T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

FABER POLİNOMLARININ ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Teslime IŞIK

Balıkesir, Haziran-2008

T.C
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

FABER POLİNOMLARININ ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Teslime IŞIK

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi : 13. 06. 2008
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (Danışman-BAÜ)
Doç. Dr. Ali GÜVEN (BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (BAÜ)

Balıkesir, Haziran-2008

ÖZET

FABER POLİNOMLARININ ASİMPTOTİK ÖZELLİKLERİ

Teslime IŞIK
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV)

Balıkesir, 2008

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, gösterimler ve teoremler verilmiştir.

Üç kısımdan oluşan ikinci bölümde, Faber polinomları ve onların asimptotik ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Birinci kısımda Faber polinomları tanımlanmış, ikinci kısımda Faber polinomlarının basit asimptotik özellikleri araştırılmıştır, üçüncü kısımda ise Faber polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda genelleşmiş Faber polinomları ve ikinci kısımda ise p-Faber polinomları tanımlanmıştır. Son kısım ise p-Faber polinomlarının asimptotik özelliklerine ayrılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Faber polinomu / genelleşmiş Faber polinomu / p-Faber polinomu / Faber serisi

ABSTRACT

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF FABER POLYNOMIALS

Teslime IŞIK
Balıkesir University, Institue of Science,
Deparment of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor: Prof. Dr. Daniyal M. ISRAFILOV)

Balıkesir-Turkey, 2008

This work consists of three chapters.

In the first chapter basic definitions, notations and theorems which are used in the following chapters are given.

In the second chapter, which consists of three sections the Faber polynomials and their asymptotic and appoximation properties are investigated. Here, in first section Faber polynomials are defined, in second section the simple asymptotic properties of Faber polynomials are investigated, in third section appoximation properties of Faber polynomials are studied.

The third chapter consists of three sections. In the first section the generalized Faber polynomials and in second section p-Faber polynomials are defined. The last section devoted to the asymptotic properties of p-Faber polynomials.

KEY WORDS: Faber polynomial / generalized Faber polynomial / p-Faber polynomial / Faber series

İÇİNDEKİLER Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
$\boldsymbol{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\boldsymbol{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\boldsymbol{N}$	Doğal sayılar kümesi
K	Bağlantılı tümleyene sahip sınırlı bir kontinyum
G	Sınırlı basit bağlantılı bölge
Γ	G bölgesinin sınırı
Γ_R	K kontinyumunun seviye çizgisi
G_R	Γ_R seviye çizgisinin içi
D_R	Γ_R seviye çizgisinin dışı
$\{F_n(z)\}$	K kontinyumunun Faber polinomları
$l(\Gamma)$	Γ eğrisinin uzunluğu
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
U	$\{z\in \boldsymbol{C}: \lvert z\rvert < 1\}$ kümesi (açık birim disk)
D(z_0, δ)	$\{z\in \boldsymbol{C}: \lvert z - z_0\rvert < \delta\}$ kümesi
CG	G bölgesinin tümleyeni

ÖNSÖZ

Faber polinomları, genelleşmiş Faber polinomları ve onların asimptotik özelliklerini konu alan bu çalışmam boyunca bana zamanını ayıran ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu noktaya gelmemde büyük emekleri olan, desteklerini her zaman hissettiğim annem, babam ve ağabeyime de teşekkürlerimi bildiririm.

Balıkesir, 2008 Teslime IŞIK

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

1.1.1 Tanım: Karmaşık düzlemde bağlantılı ve açık bir kümeye bölge, bağlantılı ve kapalı bir kümeye de kontinyum denir [1, s:1].

1.1.2 Tanım: $[a,b]\subset \boldsymbol{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma \ : \ [a,b]\rightarrow \boldsymbol{C}$$

fonksiyonuna karmaşık düzlemde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir. Bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a)=\Gamma(b)$ ise Γ'ya kapalı eğri; bir Γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\Gamma(t_1)=\Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ'ya Jordan eğrisi; Γ' türevi var ve sürekli ise Γ'ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için eğer, $\Gamma'(t)\neq 0$ oluyorsa Γ'ya düzgün eğri denir [2, s:126].

1.1.3 Tanım: B karmaşık düzlemde bir bölge olmak üzere $f: B\rightarrow \boldsymbol{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0\in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0 da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir [2, s:309-310].

1.1.4 Tanım: Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$, $\delta>0$, komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0'da analitiktir denir [2, s:100].

1.1.5 Tanım: Γ karmaşık düzlemde bir eğri olsun. Eğer bir T çemberini Γ**'**ya resmeden ve T çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa Γ eğrisine analitik eğri denir [3, s:20].

1.1.6 Tanım: Bir $\gamma(\text{t}) = z(t) = x(t) + iy(t),\ 0 \le t \le 1$ eğrisini alalım. Bunun uç noktaları $z_0 = z(0)$ ve $z_1 = z(1)$ olsun. Eğer, eğri üzerindeki noktalar, z_0'dan başlamak üzere t'nin artışına karşılık geliş sırasına göre taranırsa, γ pozitif yönde dönülmüş olur [2, s:129].

1.1.7 Teorem(Riemann Dönüşüm Teoremi): $G \subset \mathbf{C}$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini U'ya,

$$f(z_0) = 0 \ \text{ ve } \ f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır [4, s:8].

1.1.8 Teorem: $E \subset \boldsymbol{C}$ en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip, sınırlı bir kontinyum olsun. Bu durumda, CE bölgesini $C\overline{U}$ ' ya

$$\varphi(\infty) = \infty \ , \ \varphi'(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek φ konform dönüşümü vardır [4, s:104].

R>1 olmak üzere, merkezi 0 ve yarıçapı R olan çemberin φ fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$$\Gamma_R = \{z : |\varphi(z)| = R, R > 1\}$$

olsun.

Γ_R, R>1, eğrilerine E kontinyumunun seviye çizgileri denir [5, s:34].

1.1.9 Teorem(Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Teoremi): *G*, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlanmış sınırlı bir bölge ve Γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. *f*, *CG* bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \begin{cases} f(\infty) - f(z); & z \in C\overline{G} \\ f(\infty); & z \in G \end{cases}$$

olur [6, s:486].

1.1.10 Teorem(Hölder Eşitsizliği): *E* bir ölçüm uzayı olmak üzere, $p>1$, $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $f \in L^p(E)$ ve $g \in L^q(E)$ ise $fg \in L^1(E)$ ve

$$\left|\int_E f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur [7, s: 388].

1.1.11 Teorem(Sınırların uygunluğu teoremi): *G*, Γ ile sınırlı basit bağlantılı bir bölge ve *w=f(z), G*'yi $|w|<1$ diskine konform ve birebir olarak dönüştüren bir dönüşüm olsun. Bu dönüşümün $\overline{G}$ ve $|w|<1$ kümeleri arasında bir homeomorfizme genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul Γ'nın bir Jordan eğrisi olmasıdır [4, s:70].

1.1.12 Teorem(Weierstrass M-Testi): $A \subset \boldsymbol{C}$ ve g_n, *A* üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Gerçel sayıların aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir M_n dizisi varsa, $\sum_{1}^{\infty} g_k$, *A* üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

(i) $M_n \geq 0$, $\sum_{1}^{\infty} M_n$ yakınsak,

(ii) Her $z \in A$ için, $|g_k(z)| \leq M_k$, k=1,2,3,…

[2, s:189].

1.1.13 Tanım: x_n ve y_n iki pozitif dizi olsun. Eğer $|x_n| \leq c.y_n$, n=1,2,3,…, olacak şekilde n'den bağımsız bir c>0 var ise $x_n = O(y_n)$ gösterimi kullanılır.

2. FABER POLİNOMLARI

2.1 Faber Polinomlarının Tanımı

Γ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin. $\overline{G} = G \cup \Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni D olsun ($D = C - \overline{G}$). Riemann konform dönüşüm teoremine göre D bölgesini $|w| > 1$ bölgesine birebir ve konform resmeden ve

$$\varphi(\infty) = \infty, \; \varphi'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0 \tag{2.1}$$

koşullarını sağlayan φ dönüşümü tektir. Gerçekten; D bölgesinin $z = \infty$ noktasını $z_1 = 0$ noktasına taşıyan

$$z_1 = \frac{1}{z - z_0} \quad (z_0 \in G)$$

dönüşümü altındaki görüntüsü G_1 bölgesi olsun ve $w_1 = \phi(z_1)$, G_1 bölgesini

$$\phi(0) = 0, \; \phi'(0) = \lim_{z_1\to 0} \frac{w_1}{z_1} = 1$$

koşulları altında $|w_1| < 1$ bölgesine dönüştüren fonksiyon olsun. Buradan D bölgesini $|w_1| > 1$ bölgesine dönüştüren

$$w=\varphi(z)=\frac{1}{\phi\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)}$$

fonksiyonu (2.1)'de istenen özellikleri sağlar. Gerçekten

$$\varphi(\infty)=\frac{1}{\phi(0)}=\infty$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}=\lim_{z_1\to 0}\frac{1}{z_0 z_1+1}\frac{z_1}{w_1}=1>0$$

dır.

φ fonksiyonu D'de sadece ∞ noktasında analitik değildir. (2.1)'deki şartlar altında ∞ noktası φ fonksiyonun birinci mertebeden kutup yeridir. Buradan hareketle φ fonksiyonunun ∞ 'un komşuluğundaki Laurent açılımı

$$\varphi(z)=\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots$$

biçimindedir. $n=0,1,2,3,\ldots$ için

$$[\varphi(z)]^n=\left(\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots\right)^n$$

$$=\gamma^n z^n+a_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+a_{n-2}^{(n)}z^{n-2}+\ldots+a_1^{(n)}z+a_0^{(n)}+\frac{b_1^{(n)}}{z}+\frac{b_2^{(n)}}{z^2}+\ldots\frac{b_k^{(n)}}{z^k}+\ldots$$

olduğu görülmektedir. Sonuncu eşitliğin sağındaki z'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_n(z)=\gamma^n z^n+a_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+a_{n-2}^{(n)}z^{n-2}+\ldots+a_1^{(n)}z+a_0^{(n)}$$

polinomuna G bölgesi için n. mertebeden Faber polinomu denir.

$$\frac{b_1^{(n)}}{z}+\frac{b_2^{(n)}}{z^2}+\ldots\frac{b_k^{(n)}}{z^k}+\ldots$$

toplamını da $-E_n(z)$ ile gösterirsek

$$[\varphi(z)]^n = F_n(z)-E_n(z)$$

eşitliğinden

$$F_n(z)=[\varphi(z)]^n+E_n(z)$$

elde ederiz.

Bazı önemli kümelerin Faber polinomlarını verelim.

2.1.1 Örnek : Eğer G bölgesi $|z-z_0|<R_0$ diski ise bu diskin dışının $|w|>1$ bölgesine, $\varphi(\infty)=\infty$ ve $\varphi'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü

$$w=\varphi(z)=\frac{z-z_0}{R_0}$$

dir. Bu durumda her n doğal sayısı için

$$F_n(z)=\frac{1}{R_0{}^n}(z-z_0)^n$$

olur. Görüldüğü gibi $|z-z_0|<R_0$ diski için Faber polinomları konform dönüşüm fonksiyonunun negatif olmayan tam kuvvetleridir ve $E_n(z)\equiv 0$, n=0,1,2,….

2.1.2 Örnek: $K=[-1,1]$ olsun. Bu durumda K kontinyumunun dışının $|w|>1$ bölgesine, $\varphi(\infty)=\infty$ ve $\varphi'(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$ koşulları altındaki konform dönüşümü $w=\varphi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ şeklindedir. Karekök fonksiyonunun $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}\sqrt{z^2-1}=1$ koşulunu sağlayan dalını seçtiğimizde φ fonksiyonunun tersi

$$z=\psi(w)=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right),\qquad |w|>1$$

Zhukovskii fonksiyonu olur. Bu fonksiyonu

$$\varphi(t,z)=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{t^{n+1}},\qquad z\in G_R,\quad |t|>R$$

formülünde yerine yazarsak

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\frac{t^2-1}{t(t^2-2tz+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{t^{n+1}}$$

olur. Buradan

$$\frac{t^2-1}{t^2-2tz+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{t^n},\qquad |t|>R,\quad |\varphi(z)|<R$$

elde edilir. $t=\frac{1}{w}$ dersek

$$\frac{1-w^2}{1-2wz+w^2}=\sum_{n=0}^{\infty}w^nF_n(z),\qquad |w|<1$$

olduğu görülür.

Diğer yandan ortagonal polinomlar teorisinde ispatlanmıştır ki $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ biçiminde tanımlı Chebyshev polinomları için

$$\frac{1-w^2}{1-2wz+w^2} = T_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} w^n T_n(z)$$

açılımı geçerlidir. Böylece

$$F_0(z) = T_0(z) \text{ ve } F_n(z) = 2T_n(z), \qquad n \geq 1$$

elde edilir.

2.1.3 Örnek: R>1 olmak üzere düzlemde odakları ∓ 1, yarı eksenleri

$$a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$$

olan elips verilsin. Bu elipsin denklemi

$$z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}^{i\theta} + \frac{1}{\mathrm{Re}^{i\theta}}\right), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

şeklinde yazılabilir. Böylece konform dönüşüm fonksiyonu

$$z = \psi(w;R) = \frac{1}{2}\left(Rw + \frac{1}{Rw}\right),$$

$$w = \varphi(z;R) = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

formülleri ile tanımlanabilir. Bu elips için Faber polinomları

$$F_n(z;R) = \frac{1}{R^n} F_n(z) = \frac{2}{R^n} T_n(z), \qquad n \geq 1$$

şeklinde bulunur.

2.1.4 Örnek: K kontinyumu

$$\left|z^p + a_{p-1}z^{p-1} + a_{p-2}z^{p-2} + \ldots + a_1 z + a_0\right| \le a$$

koşulunu sağlayan noktalar kümesinin belirlediği p odaklı lemniscate olsun.

Bu durumda konform dönüşüm fonksiyonu

$$w = \varphi(z) = \frac{z}{a}\left(1 + \frac{a_{p-1}}{z} + \frac{a_{p-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_1}{z^{p-1}} + \frac{a_0}{z^p}\right)^{1/p}, \qquad z \in D$$

dir. Kökün temel değerini alırsak ($\lim_{z\to\infty}(1 + \frac{a_{p-1}}{z} + \ldots . \frac{a_0}{z^p})^{1/p} = 1$ olacak şekilde)

$$\varphi^{mp}(z) = \frac{1}{a^{mp}}\left(z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \ldots + a_1 z + a_0\right)^m, \qquad m=1,2,\ldots$$

$$F_{mp}(z) = \frac{1}{a^{mp}}\left(z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \ldots + a_1 z + a_0\right)^m, \qquad m=1,2,\ldots$$

olur.

Bu örnekte m=1,2… iken mp mertebeli bütün Faber polinomları hesaplanabilir. Özellikle eğer iki odaklı $\left|z^2 - 1\right| \le 1$ lemniscate verilirse $F_{2n}(z) = (z^2 - 1)^n$ elde edilir. Üstelik

$$\varphi(z) = z\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{1/2} = z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^3} - \frac{1}{16z^5} + \ldots$$

formülüne dayanarak küçük derecelerin tek Faber polinomları hesaplanabilir. Örneğin

$$F_1(z) = z\,,\quad F_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}z$$

elde ederiz.

2.1.5 Örnek:

$$z = \psi(w) = w + \frac{1}{3w^3}\,,\qquad |w| > 1 \tag{2.2}$$

fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesinde basit kutba sahip olduğu ∞ noktası hariç analitiktir. Bu fonksiyonda $w = e^{i\theta}$ yazarsak

$$z = \psi(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{3}e^{-3i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{3}(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)$$

buluruz. Reel ve imaginer kısımları ayırarak $x = 4\cos^3\theta, y = 4\sin^3\theta$ astroid denklemlerini elde ederiz. Sınırların uygunluğu kuralına dayanarak (2.2) fonksiyonu $|w| > 1$ bölgesini birebir ve konform olarak astroidin dışına dönüştürür. Faber polinomlarının üreteç fonksiyonunu hesaplayarak

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \frac{w^4 - 1}{w(w^4 + \frac{1}{3} - zw^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}$$

elde ederiz.

Bu durumda z'nin keyfi değerleri için Faber polinomlarını yazmak kolay değildir. Sadelik için bu polinomların değerlerini $z = 0$ için hesaplayalım. $z = 0$ olduğunu farz edersek

$$\frac{w^4 - 1}{w^5}.\frac{1}{1 + (1/3w^4)} = \frac{w^4 - 1}{w^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k w^{4k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k w^{4k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k w^{4k+5}}$$

elde ederiz. Bu açılımdan

$$F_{4k}(0) = \frac{(-1)^k}{3^k} - \frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}} = (-1)^k \frac{4}{3^k}, \qquad k \geq 1$$

$$F_n(0) = 0, \quad n \neq 4k$$

olduğu görülür.

2.2 Faber Polinomlarının Basit Asimptotik Özellikleri

$$\Gamma_R := \{z : |\varphi(z)| = R\}, \qquad R > 1$$

seviye çizgisini tanımlayalım. Her Γ_R seviye çizgisi iki kanonik bölge tanımlar; Eğrinin içi G_R ve dışı D_R :

$$G_R := \operatorname{int}\Gamma_R, \; D_R := ext\Gamma_R$$

2.2.1 Teorem: $R>1$ olmak üzere her $z \in G_R$ için

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olur.

İspat: $z \in G_R$ alalım. $E_n(z)$ fonksiyonu $\overline{D}_R$ kapalı bölgesinde analitiktir. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral teoremi'ne göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \begin{cases} E_n(\infty) - E_n(z); & z \in D_R \\ E_n(\infty); & z \in G_R \end{cases}$$

dir.

$z \in G_R$ olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = E_n(\infty) = 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_n(\varsigma)-E_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = F_n(z)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Böylece her $z \in G_R$ için

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma$$

bulunur.

2.2.2 Teorem: R>1 olmak üzere her $z \in D_R$ için

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma$$

olur.

İspat: $z \in D_R$ alalım. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = E_n(\infty) - E_n(z)$$

elde edilir. $E_n(\infty) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
E_n(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{E_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_n(\varsigma) - [\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F_n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma
\end{aligned}$$

bulunur.

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma, \qquad z \in D_R$$

elde edilir.

Böylece

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma, \qquad z \in G_R \tag{2.3}$$

$$E_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma, \qquad z \in D_R \tag{2.4}$$

olur.

2.2.3 Teorem: K, bağlantılı D tümleyenine sahip bir kontinyum ve $F_n(z)$ polinomları K kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere her $z \in K$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \le 1$$

olur.

İspat: $z \in K$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere (2.3) eşitliğinde $R = 1 + \varepsilon$ olduğunu varsayalım.

Böylece (2.3) formülünden $z \in K$ için

$$|F_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \frac{|[\varphi(\varsigma)]^n|}{|\varsigma - z|} |d\varsigma| \le \frac{1}{2\pi} \frac{(1+\varepsilon)^n l(\Gamma_{1+\varepsilon})}{\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})}$$

elde edilir.

Burada $l(\Gamma_{1+\varepsilon})$, $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisinin uzunluğunu, $\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})$ da K kontinyumu ile $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisi arasındaki uzaklığı göstermektedir.

$$c(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \frac{l(\Gamma_{1+\varepsilon})}{\rho(K, \Gamma_{1+\varepsilon})}$$

dersek

$$|F_n(z)| \le c(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n, \qquad z \in K$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının n. dereceden kökünü alırsak

$$\left|F_n(z)\right|^{1/n} \le \left[c(\varepsilon)\right]^{1/n}(1+\varepsilon)$$

elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|F_n(z)\right|} \le 1+\varepsilon$$

olduğu görülür. ε keyfi küçüklükte olduğundan ve sol taraf ε 'a bağlı olmadığından

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|F_n(z)\right|} \le 1$$

elde edilir.

2.2.4 Teorem: $1< r < R$ olacak şekilde r ve R iki sabit sayı olsun. $F_n(z)$ polinomları K kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere, $\forall z \in \overline{D}_R$ için

$$F_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n)$$

olur.

İspat: $z \in \overline{D}_R$ olsun. (2.4)'den

$$\left|E_n(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}\,d\varsigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_r} \frac{\left|[\varphi(\varsigma)]^n\right|}{\left|\varsigma - z\right|}\left|d\varsigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{r^n l(\Gamma_r)}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}$$

elde edilir. Burada $l(\Gamma_r)$; Γ_r eğrisinin uzunluğunu, $\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)$ de Γ_r ile Γ_R eğrileri arasındaki uzaklığı göstermektedir.

$$c(R,r) := \frac{1}{2\pi}\frac{l(\Gamma_r)}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}$$

dersek

$$\left|E_n(z)\right| \le c(R,r)r^n$$

olur. Buradan

$$E_n(z) = O(r^n)$$

olduğu görülür.

$$F_n(z) = [\varphi(z)]^n + E_n(z)$$

eşitliğinden

$$F_n(z) = [\varphi(z)]^n + O(r^n) \tag{2.5}$$

bulunur.

2.2.5 Teorem: $\forall z \in \Gamma_R$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|F_n(z)\right|} = \left|\varphi(z)\right|$$

olur ve bu eşitlikteki yakınsama *D* içindeki her *F* kompaktında düzgündür.

İspat: $z \in \Gamma_R$ olsun. (2.5)'den

$$\begin{aligned} F_n(z) &= [\varphi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{[\varphi(z)]^n}\right] \\ &= [\varphi(z)]^n \left[1 + \frac{O(r^n)}{O(R^n)}\right] \\ &= [\varphi(z)]^n \left[1 + O(\frac{r^n}{R^n})\right] \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{F_n(z)}{[\varphi(z)]^n} = 1 + O(\frac{r^n}{R^n})$$

$$\frac{F_n(z)}{[\varphi(z)]^n} - 1 = O(\frac{r^n}{R^n})$$

$$\left|\frac{F_n(z)}{[\varphi(z)]^n} - 1\right| \le c\,\frac{r^n}{R^n}$$

$$\left|\left|\frac{F_n(z)}{[\varphi(z)]^n}\right| - 1\right| \le \left|\frac{F_n(z)}{[\varphi(z)]^n} - 1\right| \le c\,\frac{r^n}{R^n}$$

$$-c\,\frac{r^n}{R^n} \le \left|\frac{F_n(z)}{[\varphi(z)]^n}\right| - 1 \le c\,\frac{r^n}{R^n}$$

$$1 - c\,\frac{r^n}{R^n} \le \frac{|F_n(z)|}{R^n} \le 1 + c\,\frac{r^n}{R^n}$$

elde edilir.

$$c_1(R) = 1 - c\,\frac{r^n}{R^n}\,, \quad c_2(R) = 1 + c\,\frac{r^n}{R^n}$$

denirse

$$c_1(R) \le \frac{|F_n(z)|}{R^n} \le c_2(R)$$

$$c_1(R)R^n \le |F_n(z)| \le c_2(R)R^n$$

olur. Bu eşitsizliğin her üç tarafının *n.* dereceden kökünü alırsak

$$[c_1(R)]^{1/n} R \le |F_n(z)|^{1/n} \le [c_2(R)]^{1/n} R$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alırsak

$$R \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \le R$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} = R = |\varphi(z)|$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} = |\varphi(z)|, \; z \in D$$

elde edilir. Bu eşitlikteki yakınsama D içindeki her F kompaktı üzerinde düzgündür.

2.2.6 Teorem: $\forall z \in \Gamma_R$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \varphi(z)$$

olur ve bu yakınsama D içindeki her F kompaktında düzgündür.

İspat: $z \in \Gamma_R$ olsun. n ve n+1 için (2.5) formülünden

$$\frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \frac{[\varphi(z)]^{n+1} + O(r^{n+1})}{[\varphi(z)]^n + O(r^n)}$$

$$= \frac{[\varphi(z)]^{n+1}\left(1 + \dfrac{O(r^{n+1})}{[\varphi(z)]^{n+1}}\right)}{[\varphi(z)]^n\left(1 + \dfrac{O(r^n)}{[\varphi(z)]^n}\right)}$$

$$= \varphi(z) \; \frac{1 + O\left(\dfrac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right)}{1 + O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)}$$

$$= \varphi(z) \; \frac{1 + O\left(\dfrac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right) + O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right) - O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)}{1 + O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)}$$

$$= \varphi(z) \left[1 + \frac{O\left(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right) - O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)}{1 + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)} \right]$$

$$= \varphi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \varphi(z) + O\left(\frac{r^n}{R^n}\right), \ z \in \Gamma_R$$

olduğu görülür. $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \varphi(z) \, , \ z \in D$$

elde edilir. D içindeki her F kompaktında bu yakınsama düzgündür.

2.3 Faber Polinomlarının Yaklaşım Özellikleri

$\{c_n\}$ karmaşık sayılar dizisi için

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \ , \quad R>0 \tag{2.6}$$

olduğunu varsayalım. Cauchy-Hadamard Teoremine göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

kuvvet serisi $|z - z_0| < R$ diskinde yakınsak, $|z - z_0| > R$ iken ıraksaktır.

K kontinyumu ve bunun $\{F_n(z)\}$ Faber polinomları dizisi verilsin.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z) \tag{2.7}$$

Faber polinomları serisini düşünelim. Doğal olarak bir soru ortaya çıkar: (2.7) serileri nerede yakınsak nerede ıraksaktır? Yani (2.7) serisinin yakınsama bölgesi nedir? Bu serinin yakınsama bölgesi (2.6) değerine bağlıdır.

2.3.1 Teorem: $\{c_n\}$ bir karmaşık sayı dizisi, $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$'ler de K kontinyumunun Faber polinomları dizisi olsun.

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} < 1, \quad R>1$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z)$ Faber serisi G_R bölgesi içinde düzgün yakınsak, D_R bölgesinde ıraksaktır.

İspat: $1 < R_1 < R$ olacak şekilde bir R_1 sayısı alalım. 2.2.5 teoremin ispatından

$$A_1 R_1^{\,n} \le |F_n(z)| \le A_2 R_1^{\,n}, \ z \in \Gamma_{R_1}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N doğal sayısı vardır ki $n > N$ için

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R} + \varepsilon = \frac{1+\varepsilon R}{R}$$

olur. $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon R^2}{1+\varepsilon R}$ dersek

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R-\varepsilon_0}$$

elde ederiz. ε_0 sayısını $R_1 < R-\varepsilon_0$ olacak şekilde seçtiğimizde

$$|c_n F_n(z)| \le A_2 \left(\frac{R_1}{R-\varepsilon_0} \right)^n$$

olur. $q = \dfrac{R_1}{R-\varepsilon_0}$ dersek 0<q<1 için

$$|c_n F_n(z)| \le A_2 q^n$$

olur. Böylece $z \in \Gamma_{R_1}$ için (2.7) serisinin mutlak değeri N+1 den başlayarak diğer indeksler için üstten sınırlanmış oldu. Bu yüzden (2.7) serisi Γ_{R_1} üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Diğer taraftan $z \in D_R$ olsun. $|\varphi(z)| = R_2$ denirse $R_2 > R$ ve $z \in \Gamma_{R_2}$ olur. Bu durumda 2.2.5 teoremin ispatından

$$A_3 R_2^{\,n} \le |F_n(z)| \le A_4 R_2^{\,n}, \quad z \in \Gamma_{R_2}$$

olur. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \dfrac{1}{R}$ olduğundan her ε>0 için $\{c_n\}$ dizisinin

$$\left|c_{n_k}\right|^{1/n_k} > \frac{1}{R} - \varepsilon = \frac{1-\varepsilon R}{R}$$

olacak biçimde bir { c_{n_k} } alt dizisi vardır. $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{(1-\varepsilon R)^2}$ denirse

$$\left|c_{n_k}\right|^{1/n_k} > \frac{1-\varepsilon R}{R} = \frac{1}{R+\varepsilon_1}$$

olur. ε sayısını, $R+\varepsilon_1 < R_2$ olacak şekilde seçersek

$$\left|c_{n_k} F_{n_k}(z)\right| > \frac{A_3 R_2{}^{n_k}}{(R+\varepsilon_1)^{n_k}} = A_3\left(\frac{R_2}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$$

elde edilir. $\dfrac{R_2}{R+\varepsilon_1} > 1$ olduğundan $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{R_2}{R+\varepsilon_1}\right)^{n_k}$ serisi ıraksak olur. Buradan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z)$ serisinin ıraksak olduğu çıkar.

2.3.2 Teorem: *G* basit bağlantılı ve sınırlı bir bölge ve bu bölgenin Γ sınırı analitik bir eğri olsun. Bu durumda *G* bölgesinde analitik herhangi bir *f(z)* fonksiyonu $K = G \cup \Gamma$ kontinyumunun Faber polinomları serisine açılabilir ve bu açılım *G* bölgesi içinde düzgün yakınsaktır.

İspat: Γ analitik bir eğri olduğundan $w = \varphi(z)$ dönüşüm fonksiyonu *G*'nin içine analitik ve birebir olarak genişletilebilir ve bazı $0 < \rho_0 < 1$ için D_{ρ_0} bölgesinde birebir olur. Bu durumda $z = \psi(w)$ fonksiyonu $w = \infty$ noktası hariç $|w| > \rho_0$ bölgesinde analitiktir ve ∞ noktasında basit kutba sahiptir.

$z \in G$ olsun. Bu durumda $\rho_o < \rho < 1$ ve $z \in G_p$ olacak şekilde bir ρ sayısı vardır. $\zeta = \psi(t)$ değişken değişimini ve Cauchy formülünü uygularsak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} f[\psi(t)] \frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} dt \tag{2.8}$$

elde ederiz.

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n+1}}, \qquad z \in G_\rho, \quad |t| \geq \rho \tag{2.9}$$

olduğunu biliyoruz.

Göstermek kolaydır ki (2.9) serisi $|t| \geq \rho$ ve G_ρ bölgesindeki herhangi bir F kompaktında düzgün yakınsaktır. Gerçekten F, G_ρ'nin kapalı bir alt kümesi ve $z \in F$ olsun. $F \subset \overline{G}_r$ ve $\rho_o < r < \rho$ olacak şekilde bir r sayısı vardır. Bu durumda

$$c_1(r)r^n \leq |F_n(z)| \leq c_2(r)r^n, \, z \in \Gamma_r$$

yazabiliriz. Böylece (2.9) serisi üstten sınırlanmış oldu. (2.9) açılımını (2.8)'de yerine yazıp integral alırsak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} f[\psi(t)] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{t^{n+1}} \right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{f[\psi(t)]}{t^{n+1}} dt$$

olur.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{f[\psi(t)]}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\varphi'(\zeta)}{\varphi^{n+1}(\zeta)} d\zeta \tag{2.10}$$

gösterimini kullanırsak

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z) \ , \qquad z\in G \tag{2.11}$$

elde ederiz. Böylece teorem ispatlanmış olur. Burada (2.10) formülü ile tanımlanan (2.11) açılımının $\{a_n\}$ katsayıları K kontinyumu için *f(z)* fonksiyonunun Faber katsayılarıdır.

2.3.3 Teorem: K kontinyumu üzerinde analitik her *f(z)* fonksiyonu bütün K üzerinde düzgün yakınsak Faber serilerine açılabilir.

İspat: *f*, *K*'da analitik bir fonksiyon olsun. Bu teoremde K tümleyeni bağlantılı sınırlı bir kontinyumdur ve sınırında herhangi bir kısıtlama yoktur. *f*; *K*'da analitik bir fonksiyon olduğundan $R=1+\varepsilon>1$ iken bu fonksiyon G_R bölgesinde analitiktir. 1< ρ <*R* olacak şekilde bir ρ sayısı alalım. $z\in K$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho} f[\psi(t)]\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt \tag{2.12}$$

elde edilir. Diğer taraftan $z\in K$ ve $|t|=\rho$ için

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{t^{n+1}}$$

açılımı düzgün yakınsaktır. Bu açılımı (2.12)'in sağ tarafındaki integralde yerine yazarak

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\rho}\frac{f[\psi(t)]}{t^{n+1}}dt\ , \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

için

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF_n(z)\,, \qquad z\in K$$

elde ederiz.

$$M=\max\left\{|f(z)|: z\in \overline{G}_\rho\right\}$$

denirse $|a_n|\le \dfrac{M}{\rho^n}$ buluruz.

1<r< ρ biçiminde bir *r* sayısı alalım. Her $z\in G$ için

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma-z}d\varsigma$$

olduğundan

$$|F_n(z)|\le c(r)r^n$$

olur. Bu durumda her *n* doğal sayısı ve her $z\in G$ için

$$|a_nF_n(z)|\le c(r)M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

elde edilir. $c(r)M\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^n$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass-M testi gereğince $|a_nF_n(z)|$ serisi *G* üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olur.

3. GENELLEŞMİŞ FABER POLİNOMLARI

3.1 Genelleşmiş Faber Polinomlarının Tanımı

g(z) fonksiyonu *D* bölgesinde analitik ve $g(\infty) > 0$ olsun. Bu durumda $n \in N$ için $g(z)[\varphi(z)]^n$ fonksiyonu ∞ noktasında *n.* mertebeden kutba sahiptir. Bu nedenle ∞' daki Laurent açılımı

$$g(z)[\varphi(z)]^n = a_0 \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + \frac{b_1^{(n)}}{z} + \ldots \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \ldots$$

biçiminde olur. Bu açılımdaki *z*'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_n(z; g) = a_0 \gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

polinomuna *K* kontinyumunun *g* ağırlık fonksiyonuna göre *n.* mertebeden genelleşmiş Faber polinomu denir.

$$\frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \ldots \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \ldots$$

toplamını da $-E_n(z; g)$ ile gösterirsek

$$g(z)[\varphi(z)]^n = F_n(z; g) - E_n(z; g)$$

eşitliğinden

$$F_n(z; g) = g(z)[\varphi(z)]^n + E_n(z; g)$$

elde edilir.

3.2 *p*-Faber Polinomları

Γ ile sınırlı basit bağlantılı bir G bölgesi verilsin. $\overline{G} = G \cup \Gamma$ kapalı bölgesinin tümleyeni D olsun ($D = C - \overline{G}$). φ, D bölgesini $|w| > 1$ bölgesine birebir ve konform resmeden,

$$\varphi(\infty) = \infty, \ \varphi'(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan bir dönüşüm ve $n \in \boldsymbol{N},\ p \in (1,\infty)$ olsun. $\sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^n$, ∞'un çıkarılmış komşuluğunda analitik olduğundan

$$\sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^n = \gamma_n z^n + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \ldots \gamma_1 z + \gamma_0 + \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z^2} + \ldots$$

Laurent serisine açılabilir. Bu eşitliğin sağındaki z'nin negatif olmayan kuvvetlerinden oluşan

$$F_{n,p}(z) = \gamma_n z^n + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \gamma_1 z + \gamma_0$$

polinomuna $\overline{G}$ kümesi için *n*. dereceden *p*-Faber polinomu denir.

$$\frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z^2} + \ldots + \frac{\delta_k}{z^k} + \ldots$$

toplamını da $-E_{n,p}(z)$ ile gösterirsek

$$\sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^n = F_{n,p}(z) - E_{n,p}(z)$$

eşitliğinden

$$F_{n,p}(z) = \sqrt[p]{\varphi'(z)}\left[\varphi(z)\right]^n + E_{n,p}(z)$$

olur.

3.3 *p*-Faber Polinomlarının Asimptotik Özellikleri

3.3.1 Teorem: Her $z \in G_R$ için

$$F_{n,p}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma$$

olur.

İspat: $z \in G_R$ alalım. $E_{n,p}(z)$ fonksiyonu $\overline{D}_R$ bölgesinde analitiktir. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral teoremine göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = E_{n,p}(\infty) = 0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_{n,p}(\varsigma) - E_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{E_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{F_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = F_{n,p}(z)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$F_{n,p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma , \qquad z \in G_R$$

elde edilir.

3.3.2 Teorem: Her $z \in D_R$ için

$$E_{n,p}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma , \qquad z \in D_R$$

dir.

İspat: $z \in D_R$ alalım. $E_{n,p}(z)$ fonksiyonu $\overline{D}_R$ bölgesinde analitiktir. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral teoremine göre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{E_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = E_{n,p}(\infty) - E_{n,p}(z)$$

elde edilir. $E_{n,p}(\infty) = 0$ olduğu için

$$\begin{aligned}
E_{n,p}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{E_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_{n,p}(\varsigma) - \sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{F_{n,p}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z} d\varsigma
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$E_{n,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma-z}d\varsigma\,, \qquad z\in D_R$$

bulunur. Böylece $n\in \boldsymbol{N}$ için

$$F_{n,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma-z}d\varsigma\,, \qquad z\in G_R \tag{3.1}$$

$$E_{n,p}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma-z}d\varsigma\,, \qquad z\in D_R \tag{3.2}$$

formülleri elde edilir.

3.3.3 Teorem: K bağlantılı D tümleyeni ile sınırlı kontinyum ve $F_{n,p}(z)$,n=0,1,2,… K kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere her $z\in K$ için

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|F_{n,p}(z)\right|}\leq 1$$

olur.

İspat: $z\in K$ olsun. $\varepsilon>0$ olmak üzere (3.1) eşitliğinde $R=1+\varepsilon$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.1) formülünden $z\in K$ için

$$\left|F_{n,p}(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}}\frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma-z}d\varsigma\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{(1+\varepsilon)^n l(\Gamma_{1+\varepsilon})}{\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}}\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{1/p}\left|d\varsigma\right|$$

elde edilir.

Burada $l(\Gamma_{1+\varepsilon})$; $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisinin uzunluğunu, $\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})$'da K kontinyumu ile $\Gamma_{1+\varepsilon}$ eğrisi arasındaki uzaklığı göstermektedir.

Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} |\varphi'(\varsigma)|^{1/p} d\varsigma \le \left(\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} |\varphi'(\varsigma)||d\varsigma| \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} |d\varsigma| \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$= \left(\int_{|w|=1+\varepsilon} |dw| \right)^{\frac{1}{p}} [l(\Gamma_{1+\varepsilon})]^{\frac{1}{q}}$$

$$= (2\pi)^{1/p}(1+\varepsilon)^{1/p}[l(\Gamma_{1+\varepsilon})]^{1/q}$$

buluruz. Böylece

$$|F_{n,p}(z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{(1+\varepsilon)^n l(\Gamma_{1+\varepsilon})}{\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})}(2\pi)^{1/p}(1+\varepsilon)^{1/p}[l(\Gamma_{1+\varepsilon})]^{1/q}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1-\frac{1}{p}}} \frac{(1+\varepsilon)^{n+\frac{1}{p}}[l(\Gamma_{1+\varepsilon})]^{1+\frac{1}{q}}}{\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})}$$

bulunur.

$$c_1(\varepsilon,p) = \frac{1}{(2\pi)^{1-\frac{1}{p}}} \frac{[l(\Gamma_{1+\varepsilon})]^{1+\frac{1}{q}}}{\rho(K,\Gamma_{1+\varepsilon})}$$

dersek

$$|F_{n,p}(z)| \le c_1(\varepsilon,p)\ (1+\varepsilon)^{n+\frac{1}{p}}, \qquad z\in K$$

elde edilir. Burada $c_1(\varepsilon, p)$ sabiti ε'a ve p' ye bağlıdır ve $\varepsilon \to 0$ iken sınırlı artışa sahiptir. Bu eşitsizliği

$$\left|F_{n,p}(z)\right| \leq c_1(\varepsilon, p)\ (1+\varepsilon)^n (1+\varepsilon)^{1/p}$$

şeklinde yazıp her iki tarafın *n.* dereceden kökünü alalım.

$$\left|F_{n,p}(z)\right|^{1/n} \leq \left[c_1(\varepsilon, p)\right]^{1/n} (1+\varepsilon)\ (1+\varepsilon)^{1/np}$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|F_{n,p}(z)\right|} \leq 1+\varepsilon$$

elde ederiz. ε keyfi küçüklükte olduğundan ve sol taraf ε 'a bağlı olmadığından,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|F_{n,p}(z)\right|} \leq 1, \qquad z \in K$$

elde ederiz.

3.3.4 Teorem: *1*< r < R olacak şekilde r ve R iki sabit sayı olsun. $F_{n,p}(z)$ polinomları *K* kontinyumunun Faber polinomları olmak üzere, $\forall z \in \overline{D_R}$ için

$$F_{n,p}(z) = \sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^n + O(r^n)$$

olur.

İspat: $z \in \overline{D}_R$ olsun. (3.2)'den

$$\left|E_{n,p}(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\frac{\sqrt[p]{\varphi'(\varsigma)}[\varphi(\varsigma)]^n}{\varsigma - z}d\varsigma\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{r^n l(\Gamma_r)}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}\int_{\Gamma_r}\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{1/p}\left|d\varsigma\right|$$

elde edilir.

Burada $l(\Gamma_r)$; Γ_r eğrisinin uzunluğunu, $\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)$ de Γ_r ile Γ_R eğrileri arasındaki uzaklığı göstermektedir.

Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\int_{\Gamma_r}\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{1/p}d\varsigma \leq \left(\int_{\Gamma_r}\left|\varphi'(\varsigma)\right|\left|d\varsigma\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Gamma_r}\left|d\varsigma\right|\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$= \left(\int_{|w|=r}\left|dw\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left[l(\Gamma_r)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= (2\pi)^{1/p}r^{1/p}[l(\Gamma_{r)})]^{1/q}$$

buluruz. Böylece,

$$\left|E_{n,p}(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{r^n l(\Gamma_r)}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}(2\pi)^{1/p}r^{1/p}[l(\Gamma_r)]^{1/q}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1-\frac{1}{p}}}\frac{r^n[l(\Gamma_r)]^{1+\frac{1}{q}}r^{1/p}}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}$$

olur.

$$c(R,r,p)=\frac{1}{(2\pi)^{1-\frac{1}{p}}}\frac{[l(\Gamma_r)]^{1+\frac{1}{q}}r^{1/p}}{\rho(\Gamma_r,\Gamma_R)}$$

dersek

$$\left|E_{n,p}(z)\right|\le c(R,r,p)r^n$$

elde ederiz. Buradan $E_{n,p}(z)=O(r^n)$ yazabiliriz. Böylece

$$F_{n,p}(z)=\sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^n+E_{n,p}(z)$$

eşitliğini kullanarak p-Faber polinomları için en basit asimptotik formülü elde ederiz:

$$F_{n,p}(z)=\sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^n+O(r^n),\qquad z\in\overline{D}_R,\quad 1<r<R. \tag{3.3}$$

3.3.5 Teorem: $\forall\, z\in\Gamma_R$ için

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|F_{n,p}(z)\right|}=\left|\varphi(z)\right|$$

olur ve bu eşitlikteki yakınsama D içindeki her F kompaktında düzgündür.

İspat: $z\in\Gamma_R$ olsun. (3.3)'den

$$\begin{aligned}F_{n,p}(z)&=[\varphi(z)]^n\left[\sqrt[p]{\varphi'(z)}+\frac{O(r^n)}{[\varphi(z)]^n}\right]\\&=[\varphi(z)]^n\left[\sqrt[p]{\varphi'(z)}+\frac{O(r^n)}{O(R^n)}\right]\\&=[\varphi(z)]^n\left[\sqrt[p]{\varphi'(z)}+O(\frac{r^n}{R^n})\right]\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n} = \sqrt[p]{\varphi'(z)} + O(\frac{r^n}{R^n})$$

$$\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n} - \sqrt[p]{\varphi'(z)} = O(\frac{r^n}{R^n})$$

$$\left|\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n} - \sqrt[p]{\varphi'(z)}\right| \leq c\frac{r^n}{R^n}$$

$$\left|\left|\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n}\right| - \left|\sqrt[p]{\varphi'(z)}\right|\right| \leq \left|\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n} - \sqrt[p]{\varphi'(z)}\right| \leq c\frac{r^n}{R^n}$$

$$-c\frac{r^n}{R^n} \leq \left|\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n}\right| - \left|\sqrt[p]{\varphi'(z)}\right| \leq c\frac{r^n}{R^n}$$

$$\left|\sqrt[p]{\varphi'(z)}\right| - c\frac{r^n}{R^n} \leq \left|\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n}\right| \leq c\frac{r^n}{R^n} + \left|\sqrt[p]{\varphi'(z)}\right|$$

elde ederiz. $\varphi'(z) \neq 0$, $\forall z \in C\overline{G}$ için $z \in \Gamma_R$ olduğundan $0 < c_1 \leq \left|\sqrt[p]{\varphi'(z)}\right| \leq c_2 < \infty$ olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri bulunabilir.

Buradan

$$c_1(p) - c\frac{r^n}{R^n} \leq \left|\frac{F_{n,p}(z)}{[\varphi(z)]^n}\right| \leq c_2(p) + c\frac{r^n}{R^n}$$

bulunur.

$$c_3(R,r,p) = c_1(p) - c\frac{r^n}{R^n} \quad \text{ve} \quad c_4(R,r,p) = c_2(p) + c\frac{r^n}{R^n}$$

denirse

$$c_3(R,r,p) \leq \frac{\left|F_{n,p}(z)\right|}{R^n} \leq c_4(R,r,p)$$

$$c_3(R,r,p)R^n \le \left|F_{n,p}(z)\right| \le c_4(R,r,p)R^n, \qquad z \in \Gamma_R$$

olur. Bu eşitsizliğin her üç tarafının *n.* dereceden kökünü alırsak

$$\left[c_3(R,r,p)\right]^{1/n} R \le \left|F_{n,p}(z)\right|^{1/n} \le \left[c_4(R,r,p)\right]^{1/n} R$$

olduğu görülür. $n \to \infty$ için limit alırsak

$$R \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|F_{n,p}(z)\right|} \le R$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|F_{n,p}(z)\right|} = R = \left|\varphi(z)\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|F_{n,p}(z)\right|} = \left|\varphi(z)\right|, \qquad z \in D$$

elde edilir ve bu eşitlikteki yakınsama *D* içindeki her *F* kompaktı üzerinde düzgündür.

3.3.6 Teorem: $\forall z \in \Gamma_R$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1,p}(z)}{F_{n,p}(z)} = \varphi(z)$$

olur ve bu yakınsama *D* içindeki her *F* kompaktında düzgündür.

İspat: $z \in \Gamma_R$ olsun. *n* ve *n*+1 için (3.3) formülünden

$$\frac{F_{n+1,p}(z)}{F_{n,p}(z)} = \frac{\sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^{n+1} + O(r^{n+1})}{\sqrt[p]{\varphi'(z)}[\varphi(z)]^{n} + O(r^{n})}$$

$$= \frac{[\varphi(z)]^{n+1}\left(\sqrt[p]{\varphi'(z)} + \dfrac{O(r^{n+1})}{[\varphi(z)]^{n+1}}\right)}{[\varphi(z)]^{n}\left(\sqrt[p]{\varphi'(z)} + \dfrac{O(r^{n})}{[\varphi(z)]^{n}}\right)}$$

$$= \varphi(z) \, \frac{\left(\sqrt[p]{\varphi'(z)} + \dfrac{O(r^{n+1})}{O(R^{n+1})} \right)}{\left(\sqrt[p]{\varphi'(z)} + \dfrac{O(r^{n})}{O(R^{n})} \right)}$$

$$= \varphi(z) \, \frac{\sqrt[p]{\varphi'(z)} \left[1 + \dfrac{O(r^{n+1})}{\sqrt[p]{\varphi'(z)} O(R^{n+1})} \right]}{\sqrt[p]{\varphi'(z)} \left[1 + \dfrac{O(r^{n})}{\sqrt[p]{\varphi'(z)} O(R^{n})} \right]}$$

$$= \varphi(z) \, \frac{1 + \dfrac{O(r^{n+1})}{\sqrt[p]{\varphi'(z)} O(R^{n+1})}}{1 + \dfrac{O(r^{n})}{\sqrt[p]{\varphi'(z)} O(R^{n})}}$$

elde edilir. $\varphi'(z) \neq 0$, $\forall z \in C\overline{G}$ için $z \in \Gamma_R$ olduğundan

$$0 < c_1 \leq \left| \sqrt[p]{\varphi'(z)} \right| \leq c_2 < \infty$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri bulunabilir. Böylece

$$\frac{F_{n+1,p}(z)}{F_{n,p}(z)} = \varphi(z) \, \frac{1 + O\left(\dfrac{r^{n+1}}{R^{n+1}} \right)}{1 + O\left(\dfrac{r^{n}}{R^{n}} \right)}$$

$$= \varphi(z) \, \frac{1 + O\left(\dfrac{r^{n+1}}{R^{n+1}} \right) + O\left(\dfrac{r^{n}}{R^{n}} \right) - O\left(\dfrac{r^{n}}{R^{n}} \right)}{1 + O\left(\dfrac{r^{n}}{R^{n}} \right)}$$

$$= \varphi(z) \left[1 + \frac{O\left(\dfrac{r^{n+1}}{R^{n+1}} \right) - O\left(\dfrac{r^{n}}{R^{n}} \right)}{1 + O\left(\dfrac{r^{n}}{R^{n}} \right)} \right]$$

bulunur. Diğer yandan

$$\left|\varphi(z)\ \frac{O\left(\dfrac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right)-O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)}{1+O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)}\right| \le |\varphi(z)|\left|O\left(\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right)-O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)\right|$$

$$= |\varphi(z)|O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

$$= RO\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

olur. Böylece,

$$\frac{F_{n+1,p}(z)}{F_{n,p}(z)} = \varphi(z)+\varphi(z)\ \frac{O\left(\dfrac{r^{n+1}}{R^{n+1}}\right)-O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)}{1+O\left(\dfrac{r^n}{R^n}\right)} = \varphi(z)+O\left(\frac{r^n}{R^n}\right)$$

olduğu görülür. Son olarak

$$\frac{F_{n+1,p}(z)}{F_{n,p}(z)} = \varphi(z)+O\left(\frac{r^n}{R^n}\right), \qquad z\in\Gamma_R$$

olur. Buradan $n\to\infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1,p}(z)}{F_{n,p}(z)} = \varphi(z)\,, \qquad z\in D$$

elde edilir. D içindeki her F kompaktında bu yakınsama düzgündür.

SONUÇ

Yüksek lisans tezinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Faber polinomları ve genelleşmiş Faber polinomlarının tanımları verilmiş ve bazı asimptotik özellikleri ile ilgili bilgiler elde edilmiştir.

2. Genelleşmiş Faber polinomlarının sık uygulanmakta olan özel bir durumu, p-Faber polinomları tanımlanmış ve bunların asimptotik özellikleri incelenmiştir.

3. İki ardışık p-Faber polinomlarının oranı ve bunları doğuran konform dönüşüm arasındaki bağlantı incelenmiş, ayrıca p-Faber polinomlarının sınırsız bölgelerde asimptotik özellikleri konform dönüşüme bağlı olarak öğrenilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht (1975).

[2] Başkan, T., Kompleks fonksiyonlar teorisi, Vipaş A.Ş, Bursa, (2000).

[3] Lehto, O. and Virtanen, K., Quasiconformal mappings in the plane, Springer-Verlag (1973).

[4] Markushevich, A.I., Theory of functions of a complex variable III, Chelsea Publishing Company, New York, (1977).

[5] Suetin, P.K., Series of Faber polynomials, Gordon and Breach Science Publishers (1998).

[6] Gonzalez, M.O., Classical complex analysis, Marcel Dekker, Inc (1992).

[7] Goluzin, G.M, Geometric theory of functions of a Complex Variable, Translations of Mathematical Monographs, Vol.26, Amer.Math.Soc (1969).