilgili bazı değerlendirmeler vereceğiz:

Eğer G bölgesi sonlu uzunluklu bir eğriyle sınırlı bölge ise $\varphi_0^{'} \in E^1(G)$ dir [18, s.].

G bölgesi düzgün sınırlı bir bölge olduğunda aşağıdaki değerlendirmeler Warschawski tarafından [44] de ispatlanmıştır:

$$\varphi_0^{'},\ \psi_0^{'},\ \frac{1}{\varphi_0^{'}},\frac{1}{\psi_0^{'}} \in L^p(L), \quad p\in(1,\infty) \quad .$$

2.4 Kvazikonform Dönüşümler

2.4.1 Tanım. *$G\subset \mathbf{C}$ bir bölge, $h: G\to \mathbf{C}$ bir homeomorfizm ve $K\geq 1$ olsun. Eğer*

i-) h, G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli ve

ii-) $k=\dfrac{K-1}{K+1}$ olmak üzere G'de hemen her yerde $|h_{\bar z}|\leq k|h_z|$ ise

*h dönüşümüne G üzerinde bir **K-kvazikonform dönüşüm** denir* [3, s.24].
Konform dönüşümler 1-kvazikonformdur.

Daha önce kvazikonform eğrilerin geometrik tanımını vermiştik. Şimdi bu eğrilerin tanımını kvazikonform dönüşümün tanımı yardımıyla verelim.

2.4.2 Tanım. *$\overline{\mathbf{C}}$ 'nin kendi üzerine K-kvazikonform bir dönüşümü altında bir çemberin görüntüsüne **K-kvazikonform eğri** denir* [31, s.97].

3. GEOMETRİK FONKSİYONLAR TEORİSİNİN BAZI EKSTREMAL PROBLEMLERİ

3. 1 Ekstremal Problem

Basit bağlantılı bir G bölgesinde analitik olan ve

$$f(z_0)=0,\ \ f'(z_0)=1$$

koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfında $\|f'\|_{L^p(G)}^p$ *integralini minimize eden fonksiyonu bulunuz.*

[37 s.433] de ispatlanmıştır ki yukarıdaki problemin çözümü

$$\varphi_p(z):=\int_{z_0}^{z}\left[\varphi_0'(\zeta)\right]^{2/p}d\zeta,\ \ z\in G,\quad p>0 \qquad (3.1)$$

fonksiyonudur.

Özel halde $p=2$ durumunda $\varphi_2(z)=\varphi_0(z)$ olur.

Basit bağlantılı bir G bölgesini birim diske dönüştüren ve

$$\widetilde{\varphi}_0(z_0)=0,\quad \widetilde{\varphi}_0'(z_0)>0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümle Bergman çekirdek fonksiyonu arasındaki bağıntılar aşağıdaki eşitlikler ile verilir.

$$\widetilde{\varphi}_0(z)=\sqrt{\frac{\pi}{K(z_0,z_0)}}\int_{v=z_0}^{z}K(v,z_0)dv \qquad \text{ve} \qquad K(z,z_0)=\frac{1}{\pi}\widetilde{\varphi}'_0(z)\,\overline{\widetilde{\varphi}'_0(z_0)},\quad z\in G.$$

Bergman çekirdek fonksiyonunun, G'nin birim diske normalleştirilmemiş F konform dönüşümü cinsinden ifadesi ise

$$K(z,z_0)=\frac{1}{\pi}\frac{F'(z)\overline{F'(z_0)}}{\left[1-\overline{F(z_0)}F(z)\right]^2}\qquad z,z_0\in G$$

biçimindedir.

G'nin özel halde birim disk olması halinde $F(z)=z$ seçerek D'nin çekirdek fonksiyonu için

$$K(z,z_0)=\frac{1}{\pi\left(1-z\overline{z_0}\right)^2}$$

ifadesini elde ederiz.

Eğer $\varphi_0(z)$, G'nin $D(0,r)$ diskine

$$\varphi_0(z_0)=0,\ \varphi_0'(z_0)=1$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümü ise

$$\varphi_0(z)=\frac{\widetilde{\varphi}_0(z)}{\widetilde{\varphi}'_0(z_0)}=\frac{1}{K(z_0,z_0)}\int_{v=z_0}^{z}K(v,z_0)dv,\quad z\in G \tag{3.2}$$

olur.

3. 2 Ekstremal Polinomlar

$\prod_n$ derecesi n'yi aşmayan ve

$$p_n(z_o)=0,\quad p_n'(z_0)=1$$

koşullarını sağlayan polinomların bir sınıfı olsun.

$$\left\|\varphi_p'-p_n'\right\|_{L^p(G)}^p,\quad (1<p<\infty)$$

integrali bu sınıfta bir tek $\pi_{n,p}$ polinomu ile minimize edilir. Bu polinoma (G,z_0) çifti için n. dereceden genelleştirilmiş Bieberbach polinomu denir. $p=2$ durumunda elde edilen π_n polinomları Bieberbach polinomları olarak bilinirler. π_n polinomlarının açık ifadesi (3.2) eşitliğinde $K(z,z_0)$ yerine onun n-1. kısmi toplamını yazmak suretiyle aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\pi_n(z):=\frac{1}{K_{n-1}(z_0,z_0)}\int_{v=z_0}^{z}K_{n-1}(v,z_0)dv, \tag{3.3}$$

burada $K_{n-1}(z,z_0)$, $P_j(z)$ ortogonal polinomları yardımıyla

$$K_{n-1}(z,z_0)=\sum_{j=0}^{n-1}\overline{P_j(z_0)}P_j(z) \tag{3.4}$$

biçiminde ifade edilir.

Şimdi özel halde birim diskin Bieberbach polinomlarını bulalım.

Birim diskin ortogonal polinomları

$$P_j(z) = \sqrt{\frac{j+1}{\pi}}z^j, \quad j = 0,1,2,...$$

biçimindedir. Bu ortogonal polinomlar (3.4) de yerine yazılırsa

$$K_{n-1}(z, z_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{P_j(z_0)} P_j(z)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{\pi} \overline{z_0}^j z^j = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \overline{z_0} \; z + ... + \frac{n}{\pi} \overline{z_0}^{n-1} z^{n-1}$$

olduğu görülür. Burada $z_0 = 0$ alırsak $K_{n-1}(z,0) = \frac{1}{\pi}$ elde edilir. Bunu (3.3) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\pi_n(z) := \pi \int_{v=z_0=0}^{z} K_{n-1}(v, 0) dv = \pi \int_{v=z_0=0}^{z} \frac{1}{\pi} dv = z$$

bulunur. Böylece birim diskin Bieberbach polinomları $\pi_n(z) = z$ olur.

Tezde incelenen temel problem bir G bölgesi verildiğinde bölge sınırının geometrik özelliklerine göre

$$\left\| \varphi_p - \pi_{n,p} \right\|_{\overline{G}} := \max_{z \in \overline{G}} \left| \varphi_p(z) - \pi_{n,p}(z) \right|$$

yaklaşım hatasının değerlendirilmesidir. Yapılan araştırmalar göstermiştir ki, bölge sınırının düzgünlük derecesi ile orantılı olarak bu hata uygun bir hızla sıfıra yaklaşır.

Farrell ve Markushevich'in sonuçlarından görüldüğü gibi eğer G bölgesi bir Caratheodory bölgesi ise

$$\left\| \varphi_p' - \pi_n' \right\|_{L^p(G)} \to 0, \quad (n \to \infty),$$

ve böylece G'nin kompakt altkümelerinde düzgün olarak

$$\pi_{n,p}(z) \rightrightarrows \varphi_p(z) \, (n \to \infty)$$

olur.

Gerçekten, Caratheodory bölgeleri polinom yaklaşımı özelliğine sahip olduğundan en az bir p_n polinomu vardır ki

$$\left\|\varphi_p' - p_n'\right\|_{L^p(G)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

olur. Genelleştirilmiş Bieberbach polinomlarının ekstremal özelliği gereği

$$\left\|\varphi_p' - \pi_{n,p}'\right\|_{L^p(G)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

olduğundan ve (2.1) eşitsizliğine göre

$$\left|\varphi_p'(z) - \pi_{n,p}'(z)\right| \leq \frac{\left\|\varphi_p' - \pi_{n,p}'\right\|_{L^p(G)}}{\left(\pi d_{z_0}^2\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad (\forall z \in G)$$

yazılabildiğinden

$$\pi_{n,p}'(z) \rightrightarrows \varphi_p'(z)$$

olduğu görülür. Buradan Weierstrass teoremine göre kompakt altkümelerde

$$\pi_{n,p}(z) \rightrightarrows \varphi_p(z)$$

düzgün yakınsaması elde edilir.

Bieberbach polinomlarının $\overline{G}$ kapalı bölgesinde düzgün yakınsaması ilk olarak M. V. Keldych [29] tarafından incelenmiştir. Keldych, G'nin sınırının sınırlı eğrilikli düzgün Jordan eğrisi olması durumunda $c = c(\varepsilon)$, n den bağımsız bir sabit olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için aşağıdaki sonucu ispatlamıştır:

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \leq \frac{c}{n^{1-\varepsilon}}$$

Daha sonra S. N. Mergelyan [34], G bölgesinin sınırı düzgün Jordan eğrisi olduğunda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \leq \frac{c}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

olacak şekilde bir $c = c(\varepsilon) > 0$ sabitinin olduğunu göstermiştir.

Mergelyan'ın aynı bölgeler için bir konjektürü de vardır ki bu yukarıdaki sonuçta $\frac{1}{2} - \varepsilon$ yerine $1 - \varepsilon$ yazılabileceğidir. Fakat bu şimdiye kadar ispatlanamamıştır.

D. M. İsrafilov, Mergelyan'ın elde ettiği sonucu yine düzgün bölgeler için aşağıdaki şekilde iyileştirmiştir:

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \leq c\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2}, \quad n \geq 2 \tag{3.5}$$

Burada *c, n*’den bağımsız bir sabittir.

İsrafilov, Mergelyan’ın konjektürünün doğruluğunu bölgenin sınırlı rotasyonlu düzgün bölge olması durumunda ispatlamıştır [23].

Daha sonra İsrafilov, Radon bölgelerinde Bieberbach polinomlarının yakınsaklık problemini incelemiş ve yukarıdaki iyileşmenin bu bölgelerde de geçerli olduğunu göstermiştir [24].

Bir sonraki bölümde bu sonuçların genelleşmiş Bieberbach polinomları için benzerleri ispatlanacaktır.

4. BIEBERBACH VE GENELLEŞMİŞ BIEBERBACH POLİNOMLARININ DINI-DÜZGÜN BÖLGELERDE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde 1. bölümde tanımlanan Dini-düzgün bölgelerin $\boldsymbol{B}(\alpha,\beta)$ altsınıflarında Bieberbach ve genelleşmiş Bieberbach polinomlarının ekstremal fonksiyonlara yaklaşım problemleri incelenir ve uygun yaklaşım hızı bulunur.

4. 1 Bieberbach polinomlarının Dini-düzgün bölgelerde yaklaşım özellikleri

Dini-düzgün bölgelerin bilinen bir altsınıfını oluşturan Lyapunov bölgelerin de Bieberbach polinomlarının konform dönüşüme yaklaşımı ve yaklaşım hatasının değerlendirilmesi problemi ilk defa Wu [45] tarafından incelenmiştir.

G, Lyapunov bölgesi olduğunda Wu [45] n den bağımsız $c = c(L) > 0$ için

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{\overline{G}} \le \frac{c\ln n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (4.1)$$

eşitsizliğini ispatlamıştır. Farklı yöntemler kullanılarak Wu'nun elde etmiş olduğu yukarıdaki değerlendirme Suetin [41] ve İsrafilov [24] tarafından iyileştirilerek

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{\overline{G}} \le \frac{c\sqrt{\ln n}}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

değerlendirilmesi ispatlanmıştır. Burada c, n den bağımsız bir sabittir.

Bu bölümde biz Lyapunov bölgeleri sınıfından daha geniş olan $\boldsymbol{B}(\alpha,\beta)$ bölgeler sınıfı için (4.1) in bir genellemesini vereceğiz. Özel halde G bölgesi Lyapunov bölgesi olduğunda bulduğumuz değerlendirme (4.1) ile çakışır.
Ana teorem ve ispatını vermeden önce burada gerekecek yardımcı sonuçları ve ispatlarını vereceğiz.
$c_1,\ c_2 > 0$ sabitler olduğunda $a > 0$, $b > 0$ sayıları için $c_1 b \le a \le c_2 b$ eşitsizliğini $a \approx b$ ile göstereceğiz.

4.1.1 Yardımcı Sonuçlar

Aşağıdaki lemma, $L \in \boldsymbol{B}(\alpha, \beta)$ olduğunda ψ'_0 fonksiyonunun süreklilik modülü ile ilgili bir değerlendirmeyi içermektedir.

4.1.1 Lemma. $L \in \boldsymbol{B}(\alpha, \beta),\ \alpha \in (0,1],\ \beta \in [0, \infty)$ *ise*

$$\omega(\psi'_0, \delta) := \sup_{|h| \le \delta} \left\| \psi'_0\left(we^{ih}\right) - \psi'_0(w) \right\|_T \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1); \\ \delta \ln^{\beta+1} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat. L Dini-düzgün eğri olduğundan [35, s.44, teorem 3.2] den

$$\arg \psi'_0\left(e^{it}\right) = \theta(t) - t - \frac{\pi}{2} \tag{4.2}$$

ve

$$\log \psi'_0(w) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + w}{e^{it} - w} \left(\theta(t) - t - \frac{\pi}{2} \right) dt \tag{4.3}$$

eşitlikleri yazılabilir.

$g(t) := \arg \psi'_0\left(e^{it}\right)$ olsun. (4.2) den

$$\omega(g, \delta) := \sup_{|h| \le \delta} \| g(t+h) - g(t) \|_{[0,2\pi]} \le \omega(\theta, \delta) + \omega(t, \delta) \le c_2 \delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta} \tag{4.4}$$

olur. Bunu dikkate alırsak

$$\omega^*(g, \delta) := \int_0^{\delta} \frac{\omega(g,t)}{t} dt + \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(g,t)}{t^2} dt$$

modülü için

$$\omega^*(g, \delta) \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1); \\ c\delta \ln^{\beta+1} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

değerlendirilmesi elde edilir.

Gerçekten, eğer $\alpha \in (0,1)$ ise yeterince küçük $\varepsilon > 0$ ve δ dan bağımsız bir c_3 sabiti için

$$t^{\alpha-\epsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{t}\leq c_3\delta^{\alpha-\epsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta},\quad t\in(0,\delta]$$

olur. Diğer yandan $\forall\beta\in[0,\infty)$ için

$$\ln^{\beta}\frac{4}{t}\leq\ln^{\beta}\frac{4}{\delta},\quad t\in[\delta,\pi).$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece (4.4) bağıntısından

$$\omega^*(g,\delta)\leq c_2\int_0^{\delta}\frac{t^{\alpha-\epsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{t}}{t^{1-\epsilon}}dt+c_2\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{t^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{4}{t}}{t^2}dt$$

$$\leq c_4\delta^{\alpha-\epsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}\int_0^{\delta}t^{\epsilon-1}dt+c_5\delta\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}\int_{\delta}^{\pi}t^{\alpha-2}dt\leq c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}$$

bulunur. Eğer $\alpha=1$ ise benzer yöntemle

$$\omega^*(g,\delta)\leq c_6\int_0^{\delta}\frac{t^{\epsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{t}}{t^{\epsilon}}dt+c_7\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\ln^{\beta}\frac{4}{t}}{t}dt$$

$$\leq c_8\delta^{\varepsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}\int_0^{\delta}t^{-\varepsilon}dt-c_7\delta\int_{\delta}^{\pi}\ln^{\beta}\frac{4}{t}d\ln\frac{4}{t}$$

$$\leq c_9\delta\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}+c_{10}\delta\ln^{\beta+1}\frac{4}{\delta}\leq c\delta\ln^{\beta+1}\frac{4}{\delta}$$

olduğu görülür.

L eğrisi Dini-düzgün olduğundan, 2π periyotlu

$$g(t):=arg\psi'_0\left(e^{it}\right)=\theta(t)-t-\frac{\pi}{2}$$

fonksiyonu reel eksende Dini süreklidir. Bu durumda (4.2), (4.3) ve [35, s:47] deki Önerme 3.4 den, $\log\psi'_0(w)$ fonksiyonunun $\overline{D}$ de sürekli genişlemeye sahip olduğu ve $|w_1-w_2|\leq\delta<1$ özelliğindeki $w_1,w_2\in\overline{D}$ noktaları için,

$$\left|\log\psi'_0(w_1)-\log\psi'_0(w_2)\right|\leq c\omega^*(g,\delta)$$

olduğu görülür.

Bu son eşitsizlikden

$$\left|\psi'_0(w_1)-\psi'_0(w_2)\right|\leq c_{11}\,\omega^*(g,\ \delta),\qquad |w_1-w_2|\leq\delta<1\qquad(4.6)$$

eşitsizliği ve sonunda (4.5) ile (4.6) birleştirilerek

$$\omega(\psi'_0,\delta)\le\begin{cases}c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha\in(0,1);\\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha=1\end{cases}$$

değerlendirmesi elde edilir.

G, düzgün sınırlı bir bölge ve $\Phi_p(w):=(\varphi'_0)^{2/p}(\psi(w))$ olsun. $\Phi_p(w)$ fonksiyonu $L^p(T)$ dendir. Gerçekten;

$$\|\Phi_p(w)\|^p_{L^p(T)}=\int_T\left|\left((\varphi'_0)^{\frac{2}{p}}\circ\psi\right)(we^{ih})\right|^p|dw|$$

$$=\int_T\left|\left((\varphi'_0)^{\frac{2}{p}}\circ\psi\right)(w)\right|^p|dw|=\int_L|\varphi'_0(z)|^2|\varphi'(z)||dz|$$

Sonuncu ifadeye $\dfrac{1}{p_0}+\dfrac{1}{q_0}=1$ için Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\|\Phi_p(w)\|^p_{L^p(T)}\le c\left(\int_L|\varphi'_0(z)|^{2p_0}|dz|\right)^{1/p_0}\left(\int_L|\varphi'(z)|^{q_0}|dz|\right)^{1/q_0}$$

olur. $\varphi'_0,\varphi'\in L^p(L)$ olduğundan yukarıdaki çarpım sonludur ve $\|\Phi_p(w)\|^p_{L^p(T)}<\infty$

bulunur.

$L\in\boldsymbol{B}(\alpha,\beta),\ \alpha\in(0,1],\ \beta\in[0,\infty)$ *olsun.*

$$\omega(\Phi_p,\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\|\Phi_p(we^{ih})-\Phi_p(w)\|_T$$

fonksiyonuna $(\varphi'_0)^{2/p}\in E^p(G)$ *nin* ***genelleşmiş süreklilik modülü*** *diyeceğiz.*

p=2 durumunda $\Phi(w):=(\varphi'_0\circ\psi)(w)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş süreklilik modülü $\omega(\Phi,\delta)$ elde edilir.

4.1.2 Lemma. $L\in\boldsymbol{B}(\alpha,\beta),\ \alpha\in(0,1],\ \beta\in[0,\infty)$ *ise*

$$\omega(\Phi,\delta)\le\begin{cases}c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha\in(0,1);\\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha=1\end{cases}$$

değerlendirilmesi geçerlidir.

İspat. L Dini-düzgün eğri olduğundan ψ'_0 ve φ'_0 fonksiyonları sırasıyla $\overline{D}$ ve $\overline{G}$ de, ψ' ve φ' fonksiyonları ise sırasıyla $\overline{D^-}$ ve $\overline{G^-}$ de süreklidir. Ayrıca $|w|=1$ üzerinde $|\psi'_0| \approx |\psi'| \approx 1$ bağıntıları, L üzerinde de $|\varphi'_0| \approx |\varphi'| \approx 1$ bağıntıları sağlanır. Böylece

$$\| \varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right] - \varphi_0\left[\psi(w)\right] \|_T \approx \left\|\psi\left(we^{ih}\right) - \psi(w)\right\|_T \approx \left\|we^{ih} - w\right\|_T = \left|e^{ih} - 1\right| \approx |h|$$

ve 4.1.1 lemma uygulandığında

$$\omega(\Phi,\delta) := \sup_{|h|\le\delta}\left\|\Phi\left(we^{ih}\right) - \Phi(w)\right\|_T = \sup_{|h|\le\delta}\left\|\varphi'_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right] - \varphi'_0\left[\psi(w)\right]\right\|_T$$

$$= \sup_{|h|\le\delta}\left\| \frac{1}{\psi'_0\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right]} - \frac{1}{\psi'_0\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right]} \right\|_T$$

$$\le c\sup_{|h|\le\delta}\left\| \psi'_0\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right] - \psi'_0\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right] \right\|_T$$

$$\le \begin{cases} c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha\in(0,1); \\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

bulunur.

$E^p(G)$ de polinomlarla yaklaşımı ifade eden ve Alper [4] tarafından ispatlanan aşağıdaki teoremi ana teoremin ispatında kullanacağız.

4.1.3 Teorem. *$f \in E^p(G)$, $1 < p < \infty$ ve L bir Dini-düzgün eğri olsun. Her n doğal sayısı için*

$$\| f - P_n(z,f) \|_{L_p(L)} \le c\widetilde{\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right) = c\omega\left((f\circ\psi), \frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde derecesi $\le n$ olan $P_n(z,f)$ polinomu vardır. Burada c, n'den bağımsız bir sabittir.

4.1.2 Ana Sonuçlar

4.1.4 Teorem. $L \in$ $\boldsymbol{B}(\alpha,\beta),\ \alpha\in(0,1],\ \beta\in[0,\infty)$ *ise n'den bağımsız bir c>0 sabiti için*

$$\|\varphi_0-\pi_n\|_{\overline{G}}\le\begin{cases}\dfrac{c\ln^{\beta+1/2}n}{n^{\alpha+1/2}}, & \alpha\in(0,1);\\[2mm] \dfrac{c\ln^{\beta+3/2}n}{n^{3/2}}, & \alpha=1\end{cases}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat. $q_n(z)$**,** φ'_0 fonksiyonuna $\|\cdot\|_{L^2(G)}$ normunda en iyi yaklaşan ve derecesi $\le n$ olan bir polinom, yani,

$$\|\varphi'_0-q_n\|_{L^2(G)}=\inf_{P_n}\|\varphi'_0-P_n\|_{L^2(G)}$$

olsun. Burada inf derecesi $\le n$ olan tüm P_n polinomları üzerinden alınır.

$$Q_n(z):=\int_{z_0}^{z}q_n(t)\,dt,\quad t_n(z):=Q_n(z)+[1-q_n(z_0)](z-z_0)$$

olsun. Burada $t_n(z_0)=0,$ ve $t'_n(z_0)=1$ olduğu kolaylıkla görülür.

(2.2) bağıntısında özel halde $\omega:=|\varphi'|^{-\frac{1}{p}}$ ve $f=\varphi'_0$ alınırsa $p=2$ için

$$\varepsilon_n(\varphi'_0)_2\le cn^{-\frac{1}{2}}E_n^0\left(\varphi'_0,\frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

ve buradan

$$\|\varphi'_0-t'_n\|_{L^2(G)}=\|\varphi'_0-q_n-1+q_n(z_0)\|_{L^2(G)}$$

$$\le\varepsilon_n(\varphi'_0)_2+\|1-q_n(z_0)\|_{L^2(G)}$$

$$\le cn^{-\frac{1}{2}}E_n^0\left(\varphi'_0,\frac{1}{|\varphi'|}\right)_2+\|\varphi'_0(z_0)-q_n(z_0)\|_{L^2(G)}$$

bulunur. Şimdi (2.1) bağıntısı $p=2$ için kullanılırsa

$$\|\varphi'_0-t'_n\|_{L^2(G)}\le cn^{-\frac{1}{2}}E_n^0\left(\varphi'_0,\frac{1}{|\varphi'|}\right)_2+\frac{\varepsilon_n(\varphi'_0)_2}{d_{z_0}}$$

$$\le c_{14}n^{-\frac{1}{2}}E_n^0\left(\varphi'_0,\frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

ve buradan da π_n 'in ekstremal özelliğine göre

$$\left\|\varphi'_0 - \pi'_n\right\|_{L^2(G)} \leq c_{14} n^{-\frac{1}{2}} E_n^0 \left(\varphi'_0 , \frac{1}{|\varphi'|} \right)_2$$

elde edilir.

2. 2.11 Lemma $p=2$ durumunda uygulanır ve Simonenko ve Andrievskii'nin yöntemi kullanılırsa, sonuncu eşitsizlikten

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \leq c_{15} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} E_n^0 \left(\varphi'_0 , \frac{1}{|\varphi'|} \right)_2$$

eşitsizliğine ulaşılır.

L Dini-düzgün olduğundan $z \in L$ için $|\varphi'(z)| \approx 1$ bağıntısı geçerlidir ve böylece

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \leq c_{15} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \inf_{P_n} \left\|\varphi'_0 - P_n\right\|_{L^2(L,\, 1/|\varphi'|)}$$

$$\leq c_{16} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \inf_{P_n} \left\|\varphi'_0 - P_n\right\|_{L^2(L)}$$

bulunur. Şimdi 4.1.2 lemma ve 4.1.3 teorem uygulandığında

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \leq c_{15} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \omega\left(\Phi, \frac{1}{n} \right) \leq \begin{cases} \dfrac{c \ln^{\beta+1/2} n}{n^{\alpha+1/2}}, & \alpha \in (0, 1); \\ \dfrac{c \ln^{\beta+3/2} n}{n^{3/2}}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur.

4.1.5 Sonuç. *Eğer* $L \in$ **B** $(\alpha, 0)$ *ise*

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \leq \frac{c\sqrt{\ln n}}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}, \qquad \alpha \in (0,1)$$

olur.

Daha önce P. K. Suetin [42] ve D. M. İsrafilov [24] tarafından elde edilen bu sonuç Wu'nun (4.1) deki sonucundan daha iyidir.

4.2 Genelleştirilmiş Bieberbach polinomlarının Dini-düzgün bölgelerde yaklaşım özellikleri

Bu bölümde $L \in$ ***B*** (α,β), $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ olduğunda 4.1.4 Teoremde elde edilen değerlendirme π_n polinomunun genelleşmesi olan $\pi_{n,p}$ polinomu ile

$\varphi_p(z) := \int_{z_0}^{z} [\varphi_0'(\zeta)]^{2/p} d\zeta, \ z \in G, \ p > 0$, fonksiyonuna yaklaşım durumuna

genelleştirilir.

4.2.1 Yardımcı Sonuçlar

Önce 4.1.1 Lemmasının aşağıdaki genelleşmesini verelim.

4.2.1 Lemma. $L \in$ ***B*** (α,β), $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ *ise*

$$\omega\left((\psi'_0)^{2/p},\delta\right) := \sup_{|h|\le\delta} \left\| (\psi'_0)^{2/p}\left(we^{ih}\right) - (\psi'_0)^{2/p}(w) \right\|_T \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1); \\ c\delta\, \ln^{\beta+1} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

olur.

İspat.

(4.4) bağıntısına göre

$$\omega(g,\ \delta) \le c_2 \delta^{\alpha} ln^{\beta} \frac{4}{\delta} \qquad (4.7)$$

dır.

Diğer yandan

$$\omega^*(g,\delta) := \int_0^{\delta} \frac{\omega(g,\ t)}{t} dt + \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(g,\ t)}{t^2} dt$$

için

$$\omega^*(g,\delta) \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1); \\ c\delta\ \ln^{\beta+1} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases} \qquad (4.8)$$

olduğu (4.5) den bilinmektedir.

$\log\psi'_0(w)$ fonksiyonunun $\overline{D}$ de sürekli genişlemeye sahip olduğunu ve buna göre de $|w_1 - w_2| \le \delta < 1$ özelliğindeki $w_1, w_2 \in \overline{D}$ ler için,

$$\left|\log\psi'_0(w_1) - \log\psi'_0(w_2)\right| \le c\omega^*(g,\delta)$$

bağıntısının yazılabildiğini daha önce belirtmiştik.

Diğer yandan $|\zeta_1| \le M$, $|\zeta_2| \le M$ için,

$$\left|e^{\zeta_1} - e^{\zeta_2}\right| \le |\zeta_2 - \zeta_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nM^{n-1}}{n!} \le c(M)|\zeta_2 - \zeta_1|$$

sağlanır, burada $\zeta_k = \frac{2}{p}\log\psi'_0(w_k)$, $k = 1,2$ dir.

Son iki eşitsizlikten

$$\left|(\psi'_0)^{2/p}(w_1) - (\psi'_0)^{2/p}(w_2)\right| \le c_{11}\,\omega^*(g,\delta), \qquad |w_1 - w_2| \le \delta < 1 \tag{4.9}$$

olduğu görülür. (4.8) ile (4.9) birleştirilerek

$$\omega^*\left((\psi'_0)^{2/p}, \delta\right) \le \begin{cases} c\delta^\alpha \ln^\beta \frac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1); \\ c\delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

değerlendirmesi elde edilir.

4.2.2 Lemma. $L \in$ ***B*** (α,β), $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ *ise*

$$\omega(\Phi_p, \delta) \le \begin{cases} c\delta^\alpha \ln^\beta \frac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1); \\ c\delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. 4.1.2 Lemma'sının ispatında gösterildiği gibi

$$\left\|\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right] - \varphi_0[\psi(w)]\right\|_T \approx \left\|\psi\left(we^{ih}\right) - \psi(w)\right\|_T \approx \left\|we^{ih} - w\right\|_T = \left|e^{ih} - 1\right| \approx |h|$$

dır ve 4.1.2 Lemma'dan

$$\omega(\Phi_p, \delta) := \sup_{|h|\le\delta} \left\|\Phi_p\left(we^{ih}\right) - \Phi_p(w)\right\|_T = \sup_{|h|\le\delta} \left\|(\varphi'_0)^{2/p}\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right] - (\varphi'_0)^{2/p}[\psi(w)]\right\|_T$$

$$=\sup_{|h|\le\delta}\left\| \frac{1}{(\psi'_0)^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right]}-\frac{1}{(\psi'_0)^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right]}\right\|_T$$

$$\le c\sup_{|h|\le\delta}\left\| (\psi'_0)^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right]-(\psi'_0)^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right]\right\|_T$$

$$\le\begin{cases} c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha\in(0,1);\\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha=1\end{cases}$$

elde edilir.

4.1.3 Teorem *f* fonksiyonu özel halde φ'_p olarak seçildiğinde buna Faber serisinin *n*. kısmi toplamları yardımıyla yaklaşım teoremi aşağıdaki şekilde olup ana teoremin ispatında kullanılacaktır.

4.2.3 Teorem. *G, Dini düzgün sınırlı bir bölge, p>1 ve*

$$S_n(\varphi'_p, z):=\sum_{k=0}^{n}a_k(\varphi'_p)F_k(z),\quad n=0,1,2,...$$

φ'_p *nün Faber serisinin n. kısmi toplamı olsun. Bu durumda c>0 sabiti için*

$$\left\|\varphi'_p-S_n(\varphi'_p,.)\right\|_{L^p(L)}\le c\omega\left(\Phi_p,\frac{1}{n}\right)$$

bağıntısı vardır.

4.2.2 Ana Sonuçlar

4.2.4 Teorem. $L\in$ ***B*** (α,β), $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in[0,\infty)$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki bağıntılar sağlanır.*

1. $p>2$ *olduğunda, bir* $c_1>0$ *sabiti için*

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\le c_1\begin{cases} n^{-\alpha-1/p}\ln n^{\beta}n, & \alpha\in(0,1);\\ n^{-1-1/p}\ln n^{\beta+1}n, & \alpha=1.\end{cases}$$

2. $p=2$ *olduğunda, bir* $c_2>0$ *sabiti için*

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \le c_2 \begin{cases} n^{-\alpha-1/2}\ln n^{\beta+\frac{1}{2}} n, & \alpha \in (0,1); \\ n^{-3/2}\ln n^{\beta+\frac{3}{2}} n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

3. $1 < p < 2$ *olduğunda,* $\forall \varepsilon > 0$ *ve bir* $c_3 = c_3(\varepsilon) > 0$ *sabiti için,*

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le c_3 \begin{cases} n^{-\alpha-1+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha \in (0,1); \\ n^{-2+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

İspat. $L \in$ ***B*** (α,β) olsun. L Dini-düzgün olduğundan, $|\varphi'_0|$ ve $1/|\varphi'|$ fonksiyonları her $p \ge 1$ için $L^p(L)$'ye, φ'_p fonksiyonu ise $L^p(L, 1/|\varphi'|)$ ye aittir. Ayrıca $\varphi'_p \in E^1(G)$olduğundan $\varphi'_p \in E^p(G, 1/|\varphi'|)$ olur. Bu durumda (2.2) eşitsizliği $f = \varphi'_p$ durumunda da yazılabilir.

$q_n(z)$**'**in φ'_p fonksiyonuna $\|\cdot\|_{L^p(G)}$ normunda en iyi yaklaşan ve derecesi $\le n$ olan bir polinom olduğunu varsayalım. $\hat{p}_n(z_0) = 0,\ \hat{p}'_n(z_0) = 1$ olacak şekilde

$$p_n(z) := \int_{z_0}^{z} q_n(\zeta)\,d\zeta, \quad \hat{p}_n(z) := p_n(z) + [1 - q_n(z_0)](z - z_0)$$

polinomlarını tanımlayalım.

$p_n(z)$ ve $\hat{p}_n(z)$ nin tanımlarından

$$\begin{aligned} \left\|\varphi'_p - \hat{p}'_n\right\|_{L^p(G)} &= \left\|\varphi'_p - q_n - 1 + q_n(z_0)\right\|_{L^p(G)} \\ &\le \left\|\varphi'_p - q_n\right\|_{L^p(G)} + \left\|1 - q_n(z_0)\right\|_{L^p(G)} \\ &\le \left\|\varphi'_p - q_n\right\|_{L^p(G)} + c_4\left|\varphi'_p(z_0) - q_n(z_0)\right| \end{aligned}$$

olur.

Diğer yandan (2.1) ve (2.2) eşitsizliklerinden

$$\left\|\varphi'_p - \hat{p}'_n\right\|_{L^p(G)} = \left\|\varphi'_p - q_n\right\|_{L^p(G)} + c_4 \frac{\left\|\varphi'_p - q_n\right\|_{L^p(G)}}{\left(\pi d_{z_0}^2\right)^{1/p}}$$

$$\le \left\|\varphi'_p - q_n\right\|_{L^p(G)} \left(1 + \frac{c_4}{\left(\pi d_{z_0}^2\right)^{1/p}}\right) = c_5 \varepsilon_n(\varphi'_p)_p,$$

$$\le cn^{-\frac{1}{p}} E_n^0\left(\varphi'_p\,,\frac{1}{|\varphi'|}\right)_p$$

ve $\pi_{n,p}$ polinomlarının ekstremal özelliği dikkate alındığında

$$\left\|\varphi'_p-\pi'_{n,p}\right\|_{L^p(G)} \le cn^{-\frac{1}{p}} E_n^0\left(\varphi'_p\,,\frac{1}{|\varphi'|}\right)_p$$

$$= cn^{-1/p}\inf_{p_n}\left\|\varphi'_p-p_n\right\|_{L^p(L,1/|\varphi'|)}$$

$$\le cn^{-1/p}\left\|\varphi'_p-S_n(\varphi'_p\,,.)\right\|_{L^p(L,1/|\varphi'|)}$$

$$= cn^{-1/p}\left(\int_L\left|\varphi'_p-S_n\right|^p\frac{|dz|}{|\varphi'|}\right)^{1/p}$$

$$\le cn^{-1/p}\left(\int_L\left|\varphi'_p-S_n\right|^p|dz|\right)^{1/p}$$

olur. Böylece

$$\left\|\varphi'_p-\pi'_{n,p}\right\|_{L^p(G)} \le cn^{-\frac{1}{p}}\left\|\varphi'_p-S_n\right\|_{L^p(L)}$$

bulunur. 4.2.3 Teorem ve 4.2.2 Lemma kullanılarak

$$\left\|\varphi'_p-\pi'_{n,p}\right\|_{L^p(G)} \le cn^{-\frac{1}{p}}\,\omega\left(\Phi_p,\frac{1}{n}\right)$$

$$\le c_1\begin{cases} n^{-\alpha-1/p}\ln n^{\beta}n, & \alpha\in(0,1);\\ n^{-1-1/p}\ln n^{\beta+1}n, & \alpha=1.\end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi 2.2.11 Lemma'ya göre eğer $p>2$ ise bir $c_1>0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le c_1\begin{cases} n^{-\alpha-1/p}\ln n^{\beta}n, & \alpha\in(0,1);\\ n^{-1-1/p}\ln n^{\beta+1}n, & \alpha=1,\end{cases}$$

$p=2$ ise bir $c_2>0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_0-\pi_n\right\|_{\overline{G}} \le c_2\begin{cases} n^{-\alpha-1/2}\ln n^{\beta+\frac{1}{2}}n, & \alpha\in(0,1);\\ n^{-3/2}\ln n^{\beta+\frac{3}{2}}n, & \alpha=1,\end{cases}$$

olduğu görülür. $1<p<2$ durumunda ise, düzgün bir eğrinin $\forall\varepsilon>0$ için $1+\varepsilon$ quasikonform katsayılı quasikonform eğri olduğu göz önüne alınarak [38] bir $c_3>0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq cn^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2(1+\varepsilon)^2}{1+(1+\varepsilon)^2}}\begin{cases}n^{-\alpha-1/p}\ln n^{\beta}n, & \alpha\in(0,1);\\ n^{-1-1/p}\ln n^{\beta+1}n, & \alpha=1,\end{cases}$$

$$\leq c_3\begin{cases}n^{-\alpha-1+\frac{1}{p}+\varepsilon}\ln^{\beta}n, & \alpha\in(0,1);\\ n^{-2+\frac{1}{p}+\varepsilon}\ln^{\beta+1}n, & \alpha=1,\end{cases}$$

$$\leq c_3\begin{cases}n^{-\alpha-1+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha\in(0,1);\\ n^{-2+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha=1\end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

5. GENELLEŞMİŞ BIEBERBACH POLİNOMLARININ SINIRLI ROTASYONLU DÜZGÜN BÖLGELERDE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bir önceki bölümde φ_p fonksiyonuna $\pi_{n,p}$ polinomu ile Dini düzgün bölgelerde yaklaşımı inceledik. Bu bölümde ise aynı yaklaşımı sınırlı rotasyonlu düzgün bölgeler sınıfında inceleyecek ve [23] deki sonucu $p \in (1,\infty)$ için genelleştireceğiz.

Bu bölgeler sınıfındaki yaklaşımı değerlendiren sonuçları vermeden önce yardımcı sonuçları verelim.

5.1 Yardımcı Sonuçlar

5.1.1 Teorem. *G, sınırlı rotasyonlu düzgün bir bölge ve $p>1$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için*

$$\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}(e^{it}) \in \Lambda^{p}_{\frac{1}{p}-\varepsilon}$$

olur.

İspat. G bölgesi düzgün sınırlı olduğundan (35, s. 43-44, Teorem 3.2) gereğince, bölge sınırının konform parametrizasyonu için

$$\begin{aligned} arg\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}\left(e^{it}\right) &= \frac{2}{p} arg\psi_0'\left(e^{it}\right) \\ &= \frac{2}{p}\left[\theta(t) - t - \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

ve

$$log\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}(w) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+w}{e^{it}-w}\frac{2}{p}(\theta(t) - t - \frac{\pi}{2})dt, \quad w \in D \qquad (5.1)$$

bağıntıları yazılabilir.

(5.1) bağıntısında *w*'ya göre türev alınırsa

$$\frac{\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''(w)}{\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}(w)} = \frac{i}{p\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{\left(e^{it}-w\right)^2}(\theta(t)-t-\frac{\pi}{2})dt,\ w\in D$$

ve buradan

$$\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''(w) = \frac{i}{p\pi}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}(w)\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{\left(e^{it}-w\right)^2}(\theta(t)-t-\frac{\pi}{2})dt,\ w\in D$$

$$= -\frac{\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}(w)}{p\pi}\int_0^{2\pi}(\theta(t)-t-\frac{\pi}{2})d_t\left(\frac{1}{e^{it}-w}\right),\quad w\in D$$

bulunur.

$$\left(\theta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{e^{it}-w}$$

fonksiyonu periyodik olduğundan, kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''(w) = \frac{\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}(w)}{p\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d(\theta(t)-t-\frac{\pi}{2})}{e^{it}-w},\ w\in D \qquad (5.2)$$

elde edilir.

$$M_p(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0'') := \left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\left(re^{i\theta}\right)\psi_0''\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p}$$

ise (5.2) bağıntısından

$$M_p^p(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0'') = \frac{1}{(p\pi)^p}\int_0^{2\pi}\left|\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}\left(re^{i\theta}\right)\int_0^{2\pi}\frac{d(\theta(t)-t-\pi/2)}{e^{it}-re^{i\theta}}\right|^p d\theta\,,$$

olduğu görülür ve burada, Hölder eşitsizliğini kullanırsak

$$M_p^p(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0'')$$

$$\leq \frac{1}{(p\pi)^p}\left(\int_0^{2\pi}\left|\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}\left(re^{i\theta}\right)\right|^{pp_0} d\theta\right)^{1/p_0}\left(\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{d(\theta(t)-t-\pi/2)}{e^{it}-re^{i\theta}}\right|^{pq_0} d\theta\right)^{1/q_0}$$

bulunur. Burada $1/p_0 + 1/q_0 = 1$ dir. Bölgenin sınırı düzgün olduğundan ilk integral sonludur ve böylece

$$M_p\left(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''\right)\le c_1\left(\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{d(\theta(t)-t-\pi/2)}{e^{it}-re^{i\theta}}\right|^{pq_0}d\theta\right)^{1/(pq_0)} \qquad (5.3)$$

bağıntısı elde edilir.

Minkowski eşitsizliğini (5.3) bağıntısına uygularsak

$$M_p\left(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''\right)\le c_2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|e^{it}-re^{i\theta}|^{pq_0}}\right)^{1/(pq_0)}|d(\theta(t)-t-\pi/2)|$$

olur ve burada

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|e^{it}-re^{i\theta}|^{pq_0}}\le\frac{c_3}{(1-r)^{pq_0-1}}$$

bağıntısını göz önüne alırsak

$$M_p\left(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''\right)\le\frac{c_4}{(1-r)^{\frac{pq_0-1}{pq_0}}}\int_0^{2\pi}|d(\theta(t)-t-\pi/2)|$$

eşitsizliğine ulaşılır.

G bölgesi sınırlı rotasyonlu olduğundan , $\theta(t)-t-\pi/2$ fonksiyonu sınırlı varyasyonludur. Bu özellik sonuncu integralin sonlu olduğunu gösterir ve bu durumda

$$M_p\left(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''\right)\le\frac{c_5}{(1-r)^{1-\frac{1}{pq_0}}}$$

bulunur.

1'e yeterince yakın bir $q_0>1$ sayısı seçilirse, $\forall\varepsilon>0$ için

$$M_p\left(r,\frac{2}{p}\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}-1}\psi_0''\right)\le\frac{c_5}{(1-r)^{1-\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)}}$$

olur.

Son eşitsizliğe Hardy-Littlewood teoremi [10, s.78] uygulanırsa

$$\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}}(e^{it})\in\Lambda^p_{\frac{1}{p}-\varepsilon}$$

sonucuna ulaşılır ki bu da hipotezi ispatlamış olur.

Şimdi 5.1.3 teoremde gerekli olacak, Privalov Lemması olarak bilinen bir lemmanın ifadesini vereceğiz.

5.1.2 Lemma. Eğer C sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve Cauchy singular integrali C de hemen hemen her yerde mevcut ise C nin iç ve dış bileşenlerini oluşturan bölgeler üzerinden bütün açısal yollar boyunca Cauchy integralinin limit değerleri C de hemen hemen her yerde mevcuttur ve

$$\lim_{z\to z_0'} \int_C \frac{f(z')}{z'-z}dz' = \int_C \frac{f(z')}{z'-z_0'}dz' \pm \pi i f(z_0'), \quad z_0' \in C$$

eşitliği geçerlidir [18, s.431].

5.1.3 Teorem.. *G, düzgün sınırlı bir bölge, $p>1$ ve*

$$S_n(\varphi_p', z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi_p') F_k(z), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

φ'_p fonksiyonunun Faber serisinin n. kısmi toplamı olsun. Bu durumda c>0 sabiti için

$$\left\| \varphi_p' - S_n(\varphi_p', \cdot) \right\|_{L^p(L)} \le c\, \omega_{p+\varepsilon}(\Phi_p, 1/n),$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. $\Phi_p \in L^p(T)$, $p \ge 1$ olduğunu daha önce göstermiştik.

Φ_p^+ ve Φ_p^- fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\Phi_p^+(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\Phi_p(\tau)}{\tau - w} d\tau \quad w \in D,$$

$$\Phi_p^-(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\Phi_p(\tau)}{\tau - w} d\tau \quad w \in D^-.$$

$\varphi_p' \in E^p(G)$, $p \ge 1$ olduğundan

$$\varphi_p'(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi_p') F_k(z)$$

yazabiliriz. Burada

$$a_k\left(\varphi_p^{'}\right) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\Phi_p(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau\tau \; k=0,1,2,..., \qquad (5.4)$$

$\varphi_p^{'}$ fonksiyonunun Faber katsayılarıdır.

5.1.2 Lemma'ya göre, T üzerinde hemen her yerde $\Phi_p = \Phi_p^+ - \Phi_p^-$ olur. Üstelik $\Phi_p^+ \in E^p(D)$, $\Phi_p^- \in E^p(D^-)$ ve $\Phi_p^-(\infty)=0$ olduğunu görebiliriz. (5.4) bağıntısından

$$a_k\left(\varphi_p^{'}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\Phi_p(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\Phi_p^+(\tau)-\Phi_p^-(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau = a_k(\Phi_p^+)$$

elde edilir. Yani $\varphi_p^{'} \in E^p(G)$ 'nin orjindeki k. Faber katsayıları, $\Phi_p^+ \in E^p(D)$ 'nin orjindeki k. Taylor katsayıları olur.

Diğer yandan $\varphi_p^{'} \in E^p(G)$ olduğundan

$$\int_L \frac{\varphi_p^{'}(\varsigma)}{\varsigma - z^{'}} d\varsigma = 0, \quad z^{'} \in G^-$$

ve T üzerinde hemen her yerde sağlanan $\Phi_p = \Phi_p^+ - \Phi_p^-$ bağıntısından L üzerinde hemen her yerde

$$\varphi_p^{'}(\varsigma) = \Phi_p^+(\varphi(\varsigma)) - \Phi_p^-(\varphi(\varsigma)) \qquad (5.5)$$

yazılabilir.

$z' \in G^-$ alalım. Bu durumda

$$F_k(z') = \varphi^k(z') + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^k(\varsigma)}{\varsigma - z'} d\varsigma$$

olur. $p \geq 1$ için $\varphi_p^{'} \in E^p(G)$ olduğundan

$$S_n(\varphi_p^{'}, z^{'}) = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right) F_k(z') = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right)\varphi^k(z') + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right)\varphi^k(\varsigma)}{\varsigma - z'} d\varsigma$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p^{'}(\varsigma)}{\varsigma - z^{'}} d\varsigma = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right)\varphi^k(z') + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right)\varphi^k(\varsigma)}{\varsigma - z'} d\varsigma$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi_p^+(\varphi(\zeta))}{\varsigma - z'}d\varsigma + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi_p^-(\varphi(\zeta))}{\varsigma - z'}d\varsigma$$

olduğu görülür.

Kolaylıkla görülebilir ki, $\Phi_p^-(\varphi(\varsigma)) \in E^p(G^-)$, $p \geq 1$ ve $\Phi_p^-(\varphi(\infty)) = 0$. Buna göre sınırsız bölgeler için Cauchy integral formülü kullanılırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi_p^-(\varphi(\varsigma))}{\varsigma - z'}d\varsigma = -\Phi_p^-(\varphi(z'))$$

ve buradan da

$$S_n(\varphi_p', z') = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p'\right)\varphi^k(z')$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p'\right)\varphi^k(\zeta) - \Phi_p^+(\varphi(\zeta))\right]}{\varsigma - z'}d\varsigma - \Phi_p^-(\varphi(z'))$$

olur. L nin dışındaki bütün açısal yollar boyunca $z' \to z$ limiti alınırsa, görülür ki L üzerinde hemen her yerde

$$S_n(\varphi_p', z) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p'\right)\varphi^k(z) - \Phi_p^+(\varphi(z))\right]$$

$$+ [\Phi_p^+(\varphi(z)) - \Phi_p^-(\varphi(z))] + S_L\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p'\right)\varphi^k - \Phi_p^+ \circ \varphi\right)(z)$$

olduğu görülür. Üstelik (5.5) bağıntısı hesaba katılarak, $L^p(L)$, *(p>1)* de singular operatörün sınırlılığı ve de Hölder eşitsizliği kullanıldığında son eşitlikten

$$\| \varphi_p' - S_n\left(\varphi_p', \bullet\right) \|_{L^p(L)} \leq c_6 \| \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p'\right)\varphi^k(z) - \Phi_p^+(\varphi(z)) \|_{L^p(L)}$$

$$= c_6\left(\int_L \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p'\right)\varphi^k(z) - \Phi_p^+(\varphi(z))\right|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= c_6\left(\int_T \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right)w^k - \Phi_p^+(w)\right|^p |\psi'(w)||dw|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c_6\left(\int_T \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right)w^k - \Phi_p^+(w)\right|^{pp_0}\right)^{\frac{1}{pp_0}}\left(\int_T |\psi'(w)|^{\frac{1}{q_0}}|dw|\right)^{\frac{1}{pq_0}}$$

bulunur. Burada $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1$ dir. $\psi' \in L^p$, $(p>1)$ den dolayı son integral sonludur ve böylece her $p_0 > 1$ için

$$\| \varphi_p^{'} - S_n\left(\varphi_p^{'},\bullet\right) \|_{L^p(L)} \leq c_7 \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi_p^{'}\right)w^k - \Phi_p^+(w)\right\|_{L^{pp_0}(T)}$$

elde edilir.

Şimdi (9, s.205 Teorem 2.2) kullanılarak

$$\| \Phi_p^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k(\Phi_p^+)w^k \|_{L^{pp_0}(T)} \leq c_8\omega_{pp_0}(\Phi_p^+, 1/n),$$

bulunur. Burada

$$\omega_{pp_0}(\Phi_p^+, 1/n) = \sup_{|h|\leq 1/n} \| \Phi_p^+(we^{ih}) - \Phi_p^+(w) \|_{L^{pp_0}(T)} .$$

T üzerinde hemen her yerde

$$\Phi_p^+ = \frac{1}{2}\Phi_p + S_T(\Phi_p)$$

$$S_T(\Phi_p)(w) := (P.V)\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Phi_p(\tau)}{\tau - w}d\tau, \quad |w| = 1,$$

olduğundan

$$\omega_{pp_0}(\Phi_p^+, 1/n) \leq \frac{1}{2}\sup_{|h|\leq\frac{1}{n}}\left\|\Phi_p(we^{ih}) - \Phi_p(w)\right\|_{L^{pp_0}(T)}$$

$$+\sup_{|h|\leq\frac{1}{n}}\left\|S_T(\Phi_p)(we^{ih}) - S_T(\Phi_p)(w)\right\|_{L^{pp_0}(T)}$$

elde edilir.

Şimdi $L^p(T)$, $\quad p>1$ den kendisine singüler integralin sınırlılığı kullanılarak

$$\omega_{pp_0}(\Phi_p^+, 1/n) \le c_9 \sup_{|h|\le 1/n} \| \Phi_p(we^{ih}) - \Phi_p(w) \|_{L^{pp_0}(T)}$$

$$= c_9 \omega_{pp_0}(\Phi_p, \frac{1}{n})$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece

$$\left\| \varphi_p' - S_n(\varphi_p', \cdot) \right\|_{L^p(L)} \le c_9 \omega_{pp_0}(\Phi_p, 1/n)$$

olduğu görülür. 1 e yeterince yakın $p_0 > 1$ sayısı seçilerek

$$\left\| \varphi_p' - S_n(\varphi_p', \cdot) \right\|_{L^p(L)} \le c_9\ \omega_{p+\varepsilon}(\Phi_p, 1/n)$$

eşitsizliği bulunur.

5.1.4 Lemma. *Eğer* $p > 1$ *ve* G *sınırlı rotasyonlu düzgün bir bölge ise* $\forall \varepsilon > 0$ *için*

$$\omega_p(\Phi_p, 1/n) \le \frac{c}{n^{\frac{1}{p}-\varepsilon}}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. Hölder eşitsizliğine göre

$$\| \Phi_p(we^{ih}) - \Phi_p(w) \|_{L^p(T)} = \left(\int_T | (\varphi_0')^{\frac{2}{p}}[\psi(we^{ih})] - (\varphi_0')^{\frac{2}{p}}[\psi(w)] |^p \ | dw | \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_T \left| \frac{1}{(\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(we^{ih}))]} - \frac{1}{(\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(w))]} \right|^p |dw| \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_T \left| \frac{(\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(w))] - (\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(we^{ih}))]}{(\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(we^{ih}))] \cdot (\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(w))]} \right|^p |dw| \right)^{1/p}$$

$$\le \left(\int_T |(\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(w))] - (\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(we^{ih}))]|^{pp_0} |dw| \right)^{1/(pp_0)}$$

$$\times \left(\int_T \frac{|dw|}{|(\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(we^{ih}))] \cdot (\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(w))]|^{pq_0}} \right)^{1/(pq_0)} =: A_1 \cdot B_1$$

dir. Burada $1/p_0 + 1/q_0 = 1$ dir. $1/p_1 + 1/q_1 = 1$ olduğunda Hölder eşitsizliğini kullanırsak

$$B_1 := \left(\int_T \frac{1}{|(\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(we^{ih}))] \cdot (\psi_0')^{\frac{2}{p}}[\varphi_0(\psi(w))]|^{pq_0}} |dw| \right)^{1/(pq_0)}$$

$$\leq \left(\int_T \frac{1}{|\psi_0'[\varphi_0(\psi(w))]|^{2q_0p_1}} |dw| \right)^{1/(pq_0p_1)}$$

$$\times \left(\int_T \frac{1}{|\psi_0'[\varphi_0(\psi(we^{ih}))]|^{2q_0q_1}} |dw| \right)^{1/(pq_0q_1)} =: B_{11} \cdot B_{12}$$

ve $1/p_2 + 1/q_2 = 1$ olduğunda

$$B_{11} := \left(\int_T \frac{1}{|\psi_0'[\varphi_0(\psi(w))]|^{2q_0p_1}} |dw| \right)^{1/(pq_0p_1)}$$

$$= \left(\int_L \frac{|\varphi'(z)|}{|\psi_0'[\varphi_0(z)]|^{2q_0q_1}} |dz| \right)^{1/(pq_0p_1)}$$

$$\leq \left(\int_L |\varphi'(z)|^{p_2} |dz| \right)^{1/(pq_0p_1p_2)} \times \left(\int_L \frac{1}{|\psi_0'[\varphi_0(z)]|^{2q_0q_1q_2}} |dz| \right)^{1/(pq_0p_1q_2)}$$

olur.

$\varphi' \in L^p(p>1)$ olduğundan son eşitsizliğin sağındaki ilk integral sonludur ve böylece

$$B_{11} \leq c_{10} \left(\int_T \frac{|\psi_0'(w)|}{[\psi_0'(w)]^{2q_0q_1q_2}} |dw| \right)^{1/(pq_0p_1q_2)}$$

bulunur. Yine Hölder eşitsizliği kullanılırsa $1/p_3 + 1/q_3 = 1$ için

$$B_{11} \leq \left(\int_T |\psi_0'(w)|^{p_3} |dw| \right)^{1/(pq_0p_1q_2p_3)} \times \left(\int_T \frac{|dw|}{[\psi_0'(w)]^{2p_0q_1q_2q_3)}} \right)^{1/(pq_0p_1q_2q_3)}$$

eşitsizliği elde edilir. $\psi_0' \in L^p(p>1)$ olduğundan ilk integral sonludur ve böylece B_{11} sayısı da sonlu olur.

B_{12} nin sonluluğu benzer şekilde ispatlanır. Sonuç olarak

$$\|\Phi_p(we^{ih}) - \Phi_p(w)\|_{L^p(T)} \leq c_{11} A_1$$

bulunur.

$$\omega_p(\Phi_p, 1/n) = \sup_{|h| \le 1/n} \left\| \Phi_p(we^{ih}) - \Phi_p(w) \right\|_{L^p(T)}$$

olduğundan, son eşitlikten

$$\omega_p(\Phi_p, 1/n) \le c_{11} \sup_{|h| \le 1/n} \left(\int_T |\left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}} \left[\varphi_0\left(\psi\left(we^{ih}\right)\right)\right] - \left(\psi_0'\right)^{\frac{2}{p}} \left[\varphi_0\left(\psi(w)\right)\right]|^{pp_0} \, |dw| \right)^{1/(pp_0)},$$

ve 5.1.2 Teorem den

$$\omega_p(\Phi_p, 1/n) \le c_{12} \sup_{|h| \le 1/n} |\varphi_0\left(\psi\left(we^{ih}\right)\right) - \varphi_0\left(\psi(w)\right)|^{\frac{1}{pp_0} - \varepsilon}$$

olduğu görülür.

G bölgesinin sınırı düzgün olduğundan φ_0 ve ψ dönüşüm fonksiyonları sırasıyla L ve T üzerinde $\forall \varepsilon > 0$ için $1 - \varepsilon$ katsayılı Hölder sınıfına aittir. Bunu dikkate alırsak son eşitsizlikten

$$\omega_p(\Phi_p, 1/n) \le \frac{c}{n^{\frac{1}{pp_0} - \varepsilon}}$$

elde edilir. Burada 1 e yeterince yakın $p_0 > 1$ sayısı seçilerek $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\omega_p(\Phi_p, 1/n) \le \frac{c}{n^{\frac{1}{p} - \varepsilon}},$$

eşitsizliğine ulaşılır.

5.2 Ana Sonuçlar

5.2.1 Teorem *G, sınırlı rotasyonlu düzgün bir bölge ise $\forall \varepsilon > 0$ için*

$$\left\| \varphi_p - \pi_{n,p} \right\|_{\bar{G}} \le \begin{cases} \dfrac{c_1}{n^{\frac{2}{p} - \varepsilon}}, & p > 2; \\ \dfrac{c_2}{n^{1-\varepsilon}}, & 1 < p < 2 \end{cases}$$

olacak şekilde $c_1 = c_1(\varepsilon)$ ve $c_2 = c_2(\varepsilon)$ sabitleri vardır.

.

İspat. G düzgün bir bölge olduğundan $|\varphi_0'|$ ve $1/|\varphi'|$ fonksiyonları $\forall p > 1$ için $L^p(L)$'ye aittir [44]. Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\int_L \left|\varphi_p'(z)\right| \frac{1}{\left|\varphi'(z)\right|}|dz| \le \left(\int_L \left|\varphi_p'(z)\right|^{pp0}|dz|\right)^{\frac{1}{p0}} \left(\int_L \frac{1}{\left|\varphi'(z)\right|^{q_o}}|dz|\right)^{\frac{1}{q0}}$$

$$= \left(\int_L \left|\varphi_0'\right|^{2p0}|dz|\right)^{\frac{1}{p0}} \left(\int_L \frac{1}{\left|\varphi'\right|^{q0}}|dz|\right)^{\frac{1}{q0}} < \infty$$

ve böylece $\varphi_p' \in L^p(L, 1/|\varphi'|)$ olur. Burada $\frac{1}{p_o} + \frac{1}{q0} = 1$ dir. Sonuç olarak $\varphi_p' \in E^p(G, 1/|\varphi'|)$ olduğu görülür. Diğer yandan $1/|\varphi'| \in A_p(L)$, $(p > 1)$ [21, Lemma 12] olduğundan (2.2) eşitsizliği φ_p' fonksiyonu ve $\omega := 1/|\varphi'|$ ağırlık fonksiyonu için geçerlidir.

Şimdi [23] deki Teorem 1 in ispatındaki metodu izliyoruz. φ_p' 'ye $\|\cdot\|_{L_p(G)}$ normunda en iyi yaklaşan polinomu $q_n(z)$ ile gösterelim.

$$p_n(z) := \int_{z_0}^{z} q_n(\zeta)d\zeta, \qquad \widehat{p_n}(z) := p_n(z) + [1 - q_n(z_0)](z - z_0)$$

olsun. Bu durumda $\widehat{p_n}(z_0) = 0$, $\widehat{p_n}'(z_0) = 1$. olur. Buradan

$$\|\varphi_p' - \widehat{p_n}'\|_{L_p(G)} = \|\varphi_p' - q_n - 1 + q_n(z_0)\|_{L_p(G)}$$

$$\le \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} + \left\|1 - q_n(z_0)\right\|_{L_p(G)}$$

$$= \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} + c_{12}\left|\varphi_p'(z_0) - q_n(z_0)\right|$$

olur. Diğer yandan (2.1) eşitsizliğine göre

$$\left\|\varphi_p' - \hat{p}_n'\right\|_{L_p(G)} \le \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)} + c_{13}\frac{\left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)}}{\left(\pi d_{z_0}^2\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\le \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L_p(G)}\left(1 + \frac{c_{13}}{\left(\pi d_{z_0}^2\right)^{\frac{1}{p}}}\right)$$

ve (2.2) bağıntısından

$$\left\| \varphi_p' - \hat{p}_n' \right\|_{L_p(G)} \le c_{14} n^{-\frac{1}{p}} E_n^{\circ}\left(\varphi_p', \frac{1}{|\varphi'|} \right)_p$$

eşitsizliği elde edilir.

π_n polinomlarının ekstremal özelliğine göre,

$$\left\| \varphi_p' - \pi_{n,p}' \right\|_{L_p(G)} \le c_{14} n^{-\frac{1}{p}} E_n^{\circ}\left(\varphi_p', \frac{1}{|\varphi'|} \right)_p$$

olur. Hölder eşitsizliğini son eşitsizliğe uygulamak suretiyle

$$\| \varphi_p' - \pi_{n,p}' \|_{L_p(G)} \le c_{14} n^{-\frac{1}{p}} \inf_{p_n} \| \varphi_p' - p_n \|_{L^p\left(L, \frac{1}{|\varphi'|}\right)}$$

$$\le c_{14} n^{-\frac{1}{p}} \left\| \varphi_p' - S_n\left(\varphi_p', \cdot\right) \right\|_{L^p\left(L, \frac{1}{|\varphi'|}\right)}$$

$$\le c_{14} n^{-\frac{1}{p}} \left(\int_L \left| \varphi_p' - S_n \right|^p \frac{|dz|}{|\varphi'|} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le c_{14} n^{-\frac{1}{p}} \left(\int_L \left| \varphi_p' - S_n \right|^{pp_0} |dz| \right)^{\frac{1}{pp_0}} \left(\int_L \frac{1}{|\varphi'|^{q_0}} |dz| \right)^{\frac{1}{pq_0}}$$

bulunur. Burada $1/p_0 + 1/q_0 = 1$ dir.

L düzgün olduğundan, son integral sonludur ve böylece

$$\left\| \varphi_p' - \pi_{n,p}' \right\|_{L_p(G)} \le c_{15} n^{-\frac{1}{p}} \left\| \varphi_p' - S_n \right\|_{L^{pp_0}(L)}$$

olur. Şimdi sağdaki norma $p := pp_0$ olduğunda 5.1.2 Teorem ve daha sonra 5.1.3 Lemma'yı uygulayarak p, $p_0 > 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\left\| \varphi_p' - \pi_{n,p}' \right\|_{L_p(G)} \le c_{16} n^{-\frac{1}{p}} \omega_{pp_0+\varepsilon}\left(\Phi_p, \frac{1}{n} \right)$$

$$\le c_{17} n^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{n^{\frac{1}{pp_0+\varepsilon} - \varepsilon}}$$

olduğu görülür. Sonuncu eşitsizlikte p_0 sayısı 1'e yeterince yakın seçilerek

$$\left\| \varphi_p' - \pi_{n,p}' \right\|_{L_p(G)} \le c_{17} \frac{1}{n^{\frac{2}{p} - \varepsilon}}$$

elde edilir.

Diğer yandan her düzgün eğri $\forall\varepsilon > 0$ için $1+\varepsilon$ quasikonform katsayılı quasikonform eğridir [38]. Bu durumda ispatın geri kalan kısmı [20] deki Teorem 1 dekine benzer olarak yapılır.

6. SONUÇ

1. Lyapunov eğrileri sınıfının bir genelleşmesi tanımlanmış, bu sınıftan olan eğriler ile sınırlı bölgelerde Riemann konform dönüşümlerinin düzgünlük modülleri için bazı önemli değerlendirmeler elde edilmiştir.
2. Yeni tanımlanmış bölgeler sınıfında Bieberbach ve genelleşmiş Bieberbach polinomlarının konform dönüşüme ve konform dönüşüm yardımı ile ifade edilen özel bir fonksiyona kapalı bölgelerde yaklaşım hızı bölge sınırının geometrik özelliklerine göre değerlendirilmiştir.
3. Sınırlı rotasyonlu düzgün bölgelerin konform dönüşümlerinin düzgünlük modülleri ile ilgili gerekli değerlendirmeler ispatlanmış ve bu değerlendirmeler yardımı ile genelleşmiş Bieberbach polinomlarının verilen bölgelerin kapanışında yaklaşım hızı ile ilgili uygun değerlendirmeler elde edilmiştir. Özel halde $p=2$ durumunda elde edilen sonuç iyi bilinmekte olup S. N. Mergelyan konjektürünün pozitif çözümünü vermektedir.

KAYNAKLAR

[1] Abdullayev, F. G. , “Uniform convergence of the generalized Bieberbach polynomials in domains of complex plane”. *In: Approximation Theory and its Applications*, Pr. Inst. Math. Nats. Akad. Nauk Ukr., Kiev, (1999), 5.

[2] Abdullayev, F. G. , “Uniform convergence of the Bieberbach polynomials inside and on the closure of domains in the complex plane”, *East Journal of Approximation*, 7, 1, (2001), 77.

[3] Ahlfors, L.V. , Lectures on quasiconformal mappings, Wadswort, Brooks/ Cole Advanced Books, Software, Monterey, California (1987).

[4] Alper, S. Y. , “Approximation in the mean of analytic functions of class E^p” (Russian), *In: Investigations on the modern problems of the function theory of a complex variable*, Moscow: Gos. Izdat. Fiz. Mat. Lit., (1960), 273.

[5] Anderson, J. M., Gehring, F. W. , Hinkkanen, A., “Polynomial approximation on Quasidisk”, *Differential Geometry and Complex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985), 75.

[6] Andrievskii, V. V. , “Convergence of Bieberbach polynomials in domains with quasi-conformal boundary”, *Ukrainian Math.* J. 35 (1983), 233.

[7] Andrievskii, V. V. , “Uniform convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise-quasiconformal boundary” (Russian). *In: Theory of Mappings and Approximation of Functions,* Kiev: Nakova Dumka (1988) 3.

[8] Andrievskii, V. V.and Pritsker, I. E.: “Convergence of Bieberbach polynomials in domains with interior cusps”, *J. d' Analyse Math*. 82, (2000), 315.

[9] DeVore, R. A., Lorentz, G. G. “Constructive Approximation”. Springer-Verlag (1993).

[10] Duren, P. L., “Theory of H^p Spaces”, Academic Press, New York-London, (1970).

[11] Dyn'kin, E. M. , “The rate of polynomial approximation in the complex domain”. *In Complex analysis and spectral theory* (Leningrad, 1979/1980), Berlin: Springer (1981), 90.

[12] Dyn'kin, E. M. , Osilenker, B. , “Weighted estimates for singular integrals and their applications”, *Mathematical Analysis, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauc.n Tekhn. Inform.* Moscow, 21, (1983), 42.

[13] Gaier, D. , “Lectures on Complex Approximation”, Birkhäuser Verlag, Boston (1987).

[14] Gaier, D. , “On a polynomial lemma of Andrievskii” , *Arch. Math*. 49, (1987), 119.

[15] Gaier, “On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners”, *Constr. Approx*. 4, (1988), 289.

[16] Gaier, D. , “On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with piecewise analytic boundary”. *Arch. Math*. 58, (1992), 289.

[17] Gaier, D., “Polynomial approximation of conformal maps”, *Constr. Approx*. 14, (1998), 27.

[18] Goluzin, G. M., “Geometric Theory of Functions of a Complex Variable”, *Translation of Mathematical Monographs*, *Amer. Math. Soc*. , 26, (1969).

[19] Israfilov, D. M., “Approximative properties of extremal polynomials”, *Dep. in viniti,* Moscow, N. 5461, 82, (1982), 23.

[20] Israfilov, D. M. , “Uniform convergence of some extremal polynomials in domains in domains with quasi conformal boundary”, *East Journal of Approximation*, 4, 4, (1998), 527.

[21] Israfilov, D. M. , “Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov space $E^p(G, \omega)$ and the Bieberbach polynomials”, *Constr. Approx*. 17, (2001), 335.

[22] Israfilov, D. M. , “Bergman type kernel function and approximation properties of some extremal polynomials on quasidisks”, *East Journal on Approx*., 9, 2, (2003), 157.

[23] Israfilov, D. M. , “Uniform convergence of the Bieberbach polynomials in closed smooth domains of bounded boundary rotation”, *Journal of Approx. Theory*, 125, (2003), 116.

[24] Israfilov, D. M. , “Uniform convergence of Bieberbach polynomials in closed Radon domains”, *Analysis* (Munich), 23, (2003), 51.

[25] Israfilov, D. M. , Oktay, Burcin, “Approximation Properties of the Bieberbach polynomials in the Dini-smooth domains” *Bull Belgian Math. Soc*. 13, (2003), 91.

[26] Israfilov, D. M. , Oktay, Burcin, “Approximation Properties of the Bieberbach polynomials”, XVII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Bolu, (2004), 32.

[27] Israfilov, D. M., Oktay, Burcin, “Approximation Properties of the Generalized Bieberbach polynomials in the Dini-smooth domains”, *Khazar Journal of Mathematics*, 2, (2006), 17.

[28] Karlovich, Y. I. , Böttcher, A., “Carleson curves, Muckenhoupt weights and Toeplitz operators”, D’estvdıs Catalans Barcelona Inst. Barcelona, (1997).

[29] Keldych, M. V., “Sur l′approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques”, *Math. Sb*., 5, 47, (1939), 391.

[30] Kulikov, V. , “L^p convergence of Bieberbach polynomials” (Russian), *Izv Akad Nauk SSSR Ser. Mat.* 43, (1979), 1121.

[31] Lehto, O. Virtanen, K. , “Quasiconformal mappings in the plane”, *Springer-Verlag,* Berlin, Heidelberg, New York, (1997).

[32] Markushevich, A. I. , “Theory of functions of complex variable III”, Prentice Hall, Inc.(1967).

[33] Marsden, J. E. , “Basic Complex Analyis”, *W. H. F. and Company*, (1973).

[34] Mergelyan, S. N. , “Certain questions of the constructive theory of functions” (Russian), *Trudy Math. Inst. Steklov*, 37, (1951), 1.

[35] Pommerenke, Ch. , “Boundary Behaviour of Conformal Maps”, Springer-Verlag, Berlin (1992).

[36] Pritsker, I. G., “On the convergence of Bieberbach polynomials in domains with interior zero angles”. *In: Methods of approximation theory approximation theory in complex analysis and mathematical physics,* Leningrad, *1991. A. A. Gonchar and E. B. Saff, eds.), Lecture Notes in Math.* 1550, (1992), 169.

[37] Privalov, I. I. : “Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable”, *Nauka, Moscow*, (1984).

[38] Rickman, S., “Characterization of quasiconformal maps”, *Ann. Acad Sci. Fenn., Ser. A., Mathematica*", 395, (1966).

[39] Simonenko, I. B. , “On the convergence of Bieberbach polynomials in the case of a Lipschitz domain”, *Math. USSR-Inv.,* 13, (1978), 166.

[40] Sobolev, S. L. , Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, *SO AN SSSR*, Novosibirsk, (1962).

[41] Suetin, P. K., “Polynomials orthogonal over a region and Bieberbach polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math, Amer. Math. Soc., Providence*, *R.I.*, 100 (1974).

[42] Suetin, P. K., “Series of Faber Polynomials”, Gordon and Breach Science Publishers, Australia, (1998).

[43] Warschawski, S. E. “Über das Randverhalten der Abbildungsfunktionen bei konformer” *Abbildung. Math*. Z. , 35, 321.

[44] Warschawski, S. E., Schober, G. P., "On Conformal Mapping of Certain Classes of Jordan Domains", *Arch. Rational Mach. Anal*. 22, (1966), 201.

[45] Wu Xue-Mou, "On Bieberbach polynomials", *Acta Math. Sinica*, 13 (1963), 145.