

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

GRAF TEORİSİNİN BAZI MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat Sabri SARAN

Balıkesir, Şubat -2008

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GRAF TEORİSİNİN BAZI MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

YÜKSEK LISANS TEZİ

Murat Sabri SARAN

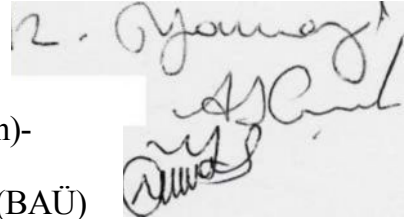
Tez Danışmanı: Doç.Dr.Ahmet Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi: 13.02.2008

Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Ramazan YAMAN (BAÜ)

Doç.Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK (Danışman)-

(BAÜ) Yrd.Doç.Dr. Necati ÖZDEMİR (BAÜ)



Balıkesir, Şubat-2008

ÖZET

GRAF TEORİSİNİN BAZI MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

Murat S. SARAN

**Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

**(Yüksek Lisans Tezi / Tez danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)
Balıkesir, 2008**

Graf Teorisinin çıkış ve gelişmesi alışlagelmiş biçimde olmamıştır. Teori, kendisinden çok daha eski bir problemin çözümü olarak ortaya konmuştur. Graflar daha sonra elektrik mühendisliği, kimya ve ekonomi gibi birbirinden bağımsız alanlarda karşımıza çıkmıştır. Bugün ise graf teorisi, modern cebirin önemli kollarından biri olmuştur.

Ele aldığımız bu çalışma; graf kavramını ve temellerini açıklayarak, elektrik mühendisliği ve endüstri mühendisliği alanlarına ne gibi katkılarda bulunduğunu incelemeye yöneliktir. Bu araştırma göstermiştir ki bu iki mühendislik alanında ilgili problemlere yaklaşımda farklı yöntemler de olmakla birlikte, graf yaklaşımı, bu problemlere çok daha net bir bakış açısı ortaya koymaktadır.

Çalışma dört bölümden oluşup iki, üç ve dördüncü bölümler tezin amacını gerçekleştirmeye yöneliktir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Graf / Graf Teorisi / Elektrik Devreleri / Matematiksel Model / Elektrik Devrelerinin Analizi / Ulaştırma Ağları

ABSTRACT

ENGINEERING APPLICATIONS of GRAPH THEORY

Murat S. SARAN
Balikesir University, Institute of Science
Department of Mathematics

(MSc. Thesis / Supervisor: Asoc. Prof Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)
Balikesir. Turkey, 2008

Graph theory has had an unusual origin and development. Theory has been shown up a solution of a problem which was set up before itself. Later, graphs appeared in unique areas such as electrical engineering, chemistry and economics. Today, graph theory becomes one of main branches of modern algebra.

This study aims that to explain basic concepts of graphs and then to examine graph theory approaches in electrical engineering and industry engineering areas. This study denotes that although both engineering areas have different approaches to related problems, graf approaches of the same problem have more efficient focus on problems.

Our study has four main chapters and second, third and fourth Chapters tend to realize our aims.

KEYWORDS: Graph / Graph Theory / Electric Circuits / Mathematical Model / Analysis of Electric Circuits / Transport Networks

İÇİNDEKİLER:	<u>Sayfa</u>
ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEYWORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	vii
1. GİRİŞ	1
2. GRAFLAR	3
2.1. Graf Nedir?	3
2.2. Grafların Sınıflandırılması	4
2.3. İlişki ve Derece	5
2.4. Alt Graf	6
2.5. Adım Yol ve Çerçeve	7
2.6. Ağaç kavramı	8
2.7. Ağaç Tümleyeni (Kirişler Kümesi)	9
2.8. Yönlendirilmiş Graflar (Digraf)	10
2.9. Temel Çevre, Kesitleme ve Düğüm Kesitlemesi	13
2.10. Kesitleme Yönü ve Çizgisi	16
3. ELEKTRİK DEVRELERİ ve GRAF TEORİSİ	18
3.1. Giriş	18
3.2. Devre Elemanları ve Matematiksel Model	20
3.3. Bazı Elektrik Devre Elemanlarının Matematiksel Modelleri	25
3.4. Devreler Teorisinin Aksiyomları	29
3.5. Graf Matrisleri	31
3.6. Dal Gerilimlerinin Belirlenmesi	46
3.7. Kiriş Akımlarının Belirlenmesi	48
4. İŞ – AĞ AKIŞ PROBLEMLERİ ve GRAF TEORİSİ	49
4.1. Giriş	49
4.2. Ulaştırma Ağları	49
5. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME	58
KAYNAKÇA	59

SEMBOL LİSTESİ

Simge Adı

Tanımı/Birimi

Birimi

$d(v_i)$

Düğüm Derecesi

$d^+(v_i)$

Başlangıç Derecesi

$d^-(v_i)$

Final Derecesi

$i(t)$

Elektrik Akım Şiddeti

Amper (A)

$v(t)$

Elektriksel Potansiyel

Volt (V)

R

Direnç

Ohm (Ω)

G

İletkenlik

Siemens (S)

$p(t)$

Ani Güç

Watt (W)

\square

İspatların sonunda kullanılır.

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil Adı</u>	<u>Sayfa Numarası</u>
Şekil 2.1. Beş düğüm ve yedi kenardan oluşan graf	3
Şekil 2.2. Aynı Grafın Farklı Çizimleri	4
Şekil 2.3. İki Sonsuz Grafa Ait Birer Bölüm	5
Şekil 2.4. İki Parçalı Graf	5
Şekil 2.5. Graf ve Alt Graf	7
Şekil 2.6. Adım, Yol ve Çevre	8
Şekil 2.7. Seçilmiş Bir Ağaç ve Tümleyeni	10
Şekil 2.8. Beş Düğüm ve Dokuz Kenarlı Birleşik Graf	11
Şekil 2.9. Graf, seçilmiş ağaç, kirisler kümesi ve temel çevre yönleri	13
Şekil 2.10. Birleşik bir graf ve ona ilişkin bir alt-graf	14
Şekil 2.11. Birleşik bir grafta kesitleme seçimi	16
Şekil 3.1. Sekiz düğümlü bir elektrik devresi	19
Şekil 3.2-a) 2-uçlunun uyarılması	21
Şekil 3.2-b) Ampermetre ve voltmetrenin 2-uçluya bağlantı şekli	21
Şekil 3.2-c) Ölçü aletlerinin bağlantı biçimini gösteren uç graf	21
Şekil 3.3-a) Yarı iletken diyotun sembolü	23
Şekil 3.3-b) ve c) Matematiksel Modeller	23
Şekil 3.4-a) 5-uçlu bir devre elemanı	24
Şekil 3.4-b) Ölçmeler Grafi	24
Şekil 3.4-c) 5-uçlu elemanın uç-ağaçlarından biri	24
Şekil 3.5-a) 2-uçlu lineer direnç elemanı sembolü	26
Şekil 3.5-b) 2-uçlu lineer olmayan direnç elemanı sembolü	26
Şekil 3.5-c) 2-uçlu direnç elemanına ilişkin uç-graf	26
Şekil 3.6-a) Doğru (DC) gerilim kaynağı	27
Şekil 3.6-b) Doğru (DC) akım kaynağı	27
Şekil 3.6-c) DC kaynaklara ilişkin uç graf	27
Şekil 3.6-d) DC gerilim kaynağının v-i karakteristiği	27
Şekil 3.1-e) DC akım kaynağının v-i karakteristiği	27
Şekil 3.2-a) Gerilim kaynağı sembolü	28
Şekil 3.7-b) Akım kaynağı sembolü	28
Şekil 3.7-c) Kaynaklara ilişkin uç graf	28
Şekil 3.73-d) Örnek kaynak fonksiyonları	28
Şekil 3.8-a) 3-uçlu ve ölçme grafi	29
Şekil 3.8-b) İki kapılı ve ölçmeler grafi	29
Şekil 3.9. Bir elektrik devresi ve uç grafi	30
Şekil 3.10. 3.4.3. Teoreminin ispatı	31
Şekil 3.11. Temel Çevreler	32
Şekil 3.12. Çevre ve kesitleme yönleri	35
Şekil 4.1. Ulaştırma Ağı	50
Şekil 4. 2. 4.2.5 Teoremin İspatı	56

ÖNSÖZ

Yıllar öncesinde bitirmiş olmam gereken bu çalışmaya eşimin, ailemin, dostlarımın ve özellikle danışmanım Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK' in yöreklendirmeleri ile başladım. Ancak çalışmam sırasında, başlangıçta kayıp olarak görünen yıllarda kazandığım çeşitli tecrübelerin büyük bir faydasını gördüm. Bu tecrübeleri kazanmamda çok büyük emek ve sabırları olan, manen babam olarak bildiğim, Yard. Doç. Dr. Cengiz AYDEMİR' i burada anmamak büyük bir vefasızlık olur. Ama benzer bir vefasızlık, adları sayfalara sığmayacak, on dört yıldır birlikte olduğum Balıkesir Meslek Yüksekokulu çalışanlarına teşekkür etmemektir.

Bir eğitimcimizin dediği “Benim en büyük öğretmenlerim öğrencilerimdir.” sözünden yola çıkarak, bu tecrübelere vesile olan öğrencilerimi de sevgiyle kucaklamak gereğini hissediyorum.

Zaman zaman keyifli, zaman zaman sancılı geçen bu çalışma sırasında bana rehberlik eden Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK' e; çalışmaya benim kadar sahip çıkan, zorlandığım her tanım ve teoreme yardımına koşan Yard. Doç. Dr. Fırat ATEŞ' e, minnetlerimi belirtmekte kullanacağım kelimeleri bulmakta zorlanıyorum.

Bu çalışmaya beni teşvik eden bu insanların, çalışmamda kazandığım bilimsel değerler bir yana, bu satırlarda dile getirmeye çalıştığım duyguları bana hatırlatmış olmaları da ayrı bir mutluluktur.

Balıkesir, 2008

Murat S. SARAN

1. GİRİŞ

Graf Teorisi 1736 yılında Euler' in *Königsberg Köprü* problemini çözmesi ile ortaya atıldı. Sonraki yüzyıl boyunca üzerinde herhangi bir çalışma yapılmayan teori, 1847 yılında G. R. Kirchhoff' un (1824 – 1887) *Ağaç Teorisinin Elektrik Devrelerine Uygulanması* başlıklı çalışması ile yeniden gündeme geldi. Bundan on yıl kadar sonra A. Cayley (1821 – 1895) C_nH_{2n+2} Doymuş Hidrokarbon İzomerlerinin Sınıflaması çalışması sırasında ağaç kavramını keşfetti. Kirchhoff ve Cayley ile aynı zamanlarda graf teorisi için iki ayrı kilometre taşı kondu.

Bu kilometre taşlarından birincisi bir harita üzerinde, birbirlerine sınır komşusu olan ülkelerin farklı renklerle boyanarak birbirlerinden ayrılması için dört rengin kullanımının yeterli olduğunu gösteren *Dört Renk Varsayımı*dır. Dört renk varsayımı ilk kez A. F. Möbius (1790 – 1868) tarafından 1840 yılında verdiği bir ders sırasında ortaya atılmıştır. Bu varsayım 1879 yılında Cayley' in *Proceedings of the Royal Geographic Society* adlı dergide yaptığı makale ile çok bilinen bir problem durumuna geldi.

İkinci kilometre taşı ise Sir W. R. Hamilton (1805 – 1865) tarafından geliştirilen bir bulmaca yardımıyla kondu. Bu bulmaca, her köşesine dünyanın 20 önemli şehrinin yerleştirildiği tahtadan, düzgün bir 12-yüzlüden (her bir yüzü düzgün bir beşgen olan 20 köşeli, her bir köşede 3 ayrıdırın birleştiği çokyüzlü) oluşmaktaydı. Burada hedef; 12 yüzünün kenarları kullanılarak her bir şehirden bir defa geçmek koşuluyla 20 şehri içeren bir tam tur yapmaktır.

Bu emekleme dönemini bir yarım yüzyıllık duraklama dönemi izledi. Bu dönem sonunda 1939 yılında D.Köning kendinden önceki çalışmalarını derleyerek konu hakkındaki ilk kitabı yayınladı. İzleyen 30 yıl boyunca teorik ve uygulama alanında konuyu içeren çok yoğun çalışmalar yapıldı. Günümüzde de halen yukarıda sözü

edilen çözülmüş ya da çözülmemiş problemlerin ifadesi ve çözümü anlamında pek çok çalışma yapılmaktadır.

Son on yıllık periyotta ise yine graf teori kullanılarak, Kriptografi, Bilişim ağı sistemleri ve elektronik, mekanik sistemler vb. ([6] [14] [15] [9] [10] [18]) konularında gerekli çalışmalar yapılmış olup, halen teorik matematiksel kavramlar (özellikle cebirsel konular) üzerinde, adı geçen uygulama alanlarına adaptasyonlar yapılmaktadır. ([2], [11]). Konu üzerinde yapılan çalışmalar çeşitli süreli yayınlarda da yayınlanmaktadır [8].

Bu tezin genel amacı, özellikle cebirsel ve uygulamalı matematik alanlarında önemli bir yer tutan Graf Teori kavramının, sadece matematikte değil, aynı zamanda mühendislik disiplinine de katkılarının bulunduğunu ve de mevcut birçok mühendislik uygulamasının ya graf teoriden başladığı ya da teorinin mühendislik uygulamasına doğrudan rehber olduğu gerçeğini vurgulamaktır.

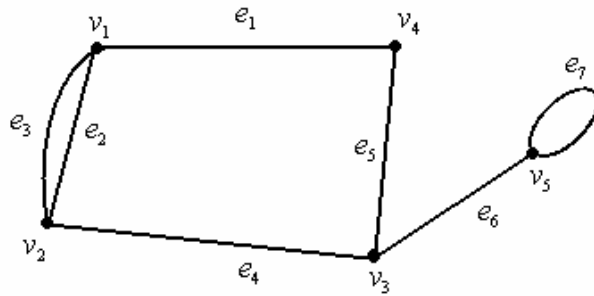
Tez 4 bölümden oluşup iki, üç ve dördüncü bölümler tezin amacına yöneliktir.

2. GRAFLAR

2.1. Graf Nedir?

Bir graf $G = (V, E)$ kümelerinden oluşur. Burada $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ kümesinin elemanlarına *düğüm*; $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ kümesinin elemanlarına da *kenar* adı verilir. Bir e_k kenarı sırasız bir çift (v_i, v_j) ile belirlenir. Sözü edilen v_i ve v_j düğümleri e_k kenarının başlangıç ve bitiş düğümleridir. Grafların en yaygın gösterimi, Şekil 2.1 de gösterildiği gibi, düğümlerin birer nokta, kenarların ise kendi başlangıç ve bitiş düğümleri arasında doğru parçaları ile gösterildiği diyagramlardır. Diyagramın kendisi *graf* olarak adlandırılır.

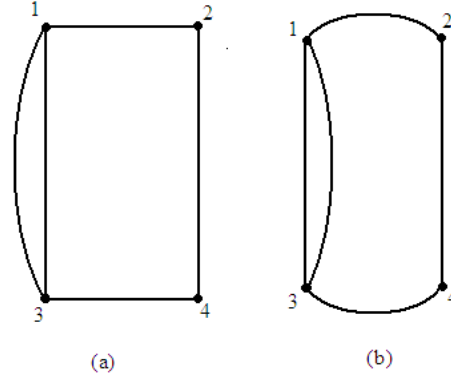
Bir grafta, herhangi bir e_k kenarı bir (v_i, v_j) düğüm çifti ile eşleşir. Başlangıç ve bitiş düğümleri aynı olan kenar *döngü* olarak adlandırılır. Şekil 2.1 de e_7 kenarı bir döngüdür. Başlangıç ve bitiş düğümü aynı olan birden fazla kenar var ise bu kenarlara *paralel* denir. Örneğin Şekil 2.1 de e_2 ve e_3 kenarları paraleldir.



Şekil 2. 2 Beş düğüm ve yedi kenardan oluşan graf

Döngü ve paralel kenar içermeyen graflar *basit graf* olarak adlandırılır. Bununla birlikte pek çok mühendislik uygulamasında paralel kenar (ve hatta döngü) gereklidir. Bu yüzden paralel kenar ve döngü içeren graflara da *genel graf* adını vereceğiz.

Bir grafin geometrik şekli önemli değildir. Graf çizimlerinde önemli olan, kenarlar ile düğümler arasındaki ilişkidir. Örneğin Şekil 2.2-(a) ve (b) de gösterilen graflar, düğüm ve kenarlar arasındaki ilişkileri nedeniyle aynıdır.



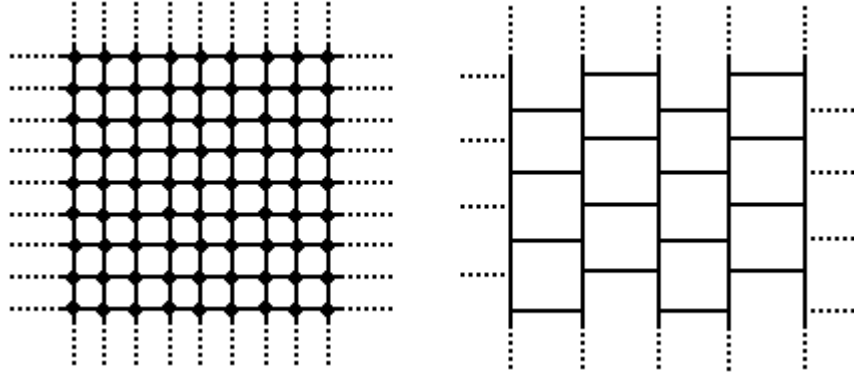
Şekil 2.3 Aynı grafin farklı çizimleri

2.2. Grafların Sınıflandırılması

Graflar, sayılabilirliklerine göre sonlu ve sonsuz olarak isimlendirilirler ([5]). Düğüm kümesi ve kenar kümesi sonsuz birer küme olarak alındığında *sonsuz graf* adı verilen yapılar elde edilir. Şekil 2.3 de sonsuz graflara bir örnek verilmiştir. Sonlu düğüm ve kenar kümelerine sahip olan graflara *sonlu graf* denir.

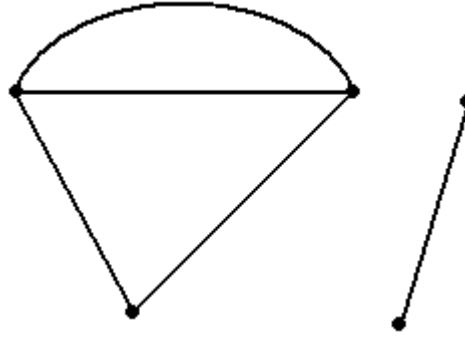
[3] de belirtildiği gibi, graflar yapılarına göre *birleşik* ve *parçalı* olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Bir grafin herhangi bir düğümünden diğer bütün düğümlerine kenarlar üzerinden ulaşılabiliriyorsa bu grafa *birleşik graf* adı verilir. Örneğin Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 de gösterilen graflar birleşik graflardır.



Şekil 2. 4 İki sonsuz Grafa Ait Birer Bölüm

Bir grafin en az iki düğümü arasında yukarıda sözü edildiği gibi bir kenar yoksa bu grafa *parçalı graf* denir. Şekil 2.4 de gösterilen graf parçalı grafa bir örnektir.



Şekil 2. 5 İki Parçalı Graf

2.3. İlişki ve Derece

Alınacak bir v_i düğümü bazı e_j kenarlarının herhangi bir düğümü ise v_i ve e_j *ilişkilidir* denir. Örneğin Şekil 2.1 de gösterilen grafa e_2, e_3 ve e_4 kenarları v_2 düğümü ile ilişkilidir. Paralel olmayan iki kenar ortak bir düğüm ile ilişkilirse bu kenarlara *bitişik kenar*; benzer şekilde iki düğüm bir kenarın ortak sonu ise bu düğümlere de *bitişik düğüm* denir. Örneğin Şekil 2.1 de e_6 ve e_7 kenarları ile v_3 ve v_4 düğümleri bitişiktir.

Bir düğüme bağlı olan kenarların sayısı (döngü iki kez sayılmak üzere) o düğümün derecesini verir ve $d(v_i)$ ile gösterilir. Örneğin Şekil 2.1 de verilen grafta $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 2$ dir. Bu grafin v_5 düğümünde ise bir kenar ve bir döngü bulunduğundan (döngüleri iki derece olarak kabul edeceğimizden) $d(v_5) = 3$ tür.

Bir G grafinin e kenarı ve v_1, v_2, \dots, v_n ile gösterilen n düğümü olsun. Her bir kenar, başlangıç ve bitiş düğümleri nedeniyle iki dereceyi temsil edeceğinden

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2e \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir.

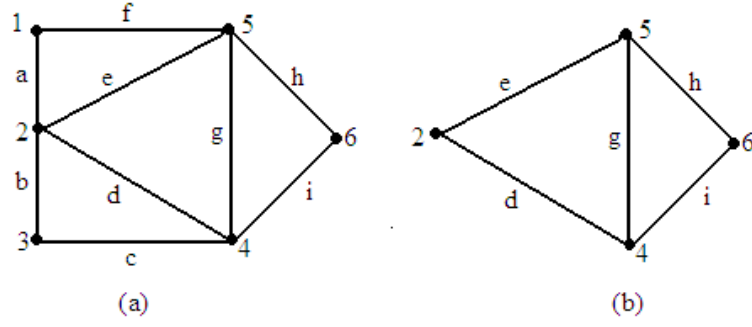
Şekil 2.1 de verilen graf, 5 düğümden oluşmaktadır. Bu durumda:

$$\begin{aligned} d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) \\ = 3 + 3 + 3 + 2 + 3 = 14 \end{aligned}$$

olup, verilen graf 7 kenardan oluştuğuna göre elde edilen düğüm dereceleri toplamı, kenar sayısının iki katıdır.

2.4. Alt Graf

G bir graf olsun. G nin alt grafı ile anlatılmak istenen ki bunu G_{alt} ile gösterelim, aslında; düğümleri ve kenarları G de bulunan ve kenarları G deki aynı düğüm çiftleri ile ilişkili olan graftır. Örneğin Şekil 2.5-(b) de verilen graf, Şekil 2.5-(a) da gösterilen grafin alt grafıdır.



Şekil 2. 6 Graf ve Alt Graf

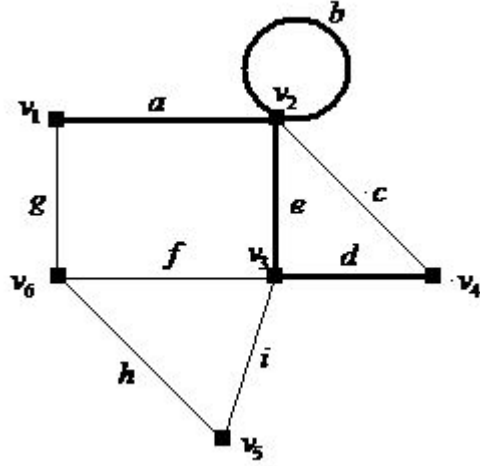
Alt graf, bir grafın herhangi bir parçası şeklinde de düşünülebilir. Kümeler teorisinde kullanılan alt küme sembolü, alt grafi göstermek için de kullanılabilir ve $G_{alt} \subset G$ iken G_{alt} grafi G nin alt grafıdır şeklinde algılanması gerekir.

Alt graf için aşağıda verilen özellikler geçerlidir:

- Her graf kendisinin alt grafıdır.
- G grafının herhangi bir düğümü tek başına G nin alt grafıdır.
- G deki tek bir kenar kendi başlangıç ve bitiş düğümleri ile birlikte G nin alt grafıdır.

2.5. Adım, Yol ve Çevre

Bir düğüm ile başlayıp herhangi bir düğüm ile biten, düğümler arasındaki bağlantıları o düğümler ile ilişkili kenarların kurduğu hareketler zincirine *adım* denir. Adım içerisinde bir kenar iki kez kullanılmazken, bir düğüm birden fazla kullanılabilir. Örneğin Şekil 2.6 de kalın çizgi ile gösterilen $v_1av_2bv_2ev_3dv_4$ bir adımdır. Adım aynı zamanda *kenar dizisi* ya da *zincir* olarak da adlandırılır. Bir adımı oluşturan kenar ve düğümler kümesi, açıktır ki, verilen grafın bir alt grafıdır.



Şekil 2.7 Adım, Yol ve Çevre

Adımın başlangıç ve bitiş düğümleri *kutup düğümleri* olarak adlandırılır. Şekil 2.6 da gösterilen adımda v_1 ve v_4 düğümleri kutup düğümüdür. Başlangıç ve bitiş düğümleri aynı olan adım *kapalı adım*, başlangıç ve bitiş düğümleri farklı olan adım ise *açık adım* olarak tanımlanır.

Her düğümün bir kez kullanıldığı açık adım *yol* olarak adlandırılır. Örneğin Şekil 2.6 da $v_1av_2ev_3dv_4$ bir yol; ancak $v_1av_2bv_2ev_3dv_4$ bir yol değildir. Başka bir ifade ile yol kendisini kesmez. Yol içindeki kenarların sayısı ile *yol uzunluğu* elde edilir. Adım içerisinde döngü bulunabilir ancak yol içerisinde döngü bulunamaz.

Bir yolun başlangıç ve bitiş düğümleri aynı ise bu yola *kapalı yol* denir. Şekil 2.6 da $v_3hv_6fv_3iv_5$ yolu kapalı yoldur.

2.6. Ağaç Kavramı

Kapalı yol içermeyen birleşik grafa *ağaç* denir. Ağaç, kapalı çevre ve döngü içermediğinden en basit graf olarak anılabilir [5]. Ağaca ait kenar elemanlarını *dal* olarak adlandırırız [16].

2.6.1. Teorem: Bir G_T ağacının herhangi iki düğümü arasında bir ve yalnız bir yol vardır.[5]

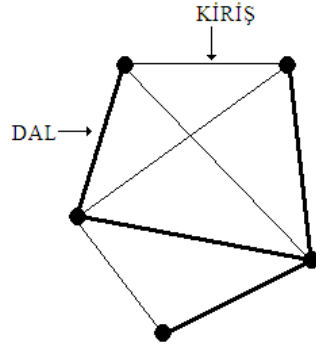
İspat: Verilen G_T ağacı birleşik bir graf olduğundan G_T 'nin her bir düğüm çifti arasında bir yol vardır. G_T ağacının herhangi a ve b gibi iki düğümü arasında iki farklı yol bulunsun. Bu iki yolun birleşimi bir kapalı yol olacağından G_T bir ağaç olamaz.□

2.6.2. Teorem: n düğümden oluşan bir ağacın $n-1$ tane dalı vardır. [16]

İspat: Teoremin $n = 1, 2$ ve 3 için doğruluğu açıktır. O halde, tümevarım yöntemi ile doğruluğunu kanıtlamak için $n-1$ düğümlü bir ağaç göz önüne alalım. Tümevarım hipotezinde bu ağacın $n-2$ tane kenarı vardır. Bir G_T grafi n düğümlü bir ağaç ise, bu ağaçta derecesi 1 olan en az bir düğüm vardır. G_T den bu düğüm çıkartılırsa geride kalan G'_T grafi birleşik bir graftır. G'_T aslında $n-1$ düğümlü bir graf olup çevre içermediğinden bir ağaçtır ve $n-2$ kenarı olduğundan G_T ağacının $n-1$ dalı vardır.□

2.7. Ağaç Tümleyeni (Kirişler Kümesi)

G birleşik bir graf ve G_T de bu grafın bir ağacı olsun. G_T ye ilişkin bütün elemanlar G den kaldırılırsa, geride G'_T ile göstereceğimiz bir alt graf kalacaktır. G'_T alt grafına G_T nin G içindeki tümleyeni (ağaç tümleyeni) denir. G'_T nin kenar elemanlarına da *kiriş* adı verilir. Şekil 2.7 de birleşik grafa seçilmiş bir ağaç (kalın çizgilerle gösterilmiştir) ve bunun tümleyeni olan kirişler kümesi (ince çizgilerle gösterilmiştir) görülmektedir.



Şekil 2. 8 Seçilmiş bir ağaç ve tümleyeni

Birleşik bir G grafindaki düğüm sayısı n_d , kenar sayısı da n_k ile gösterilsin. 2.6.2 Teoreme göre dal sayısı $n_d - 1$ olacağından giriş sayısı $n_k - n_d + 1$ olacaktır. Örneğin Şekil 2.7 de verilen grafa $n_d = 5, n_k = 8$ dir. Bu nedenle grafa seçilen ağacın dal sayısı $n_d - 1 = 4$; giriş sayısı $n_k - n_d + 1 = 4$ tür.

2.6.1 Teoremten yararlanılarak şu sonucu çıkarabiliriz: Birleşik bir G grafinda G_T ağacı ile G_T' nin herhangi bir ek girişini alalım. e_k nin başlangıç ve bitiş düğümleri (v_i, v_j) olsun. Bu düğümler G_T nin de düğümleri olup 2.6.1 Teorem gereğince G_T içerisinde v_i ile v_j arasında bir tek yol bulunmaktadır. Öte yandan, e_k girişi v_i ile v_j düğümleri arasında ikinci bir yol oluşturduğundan, $\{G_T, e_k\}$ grafi bir çevreye sahiptir. Bu çevre e_k girişinin G_T ağacına katılması ile oluşur.

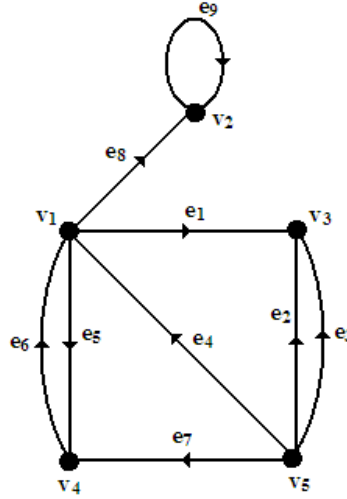
2.8. Yönlendirilmiş Graflar (Digraf)

Düğüm kümesi $V = \{v_1, v_2, \dots\}$, kenarlar kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ ve (v_i, v_j) sıralı düğümlerinden oluşan grafa *yönlendirilmiş graf* (digraf) adı verilir. Yönlendirilmiş graflar, (v_i, v_j) sıralı düğümlerini, ilişkili oldukları kenar üzerinde bir ok işareti ile gösteren yönlü doğru parçaları ve noktalardan oluşur.

Diğer bir deyişle, yönlendirilmiş graflarda düğümler nokta, kenarlar ise v_i düğümünden v_j düğümüne doğru yönlendirilmiş doğru parçası ile temsil edilir.

Şekil 2.8, beş düğüm ve dokuz kenardan oluşan yönlendirilmiş bir graf göstermektedir.

Bir digrafın kenarı, bağlantılı olduğu düğüm çifti ile yön açısından da ilişkilidir. Düğümler, kenar yönü düğüm dışarı doğru ise *başlangıç düğümü*, kenar yönü düğüme doğru ise *final düğümü* olarak adlandırılır. Örneğin Şekil 2.8 de v_4 düğümü e_7 kenarının final, e_6 kenarının başlangıç düğümüdür. Bir döngünün başlangıç ve final düğümleri aynıdır. Şekil 2.8 de v_2 düğümü e_9 kenarının hem başlangıç hem de final düğümüdür.



Şekil 2.9 Beş düğüm ve dokuz kenarlı yönlendirilmiş graf

Bir v_i düğümünün, dışarı yönlü kenarlarının sayısı *başlangıç derecesini* verir ve $d^+(v_i)$ ile gösterilir. Bir v_i düğümünün düğüme doğru yönlü kenarlarının sayısı *final derecesini* verir ve $d^-(v_i)$ ile gösterilir. Şekil 2.8 de verilen grafın düğümlerinin başlangıç ve final dereceleri

$$d^+(v_1) = 3 \quad d^-(v_1) = 2$$

$$d^+(v_2) = 1 \quad d^-(v_2) = 2$$

$$d^+(v_3) = 0 \quad d^-(v_3) = 3$$

$$d^+(v_4) = 1 \quad d^-(v_4) = 2$$

$$d^+(v_5) = 4 \quad d^-(v_5) = 0$$

şeklinde verilir.

2.8.1. Teorem: *Bir digrafın düğümlerinin başlangıç derecelerinin toplamı, final derecelerinin toplamına veya kenar sayısına eşittir. [5]*

İspat: Bir digrafın kenarları üzerindeki yön işaretleri kaldırılırsa digraf, graf haline gelecektir. Bir grafta ise düğüm derecelerinin toplamı (1.1) gereğince kenar sayısının iki katına eşittir.

Bir digraf ise; her bir kenarı için bir başlangıç bir de final düğümü içerdiğinden, başlangıç düğüm derecelerinin toplamı kenar sayısına; dolayısı ile final dereceleri toplamı da kenar sayısına eşittir. O halde, bir digraf düğümlerinin başlangıç dereceleri toplamı, düğüm dereceleri toplamının yarısına, yani kenar sayısına eşittir. Aynı şekilde, digraf düğümlerinin final dereceleri toplamı, düğüm dereceleri toplamının yarısına yani kenar sayısına eşittir. Bu durumda düğüm sayısı n_d kenar sayısı n_e olan bir digraf için

$$\sum_{i=1}^{n_d} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n_d} d^-(v_i) = n_e \quad (2.2)$$

eşitliği her zaman için sağlanmaktadır. Bu ise ispatı tamamlamaktadır. □

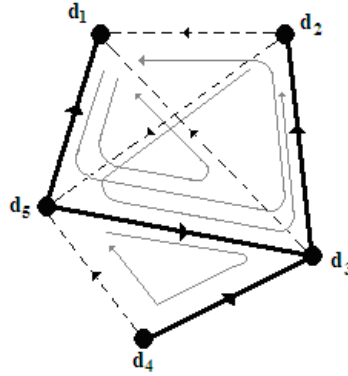
Not: Digrafların graflardan tek farkı kenarlarının yönlendirilmiş olmasıdır. Tezimizin konusu grafların özellikle elektrik mühendisliği uygulamaları olacağından ve bu alanda yönlendirilmiş graflar kullanılacağından bundan sonraki aşamada grafların digraf olarak anlaşılması gerekmektedir.

2.9. Temel Çevre, Kesitleme ve Düğüm Kesitlemesi

2.9.1. Tanım: Kenar sayısı n_k , düğüm sayısı n_d olan birleşik bir grafta seçilmiş bir G_T ağacının tanımladığı $n_k - n_d + 1$ kirişten her biri, öteki elemanları yalnız G_T nin içinde olmak üzere bir çevre oluşturur. Böylece tanımlanmış $n_k - n_d + 1$ çevreye *Temel Çevreler Kümesi* adı verilir.

Birleşik bir grafta, genel olarak, birden çok ağaç seçilebileceğinden, elde edilebilecek temel çevre kümelerinin sayısı da seçilecek ağaç sayısı kadar olur ([16]).

Her temel çevre bir tek kiriş tarafından oluşturulduğundan, böyle bir çevre için tanımlanacak çevre yönü, genellikle, bu çevreyi tanımlayan kirişin yönü olarak seçilir. Örneğin Şekil 2.9 da verilen graftan seçilen bir ağaca ilişkin dört kirişin her biri bir temel çevre oluşturmaktadır. Bu temel çevreler kümesi ve kümedeki her bir temel çevrenin yönü, Şekil 2.9 da verilmiştir.



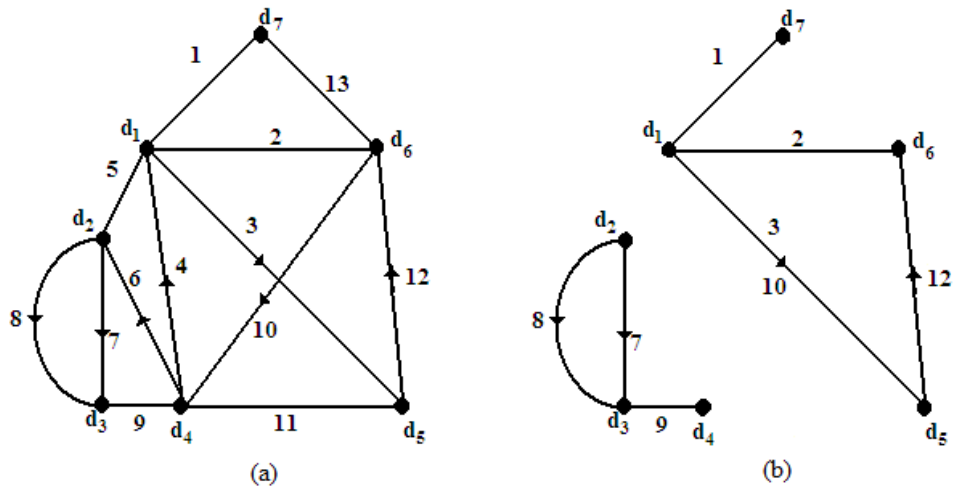
Şekil 2. 10 Graf, seçilmiş ağaç, kirişler kümesi ve temel çevre yönleri

2.9.2. Tanım: Birleşik bir G grafının aşağıdaki özelliklere sahip olan bir G_K alt grafını göz önüne alalım:

- G_K alt grafını oluşturan bütün kenarlar G grafından kaldırıldığında, G grafi G_a ve G_b ile göstereceğimiz iki alt grafa bölünür. ayrıca G_a ve G_b nin her biri birleşiktir.
- G_K nin hiçbir alt grafi a) daki özellikleri sağlamaz.

Bu durumda G_K ya G grafına ilişkin bir *kesitleme* denir.

Örnek olarak Şekil 2.10-(a) da verilen G grafını alalım. Bu birleşik graftan 4,5,6,10 ve 13 ile gösterilen kenarlar çıkartıldığında, geriye Şekil 2.10-(b) de verilen G'_a ile göstereceğimiz alt graf kalır. Bununla birlikte $G_a = \{4,5,6,10,11,13\}$ alt grafi bir kesitleme değildir. Çünkü G_a nin $G_{a_1} = \{4,5,6,10,11\}$ ve $G_{a_2} = \{4,5,10,11,13\}$ alt grafları da 2.9.2. Tanımındaki (a) koşulunu sağlar. Diğer taraftan ne G_{a_1} ne de G_{a_2} bir kesitleme olamazlar, çünkü her ikisinin ortak bir alt grafi olan $G_{a_3} = \{4,5,10,11\}$ de 2.9.2. Tanımının (a) koşulunu sağlar. İlave olarak kolayca görülebilir ki, G_{a_3} aynı tanımın (b) koşulunu da sağlamaktadır. Bu nedenle G_{a_3} bir kesitlemedir.



Şekil 2. 11 Birleşik bir graf ve ona ilişkin bir alt-graf

2.9.3. Teorem: *Bir düğüm noktası ile ilişkili olan kenarların oluşturduğu küme bir kesitlemedir. [16]*

İspat: Birleşik bir G grafını ele alalım. Bu grafın herhangi bir düğümü ile ilişkili olan kenarları graftan kaldırdığımız zaman ortaya çıkan G' grafi iki parçalı bir graftır. Bu kenarlardan herhangi bir e kenarını G' grafına yerleştirdiğimiz zaman ortaya çıkacak yeni graf birleşiktir. Dolayısı ile bir düğümün tüm kenarları 2.9.2. Tanımındaki her iki koşulu da sağladığından bir kesitlemedir.

2.9.3. Teoremi gereğince oluşturacağımız tüm kesitlemelere *düğüm kesitlemesi* adını vereceğiz.

2.9.4. Teorem: G_T , *birleşik bir G grafindan seçilmiş ağaç olsun. Kesitleme kümesinin elemanları, diğerleri kirişlerden seçilmek üzere, G_T ağacının bir tek dalının bulunduğu bir kesitleme vardır.*

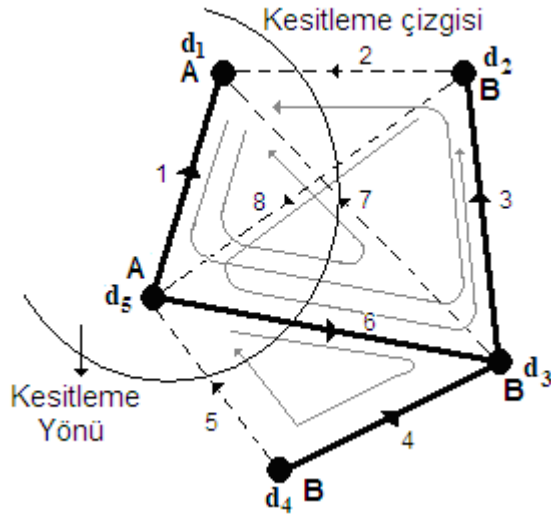
İspat: G grafindan herhangi bir G_T ağacı seçelim. Grafın bütün kirişlerini gösteren $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ kirişler kümesinin bütün elemanlarını graftan kaldırdığımızda dahi graf birleşiktir. Geride kalan $G - K$ kümesi ise T ağacını oluşturan $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ dallar kümesine eşittir. K kümesine herhangi bir d_i elemanının katıldığı küme G grafindan kaldırılırsa geride kalan graf iki parçalı olur. Bu ise 2.9.2 Tanımının (a) şartını sağlar. $K \cup \{d_i\}$ kümesinin, diğer elemanları kirişler kümesinden olmak üzere, d_i dalını içeren bir alt kümesinin 2.9.2. Tanımının (b) şartını sağlayacağı açıktır.

Yukarıda verilen 2.9.4. Teoremi gereğince elde edeceğimiz kesitlemelerin her birine *dal kesitlemesi* adını vereceğiz.

2.10. Kesitleme Yönü ve Çizgisi

Dal kesitlemesi yolu ile elde edilen kesitleme bir kesitleme çizgisi ile gösterilir. Elde edilen kesitlemenin yönü ise kesitleme içerisinde bulunan dalın yönüdür.

Örnek olarak Şekil 2.11 de verilen birleşik grafını seçilmiş bir G_7 ağacı ile birlikte ele alalım. Ağacın 6 numaralı dalının tanımladığı kesitlemeyi belirtmek üzere d_5 ve d_3 düğümlerini sırası ile **A** ve **B** şeklinde işaretleyelim. Bu durumda d_1 düğümünü **A**, d_2 ve d_4 düğümlerini de **B** harfi ile işaretlemek gerekecektir. Şekilden de gözlemlenebileceği gibi, 2, 5, 6, 7 ve 8 numaralı kenarların uç düğümleri farklı işaretlenmiş olacağından bu elemanlar 6 numaralı dalın tanımladığı kesitlemeyi oluştururlar. Bu kesitlemeyi graf üzerinde, kesitlemedeki elemanları kesecek bir çizgi ile göstermek mümkündür. Böyle bir çizgi, Şekil 2.11 de bir çember parçası ile gösterilmiştir. Kesitleme çizgisi adı verilen ve grafi iki parçaya bölen bu çizgi kapatılırsa, grafın içinde bulunduğu düzlemi de iki parçaya ayırır. Bu bölgelerden birinde birleşik grafın **A** ile işaretlenmiş bütün düğümleri, diğerinde ise **B** ile işaretlenmiş bütün düğümleri vardır. Kesitlemeye ilişkin bütün elemanların başlangıç ve final düğümleri farklı bölgelerde bulunmaktadır.



Şekil 2. 12 Birleşik bir grafa kesitleme seçimi

Kesitlemeyi tanımlayan 6 numaralı dalın yönü bu bölgelerin birinden diğerine olan *geçiş* gösterir. Bu geçiş, kesitleme çizgisini kesen ve *kesitleme yön çizgisi* adı verilen küçük bir okla da gösterilmiştir.

2.10.1. Tanım: Kenar sayısı n_e , düğüm sayısı n_d olan birleşik bir graftan seçilen T ağacının dallarından her biri ile 2.9.4. Teoremi gereğince elde edilecek $n_d - 1$ kesitlemeden oluşan kümeye *temel kesitlemeler kümesi* adı verilir.

Birleşik bir grafta, genel olarak, birden çok sayıda ağaç seçilebileceğinden, elde edilecek temel kesitleme kümelerinin sayısı da ağaç sayısı ile ilişkili olacaktır.

3. ELEKTRİK DEVRELERİ ve GRAF TEORİSİ

Bu bölümde verilecek bazı bilgiler standart olup, [16], [12], [1] gibi kaynaklardan bulunabilir.

3.1. Giriş

Bu bölüm içinde görüleceği üzere devreler teorisi iki temel aksiyoma dayanmaktadır [16],[1]. Bu aksiyomlar yardımı ile devrenin ölçülebilen büyüklüklerine ulaşılabilmesi için, devrenin elemanlarına ve bu elemanların bağlantı biçimine göre, lineer veya lineer olmayan denklem takımları elde edilmesi gerekir. Bu iki aksiyom yardımı ile devrelerden denklem elde etmekte bir zorluk yaşanmamaktadır. Sorun elde edilen denklem takımlarının çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerinedir. Yönlendirilmiş grafları (bundan sonra graf olarak anılacaktır) kullanan aşağıda örnekleri ile açıklayacağımız “sistematik”, elde edilen denklem takımlarının çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine tartışma götürmeyecek sonuçlara ulaşılmasına yardımcı olacaktır.

Fiziksel sistem denilince, belirli bir görevi gerçekleştirmek üzere birbirine bağlanmış fiziksel eleman ya da düzenlerin oluşturduğu küme anlaşılacaktır. Elektrik devresi de bir fiziksel sistemdir ve görevini elektrik akımı, gerilimi, akı vb. fiziksel büyüklükler ile sağlar.

Elektrik devrelerini oluşturan düzenlere *devre elemanları* adı verilir. Devre, istenen fonksiyonunu, içerdiği elemanlar üzerindeki akım-gerilim geçişleri ile sağladığından devre elemanları arasında *bağlantı* adı verilen bir ilişki kurulmalıdır. Devre elemanları birbirlerine sahip oldukları uçlar yardımı ile bağlanmaktadır. Devre elemanlarının birbirine bağlanmaları rastgele olmayıp, bağlantı biçimi,

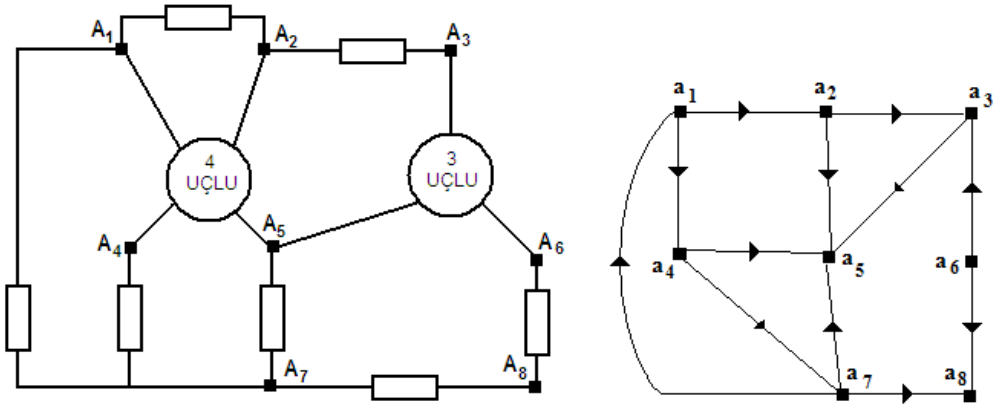
devrenin kendisinden istenen davranışı gerçekleştirecek nitelikte olmalıdır. En basit devre elemanın iki ucu vardır.

Devre elemanları, işledikleri fonksiyonların sürekliliğine ve ayrıklığına; enerji verip almalarına; enerji depolayıp depolayamama gibi özelliklerine göre sınıflandırılabilir. Tezimizin amaçlarından biri, devrelerin graflarla olan ilişkisini incelemek olduğundan, uçlara göre sınıflandırmadır. Bu konu ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

3.1.1. Tanım: Devre elemanları uç sayılarına göre sınıflandırıldığında, en basit devre elemanına *2-uçlu* denir. Genellersek; $n > 2$ olmak üzere n adet uca sahip devre elemanına *n-uçlu* adı verilir.

O halde, devre elemanlarının birbirleri ile olan bağlantısı uçları ile gerçekleşir.

3.1.2. Tanım: Devre elemanlarının bağlantı noktalarına *düğüm* adı verilir.



Şekil 3.4 Sekiz düğümlü bir elektrik devresi ve grafi

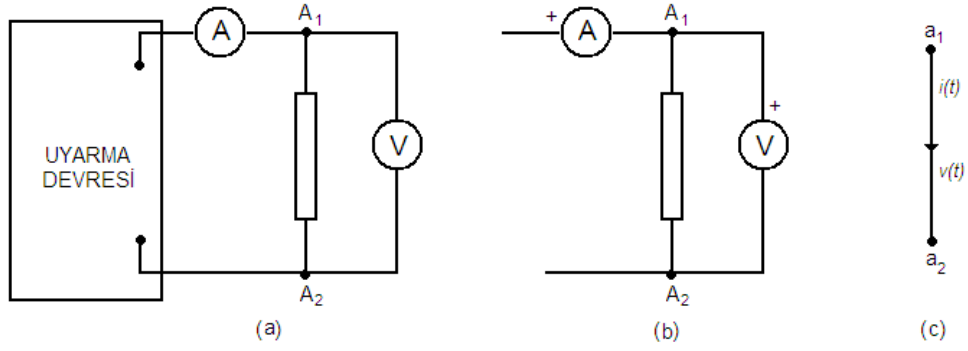
3.2. Devre Elemanları ve Matematiksel Model

Bilinen bütün mühendislik sistemlerinin analiz edilebilmesi için, sistemi oluşturan en küçük birimden sistemin bütününe kadar sistem parçaları ve bu parçalar arasındaki ilişkinin matematik dili ile ifade edilmesi gereklidir. Bu işlem mühendislik biliminde matematiksel model ya da kısaca modelleme olarak adlandırılır. Tezimizin bundan sonraki aşamalarında matematiksel modelden kastımız, ilgilendiğimiz mühendislik alt dalına ilişkin model olacaktır.

Devre analizi denilince, “verilmiş bir devredeki bilinmeyen bütün elektriksel büyüklüklerinin bulunması işlemi” anlaşılmalıdır. Burada izleyeceğimiz metot ile, analiz edilecek devredeki elemanların bütün özellikleri ve devre içinde birbirleri ile olan bağlantı biçimi matematik diline çevrilecek, daha sonra da bilinen matematik yöntemler yardımı ile istenilen sonuca ulaşılmaya çalışılacaktır.

3.2.1. Tanım: Elemanların özelliklerinin ve bağlantı biçimlerinin matematik diline dönüştürülmesi işlemine *matematiksel model* adı verilir.

Dolayısıyla devrenin yapı taşları olan devre elemanlarının özelliklerinin matematiksel model yardımı ile belirlenebilmesi için, verilen devrede öncelikle devre elemanlarının ayırt edilebilmesi gerekmektedir. Bu işlemi basit bir gözlem yolu ile yapmak her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin bazı durumlarda bir devre elemanın bir başka devre elemanına olan uzaklığı dahi, söz gelimi elektrik alan ya da magnetik alan yolu ile, bir etki unsuru olabilir. Bu gibi durumlarda bu eleman topluluğunu birlikte bir “çok-uçlu devre elemanı” olarak ele almak gereklidir. Devredeki elemanlar ayırt edildikten sonra, bunların her biri uçlarından çözülerek, özellikleri incelenmek üzere devreden çıkartılabilir. Bu özelliklerin o elemanın uçlarında yapılacak ölçmeler ile ortaya konulabileceği varsayılacaktır. Bu işlemde ölçülen büyüklükler “akımlar” ve “gerilimler”dir.



Şekil 3. 5 (a) 2-uçlunun uyarılması

(b) Ampermetre ve voltmetrenin 2-uçluya bağlantı şekli

(c) Ölçü aletlerinin bağlantı biçimini gösteren uç graf

Şekil 3.2 de verilen 2-uçlu bir devre elemanını ele alalım. Bu elemanın A_1 ve A_2 uçlarında yapılabilecek elektriksel ölçmeler bu elemanın iki ucu arasındaki gerilim ile bu elemanın üzerinden akan akımın ölçülmesinden oluşabilir. Bu ölçümlerin yapılabilmesi için elemanın uyarılması gereklidir.

3.2.2. Tanım : Bir elektrik devre elemanının üzerinden akım geçirilmesi işlemine elemanın *uyarılması* denir.

Fiziksel büyüklükler skaler (yön içermeyen) büyüklükler ve vektörel (yönlü) büyüklükler olarak ikiye ayrılır. Elektrik sistemlerinin temel büyüklükleri olan akım ve gerilim yönlü büyüklüklerdir. Örneğin bir doğru akım ampermetresi sabit bir akım değeri ölçerken uçları değiştirilirse göstergesi ters yönde sapacaktır. Bu nedenle ölçü aygıtlarının uçlarından biri (biz + işaretini kullanacağız) işaretlenerek bu aygıtları kullanan herkesin bütün ölçmeleri bir tek biçimde yapmaları sağlanmalıdır.

Şekil 3.2 yi göz önüne alalım: Şekil 3.2-(a) da verilen ölçmeleri yaparken gerek ampermetre gerekse voltmetre devreye iki biçimde bağlanabilir. Bu durumda akım ve gerilimden oluşan dört farklı ölçüm çifti elde etmek mümkündür. Bu büyüklüklerin ani değerleri (akım ve gerilimin zamana bağlı fonksiyonları) $i(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları ile gösterilirse ölçülecek değerlerden biri $(i(t),v(t))$ biçiminde

yazılırsa diğer ölçmeler; $(-i(t), v(t))$, $(i(t), -v(t))$, $(-i(t), -v(t))$ şeklinde olur. Bu ölçme çiftlerinin yalnız birinin seçilebilmesi için Şekil 3.2-(c) de verilen a_1 düğümünden a_2 düğümüne yönlendirilmiş grafi kullanacağız. Graf yönü değiştirilirse Şekil 3.2-(b) de gösterilen ölçü aletlerinin her ikisinin de yönünün değişeceği anlaşılmalıdır. Devre elemanının ölçmelerini tanımlamak için kullandığımız grafa *uç-graf* adı verilir. Şekil 3.2-(c) de verilen uç grafın yanında yazılı $i(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları 2-uçlunun uçlarında hangi büyüklüklerin ani değerinin ölçüldüğüne işaret eder.

3.2.3. Tanım: Bir elektrik devre elemanının herhangi iki ucundan ölçülen $i(t)$ ve $v(t)$ büyüklüklerine elemanın o uç çiftine ait *uç-değişkenleri* adı verilir.

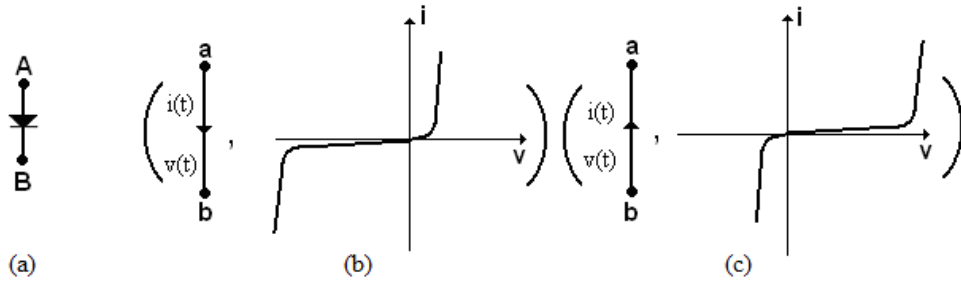
Yukarıda verilen 3.2.3.Tanımına göre, özel durum olarak, 2-uçlu için bulunacak olan $i(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları bir cebirsel ya da diferansiyel denklem biçimindedir. Dolayısıyla elde edilen bu denkleme 2-uçlunun *uç denklemi* adı verilmektedir. Bu durumda 2-uçluya ait uç denklemi:

$$f(i, v) = \left(i, v, \frac{di}{dt}, \frac{dv}{dt}, \dots, \frac{d^n i}{dt^n}, \frac{d^n v}{dt^n} \right) = 0 \quad (3.1)$$

formunda, iki uç değişkeninin kendileri ile bunların türevleri arasında var olan ve ayrıca zaman değişkenine de bağlı olabilen bir bağıntı biçimidir.

Yukarıda açıklanan bilgiler, aşağıda verilen tanımları destekler.

3.2.4. Tanım: 2-uçlu devre elemanı için seçilen bir uç-graf ve buna ilişkin uç-denklemini o elemanın özelliklerini belirlediğinden, 2-uçlu eleman için belirlenecek (*uç-graf*, *uç-denklemini*) ikilisine o 2-uçlu devre elemanının *matematiksel modeli* denir.



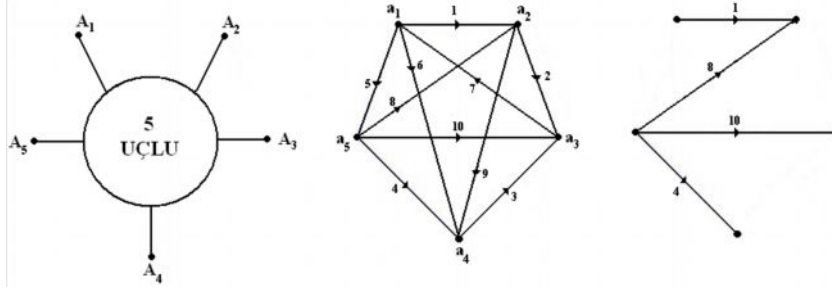
Şekil 3. 6 a) Yarı iletken diyotun sembolü
b) ve c) Matematiksel modeller

Örneğin, Şekil 3.3-(a) da 2-uçlu yarıiletken diyot elemanına ilişkin matematiksel model verilmiştir. Uç graf iki farklı ölçme modeli ile alınabileceğinden, her iki durum için de matematiksel model Şekil 3.3-(b) ve Şekil 3.3-(c) de verilmiştir. Ancak burada uç-denklemini $f(i, t)$ şeklinde bir bağıntı ile verileceği yerde grafik olarak verilmiştir. Bu model diyotun *statik karakteristiği* olup pek çok uygulama için kullanışlıdır. Bununla birlikte, uç değişkenlerinin hızlı değiştiği durumlar halinde bu matematiksel modelin daha karmaşık bir biçimde, bir ifade olarak göz önüne alınması gerekir.

2-uçlu bir devre elemanı için verilen matematiksel model kavramı çok uçlu elemanlara uygulanmak istenirse, çok uçlu elemanın uçlarında yapılabilecek bütün akım ve gerilim ölçmelerinden söz etmek gerekecektir. Çok uçlu elemanın uç sayısı n ise, elemanın uçları ikişer ikişer göz önüne alınarak bu uç çiftleri arasında

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

akım ölçmesi ve bir o kadar da gerilim ölçmesi yapılabilir. Özel olarak $n = 5$ alınırsa, Şekil 3.4-(a) da gösterilen 5-uçlu devre elemanının uçları arasında yapılabilecek ölçmelerin sayısı 10 dur.



Şekil 3. 7 a) 5-uçlu bir devre elemanı
 b) Ölçmeler Grafi
 c) 5-uçlu elemanın uç-ağaçlarından biri

5-uçlunun herhangi iki ucu arasında yapılan ölçmeler, 2-uçlu bir elemanda olduğu gibi yönlendirilmiş bir kenar ile gösterilirse, Şekil 3.4-(b) de gösterilen 10 yönlendirilmiş kenardan oluşan ve *ölçmeler grafi* adı verilen graf elde edilir.

Bununla birlikte tezimizin ilerleyen bölümlerinde aksiyom olarak vereceğimiz Kirchhoff'un Gerilimler Yasası'nı kullanarak, yukarıdaki paragrafta belirtilen, ölçülen bu 10 gerilimin birbirinden bağımsız olmadığı gösterilebilir. Daha açıkçası, ölçmeler grafında kapalı yol üzerinde kapalı yol oluşturan kenarlardan herhangi birine ait ölçme, bu kapalı yolun diğer kenarları cinsinden ifade edilebilir. İleride görüleceği gibi ölçmeler grafi içerisinde seçilebilecek herhangi bir ağaç için yapılacak ölçümler, çok uçlunun uçları arasında birbirinden bağımsız olarak yapılabilecek bir grup ölçme, çok uçlunun matematiksel modeli için yeterli olacaktır.

Aşağıdaki tanım graf bağlantısı açısından çok işimize yarayacaktır:

3.2.5. Tanım: Çok uçlu devre elemanının ölçmeler grafi üzerinden seçilen ağaca, çok uçlunun *uç ağacı* adı verilir.

Yukarıda verilen 3.2.5 tanımı ile belirttiğimiz uç ağacına, çok uçlunun *uç grafi* adını vereceğiz. Bununla birlikte, çok uçlunun uç grafında her hangi bir kenarın başlangıç ve final düğümlerine *kapı* adı vereceğiz.

3.3. Bazı Elektrik Devre Elemanlarının Matematiksel Modelleri

Bu bölümde, matematik modelleme kavramını örneklemek üzere, bazı elektrik devre elemanlarının matematiksel modeli verilecektir. Ancak bu modelleri oluşturma sistematığı, tezimizin ana fikrini içermediğinden, ele alınmayacak sadece sonuç ile ilgilenilecektir. Bu sistematik bu bölümün sonunda verilen elektrik devrelerinin çözümü aşamasının anlaşılması açısından önemlidir.

2-Uçlu Direnç Elemanları

Matematiksel modeli en basit olan 2-uçlu direnç elemanının uç denklemleri:

$G, R \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$v(t) = Ri(t) \quad (3.2)$$

ya da

$$i(t) = Gv(t) \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir [16], [12], [1].

3.3.1. Tanım: (3.2) ve (3.3) ile verilen uç denklemlerinde R ve $G = 1/R$ reel katsayılarına sırası ile elemanın *direnç değeri*, ya da kısaca *direnci*, ve *iletkenlik değeri*, ya da kısaca *iletkenliği*, adı verilir.

Yukarıda verilen (3.2) ve (3.3) ifadeleri 1827 yılında **George Simon Ohm** tarafından verilmiştir ve fizikte *Ohm Yasası* olarak bilinmektedir. Ohm Yasasına uyan 2-uçlu direnç *elemanlarına Lineer Direnç* adı verilmektedir.

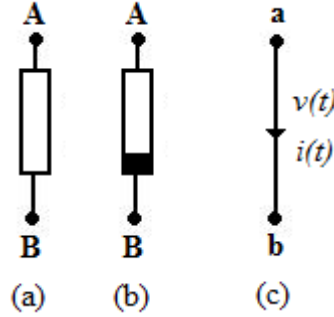
Bununla birlikte, f ve g reel fonksiyonlar olmak üzere, uç denklemi

$$v(t) = f(i(t)) \quad (3.4)$$

ya da

$$i(t) = g(v(t)) \quad (3.5)$$

biçiminde ifade edilebilen ve Ohm yasasını sağlamayan 2-uçlu dirençlere *Lineer Olmayan* direnç adı verilir.



Şekil 3. 8 (a) 2-uçlu lineer direnç elemanı sembolü
(b) 2-uçlu lineer olmayan direnç elemanı sembolü
(c) 2-uçlu direnç elemanına ilişkin uç-graf

2-Uçlu Bağımsız Kaynak Elemanları

Daha önce verilen 3.2.2. Tanımında da belirttiğimiz üzere, elektrik devre elemanlarının işlevlerini gerçekleştirebilmesi için uyarılması gereklidir. Bu uyarma işlemini yapan elemanlar kaynak olarak bilinir ve bize çeşitli akım ve gerilim fonksiyonlarını sağlar. Bu bölümde örnek bazı kaynakları tanımlayacağız.

3.3.2. Tanım: Uç gerilimi, uç akımından bağımsız olarak, daima verilen bir zaman fonksiyonunu üreten 2-uçlu devre elemanına *bağımsız gerilim kaynağı* ya da kısaca *gerilim kaynağı* adı verilir.

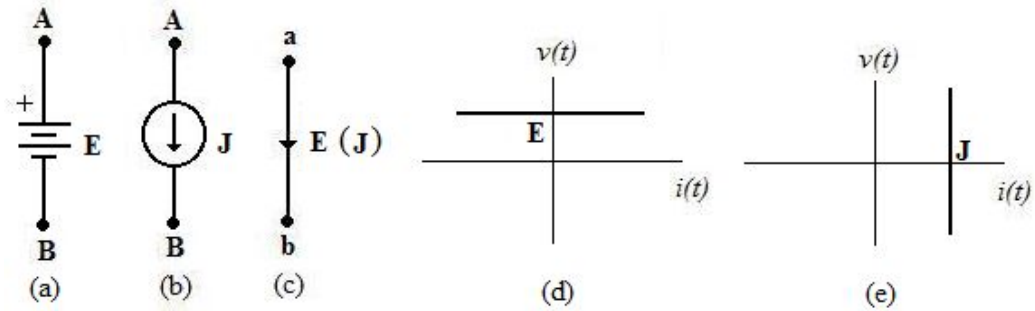
3.3.2. Tanımında verilen türde kaynaklar, elektrik devrelerine gerekli olan gerilim fonksiyonlarını sağlar. Diğer taraftan akım fonksiyonu üreten kaynaklara da ihtiyaç duyulur.

3.3.3. Tanım: Uç akımı, uç geriliminden bağımsız olarak, daima verilen bir zaman fonksiyonunu üreten 2-uçlu devre elemanına *bağımsız akım kaynağı* ya da kısaca *akım kaynağı* adı verilir.

Yukarıda verilen bağımsız kaynaklara ilave olarak aşağıdaki tanımlar verilebilir:

3.3.4. Tanım: Bir gerilim kaynağının uç gerilimi ya da akım kaynağının uç akımı zamanla değişmeyip sabit kalıyorsa bu kaynaklara sırasıyla *doğru (DC) gerilim kaynağı* ve *doğru (DC) akım kaynağı* denir.

3.3.5. Örnek: Şekil 3.6 ile 3.3.3. Tanımında belirtilen DC kaynaklara ilişkin devre sembolleri ve verilmiştir.

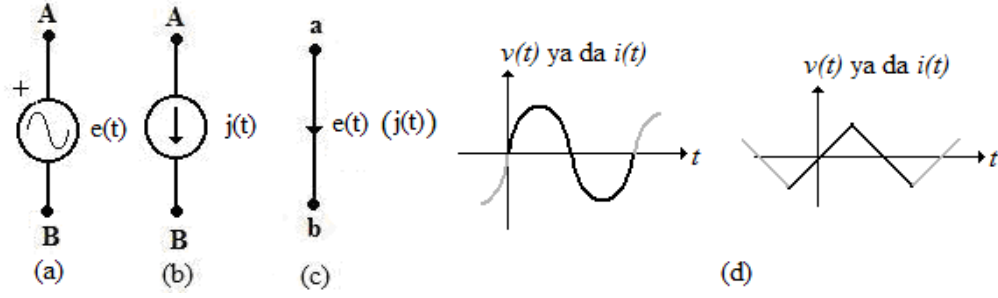


Şekil 3.9 (a) Doğru (DC) gerilim kaynağı
(b) Doğru (DC) akım kaynağı
(c) DC kaynaklara ilişkin uç graf
(d) DC gerilim kaynağının v-i karakteristiği
(e) DC akım kaynağının v-i karakteristiği

DC kaynakların tersine alternatif kaynaklar aşağıdaki biçimde tanımlanabilir:

3.3.6. Tanım: Bir gerilim kaynağının uç gerilimi ya da bir akım kaynağının uç akımı, zamanla değişen fonksiyonlar sağlıyorsa bu kaynaklara sırasıyla *alternatif (AC) gerilim kaynağı* ve *alternatif (AC) akım kaynağı* adı verilir.

3.3.7. Örnek: Şekil 3.7 de AC kaynaklara ilişkin semboller, uç graf ve bazı örnek akım gerilim fonksiyonları verilmiştir.



Şekil 3.10 (a) Gerilim kaynağı sembolü
 (b) Akım kaynağı sembolü
 (c) Kaynaklara ilişkin uç graf
 (d) Örnek kaynak fonksiyonları

3.3.8.Not: Elektrik ve elektronik devrelerinde en yaygın kullanılan AC kaynaklar sinüzoidal gerilim ya da akım üreten kaynaklar olmakla birlikte lineer ve lineer olmayan çeşitli periyodik işaretler üreten kaynaklar da kullanılmaktadır.

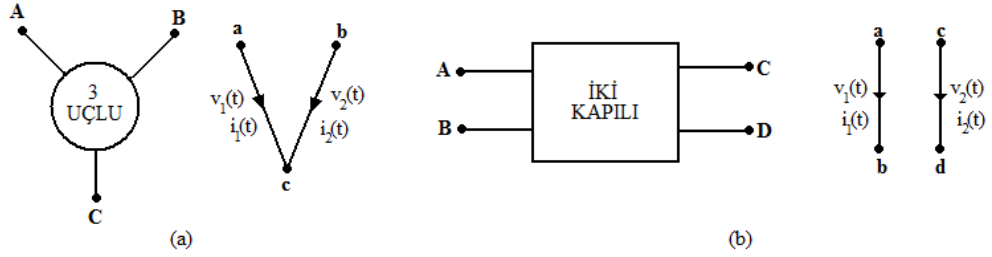
3.3.9.Not: 2-uçlu elemanlara ilişkin grafın, devre elemanının iki ucunu birleştirecek biçimde yönlendirilmiş bir doğru parçası olacağı açıktır.

3-Uçlu ve İki Kapılı Devre Elemanları

3-uçlu ve iki kapılı devre elemanlarının uç denklemleri, seçilmiş bir uç grafa ilişkin olarak

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_1(v_1(t), v_2(t)) \\ g_2(v_1(t), v_2(t)) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(i_1(t), i_2(t)) \\ f_2(i_1(t), i_2(t)) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} v_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_1(i_1(t), v_2(t)) \\ h_2(i_1(t), v_2(t)) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_1(v_1(t), i_2(t)) \\ k_2(v_1(t), i_2(t)) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

bağıntılarından biri ile verilir.



Şekil 3. 11 (a) 3-uçlu ve ölçme grafi

(b) İki kapılı ve ölçmeler grafi

3.3.10. Not: Şekil 3.8 de gösterilen iki kapılı devre elemanı, aslında 3.1.1. Tanımı gereği, bir 4-uçlu olmasına rağmen iki kapılı olarak ifade edilmiş, ayrıca ölçme grafi de iki parçalı graftan oluşturulmuştur. Bu elemanın iki kapılı olarak ifade edilmesinin nedeni, elemanın her ne kadar dört ucu olsa da bunlardan belirli iki ucu, söz gelimi “B” ve “D” , birbirine denktir. Bu nedenle iki kapılının ölçme grafi bir 3-uçlunun ölçme grafi ile de ifade edilebilir.

3.4. Devreler Teorisinin Aksiyonları

Bu bölümün giriş kısmında devreler teorisinin iki aksiyoma dayandığına işaret etmiştik. Bu aşamada bu aksiyomları ifade edip, bazı kaynaklarda üçüncü bir aksiyom olarak ifade edilen, n uçlu devre elemanının tam olarak tanımlanabilmesi için üzerinde yapılması gereken ölçme sayısına ulaşmaya çalışacağız[16].

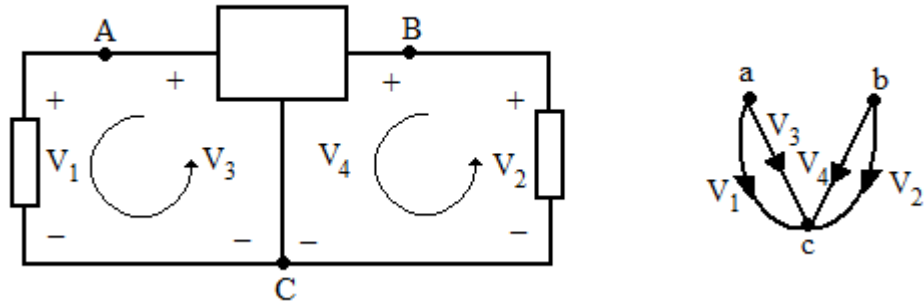
3.4.1. Aksiyom (Kirchhoff Gerilimler Yasası): Bir elektrik devresinin herhangi bir kapalı çevriminde gerilim düşüşlerinin ve artışlarının cebirsel toplamı sıfırdır.

Bu aksiyomu Şekil 3.9 da verilen devre üzerinde gösterilen iki çevre üzerinde uygularsak:

$$-V_1 + V_3 = 0$$

$$+V_2 - V_4 = 0$$

denklemlerine ulaşırız. Aynı denklem takımına devrenin graf modelinden de ulaşılabilir. Gerilim ifadelerinin önünde yer alan işaret, devre grafındaki graf yönleri ile ilişkilidir. Örneğin 1. denklem, devre grafındaki aV_1cV_3a kapalı yolu kullanılarak oluşturulmuştur. Bu yolun ters çevrilmesi ile de aynı denkleme ulaşılacağı açıktır.



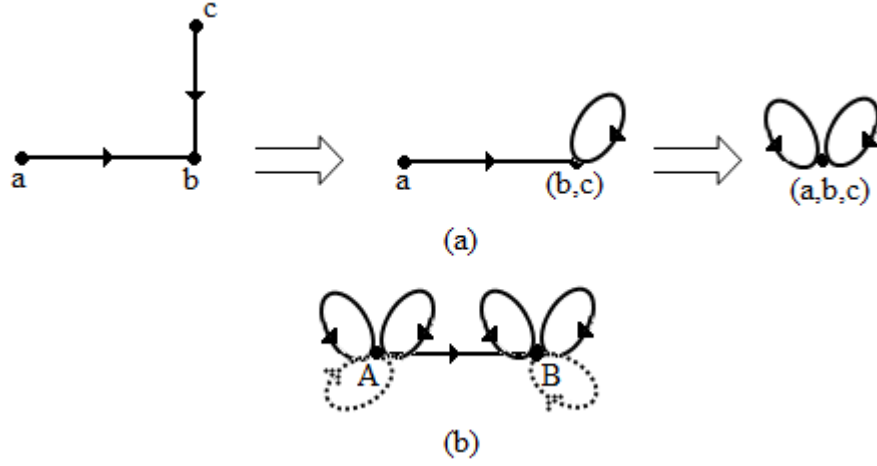
Şekil 3. 12 Bir elektrik devresi ve uç grafi

3.4.2. Aksiyom 3.2 (Kirchhoff Akımlar Yasası): Bir düğüm noktasına giren ve o düğüm noktasından çıkan akımların cebirsel toplamı sıfırdır.

3.4.3. Teorem: Bir kesitleme kümesi elemanları üzerinde bulunan akımların kesitleme yönü ile aynı olanlar ile kesitleme yönüne zıt olanların cebirsel toplamı sıfırdır.

İspat: Birinci bölümde, 2.9.2. Tanımda da gösterildiği gibi, kesitleme kümesini oluşturan elemanlar graftan kaldırıldığında graf, G_A ve G_B ile gösterilebilecek iki alt grafa ayrılır ve her iki alt graf da birleşiktir. Kesitleme kümesi elemanlarından sadece girişleri kaldırdığımızı, kesitlemeyi tanımlayan dalın ise grafta kaldığını, bu dalın ve bu dalın terminal düğümleri dışında kalan tüm graf elemanlarının ve düğümlerin Şekil 3.10-(a) da gösterildiği gibi bir birleştirme işlemine tabi tutulduğunu düşünelim. Her iki alt grafa birleşik olduğundan sonuçta, A ve B düğümleri G_A ve G_B alt grafının kesitlemeyi tanımlayan dalın terminal düğümü

dışında kalan düğümlerinin n 'lileri ($n \in \mathbb{Z}$) olmak üzere, her birleşik graftan elde edilecek işlem Şekil 3.10 (b) de gösterildiği gibi olacaktır. \square



Şekil 3. 13

3.5.Graf Matrisleri

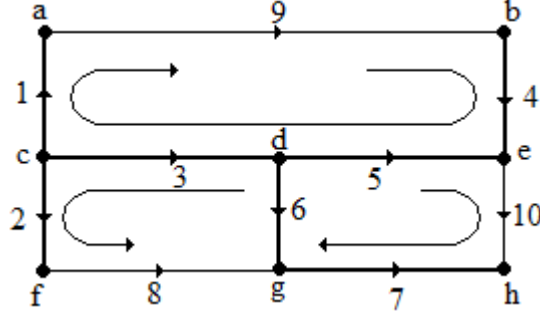
Bu bölümde birleşik bir grafa seçilen herhangi bir ağaç yardımcı ile tanımlanan temel çevrelerin ve temel kesitlemelerin matrisler kullanılarak gösterilmesi hedeflenmiştir. Burada amaç, devre teorisi aksiyomlarının matrisler yardımcı ile tüm devreye uygulanmasını sağlamaktır.

3.5.1. Tanım (Temel Çevreler Matrisi): Düğüm sayısı n_d , kenar sayısı n_k olan birleşik bir graf içindeki herhangi bir temel çevreler kümesine ilişkin olarak alınan ve i . satır j . sütun elemanları

- $b_{ij} = 0$, eğer j . eleman i . temel çevre içinde bulunmuyorsa,
- $b_{ij} = 1$, eğer j . eleman i . temel çevre içinde bulunuyor ve j . elemanın yönü bu çevrenin yönü ile aynı ise,
- $b_{ij} = -1$, eğer j . eleman i . Temel çevre içinde bulunuyor ve j . elemanın yönü bu çevrenin yönüne ters ise.

özelliklerine sahip olan $n_k - n_d + 1$ satır ve n_e sütunlu $B_t = [b_{ij}]$ matrisine temel çevreler matrisi adı verilir

Örnek olarak Şekil 3.11 deki birleşik grafi ele alalım. Bu grafta düğüm sayısı 8, kenar sayısı ise 10 dur. Graf üzerinde kalın çizgiler ile gösterilen elemanlar grafın ağacını oluşturmaktadır.



Şekil 3. 14 Temel Çevreler

Bu birleşik graf ve graftan seçilen ağaç için temel çevreler matrisi:

$$B_t = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Dallar} \\ \hline (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \end{array} \\ \begin{array}{c} (8) \\ (9) \\ (10) \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \text{Kirişler} \\ \hline (8) \quad (9) \quad (10) \end{array} \end{array}$$

biçiminde yazılabilir. B_t matrisinin bazı özellikleri, bu yazılış biçiminden de kolayca görülebilir. Eğer B_t matrisi yazılırken önce dallara sonra da kirişlere ilişkin sütunlar yerleştirilir; kirişler de kendi aralarında temel çevrelerin ele alınış sırasına göre oluşturulursa B_t matrisi:

$$B_t = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ U \end{array} \right] \quad (3-7)$$

formunda olacaktır. Burada, B_1 matrisi satırları kirişler sütunları ise dallardan oluşan $n_k - n_d + 1$ satır, $n_d - 1$ sütundan oluşan matris; U ise $(n_d - 1)$ dereceden birim matristir.

3.5.2. Tanım (Temel Kesitlemeler Matrisi): Düğüm sayısı n_d , kenar sayısı n_k olan birleşik bir graf içinde seçilmiş bir temel kesitlemeler kümesi ele alalım. Bu temel kesitlemelere ilişkin i . satır ve j . sütun elemanları

- $q_{ij} = 0$, eğer j . eleman i . Temel kesitleme içerisinde bulunmuyor ise,
- $q_{ij} = 1$, eğer j . eleman i . temel kesitleme içerisinde bulunuyor ve j . elemanın yönü bu kesitlemenin yönü ile aynı ise,
- $q_{ij} = -1$, eğer j . eleman i . temel kesitleme içerisinde bulunuyor ve j . elemanın yönü bu kesitlemenin yönüne ters ise.

özelliklerine sahip olan $n_d - 1$ satır ve n_k sütunlu $Q_t = [q_{ij}]$ matrisine temel kesitlemeler matrisi adı verilir.

Örnek olarak yine Şekil 3.11 deki birleşik graf ele alınırsa bu birleşik graftan elde edilecek temel kesitlemeler matrisi:

$$Q_t = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Dallar} \\ \overbrace{(1) \ (2) \ (3) \ (4) \ (5) \ (6) \ (7)} \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \end{array} \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \text{Kirişler} \\ \overbrace{(8) \ (9) \ (10)} \end{array} \end{array}$$

şeklinde olacaktır.

Elde edilen matris oluşturulurken, temel çevreler matrisinde olduğu gibi, dallar ve kirişler aynı işlemle matrise yerleştirilmiştir. Bu durumda temel kesitlemeler matrisi Q_t de:

$$Q_t = \left[\begin{array}{c|c} U & Q_1 \end{array} \right] \quad (3.8)$$

formunda yazılabilir.

3.5.3. Teorem: Temel kesitleme matrisinden elde edilen $B_t = [B_l \mid U]$ ve $Q_t = [U \mid Q_l]$ matrisleri arasında;

$$Q_l = -B_l^T; B_l = -Q_l^T \quad (3.9)$$

eşitlikleri vardır. [16]

İspat: B_t ve Q_t matrislerinin elemanları $\{-1,0,1\}$ kümesinin elemanlarından oluşmaktadır. B_l matrisinin satırları kirişlerden sütunları dallardan oluşurken Q_l matrisinin satırları dallardan sütunları kirişlerden oluşmaktadır. Bu satır ve sütunlar aynı şekilde numaralandırılmışlardır. B_l matrisinin herhangi bir satırlarında sıfırdan farklı olan elemanların işareti o temel çevreyi tarif eden kiriş tarafından belirlenirken Q_l matrisinin herhangi bir satırında bulunan sıfırdan farklı elemanların yönünü ise o satırı oluşturan kesitlemeyi tarif eden dal belirler. Bir temel çevreyi oluşturan elemanlar kümesi bir ve yalnız bir kiriş ile sonlu sayıda daldan oluşmakta, bir temel kesitlemeyi oluşturan elemanların kümesi bir ve yalnız bir dal ile sonlu sayıda kirişten oluşmaktadır. Şimdi B_t ve Q_t matrislerinin elemanlarının mutlak değerlerinden oluşan $\tilde{B}_t = [|\tilde{b}_{ij}|]$ ve $\tilde{Q}_t = [|\tilde{q}_{ij}|]$ matrislerinin birleştirilmiş matrisi U_{BQ} matrisini tanımlayalım. Bu matrisin aşağıdaki formda olacağı açıktır.

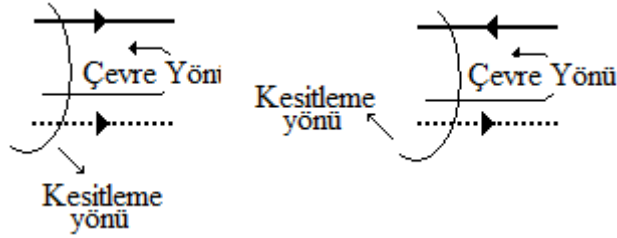
$$U_{BQ} = \left[\begin{array}{cc} \tilde{B}_1 & U \\ U & \tilde{Q}_1 \end{array} \right]$$

Bu durumda $U_{BQ} = [u_{ij}]$ matrisinin satır ve elemanları şu anlamı taşıyacaktır:

$u_{ij} = 0$, eğer j . eleman i . temel kesitleme veya temel çevrenin elemanı değil ise;
 $u_{ij} = 1$, eğer j . eleman i . temel kesitleme veya temel çevrenin elemanı ise.

Bu durumda $U_{BQ} = U_{BQ}^T$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla $\tilde{B}_1 = \tilde{Q}_1^T$ elde edilir.

Temel çevreler matrisi B_t ile temel kesitlemeler matrisi Q_t oluşturulurken matrislerin sıfırdan farklı olan elemanları B_t matrisi için her bir temel çevreyi tanımlayan kirişin yönüne; Q_t matrisi için ise her bir temel kesitlemeyi tanımlayan dalın yönüne göre belirlenmiştir. Bu durumda şekilde de gösterildiği gibi her $b_{ij}, q_{ij} \neq 0$ için $b_{ij} = -q_{ij}$ olacağından $Q_1 = -B_1^T; B_1 = -Q_1^T$ olduğu görülerek ispat tamamlanır. \square



Şekil3. 15 Çevre ve kesitleme yönleri

3.5.4. Teorem: Birleşik bir grafın aynı bir ağacına karşılık elde edilen temel kesitlemeler matrisi Q_t ile temel çevreler matrisi B_t arasında

$$Q_t B_t^T = 0 \text{ ya da } B_t Q_t^T = 0 \quad (3.10)$$

eşitlikleri geçerlidir. [16]

İspat: Temel kesitlemeler matrisi ve temel çevreler matrisinin genel formundan hareket ederek:

$$\begin{aligned} Q_t B_t^T &= [U \quad Q_1] \cdot [B_1 \quad U]^T = [U \quad Q_1] \cdot \begin{bmatrix} B_1^T \\ U \end{bmatrix} \\ &= B_1^T + Q_1 = B_1^T + (-B_1^T) = 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde hareket ederek $B_t Q_t^T = 0$ olduğu da gösterilerek ispat tamamlanır. \square

3.5.5. Tanım (Düğüm Matrisi): Düğüm sayısı n_d , kenar sayısı n_k olan birleşik bir grafa ait düğümlere ilişkin kesitleme elemanlarının oluşturduğu $\bar{A} = [a_{ij}]$ matrisine düğümler matrisi adı verilir. Düğüm kesitlemesi, 2.9.3. Teoreminden de bilindiği gibi, parçaların birinde tek bir düğüm bulunan özel bir kesitleme olduğundan \bar{A} matrisi 3.5.2 Tanımında ki gibi oluşturulur. Ancak bu kesitleme türünde kesitleme yönü içinde tek bir düğüm bulunan parçadan diğerine doğru olacak biçimde seçilecektir.

Şekil 3.11 de verilen birleşik graftan elde edilecek olan düğümler matrisi:

$$\bar{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \\ (g) \\ (h) \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Temel düğümler matrisinin sütunları incelendiğinde açıkça görülebilir ki matrisin her bir sütununda biri 1 diğeri -1 olan sıfırdan farklı iki eleman vardır. Bir kenar iki düğüm ile tanımlandığından ve eleman yönü bir düğüm için düğüm kesitlemesi yönünde diğeri ise düğüm kesitlemesi yönüne ters olacağından bu özellik her birleşik graftan elde edilecek düğüm matrisi için geçerli olacaktır.

Temel düğümler matrisinin sütunlarına ilişkin yukarıda sözü edilen özelliğin sonucu olarak n_d düğümlü birleşik bir graftan elde edilecek düğümler matrisinin

rankı $n_d - 1$ den büyük olamaz. Dügümler matrisinin satırları toplanarak elemanları sıfır olan yeni bir satır elde edilir ki bu, \bar{A} nin n_d satırının aralarında lineer bağımlı olduklarını gösterir. Bu nedenle \bar{A} matrisinin herhangi bir satırını silmek mümkündür. \bar{A} matrisinden herhangi bir satırın silinmesi ile elde edilen A matrisine *indirgenmiş düğümler matrisi* adı verilir. Yukarıdaki önekte elde edilen düğümler matrisinden elde edilebilecek indirgenmiş düğümler matrisinin biri,söz gelimi, h satırının silinmesi ile;

$$A = \begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \\ (g) \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

elde edilir.

A ya da \bar{A} matrisinin rankı $n_d - 1$ olduğundan, bu matris içerisinde sütunları bu grafın ağacı olarak seçilecek her alt matris singüler değildir. Örneğin Şekil 3.11 de verilen grafın ağacını oluşturan dalların bulunduğu

$$\begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \\ \begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \\ (g) \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

alt matrisi singüler değildir. Bunun gibi Şekil 3.11 den seçilecek her bir ağacın dallarının bulunduğu A matrisinden elde edilecek her alt matris singüler olmayacaktır. Bu durumda indirgenmiş düğümler matrisi A aşağıdaki gibi bölmelenirse,

$$A = \begin{array}{c} \text{dallar} \quad \text{kirişler} \\ \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \end{array} \right] \end{array}$$

A_1 matrisi singüler olmayan bir alt matris olduğundan eşitliğin her iki yanını soldan A_1^{-1} ile çarpılabilir. Bu durumda:

$$A_1^{-1}A = \begin{array}{c} \text{dallar} \quad \text{kirişler} \\ \left[\begin{array}{c|c} U & A_1^{-1}A_2 \end{array} \right] \end{array}$$

elde edilir.

Temel çevre ve temel kesitlemeler matrislerinin elde edilmesinden sonra B_t ve Q_t G grafında seçilen bir ağaca ilişkin temel çevreler ve temel kesitlemeler matrisi; $v(t)$ ve $i(t)$ sütunları B_t ve Q_t ye uyumlu olarak düzenlenmiş olan gerilim ve akım vektörleri olmak üzere Kirchhoff aksiyomları yardımı ile

$$B_t v(t) = 0 \quad (3.11)$$

$$Q_t i(t) = 0 \quad (3.12)$$

eşitlikleri yazılır.

Yukarıda verilen birinci bağıntıya *Temel Çevreler Denklemleri* ikinci bağıntıya *Temel Kesitlemeler Denklemleri* adı verilir.

3.5.6. Teorem: Herhangi bir devredeki ani güç:

$$p(t) = v^T(t)i(t) = \sum_{k=1}^{n_e} v_k(t)i_k(t) \equiv 0$$

olacak biçimde özdeş olarak sifıra eşittir. Başka bir deyişle devrede üretilen enerji ile tüketilen enerji anlık olarak eşittir. [1]

İspat: Herhangi bir D devresi ve bu devrenin grafından seçilmiş bir G_T ağacına ilişkin temel çevreler ve temel kesitlemeler matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} U \\ \vdots \\ Q_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = 0$$

Bu ifadeler;

$$v_2(t) = -B_1 v_1(t),$$

$$i_1(t) = -Q_1 i_2(t)$$

biçiminde yazılabilirler. Buradan da;

$$\begin{aligned} v^T(t)i(t) &= \begin{bmatrix} v_1^T(t) & v_2^T(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \\ &= v_1^T(t)i_1(t) + v_2^T(t)i_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_1^T(t)[-Q_1 i_2(t)] + [-B_1 v_1(t)]^T i_2(t) \\
&= -v_1(t)(Q_1 + B_1^T) i_2(t)
\end{aligned}$$

olup, 3.5.3 Teoremi gereğince, $Q_1 = -B_1^T$; $B_1 = -Q_1^T$ olduğundan son eşitlik sıfıra özdeş olacaktır. Bu ise ispatı tamamlar. \square

3.5.7. Teorem: Grafları aynı olan D ve \bar{D} devrelerinde *çapraz ani güçlerin* toplamı özdeş olarak sıfıra eşittir. Yani

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= v^T(t) \bar{i}(t), p_2(t) = \bar{v}^T(t) i(t) \text{ olmak üzere} \\
p_1(t) &= p_2(t) \equiv 0 \text{ dır. [1]}
\end{aligned}$$

İspat: Birleşik bir D devresine ilişkin devre grafi G ve bu graftan seçilen ağaç da G_T olsun. Bu durumda bu devreye ilişkin temel çevre ve temel kesitleme matrislerinin yukarıdaki şekli ile:

$$B_i v(t) = 0 \text{ ve } Q_i i(t) = 0$$

biçiminde yazıldıklarını varsayalım. Bu denklemlerde verilen $v(t)$ ve $i(t)$ vektörleri devre elemanlarının uç denklemleri nedeni ile birbirleri ile bağımlıdır. Ancak bu bağımlılık yukarıda verilen denklemlere yansımamıştır.

Şimdi, D devresindeki iki ve çok-uçlu elemanların, özellikleri bunlarınkinden çok farklı olan yeni iki ve çok-uçlu elemanlar ile değiştirildiğini düşünelim. Bu değiştirme sonucunda elde edilen devreyi \bar{D} ile gösterelim öyle ki D ve \bar{D} devrelerinin tek ortak yanı bu devrelerden çizilen graflar olsun. \bar{D} den elde edilen akım ve gerilim vektörleri sırası ile $\bar{i}(t)$ ve $\bar{v}(t)$ ile gösterilirse devreden elde edilecek temel çevre ve temel kesitleme matrisleri:

$$B_t \bar{v}(t) = 0 \text{ ve } Q_t \bar{i}(t) = 0$$

biçiminde olacaktır. D devresinin de aynı G_T ağacı kullanılarak elde edilen temel çevre ve temel kesitleme matrisleri bölmeler halinde yazılırsa:

$$[B_1 \ U] = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad [B_1 \ U] = \begin{bmatrix} v'_1(t) \\ v'_2(t) \end{bmatrix} = 0$$

$$[U \ Q_1] = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad [U \ Q_1] = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = 0$$

bu ifadeler:

$$v_2(t) = -B_1 v_1(t) \quad , \quad \bar{v}_2(t) = -B_1 \bar{v}_2(t)(t)$$

$$i_1(t) = -Q_1 i_2(t) \quad , \quad \bar{i}_1(t) = -Q_1 \bar{i}_2(t)$$

biçiminde yazılabilir ki bu aşamadan sonra 3.5.6. Teoremindeki adımlar ile bu özdeşliğin var olduğu görülür. \square

3.5.8. Not: İfade edilen bu son teorem “Tellegen Teoremi” olarak bilinmektedir.

Bu teorem ile aynı topolojiye (devre haritası anlamında) sahip devreler arasında bir ilişki kurulabilmektedir. Bu ilişkinin kurulmasında Kirchhoff aksiyomları etken olsa da devre grafından seçilen ağaçlardan elde edilen denklem takımlarının, devre elemanlarının matematiksel modelini içermediğinin de bir kanıtı olarak düşünülebilir. Açıktır ki D ve \bar{D} devrelerinin işlevleri birbirlerinden farklıdır. Bu noktadan sonra, elimizdeki ifadeleri D ve \bar{D} devreleri arasındaki farklılıkları da içerecek şekilde genişletmemiz kaçınılmazdır.

Şimdi aşağıdaki soruyu göz önüne alalım:

“Devreleri oluşturan elemanların karakteristiklerinin elde bulunan denklem sistemlerine yansıtılması, elemanları belirli koşullarda birbiri ile ilişkilendirilmiş her devre için geçerli olabilir mi?”

Böyle bir sorunun cevabı için, devre elemanlarının devre topolojisine bazı kısıtlamalar getirip getirmediğini incelemek gerekmektedir. Kirchhoff aksiyomları ile kaynaklar bir arada düşünüldüğünde kaynakların devre içerisinde yer alması ile ilgili olarak bazı kısıtlamalar karşımıza çıkmaktadır. Bu kısıtlamaları ortaya koyalım: İçerisinde akım ve gerilim kaynakları bulunan birleşik bir D devresini ele aldığımızda,

- i) Devredeki gerilim kaynakların bazılarının bir \mathcal{C} çevresi oluşturduğunu düşünelim. Bu kaynaklar kendi üzerlerine atanan gerilim fonksiyonlarını gerçekleştireceklerinden, bu çevre için yazılacak olan temel çevre denklemi genellikle sağlanmaz.
- ii) Devredeki akım kaynaklarının bazılarının bir K kesitlemesi oluşturduğunu düşünelim. Bu kaynaklar, gerilim kaynaklarında olduğu gibi, kendi üzerlerine atanan fonksiyonları gerçekleştireceğinden bu kesitleme için yazılacak olan temel kesitleme denklemi de genellikle sağlanmayacaktır.

Yukarıda verilen i) ve ii) kısıtlamaları nedeni ile aşağıdaki tanımın yapılması gerekmektedir,

3.5.9. Tanım: Gerilim kaynaklarının çevre, akım kaynaklarının kesitleme oluşturmadığı devrelere *uygun devreler* adı verilir.

3.5.10. Teorem: Uygun ve birleşik bir D devresinin grafi G ise, G içinde öyle bir ağaç seçilebilir ki, bu ağaç D deki gerilim kaynaklarına ilişkin G nin bütün elemanlarını dal olarak içine alır. Ayrıca D deki akım kaynaklarına ilişkin G nin bütün elemanları da bu ağacın dışında kalır.

İspat: Yukarıda verilen 3.5.9. Tanımı gereğince gerilim kaynakları çevre oluşturmadıklarına göre herhangi bir D devresinin grafi G ise bu devrenin tüm gerilim kaynaklarına ilişkin kenarlar ağaç içerisine alınabilir. Aynı tanım gereğince akım kaynakları da kesitleme oluşturmayacağından 2.9.4. Teoremi gereğince D devresinin tüm akım kaynaklarına ilişkin G grafının kenarları girişler kümesi içerisinde kalabilir. \square

Herhangi bir D devresinin G grafindan 3.5.10. Teoreminde verilen özelliklere göre seçilecek ağaca denklem kurma ağacı adı verilir.

3.5.11. Teorem: Bir devredeki tüm kenarların gerilimlerini dal gerilimleri, bütün akımlarını da giriş akımları cinsinden ifade etmek, devrenin bütün akım ve gerilimlerini ifade etmek için yeterlidir. [16]

İspat: Bir devre grafindan seçilen herhangi bir ağaç için devre akım ve gerilimlerinin aşağıdaki eşitlikleri sağladığı bilinmektedir.

$$[B_1 \ \vdots \ U] \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = 0$$

$$[U \ \vdots \ Q_1] \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = 0$$

Burada $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ sırası ile dallara ve girişlere ilişkin gerilim fonksiyonları, $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ dallara ve girişlere ilişkin akım fonksiyonlarıdır. 3.5.10. Teoremi gereğince tüm gerilim kaynakları dallarda ve tüm akım kaynakları da girişlerde bulunmaktadır. Gerilim kaynakları $v_e(t) = e(t)$, akım kaynakları da $i_j(t) = j(t)$ biçiminde belli fonksiyonlar ürettiklerinden gerilim kaynaklarının gerilim fonksiyonları, akım kaynaklarının da akım fonksiyonu bilinen fonksiyonlardır. Bu durumda temel çevre ve temel kesitleme denklemleri:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \vdots & U & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \vdots & 0 & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \\ \vdots \\ v_k(t) \\ v_j(t) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} U & 0 & \vdots & Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & U & \vdots & Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_e(t) \\ i_d(t) \\ \vdots \\ i_k(t) \\ j(t) \end{bmatrix} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$e(t)$: Gerilim kaynaklarının gerilimlerine ilişkin vektör,

$v_d(t)$: Kaynaklar dışında kalan dallara ilişkin gerilimler vektörü,

$v_k(t)$: Kaynaklar dışında kalan kırıslara ilişkin gerilimler vektörü,

$v_j(t)$: Akım kaynaklarının gerilimlerine ilişkin vektör,

$i_e(t)$: Gerilim kaynaklarının akımlarına ilişkin vektör,

$i_d(t)$: Kaynaklar dışında kalan dallara ilişkin akımlar vektörü,

$i_k(t)$: Kaynaklar dışında kalan kırıslara ilişkin akımlar vektörü,

$j(t)$: Akım kaynaklarının akımlarına ilişkin vektördür.

Bu ifadeler:

$$\begin{bmatrix} v_k(t) \\ v_j(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_e(t) \\ i_d(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_k(t) \\ j(t) \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda tüm devrenin gerilimleri:

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \\ \dots \\ v_k(t) \\ v_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \\ \dots \\ -B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & -B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix}$$

3.5.3. Teoremi gereğince $Q_1 = -B_1^T$; $B_1 = -Q_1^T$ olduğundan

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \\ \dots \\ v_k(t) \\ v_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \\ \dots \\ Q_{11}^T & Q_{12}^T \\ Q_{21}^T & Q_{22}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U \\ Q_1^T \end{bmatrix} v_1(t)$$

$$v(t) = Q_1^T v_1(t)$$

olduğu görülür. Bu ise devrenin tüm gerilimlerinin dal gerilimleri cinsizden ifade edilebileceğini gösterir.

Benzer işlemler akım denklemleri için de yapılırsa:

$i(t) = B_1^T i_2(t)$ sonucuna ulaşılır ki bu da devrenin tüm akımlarının giriş akımları ile ifade edilebileceğini gösterir. □

Bu teoremin sonucunda devre çözümlerinin bilinmeyen dal gerilimlerinin ya da bilinmeyen giriş akımlarına yönelik olmasının, devre bütününe anlaşılması için yeterli olacağını gösterir.

3.6. Dal Gerilimlerinin Belirlenmesi

Devreyi oluşturan, kaynaklar dışında kalan elemanların uç denklemlerinin $i_k(t) = G_k v_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) şeklinde düzenlendiğini varsayalım. Burada G_k , reel bir sabit, bir operatör ya da $v_k(t)$ nin lineer ya da lineer olmayan bir fonksiyonu olabilir. Biz bu çalışmada G_k 'nin reel bir sabit olacağını varsayacağız ki bu da bir direnç elemanının matematiksel modelidir. Devrelerde kullanılan kaynaklar ise zamanın sabit, üstel ya da periyodik olarak değişen sürekli fonksiyonları ya da parçalı sürekli fonksiyonları olabilir.

Devre grafi oluşturularak devre içerisinde denklemler kurma ağacı seçildiğine devre akım ve gerilimleri;

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_e(t) \\ i_d(t) \\ \dots \\ i_k(t) \\ j(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} i_e(t) \\ i_d(t) \end{array} \right\} \text{ dal akımları} \\ \left. \begin{array}{l} i_k(t) \\ j(t) \end{array} \right\} \text{ giriş akımları} \end{array}$$
$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \\ \dots \\ v_k(t) \\ v_j(t) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} e(t) \\ v_d(t) \end{array} \right\} \text{ dal gerilimleri} \\ \left. \begin{array}{l} v_k(t) \\ v_j(t) \end{array} \right\} \text{ giriş gerilimleri} \end{array}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada $i_e(t)$ ve $e(t)$ vektörleri gerilim kaynaklarına; $j(t)$ ve $v_j(t)$ vektörleri akım kaynaklarına; $i_d(t)$ ve $v_d(t)$ vektörleri bilinmeyen dal akım ve gerilimlerine; $i_k(t)$ ve $v_k(t)$ vektörleri ise bilinmeyen giriş akım ve gerilimlerine ilişkin büyüklükleri göstermektedir. Gerilim kaynaklarına ilişkin $e(t)$ ve akım kaynaklarına ilişkin $j(t)$ kaynak fonksiyonları olup bu büyüklükler bilinmektedir.

Devrenin grafi yardımıyla belirlenen temel çevreler denklemleri ile temel kesitlemeler denklemleri:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \vdots & U & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \vdots & 0 & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(t) \\ v_d(t) \\ \dots \\ v_k(t) \\ v_j(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} U & 0 & \vdots & Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & U & \vdots & Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_e(t) \\ i_d(t) \\ \dots \\ i_k(t) \\ j(t) \end{bmatrix} = 0$$

Buradan giriş gerilimleri ve dal akımlarına ilişkin:

$$v_k(t) = -B_{11}e(t) - B_{12}v_d(t) \quad (3.13)$$

$$i_d(t) = -Q_{21}i_k(t) - Q_{22}j(t) \quad (3.14)$$

denklemleri yazılabilir. Devrenin kaynak dışında kalan elemanlarının uç denklemleri dal akımlarına ilişkin akım denkleminde yerine yazıldığında:

$$G_d v_d(t) = -Q_{21}G_k v_k(t) - Q_{22}j(t) \quad (3.15)$$

elde edilir. Elde edilen (3.13) denklemi (3.15) eşitliğinde yerine konduğunda:

$$G_d v_d(t) = -Q_{21}G_k [-B_{11}e(t) - B_{12}v_d(t)] - Q_{22}j(t)$$

$$(G_d - Q_{21}G_k B_{12})v_d(t) = Q_{21}G_k B_{11}e(t) - Q_{22}j(t)$$

Dal Gerilimleri Denklemleri elde edilir. Burada, Q_{21} ve B_{12} matrisleri singüler olmayan kare matrislerdir. Fiziksel olarak işlev gören bir devrenin de G_d ve G_k matrisleri singüler olamaz. Bu durumda $(G_d - Q_{21}G_k B_{12})$ matrisinin tersi bulunabilir. Dal gerilimlerine ulaşıldığından 3.5.11. Teoremi gereğince devrenin bütün gerilimlerine ulaşılabilir.

3.7. Kiriş Akımlarının Belirlenmesi

Devreyi oluşturan, kaynaklar dışında kalan elemanların uç denklemlerinin $v_k(t) = R_k i_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) şeklinde düzenlendiğini varsayalım. Burada R_k , reel bir sabit, bir operatör ya da $i_k(t)$ nin lineer ya da lineer olmayan bir fonksiyonu olabilir. Direnç elemanları için R_k reel bir sabittir. Devrenin elemanlarına ait uç denklemleri (3.13) denkleminde yerine konursa:

$$R_k i_k(t) = -B_{11}e(t) - B_{12}R_d i_d(t)$$

(3.14) denklemi bu denkleminde yerine konursa:

$$R_k i_k(t) = -B_{11}e(t) - B_{12}R_d [-Q_{21}i_k(t) - Q_{22}j(t)]$$

$$(R_k - B_{12}R_d Q_{21})i_k(t) = -B_{11}e(t) + B_{12}R_d Q_{22}j(t)$$

Kiriş Akımları Denklemleri elde edilir. $(R_k - B_{12}R_d Q_{21})$ matrisinin tersi yardımıyla devrenin bilinmeyen giriş akımlarına ulaşılır. 3.5.11 Teoremi gereğince devrenin tüm akımları bellidir.

4. İŞ - AĞ AKIŞ PROBLEMLERİ ve GRAF TEORİSİ

4.1. Giriş

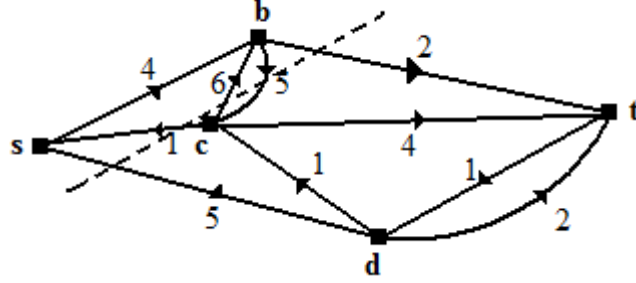
Çalışmamızın ikinci bölümünde grafların özelliklerini vererek, graf üzerinde temel bazı tanım ve teoremleri ele aldık. Bu tanım ve teoremlerin elektrik devrelerinin aksiyomları, modelleri ve devre fonksiyonlarının içerisinde katılmasıyla elektrik devrelerinin analizi için oldukça kullanışlı bir analiz yöntemi oluşturulacağını gördük. Esas olarak graf disiplini mühendislik sistemlerinin pek çoğunun analizinde kullanılabilecek bir yapıya sahiptir. Bu bölümde bir başka mühendislik alanını probleminin çözümünün graf yaklaşımına göz atacağız. Graf teorisi, kombinasyonel işlem olarak ifade edilebilecek iş – ağ akış problemleri için oldukça kullanışlıdır. Bir işletmenin seyahat eden satış elemanlarının seyahat uzunluğunu minimize etme, uygun iş ve işçi optimizasyonu bu tip problemlere örnek olarak verilebilir. Bu türden problemler üzerine örnek bir çalışma [3] de görülebilir.

4.2. Ulaştırma Ağları

Graf elemanlarının mal ve hizmetlerin bir noktadan başka bir noktaya taşınması için planlanan ağlara *ulaştırma ağı* adı verilir. Bu alt bölümde graf elemanlarının, genel anlamda, ulaştırma ağlarında nasıl bir rol aldığını inceleyeceğiz. Ulaştırma ağlarındaki temel problem; *ağ akışını maksimize etmek* ya da *akış sırasında oluşan herhangi bir fonksiyonu (maliyet vs.) minimize* etmektir. Bu problemler lineer programlama ile çözülebilir. Ancak graf teorisi yaklaşımı, bir bakış açısına göre, probleme daha etkin bir yaklaşımdır.

4.2.1. Tanım : Birleşik bir G yönlendirilmiş grafı aslında bir ulaştırma ağını temsil eder. Ele alınan bu G grafının kenarları pozitif sayılar ile

numaralandırılır ve bu sayılar i . Düğümünden, j . düğüme giden yolun *kapasitesini* temsil eder. Burada kapasite c_{ij} ile gösterilir.



Şekil 4. 3 Ulaştırma Ağı

Yukarıda da söz edildiği gibi ulaştırma ağı problemlerinden bir tanesi de ağ akışını maksimize etmektir. Böyle bir probleme yaklaşmak için öncelikle aşağıdaki tanımı yapmak gereklidir.

4.2.2. Tanım: Bir ulaştırma ağını temsil eden bir G grafinin, bir kenar ile ilişkilendirilmiş herhangi bir i . düğümü ile j . düğümüne doğru hareket eden mal ve hizmet miktarına, o kenar üzerinden *akış* denir ve f_{ij} ile gösterilir.

4.2.2 Tanımında verilen f_{ij} negatif olmayan bir sayıdır. Yine aynı tanıma bağlı olarak, yönlendirilmiş graflar ve akış için aşağıdaki tanım ve koşullar geçerlidir.

1. G grafinin yönlendirilmiş her (i,j) kenarı için

$$f_{ij} \leq c_{ij} \quad (4.1)$$

dir.

2. G grafinda *kaynak* olarak adlandırılacak özel bir s düğümü için

$$\sum_i f_{si} - \sum_i f_{is} = w \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan w değeri *akış değeri* olarak adlandırılır.

3. G grafinda *dağıtım noktası* olarak adlandırılacak özel bir t düğümü için

$$\sum_i f_{ti} - \sum_i f_{it} = -w \quad (4.3)$$

şeklinde bir fark değeri benzer olarak tanımlanabilir.

4. G grafinın kaynak ve tüketim noktası dışında kalan tüm düğümleri *ara düğüm* olarak adlandırılır ve her bir ara düğüm için

$$\sum_i f_{ij} - \sum_i f_{ji} = 0 \quad (4.4)$$

eşitliği vardır.

Yukarıda verilen (4.1) eşitliği herhangi iki düğüm arasındaki akışın, kapasiteden daha fazla olamayacağını gösterir. (4.2), (4.3) ve (4.4) eşitliklerinin anlamı ise, kaynak düğümünden çıkan w miktardaki mal ya da hizmetin ara düğümler üzerinden dağıtım noktasına ulaştığını gösterir. Özel olarak (4.4) eşitliği 3. Bölümde aksiyom olarak verilen *Kirchhoff Kanunlarına* da benzetilebilir.

Örnek olarak Şekil 4.1 de verilen ulaştırma ağını ele alalım: Bu ağ içerisinde değişkenler 10 kenar üzerinden akacakları açıktır. Bu ağ içerisinde

$$w = f_{sb} + f_{sd} - f_{cs}$$

olarak ifade edilebilir. Ancak biz w akış değerini, başka bir değişken olarak ele alacağız. Verilen bu ağ üzerindeki bütün akış fonksiyonları aşağıdaki gibi bir sütun vektörü ile tanımlanabilir.

$$f = \begin{bmatrix} f_{sb} \\ f_{sd} \\ f_{cs} \\ f_{bc} \\ f_{bt} \\ f_{cb} \\ f_{ct} \\ f_{dt} \\ f_{dc} \\ f_{td} \end{bmatrix}$$

Elde edilen bu matrise, w değişkeninin de eklenmesi ile oluşan matris:

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} w \\ f \end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Bu matrislere ek olarak h ile göstereceğimiz bir satır vektör tanımlayalım. Tanımlayacağımız bu matrisin $[h_{ij}]$ elemanı 1 olup, diğer elemanları 0 dır ve sütun sayısı kenar sayısından 1 fazladır. Örneğin Şekil 4.1 de verilen ağ için h matrisi

$$h = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

olacaktır. Bu durumda çözülmesi gereken problem

$$\bar{A} \cdot \bar{f} = 0, \quad f \leq c \text{ ve } \bar{f} \geq 0$$

kısıtlamaları altında $h \cdot \bar{f}$ matrisini maksimize etmektir. Burada \bar{A} matrisi ulaştırma ağını temsil eden grafinin dağıtım noktası düğümünden, kaynak düğümüne doğru eklenecek bir kenar ile elde edilen graftan oluşturulan matristir. Bu matris 3.Bölümde elde edilen düğüm matrisi ile aynı şekilde oluşturulur. Dolayısıyla,

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} s \\ b \\ c \\ d \\ t \end{array} \left| \begin{array}{cccccccccccc} st & sb & sd & cs & bc & bt & cb & ct & dt & dc & dt \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right. \end{array}$$

ve c matrisi kenarların kapasitesini gösteren sütun vektördür. Şekil 4.1 ile verilen örneğimiz için c matrisi:

$$c = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olacaktır. Elde edilen matrislerin satır ve sütun dizilimlerinin aynı sırada olması gerekir. Açıktır ki problem bir *lineer programlama problemi* olarak da ele alınabilir [5]. Ancak tezimizin genel amacı doğrultusunda *graf teorisi yaklaşımı* ile problemin çözümünü arayacağız.

4.2.3. Tanım: Bir ulaştırma ağında, 2.9.2. Tanımı gereğince, kaynak düğümü

ile dağıtım noktası düğümünü sırası ile P ve \bar{P} ile göstereceğimiz iki ayrı birleşik grafa bırakan bir kesitleme yapılabilir. Bu kesitleme kümesi elemanlarının P den \bar{P} ye doğru yönlendirilmiş olan kenarların kapasiteleri toplamına *kesitleme kapasitesi* adı verilir, $c(P, \bar{P})$ ile gösterilir ve

$$\sum_{i \in P, j \in \bar{P}} c_{ij} = c(P, \bar{P})$$

şeklinde ifade edilir. Örneğin Şekil 4.1 de verilen ulaştırma ağı grafında yapılan bir kesitleme ile graf, $P = \{s,b\}$ ve $\bar{P} = \{c,d,t\}$ olmak üzere iki ayrı birleşik grafa ayrılabilir. Bu kesitleme ye ait çizgi, Şekil 4.1 de kesik çizgilerle gösterilmiştir.

4.2.3 Tanımından, kesitlemeyi oluşturan elemanların P den \bar{P} ye yönlendirilmiş olanların kapasiteleri toplamı, kesitlemenin kapasitesini vereceğinden

$$c(P, \bar{P}) = 5 + 5 + 2 = 12$$

olacaktır.

4.2.4. Teorem: Bir G ulaştırma ağında w akış değeri; s kaynak düğümü ile t dağıtım noktası düğümünü birbirinden ayıran kesitlemenin kapasitesinden küçük ya da eşittir. [5]

İspat: (P, \bar{P}) kesitlemesi, s düğümünü P kümesi içerisinde ve t düğümünü ise \bar{P} kümesi içinde bırakan herhangi bir kesitleme olsun. G içerisindeki tüm ara düğümler için, (4.2) eşitliği göz önünde tutularak ve (4.4) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P, t \in G} f_{pt} - \sum_{p \in P, t \in G} f_{tp} &= w \\ \sum_{p \in P, i \in P} f_{pi} + \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} f_{pi} - \sum_{p \in P, i \in P} f_{ip} - \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} f_{ip} &= w \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\sum_{p \in P, i \in P} f_{pi} - \sum_{p \in P, i \in P} f_{ip} = 0$$

olduğundan

$$\sum_{p \in P, i \in \bar{P}} f_{pi} - \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} f_{ip} = w$$

akış fonksiyonlarının toplamları daima negatif olmayan sayılar olacağından

$$w \leq \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} f_{pi} \leq \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} c(p, i) = c(P, \bar{P}) \quad (4.5)$$

eşitsizliği yardımıyla ispat tamamlanır. \square

4.2.5. Teorem : Bir G ulaştırma ağında, s kaynak düğümünden t dağıtım noktası düğümüne doğru olan akış değerinin maksimum değeri, s ve t düğümlerini ayıran tüm kesitlemelerin minimum kesitleme kapasitesine sahip kapasiteye eşittir. [5]

İspat: 4.2.4 Teoremine göre, G de bir w_0 akış değerine sahip fonksiyonlar kümesinin s düğümü ile t düğümünü ayıran (P_0, \bar{P}_0) kesitlemesinin kapasitesinin $c(P_0, \bar{P}_0)$ a eşit olduğunu göstermemiz ispatı bitirecektir.

G içinde, w_0 mümkün olan maksimum akış kapasitesini göstermek üzere, P ve \bar{P} düğüm kümelerinin ele alalım. Buna göre

i) $s \in P$ dir.

ii) $i \in P$ düğümü için

$$\text{ya } f_{ij} < c_{ij} \text{ ya da } f_{ij} > 0$$

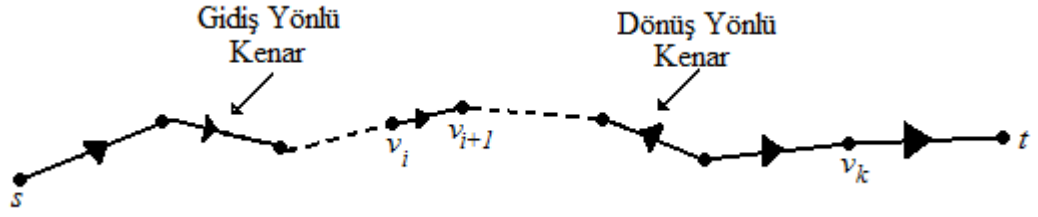
koşullarını sağlayan $j \in P$ dir.

iii) G nin P de olmayan tüm düğümleri \bar{P} kümesindedir.

Bu koşullardan t düğümünün P de olamayacağı görülecektir. Eğer öyle olsaydı, s ile t arasında, Şekil 4.2 de gösterilen, her bir kenarı ya $f_{j,j+1} < c_{j,j+1}$ ya da $f_{j,j+1} > 0$ koşulunu sağlayan bir ρ yolu bulunmak zorunda olacaktı.

Şekil 4.2 de gösterilen ρ yolu üzerinde;

- (v_j, v_{j+1}) kenarı v_j düğümünden, v_{j+1} düğümüne doğrultulu ise *gidiş yönlü kenar*,
- v_{j+1} den v_j ye yönlendirilmiş ise *dönüş yönlü kenar* olarak isimlendirilir.



Şekil 4. 4

Ele aldığımız ρ yolunda δ_1 tüm gidiş yönlü kenarlar için $[c_{v_j v_{j+1}} - f_{v_j v_{j+1}}]$ farkının minimum değeri, δ_2 ise tüm dönüş yönlü kenarlar için aynı farkın minimum değeri olsun. Burada hem δ_1 hem de δ_2 değerlerinin pozitif büyüklükler olacağı açıktır. Özel olarak, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ olsun. Bu durumda G ulaştırma ağı içerisindeki toplam akış miktarı; gidiş yönlü akışın artması, dönüş yönü akışının azalması ile artacaktır. Bu ağ için de (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) koşullarının sağlandığı da düşünüldüğünde, bu akış miktarının maksimum değerinin w_0 olduğu varsayımı ile çelişki elde edilir. Dolayısıyla t düğümü \bar{P} kümesinde olmalıdır. Başka bir deyişle (P, \bar{P}) kesitlemesi s düğümü ile t düğümünü farklı düğüm kümelerine ayırır. İspatın başlangıcındaki i) ve ii) koşulları gereğince P içinden alınacak bir p düğümü ve \bar{P} içerisinden alınacak bir i düğümü için

$$f_{pi} = c_{pi} \quad \text{ve} \quad f_{ip} = 0$$

elde edilir. Eşitlik (4.5) gereğince akış değeri

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} f_{pi} - \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} f_{ip} \\
&= \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} c_{pi} = c(P, \bar{P})
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu ise aranan sonuçtur. \square

Şekil 4.1 de verilen ağ için kaynak düğümü s ile t dağıtım noktası düğümünü ayıran sekiz kesitleme vardır. Bu kesitlemelerin kapasiteleri aşağıda verilmiştir.

Düğüm Kümesi P	$c(P, \bar{P})$
$\{s\}$	9
$\{s, b\}$	12
$\{s, c\}$	19
$\{s, d\}$	6
$\{s, b, c\}$	11
$\{s, b, d\}$	9
$\{s, c, d\}$	16
$\{s, b, c, d\}$	8

Görüldüğü gibi bu ağ içerisindeki akış miktarı $P = \{s, d\}$ ve $\bar{P} = \{b, c, t\}$ ile belirlenir.

Yukarıda vermiş olduğumuz teorem, anlık akışın maksimum değeri olarak ifade edeceğimiz w_{max} değerini bulmaya dönük bir algoritma içermez. Ayrıca tüm düğümler arası akış miktarlarını içeren f matrisini de maksimum kılacak bir algoritma içermez. Bu türden algoritmalar ([13]) halen daha geliştirilmektedir ([17]).

Ağ akış problemleri daha da genişletilebilir. İncelediğimiz sistem tek bir kaynak ve tek bir dağıtım noktasından oluşmaktadır. Birden fazla kaynak ve birden fazla dağıtım noktasının bulunduğu ulaştırma ağları, düğümlerin de belirli kapasitelerinin bulunduğu (söz gelimi belli noktalarda depolama zorunluluğunun bulunduğu) ağlar, iki yönlü eşit akışın bulunduğu ağlar gibi genişlemeler yapılmıştır [5].

5. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Bu tezde graf teorisinin mühendislik uygulamalarına neler kattığı ve ne gibi bakış açıları getirdiği, bazı mühendislik alanı uygulamaları örnekleri ile gözlemlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla tezin 2. Bölümünde, Graf Teorisinin bu uygulamalarda yaygın kullanılan tanım ve teoremleri ortaya konmuştur. Bu tanım ve teoremler 3. ve 4. Bölümde ilgili alanların temel problemlerine yaklaşım amaçlı kullanılmıştır. Özellikle 3. Bölümde, graflardan elde edilen matrisler yardımı ile elektrik devrelerinin analizi problemlerinde çözüme ulaşmak amaçlı lineer bağımsız denklem sistemlerinin elde edilmesi için kesin bir yol ortaya konmuştur. 4. Bölümde ise işletme problemlerinin uygulamalarına kısa bir bakış yapılmıştır.

Bu çalışmanın devamında, grup genişlemelerinin graf modellerinin elektronik ve haberleşme sistemlerinde nasıl bir model olarak kullanılabilceği, graf – grup – genişleme kavramları arasındaki ilişki, eş yapılılık bağıntısı altında incelenecektir.

KAYNAKÇA

- [1] ACAR C “Elektrik Devrelerinin Analizi” 2. Baskı, İTÜ, 1995
- [2] ALON N, LUBOTZKY A, WIGDERSON A “Semi-direct Product in Groups and Zig-Zag Product in Graphs: Connections and Applications” Proc. of the 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS’01), 2001
- [3] ARISOY M, YAMAN R, GÜR H “Düzlemsel Dikdörtgen Bölgeye Dikdörtgensel Elemanların Yerleştirilmesi Problemi ve Mühendislik Uygulamaları” Yıldız Üniversitesi Dergisi Sayı 1-2 1998
- [4] BONDY J A, MURTY U S R “Graph Theory with Applications” The Macmillan Press Ltd 1976
- [5] DEO N “Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Sciences” Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1974
- [6] FRAZER W D “A Graph –theoretic Approach to Linear Codes” Proc. Second Annual Allerton Conf. On Circuit & System Theory, 1964, 888-898
- [7] GROSS J “Graph Theory and its applications” CRC Press 1998
- [8] JOURNAL of GRAPH THEORY
- [9] LIN L, GEN M. “Node-Based Genetic Algorithm for Communication Spanning Tree Problem” IEEE Trans. Communication, Vol.E89, No:4, April 2006, 1091-1098
- [10] LU T, LAW C K “A Directed Relation Graph Method for Mechanism Reduction” Proc. of the Combustion Institute, v30, n 1, Jan. 2005, 1333-1341
- [11] MAO Y, KSCHICCHANG R, LI B, “A Factor Graph Approach to Link Loss Monitoring in Wireless Sensor Networks” IEEE Journal on Selected Areas in Communication, Vol.23, No:4, April 2005, 820-829
- [12] NILSON J W, RIEDEL S A, “Electric Circuits” 6th Ed., Prentice-Hall Inc., 2001
- [13] PLISH D.C “New Results Concerning Separation Theory of Graphs” Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison Wisc. 1970
- [14] SALTZER C ““Topological Codes” in Error Correcting Codes” John Wiley & Sons Inc, New York, 1968

- [15] SHELDON B A, BALAKRISHNAN K. “A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks” IEEE Trans. on Computers, Vol. 38, April 1989, 555-566
- [16] TOKAD Y “Devre Analizi Dersleri Kısım-1” Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 1986
- [17] TROTTER W T , KELLER M T “Combinatorial Applications of Network Flows” <http://www.math.gatech.edu/~trotter/chapter-13.pdf> 2006
- [18] WOLAVER D H “Basic Constraints from Graph Theory for DC to DC Conversation Networks” IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-19, No:6,Nov.1972, 640 – 648