T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARIGRUPLAR VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Filiz KORKMAZ

Balıkesir, Haziran-2008

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARIGRUPLAR VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Filiz KORKMAZ

Balıkesir, Haziran-2008

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARIGRUPLAR VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Filiz KORKMAZ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi : 16. 06. 2008

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK (Danışman, BAÜ)
Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Mustafa KAZAZ (CBÜ)

Balıkesir, Haziran - 2008

ÖZET

YARIGRUPLAR VE ÖZELLİKLERİ

Filiz KORKMAZ
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balıkesir, 2008

Bu çalışmada birer cebirsel yapı olan grup ve monoid yapıları, genel tanımları ve sunuşları ile verilmiş ve diğer bir cebirsel yapı olan yarıgruplar; tanımı, sunuşu ve özellikleri ile ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca bunlara ek olarak önemli bir yarıgrup çeşidi olan devirli (monogenic) yarıgruplar ve bu yarıgrupların özellikleri ayrı bir bölümde çalışılmıştır.

Bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, grup ve monoid ile beraber, ağırlıklı olarak diğer bölümlerde ayrıntılarıyla incelenecek olan, yarıgrup yapıları tanımlanmış ve bu üç cebirsel yapının sunuşları verilerek aralarındaki geçişler incelenmiştir. Ayrıca diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı yarıgrup çeşitleri ile ilgili temel tanım, teorem ve özelliklerden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, yarıgrupların sağladığı özelliklere göre ayrıldığı sınıflar ve bu sınıfların belirlenmesinde kullanılan genel özellikler verilmiştir. Ayrıca belirtilen bazı yarıgrup sınıfları arasında bağlantıların olup olmadığı incelenerek, 2.5.3 Teorem, 2.5.6 Sonuç, 2.5.9 Teorem verilmiş ve ispatları tarafımızdan yapılmıştır. Bu bölümde son olarak regüler yarıgruplar ile ilgili önemli bir sonuç olan 2.5.11 Teorem incelenerek tarafımızdan ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde, devirli yarıgruplar ele alınmıştır. Öncelikle devirli bir yarıgrubun tanımı verilmiş ve bu yarıgrubun elemanları incelenmiştir. Sonraki kısımlarda ise devirli yarıgruplara ait özellikler incelenip, bu yarıgrupların ikinci bölümde verilen yarıgrup sınıflarından hangilerine, hangi koşullar altında dahil olabileceği tarafımızdan araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bölüm sonunda ise sonlu devirli bir yarıgrubun sunuşu verilmiştir.

Son bölümde ise her bir bölümde incelenen konuların genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Yarıgruplar, yarıgrup sunuşları, Green denklik sınıfları, devirli (monogenic) yarıgruplar.

ABSTRACT

SEMIGROUPS AND THEIR PROPERTIES

Filiz KORKMAZ
Balikesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(MSc. Thesis / Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balikesir, Turkey-2008

At the beginning of this work, it has been given the special algebraic structures groups and monoids with their general meanings and presentations, and then investigated semigroups with their general meanings, presentations and properties. Moreover, it has been studied in the different part the special type of semigroups, namely "monogenic semigroups", that are placed in an important part of these algebraic structures.

This thesis contains four main chapters.

In the first chapter it has been defined semigroups, investigated emphatically in the remaining chapters of this thesis, with groups and monoids, after that it has been studied relationships among them by giving presentations of these three algebraic structures. It has been also mentioned basic definitions, theorems and properties (which will be used for the remaining parts of this thesis) about some different types of semigroups.

In the second chapter the classification of semigroup classes has been generally investigated by depending on their properties. In addition, by studying whether or not there is connection between these semigroup classes, it has been given 2.5.3 Theorem, 2.5.6 Corollary and 2.5.9 Theorem that are proved by myself. At the end of this chapter there will be seen a proof of an important result, 2.5.11 Theorem, which is about the regularity of semigroups.

Chapter three is the main goal of this thesis. In other words, the monogenic semigroups have been largely studied in here. To do that, at first, it has been given definition of an monogenic semigroup, and then has been investigated the elements of this semigroup. In the remaining parts of this chapter, by mentioning the properties of monogenic semigroups, it has been studied and then obtained some results that are about what kind of semigroup classes (that are introduced in the second chapter) include monogenic semigroups. Also, at the end of this chapter it has been given presentation of an monogenic semigroup.

The final chapter can be thought as a general summarized the results achieved whole of this thesis.

KEY WORDS: Semigroups, presentations of semigroups, Green relations, monogenic semigroups.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
T_X	X kümesi üzerindeki tam transformasyon yarıgrubu
A^+	A kümesi üzerindeki serbest yarıgrup
A^*	A kümesi üzerindeki serbest monoid
1_S	S yarıgrubunun birimi
S^1	$S \cup \{1\}$ monoidi
0_S	S yarıgrubunun sıfırı
S^0	$S \cup \{0\}$ yarıgrubu
$G^0 = G \cup \{0\}$	0-grup (sıfırlı grup)
ρ	Bir küme üzerindeki bağıntı
B_X	X kümesi üzerindeki tüm bağıntıların kümesi
$x/\rho = \rho_x$	Bir x elemanının ρ bağıntısına göre denklik sınıfı
S/ρ	S yarıgrubunun ρ ile bölüm yarıgrubu
$\iota(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin bitiş harfi
1_w	boş kelime
$l(w)$	w kelimesinin uzunluğu
$l_x(w)$	w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu
$\approx$	serbest olarak iki kelimenin eşitliği
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$F(X)$	X kümesi üzerindeki serbest grup
$\wp$	grup sunuşu
$w_1 \approx_{\wp} w_2$	w_1 ve w_2 kelimelerinin $\wp$ sunuşuna bağlı olarak denkliği
$[w]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı olarak w kelimesinin denklik sınıfı

<u>**Simge**</u>	<u>**Adı**</u>
$[1]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı grubun birimi
$G(\wp)$	$\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup
N	normal kapanış
$\wp_M$	M monoidinin sunuşu
$\wp_S$	S yarıgrubunun sunuşu
$[w]_{\wp_S}$	$\wp_S$ sunuşuna bağlı olarak w kelimesinin denklik sınıfı
S^1X	S yarıgrubunun X kümesini içeren en küçük sol ideali
XS^1	S yarıgrubunun X kümesini içeren en küçük sağ ideali
S^1XS^1	S yarıgrubunun X kümesini içeren en küçük ideali
ρ_I	I kümesine bağlı Rees denklik bağıntısı
$S/\rho_I = S/I$	S nin I ile oluşturduğu Rees bölümü
L, R, H, D, J	Green bağıntıları
L_s	s elemanının L-sınıfı
R_s	s elemanının R-sınıfı
H_s	s elemanının H-sınıfı
D_s	s elemanının D-sınıfı
$K(S)$	S yarıgrubunun çekirdeği
$P = (p_{\lambda i})_{\substack{\lambda\in\Lambda,\\ i\in I}}$	Rees matrisi
$M[T;I,\Lambda;P]$	Rees matris yarıgrubu
$M^0[T;I,\Lambda;P]$	sıfırlı Rees matris yarıgrubu
$\langle A\rangle$	A kümesi ile üretilen yarıgrup
$\langle a\rangle$	devirli (monogenic) yarıgrup
m	sonlu devirli bir yarıgrupta a nın indeksi
r	sonlu devirli bir yarıgrupta a nın periyodu
K_a	$\langle a\rangle$ yarıgrubunun çekirdeği
$M(m,r)$	m indeksli ve r periyotlu devirli yarıgrup

Simge	**Adı**
◊	Örneklerin sonuna eklenir
□	İspatların sonuna eklenir

Bu çalışmada herhangi bir x elemanının bir f fonksiyonu altındaki görüntüsü sağdan, yani xf formunda gösterilecektir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamada geçirdiğim süreç içerisinde, zamanını bana ayırarak tezimle ilgilenen, benimle bilgilerini paylaşan, tüm kahrımı çeken ve beni her konuda yüreklendiren değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen ve beni bilgilendiren hocam Yrd. Doç. Dr. Fırat Ateş' e, Araş. Gör. Eylem Güzel' e ve öğrenim hayatım boyunca emek veren tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca maddi yönden destekleri için TÜBiTAK BİDEB' e teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak bugünlere gelmemi sağlayan, her an yanımda olan ve beni her konuda destekleyen sevgili AİLEME sonsuz teşekkürler…

Balıkesir, 2008 **Filiz KORKMAZ**

1. GİRİŞ

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan yarıgrup, bağıntı, homomorfizma ve sunuş gibi temel kavramlar, tıpkı grup teoride olduğu gibi, incelenecektir. Ayrıca bazı yarıgrup çeşitleri tanımlanacak ve yarıgrup teoride önemli yeri olan teoremler verilecektir. Yine bu bölümdeki kavramlar ile ilgili ayrıntılı bilgiler [2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19] gibi kaynaklarda bulunabilir.

1.1 Yarıgruplar

Bu alt bölümde diğer bölümlerde detaylı olarak incelenecek olan yarıgrup cebirsel yapısı ile ilgili giriş bilgileri verilecektir. Öncelikle yarıgrup tanımı verilip ardından yarıgrup teorinin temel özellik ve teoremlerinden bahsedilecektir.

1.1.2 Tanımda görüleceği gibi bir yarıgrup sadece iki temel özellik üzerine kurulmuş önemli bir yapıdır. Yarıgruplar bu kadar az sayıda özellik üzerine inşa edilmiş bir cebirsel yapı olmalarından dolayı birçok matematikçinin ilgisini çekmişlerdir. Tüm çalışma boyunca bu özel yapının özellikleri incelenecektir.

1.1.1 Tanım: S boştan farklı bir küme olmak üzere, $S\times S$ den S üzerine tanımlı olan fonksiyona S üzerinde bir ***ikili işlem*** denir.

1.1.2 Tanım: S boştan farklı bir küme ve $*$ ise S üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer

(i) $\forall x, y, z \in S$ için, $(x*y)*z = x*(y*z)$ oluyorsa (*birleşme özelliği*),

(ii) $\forall x \in S$ için, $x*e = e*x = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ elemanı bulunabiliyorsa (*birim eleman özelliği*),

(iii) $\forall x \in S$ için, $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$ olacak şekilde $x^{-1} \in S$ elemanı bulunabiliyorsa (*ters eleman özelliği*)

$(S,*)$ ikili sistemine bir ***grup*** denir.

Verilen bu özelliklerden;

● sadece (i) ve (ii)' yi sağlayan $(S,*)$ ikilisine ise bir ***monoid***,

● ancak tek bir (i). özelliği sağlayan $(S,*)$ ikilisine ise ***yarıgrup*** denir.

1.1.3 Örnek: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi üzerinde bilinen toplama (+) işlemi tanımlansın. Bu durumda her bir sayı kümesi bir grup yapısı oluşturur. Ayrıca, 1.1.2 Tanımdan anlaşılacağı gibi, her grup bir yarıgrup olduğundan bu sayı kümeleri birer yarıgruptur. ◊

1.1.4 Örnek: $S=\{e\}$ tek elemanlı kümesi üzerinde $e*e=e$ işlemi tanımlansın. Bu durumda $(S,*)$ ikilisi bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba ***aşikâr yarıgrup*** denir. ◊

Şimdi verilecek olan 1.1.5 Tanım ve 1.1.8 Tanımdaki yarıgrup çeşitleri, yarıgrup teoride önemli bir yere sahiptir ve bunlarla ilgili yapılmış olan birçok çalışma vardır.

1.1.5 Tanım: *X* boştan farklı bir küme olmak üzere, T_X simgesi ile *X* kümesi üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi gösterilsin. Fonksiyonlar üzerinde *bileşke* işlemi tanımlandığında, birleşme özelliği sağlanacağı için, T_X bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba ***Tam Transformasyon Yarıgrubu*** (*Full Transformation Semigroup*) adı verilir. Özel olarak *X* kümesi {1, 2, … n} şeklinde (sonlu) bir küme ise $T_{\{1,2,\ldots,n\}}$ yerine kısaca T_n yazılır.

1.1.5 Tanımda verilen tam transformasyon yarıgrubu ile ilgili bazı çalışmalar tezimizin 2. Bölümünde incelenmiş olmakla beraber, konu ile ilgili detaylı çalışmalara [3,19] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

1.1.6 Not: Bu tezde herhangi bir x elemanının bir τ fonksiyonu altındaki görüntüsü $\tau(x)$ yerine $x\tau$ ile gösterilecektir. Dolayısıyla fonksiyonların bileşkesi için kural da, τ ve σ birer fonksiyon olmak üzere, $x(\tau\sigma)=(x\tau)\sigma$ şeklindedir.

T_X in elemanları fonksiyonlar olduğu için, fonksiyonlar ile ilgili temel bazı kavramların burada geçerli olacağı açıktır. Örneğin bir $\tau\in T_X$ elemanı için, $\mathrm{im}\,\tau$ kümesi τ fonksiyonunun görüntü kümesi olup, kısaca

$$\mathrm{im}\,\tau=\{x\tau : x\in X\}$$

dir. Bununla beraber $|\mathrm{im}\,\tau|$ ile $\mathrm{im}\,\tau$ kümesinin eleman sayısı gösterilmekte olup, bu sayı τ fonksiyonunun ***rank*** ' ı olarak adlandırılır ve $rank\tau$ ile gösterilir. Örneğin

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

ise $\mathrm{im}\,\tau=\{1, 3, 5\}$ ve $rank\,\tau=3$ olacaktır.

$\tau\in T_X$ in görüntü kümesine ek olarak, bir τ elemanının

$$\ker\tau=\{(x,y): x\tau=y\tau\}$$

şeklinde tanımlanan kümesine, τ fonksiyonunun ***çekirdeği*** denir. Çekirdek kavramı ile ilgili daha detaylı bilgiler bu bölüm içerisinde tekrar belirtilecektir.

1.1.7 Tanım: A boştan farklı bir küme olsun. A kümesinin her bir elemanına ***harf*** denir. A kümesindeki harflerden oluşan $(a_1,a_2,...,a_m)$ biçimindeki sonlu diziye A üzerinde bir ***kelime*** denir ve bu $w=a_1a_2...a_m$ şeklinde ifade edilir. Eğer m=0 ise w kelimesine ***boş kelime*** adı verilir ve bu kelime e ile gösterilir. Bununla beraber A kümesinden alınan harflerle oluşturulan herhangi iki kelime için tanımlanan yan yana yazma işlemi

$$\left(a_1a_2...a_m\right)\left(b_1b_2..b_n\right)=a_1a_2...a_mb_1b_2..b_n \tag{1.1}$$

şeklindedir.

1.1.8 Tanım: 1.1.7 Tanımdaki A kümesini göz önüne alalım. Burada A^+ ile A daki harflerle oluşturulan boştan farklı tüm kelimelerin kümesi ve A^* ile $A^+\cup e$ kümesi gösterilsin. Bu durumda A^+ ve A^* kümeleri, (1.1)'de tanımlanan işlem altında birer yarıgrup oluştururlar. A^+ yarıgrubuna A kümesi üzerindeki ***serbest yarıgrup***, A^* yarıgrubuna da A kümesi üzerindeki ***serbest monoid*** denir.

Serbest yapılar ile ilgili ayrıntılı bilgiler yine bu bölüm içerisinde verilecektir.

Herhangi bir yarıgrubun elemanları, sağladığı bazı özelliklere göre isimlendirilir ki bu yarıgrup teoride önemli bir yer işgal eder. Aşağıda bazı özelliklerin toplandığı bir tanım verilmektedir.

1.1.9 Tanım: S bir yarıgrup ve $e, z, i\in S$ olsun.

(i) $\forall x\in S$ için $ex=x$ oluyorsa, e ye S nin ***sol birimi***,

(ii) $\forall x\in S$ için $xe=x$ oluyorsa, e ye S nin ***sağ birimi***,

(iii) e elemanı, S nin hem sağ hem de sol birimi ise e ye S nin ***birimi***,

(iv) $\forall x\in S$ için $zx=z$ oluyorsa, z ye S nin ***sol sıfırı***,

(v) $\forall x\in S$ için $xz=z$ oluyorsa, z ye S nin ***sağ sıfırı***,

(vi) z elemanı, S nin hem sağ hem de sol sıfırı ise z ye S nin ***sıfırı***,

(vii) u elemanı için $u^2=u$ oluyorsa u ya S nin ***idempotent elemanı***

denir.

1.1.9 Tanımdan kolayca görülebileceği gibi, her sağ (veya sol) birim ve her sağ (veya sol) sıfır eleman idempotenttir.

1.1.10 Örnek: $I=[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde

$$xy = \min(x, y) \qquad (x, y \in I)$$

işlemi tanımlansın. Bu durumda I kümesi, tanımlanan bu işlem altında, bir yarıgrup oluşturur. Ayrıca,

$\forall x \in I$ için, $x0 = 0x = 0$ olduğundan 0, I yarıgrubunun sıfır elemanı ve

$\forall x \in I$ için, $x1 = 1x = x$ olduğundan 1, I yarıgrubunun birim elemanıdır. ◊

1.1.11 Tanım: S herhangi bir küme olsun ve S kümesi üzerindeki çarpma işlemi

$$xy = x$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda S kümesi, tanımlanan bu işlem altında, bir yarıgrup oluşturur. Ayrıca S kümesinin her elemanı sol sıfır ve sağ birimdir. Bu şekilde tanımlanan S yarıgrubuna ***sol sıfır yarıgrup*** (*left zero semigroup*) denir. Benzer şekilde S kümesi üzerindeki çarpma işlemi $xy = y$ şeklinde tanımlanırsa elde edilen S yarıgrubuna ***sağ sıfır yarıgrup*** (*right zero semigroup*) denir.

1.1.9 Tanımın sonucu olarak hatırlamalıyız ki bir S yarıgrubunda l sol birim ve r sağ birim ise $l = lr = r$ olacaktır, ki bu S yarıgrubunda birim elemanın varlığını gösterir. Dolayısıyla S yarıgrubunda birim eleman varsa (bir cebirsel yapı olduğundan), bu eleman tektir ve 1_S (veya 1) ile gösterilir. Bununla beraber S yarıgrubunda birim eleman bulunmuyorsa, bu yarıgruba 1 elemanı eklenerek ve $s \in S \cup \{1\}$ için,

$$s1 = 1s = s$$

çarpımı tanımlanarak, S yarıgrubu $S^1 = S \cup \{1\}$ şeklinde bir monoide dönüştürülebilir. Ancak S zaten bir monoid ise, bu durumda $S^1 = S$ dir. (Elde edilen bu yeni monoid, 2. Bölümde verilecek olan Green bağıntılarının oluşturulmasında kullanılacaktır).

Bunlara ek olarak bir S yarıgrubunda sıfır eleman varsa bir tanedir ve 0_S (veya 0) ile gösterilir. Eğer S yarıgrubunda sıfır eleman bulunmuyorsa bu yarıgruba 0 elemanı eklenerek ve $s \in S$ için,

$$s0 = 0s = 0$$

çarpımı tanımlanarak, $S^0 = S \cup \{0\}$ şeklinde bir yarıgrup elde edilebilir. Özel olarak S yarıgrubu sıfır eleman içeriyorsa, $S^0 = S$ dir. Yapılan bu tanımlamayı genelleyerek aşağıdaki yarıgrubu elde ederiz.

1.1.12 Tanım: S herhangi bir küme olsun. $0 \in S$ olmak üzere, S kümesi üzerindeki çarpma işlemi $xy = 0$ $(x, y \in S)$ biçiminde tanımlanırsa, S bir yarıgrup olur ve bu yarıgruba ***sıfır yarıgrup*** (*zero semigroup*) denir.

1.1.13 Tanım: G bir grup olsun. Bu takdirde $G^0 = G \cup \{0\}$ şeklinde tanımlanan küme bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba **0-*grup*** veya ***sıfırlı grup*** (*group – with-zero*) denir.

1.1.13 Tanımdan görüleceği gibi, bir G grubuna 0 elemanı eklenerek yeni bir küme oluşturulduğunda bu küme bir grup yapısı oluşturmaz. Çünkü G ye eklenen 0 elemanı, 1.1.2 Tanım (iii)'de verilen, ters eleman özelliğini sağlamamaktadır.

Yarıgrupların alt kümeleri de bazı durumlarda yarıgrup yapısı oluşturabilir. Aşağıda bir yarıgrubun alt kümeleri ile ilgili tanım yer almaktadır.

1.1.14 Tanım: S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin boştan farklı bir T alt kümesi, S kümesindeki işleme göre kapalı ise T kümesine S nin bir ***alt yarıgrubu*** denir. Örneğin 1.1.8 Tanımda verilen A^+ yarıgrubu A^* yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

1.1.15 Teorem: S bir yarıgrup ve S_i ($i \in I$), S nin alt yarıgruplarının bir ailesi olsun. Bu takdirde

$$T = \bigcap_{i \in I} S_i$$

kümesi, boş değil ise, S yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

1.2 Homomorfizmalar

Homomorfizma kavramı, grup teoride olduğu gibi, yarıgrup teoride de yeni yarıgruplar elde edilmesi için kullanılacaktır. Bundan dolayı bu bölümde herhangi iki yarıgrup arasında tanımlanan bir homomorfizma ile ilgili temel tanım ve özellikler verilecektir.

1.2.1 Tanım: S ve T herhangi iki yarıgrup olmak üzere, $f : S \to T$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $\forall x, y \in S$ için,

$$(xy)f = (xf)(yf)$$

oluyorsa f fonksiyonuna S den T ye bir ***homomorfizma*** denir.

Tıpkı diğer cebirsel yapılarda olduğu gibi, 1.2.1 Tanımda verilen f homomorfizması örten iken ***epimorfizma***, birebir iken ***monomorfizma*** ve son olarak hem birebir hem de örten iken ***izomorfizma*** adını alacaktır. Ayrıca f bir izomorfizma olduğunda S ile T ***izomorftur*** denir ve bu $S \cong T$ ile gösterilir.

1.2.2 Önerme: S ve T iki yarıgrup olmak üzere, $f : S \to T$ homomorfizması tanımlansın. Bu homomorfizmanın

$$\mathrm{im}f = Sf = \{sf : s \in S\}$$

görüntü kümesi, T yarıgrubu için bir alt yarıgruptur. Ayrıca f fonksiyonu bir monomorfizma ise bu durumda S yarıgrubu $\mathrm{im}f$ yarıgrubuna izomorf olur.

Aşağıdaki teorem ile grup teoride önemli bir yeri olan *Cayley Teoremi*' ne benzer bir teoremin yarıgrup teoride de var olduğu görülmektedir. Gruplar için verilen Cayley Teoremi' nin ifadesi ve ispatı [14] de bulunabilir.

1.2.3 Teorem: Her yarıgrup, bir tam transformasyon yarıgrubunun alt yarıgrubuna izomorftur.

İspat: S bir yarıgrup ve $X = S^1$ olsun. Her $s \in S$ için,

$$\tau_s : X \to X \ , \quad x\tau_s = xs \qquad (x \in X)$$

fonksiyonu verilsin. Şimdi

$$\phi : S \to T_X \ , \quad s\phi = \tau_s$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve bu fonksiyonun bir monomorfizma olduğunu gösterelim. $\forall s,t \in S$ ve $x \in X$ için,

$$x(\tau_s\tau_t) = (x\tau_s)\tau_t = (xs)\tau_t = (xs)t = x(st) = x\tau_{st}$$

dir. Böylece

$$(s\phi)(t\phi) = \tau_s\tau_t = \tau_{st} = (st)\phi$$

olur ki bu durumda ϕ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Ayrıca yine $s,t \in S$ için,

$$s\phi = t\phi \Rightarrow \tau_s = \tau_t \Rightarrow 1\tau_s = 1\tau_t \Rightarrow 1s = 1t \Rightarrow s = t$$

elde edilir. Bu durumda ϕ fonksiyonu birebirdir. O halde tanımlanan ϕ fonksiyonu birebir bir homomorfizma olduğundan monomorfizmadır. Dolayısıyla 1.2.2 Önerme gereği, S yarıgrubu T_X in $\mathrm{im}\phi$ alt yarıgrubuna izomorftur. □

1.2.3 Teoremin ispatında $X = S^1$ yerine $X = S$ alınsaydı, ϕ fonksiyonu yine bir homomorfizma olurdu. Ancak bu durumda ϕ nin birebirliği sağlanmayabilirdi. Örneğin $S=\{a,b,c\}$ kümesi sol sıfırların oluşturduğu bir yarıgrup olsun. Bu durumda $X = S^1 = \{1,a,b,c\}$ olur. Ayrıca *a, b* ve *c* elemanlarına karşılık gelen τ_a, τ_b, τ_c fonksiyonları da

$$\tau_a = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & a & b & c \end{pmatrix},\ \tau_b = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ b & a & b & c \end{pmatrix} \text{ ve } \tau_c = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ c & a & b & c \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Ancak burada $X = S^1$ yerine $X = S = \{a,b,c\}$ alınsaydı,

$$\tau_a = \tau_b = \tau_c = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = id$$

elde edilirdi ki bu durumda ϕ homomorfizması birebir olmazdı.

1.2.4 Tanım: S ve T iki yarıgrup olmak üzere, $f : S \to T$ homomorfizması var olsun. Özel olarak f *örten* ise T yarıgrubu, S yarıgrubunun ***homomorfik görüntüsü*** dür.

Yarıgrup teoride serbest yarıgruplar için verilen aşağıdaki teorem, grup teoride serbest gruplar için verilen ve birçok özelliği belirlemekte yardımcı olan *Evrensel Dönüşüm Özelliği*' nin (Universal Mapping Property) bir benzeridir.

1.2.5 Teorem: S herhangi bir yarıgrup ve A harflerin oluşturduğu küme olsun. Ayrıca $f : A \to S$ fonksiyonu tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu,

$$\phi : A^+ \to S\,, \quad af = a\phi \qquad (a \in A)$$

şeklinde *tek bir* ϕ *homomorfizmasına* genişletilebilir.

İspat: $a_1a_2.....a_n \in A^+$ için, $\phi : A^+ \to S$ fonksiyonu

$$[a_1a_2.....a_n]\phi = (a_1f)(a_2f)...(a_nf)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $a_1a_2.....a_n \in A^+$ ve $b_1b_2.....b_m \in A^+$ için,

$$\begin{aligned}([a_1a_2.....a_n][b_1b_2.....b_m])\phi &= [a_1a_2.....a_nb_1b_2.....b_m]\phi \\ &= \underbrace{(a_1f)(a_2f).....(a_nf)}_{[a_1a_2.....a_n]\phi}\underbrace{(b_1f)(b_2f).....(b_mf)}_{[b_1b_2.....b_m]\phi} \\ &= [a_1a_2.....a_n]\phi[b_1b_2.....b_m]\phi\end{aligned}$$

olduğundan, ϕ bir homomorfizmadır. Şimdi ϕ nin tekliğini gösterelim. Bunun için başka bir

$$\varphi : A^+ \to S\,, \quad a\varphi = af \qquad (a \in A)$$

homomorfizması alalım. Bu durumda

$$[a_1a_2.....a_n]\varphi = (a_1\varphi)(a_2\varphi).....(a_n\varphi) = (a_1f)(a_2f).....(a_nf) = [a_1a_2.....a_n]\phi$$

elde edilir. O halde $\varphi = \phi$ dir. □

1.2.6 Sonuç: 1.2.5 Teoremdeki f fonksiyonunun görüntü kümesi olan $\operatorname{im} f$ kümesi S için üreteç kümesi olduğunda, $\operatorname{im}\phi$ kümesi S ye eşittir. 1.2.4 Tanımda belirtildiği gibi "her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür".

1.3 Bağıntılar

Bir küme üzerinde tanımlanan bağıntılar, matematiğin birçok alanında olduğu gibi yarıgrup teoride de önemli bir yere sahiptir. Diğer bölümlerde bağıntılardan daha ayrıntılı bir şekilde bahsedileceği için, bu alt bölümde sadece bağıntının tanımına ve sağlayabileceği bazı özelliklere yer verilmiştir.

1.3.1 Tanım: X boştan farklı bir küme olmak üzere, $X \times X$ kümesinin her bir alt kümesine X üzerinde bir ***bağıntı*** denir. O halde X kümesi üzerinde tanımlanan bir bağıntı kümesi X kümesinden alınan sıralı ikililerden oluşmaktadır.

Herhangi iki bağıntı arasındaki bileşke işlemi,

$$\rho \circ \sigma = \rho\sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z \in X)(x, z) \in \rho, (z, y) \in \sigma\} \qquad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bağıntılar arasında tanımlanan (1.2)'deki bileşke işlemi birleşme özelliğini sağladığından, X kümesi üzerindeki tüm bağıntıların oluşturduğu küme (ki bu kümeyi B_X ile gösterelim), (1.2)'deki işleme göre bir yarıgrup oluşturur. Bununla birlikte 1.1.5 Tanımda verilen T_X tam transformasyon yarıgrubundaki fonksiyonların özel birer bağıntı olduğu açıktır. Dolayısıyla T_X kümesi ile tanımlanan yarıgrup, B_X in bir alt yarıgrubu olur.

Aşağıda bir X kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir bağıntının sağlayabileceği özellikler ile ilgili bir tanım verilmektedir.

1.3.2 Tanım: X bir küme ve ρ, X üzerinde tanımlı herhangi bir bağıntı olsun.

(i) $\forall x \in X$ için $(x, x) \in \rho$ oluyorsa, ρ bağıntısına ***yansımalı***,

(ii) $\forall x, y \in X$ için $(x, y) \in \rho$ iken $(y, x) \in \rho$ oluyorsa, ρ bağıntısına ***simetrik***,

(iii) $\forall x, y \in X$ için $(x, y) \in \rho$ ve $(y, x) \in \rho$ iken $x = y$ oluyorsa, ρ

bağıntısına ***ters simetrik***,

(iv) $\forall x, y, z \in X$ için $(x, y) \in \rho$ ve $(y, z) \in \rho$ iken $(x, z) \in \rho$ oluyorsa, ρ bağıntısına ***geçişmeli***

denir. Ayrıca yansımalı, simetrik ve geçişmeli olan bir ρ bağıntısı ***denklik bağıntısı*** ve yansımalı, ters simetrik ve geçişmeli olan bir ρ bağıntısı da ***sıralama bağıntısı*** olarak adlandırılır.

1.3.1 Tanım ile verilen "bağıntı tanımından" yararlanılarak, grup teoride yer alan bölüm gruplarına benzer bir yapı yarıgrup teoride de oluşturulabilir. Ancak bölüm yarıgrupları, tanımından da görüleceği gibi (bknz. 1.4.2 Tanım), bölüm gruplarından oldukça farklıdır.

1.3.3 Tanım: X bir küme ve ρ bu küme üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Herhangi bir $x \in X$ için,

$$x/\rho = \rho_x = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine x in ***denklik sınıfı*** denir. $x \in X$ için ρ_x kümeleri, X kümesinin bir ayrışımı (parçalanış kümeleri) dır, diğer bir deyişle tüm ρ_x lerin birleşimi X kümesini verir. Ayrıca X kümesinin tüm denklik sınıflarının kümesi

$$X/\rho = \{\rho_x : x \in X\}$$

şeklinde gösterilir.

1.1.6 Not ile tam transformasyon yarıgrubunun bir elemanı için *çekirdek* kavramı verilmişti. Bu kavram farklı iki küme üzerinde tanımlı olan herhangi bir fonksiyon için de geçerlidir. Aşağıda herhangi iki küme üzerinde tanımlı olan bir fonksiyonun çekirdeği ile ilgili bir önerme yer almakta olup, ispatı 1.3.2 Tanım kullanılarak kolayca görülebilecektir.

1.3.4 Önerme: X ve Y herhangi iki küme ve $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun çekirdeği olan

$$\ker f = \{(x, y) \in X \times X : xf = yf\}$$

kümesi, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur.

1.4 Kongrüans Bağıntısı ve Bölüm Yarıgrubu

1.3 Alt Bölümde bir bağıntının tanımı ve sağlamış olduğu bazı özelliklere göre sınıflandırılması ile ilgili bilgiler verildi. Burada ise denklik bağıntısı olan bir bağıntının hangi şartlar altında bir "kongrüans bağıntısı" belirteceği verilip, bundan yararlanılarak "bölüm yarıgrubu" adı verilen bir yarıgrup tanımlanacaktır.

1.4.1 Tanım: S bir yarıgrup ve ρ bu yarıgrup üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Bu ρ bağıntısı $\forall x, y, s \in S$ için,

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (sx, sy) \in \rho$$

özelliğini sağlıyorsa ***sol uyumludur*** (*left compatible*), benzer şekilde

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$$

özelliğini sağlıyorsa ***sağ uyumludur*** (*right compatible*) adını alır. Eğer, ρ bağıntısı hem sağ hem de sol uyumlu ise bu durumda ρ ya ***uyumludur*** (*compatible*) denir. Bununla birlikte sol uyumlu olan bir ρ denklik bağıntısına ***sol kongrüans***, sağ uyumlu olan bir ρ denklik bağıntısına ***sağ kongrüans*** ve uyumlu olan bir ρ denklik bağıntısına da ***kongrüans bağıntısı*** denir. Kısaca S yarıgrubu üzerinde tanımlı ρ denklik bağıntısı $\forall x, y, x', y' \in S$ için,

$$(x, y) \in \rho \text{ ve } (x', y') \in \rho \Rightarrow (xx', yy') \in \rho$$

özelliğini sağlıyorsa bu ρ bağıntısı bir *kongrüans bağıntısı* olur.

1.4.2 Tanım: S bir yarıgrup ve ρ, S üzerinde tanımlı bir kongrüans bağıntısı olsun. Bu durumda S/ρ ile gösterilen S nin tüm denklik sınıflarının kümesi,

$$\left(x/\rho\right)\left(y/\rho\right) = (xy)/\rho \tag{1.3}$$

biçiminde tanımlanan çarpma işlemi altında, bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba S nin ρ ile ***bölüm yarıgrubu*** denir.

Yukarıdaki tanımdan anlaşılabileceği üzere, yarıgrup teorideki bölüm yarıgrubu yapısı aslında gruplar, halkalar ve vektör uzayları gibi diğer cebirsel yapılardaki bölüm yapısından farklıdır. Bu cebirsel yapılardaki *bölümler*, alt yapılar yardımı ile tanımlanmaktadır. Açıkça belirtirsek, yarıgruplarda bölüm yarıgrubu kongrüans bağıntısı ile oluşturulurken, gruplarda bölüm grubu normal alt grup ile, halkalarda bölüm halkası idealler ile ve vektör uzaylarında bölüm uzayı alt uzaylarla oluşturulmaktadır.

Diğer cebirsel yapılarda olduğu gibi yarıgruplarda da önemli bir yeri olan Birinci İzomorfizma Teoremi, 1.4.2 Tanım yardımıyla aşağıdaki gibi verilir.

1.4.3 Teorem [18] (Birinci İzomorfizma Teoremi):

(i) ρ bağıntısı bir S yarıgrubu üzerinde tanımlı kongrüans olsun. Bu durumda

$$f : S \to S/\rho \,, \quad xf = x/\rho$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu bir epimorfizmadır.

(ii) $f: S \to T$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda f nin çekirdeği olan $\ker f$ kümesi S üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır ve

$$S/\ker f \cong \mathrm{im} f$$

dir.

İspat: **(i)** $f: S \to S/\rho, \quad xf = x/\rho$

biçimindeki f kuralının bir epimorfizma olduğu, S/ρ üzerinde (1.3) eşitliğindeki gibi tanımlanan çarpma işlemi tanımından kolayca görülür.

(ii) Burada öncelikle $f: S \to T$ homomorfizmasının çekirdeğinin S üzerinde bir kongrüans bağıntısı olduğunu gösterelim. Bunun için, $x, y, s \in S$ alalım ve $(x, y) \in \ker f$ (yani, $xf = yf$) olsun. Bu durumda

$$(sx)f = (sf)(xf) = (sf)(yf) = (sy)f$$

olur. O halde $(sx, sy) \in \ker f$ dir. Dolayısıyla $\ker f$ sol kongrüans bağıntısıdır. Benzer şekilde $\ker f$ in sağ kongrüans bağıntısı olduğu da gösterilebilir. O halde $\ker f$, S üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.

Şimdi

$$\phi: S/\ker f \to imf \ , \qquad \left(x/\ker f\right)\phi = xf$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlayalım. Burada

$$x/_{\ker f} = y/_{\ker f} \Leftrightarrow (x, y) \in \ker f \Leftrightarrow xf = yf \Leftrightarrow \left(x/_{\ker f}\right)\phi = \left(y/_{\ker f}\right)\phi$$

olduğundan ϕ fonksiyonu birebirdir. Ayrıca ϕ nin tanımından kolayca anlaşılabileceği gibi bu fonksiyon örtendir ve

$$\left(\left(x/_{\ker f}\right)\left(y/_{\ker f}\right)\right)\phi = \left((xy)/_{\ker f}\right)\phi = (xy)f = (xf)(yf)$$
$$= \left(\left(x/_{\ker f}\right)\phi\right)\left(\left(y/_{\ker f}\right)\phi\right)$$

olduğundan ϕ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Sonuç olarak ϕ bir izomorfizma olduğundan

$$S/_{\ker f} \cong \mathrm{im} f$$

dir. □

Birinci İzomorfizma Teoremi, bir yarıgrubun homomorfik görüntüsünün bölüm yarıgrubu ile birebir eşlenebilen olduğunu, yani aynı olduğunu, gösterir. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilip, ilgili ispat, 1.2.5 Teorem, 1.2.6 Sonuç ve 1.4.3 Teorem yardımı ile yapılır.

1.4.4 Teorem: Her yarıgrup bir serbest yarıgrubun bölüm yarıgrubuna izomorftur.

1.4.4 Teorem bize gösterir ki "yarıgruplar, serbest yarıgrupların bölüm yarıgrupları şeklinde tanımlanabilir". Bir sonraki alt bölüm, bu konu ile ilgili bazı ek bilgiler içermektedir.

1.5 Grup, Monoid ve Yarıgrup Sunuşları

Grup teoride de önemli bir yere sahip olan sunuşlar, birçok problemin çözümünde kolaylıklar sağlamaktadır. Bu bölümde hazırlık sağlaması açısından, öncelikle herhangi bir grubun ve monoidin sunuşlarının tanımları verilecek, daha sonra yarıgrup sunuşu ile ilgili tanım ve özelliklerden bahsedilerek, bu üç cebirsel yapının sunuşları arasındaki geçişler incelenecektir.

Şimdi gruplar için sunuş oluşturulurken kullanılacak kavramlar ile ilgili tanım ve teoremleri verelim.

1.5.1 Tanım: X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}$ $(x \in X)$ eşlemesinden yararlanarak X^{-1} kümesini tanımlayalım. Ayrıca $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına ***harf*** ve ($n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \le i \le n$ olmak üzere)

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n} \tag{1.4}$$

ifadesine de X kümesi üzerinde bir ***kelime*** denir. w kelimesinin başlangıç harfi $\iota(w)$ ile gösterilip bu kelime için $\iota(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ ve bitiş harfi de $\tau(w)$ ile gösterilip yine bu kelime için $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ dir. Eğer $n = 0$ ise ***boş kelime*** elde edilir ve 1_w ile gösterilir. (1.4)'deki gibi boş olmayan bir kelime $(n \ge 1)$ için her $\varepsilon_i = +1$ $(1 \le i \le n)$ oluyorsa, w kelimesine ***pozitif kelime*** denir. Ayrıca (1.4)'deki w kelimesinin ***tersi***

$$w^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \ldots x_1^{-\varepsilon_1}$$

şeklinde tanımlanır.

(1.4)'de verilen kelime için n sayısına w kelimesinin ***uzunluğu*** adı verilir ve $l(w)$ ile gösterilir. Ayrıca w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu da $\sum_{x_i=x}|\varepsilon_i|$ olarak hesaplanır ve bu ifade de $l_x(w)$ ile gösterilir.

X kümesi üzerindeki herhangi iki w ve u kelimeleri arasındaki işlem, wu biçimindeki *çarpma* işlemidir. Görüldüğü gibi bu işlem, w kelimesinin yanına u kelimesinin yazılması ile elde edilmektedir.

(1.4)'deki gibi boş olmayan bir kelime üzerinde aşağıdaki işlemler uygulanabilir:

(♪i) $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimede $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$ çifti varsa bu çift silinir. Yapılan bu silme işlemine ***indirgeme işlemi*** denir.

(♪ii) $\varepsilon_i = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$ şeklindeki ters harf çifti eklenebilir. Yapılan bu işleme ***ekleme işlemi*** denir.

X kümesi üzerinde herhangi iki w ve w' kelimeleri için, bu kelimelerden biri diğerine **(♪i)** ve **(♪ii)** işlemlerinin sonlu sayıda uygulanması ile elde ediliyorsa, w ve w' kelimelerine ***serbest olarak eşittir*** (*freely equivalent*) denir ve $w \approx w'$ ile gösterilir. Burada $\approx$ simgesi ile gösterilen serbest olarak eşitliğin bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir. Herhangi bir w kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. Eğer X kümesi üzerindeki bütün kelimelerin denklik sınıflarının kümesi $F(X)$ ile gösterilirse bu küme üzerindeki çarpma işlemi

$$[w][u] = [wu] \tag{1.5}$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir.

1.5.2 Tanım: $F(X)$ kümesi, üzerinde tanımlanan (1.5)'deki işleme göre bir grup oluşturur. Bu gruba X kümesi üzerindeki ***serbest*** *(free)* ***grup*** denir. Ayrıca

$$X_0 = \{[x] : x \in X\}$$

kümesi, $F(X)$ serbest grubu için bir üreteç kümesidir. Burada X_0 kümesinin eleman sayısının X kümesinin eleman sayısı ile aynı olduğu açıkça görülmektedir.

X kümesi üzerindeki herhangi bir kelime, $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$ $(x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1)$ şeklindeki ters harf çiftini içermiyorsa, bu kelimeye ***indirgenmiş kelime*** denir. Ayrıca yine X kümesi üzerindeki (1.4)'deki gibi bir kelime için, $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye ***devirsel indirgenmiş kelime*** denir.

1.5.3 Teorem [12] (Evrensel Dönüşüm Özelliği): G herhangi bir grup ve $\phi_0 : X_0 \to G$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde tanımlanan bu ϕ_0 fonksiyonu,

$$\phi : F(X) \to G$$

şeklinde tek bir grup homomorfizmasına genişletilebilir.

Bu teoremin ispatı, yarıgruplar için verilen 1.2.5 Teoremin ispatına benzer şekilde yapılır.

Verilen hazırlık tanımlarının ardından bir grubun sunuşu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

1.5.4 Tanım (Grup Sunuşu): X bir küme (***üreteç sembollerinin kümesi***) ve R de X kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme (***bağıntı kelimelerinin kümesi***) olsun. Bu durumda

$$\wp = \langle X ; R \rangle$$

ikilisine bir ***grup sunuşu*** denir. Burada X kümesi sonlu ise $\wp$ sunuşunun temsil ettiği gruba ***sonlu üreteçlidir***, X ve R kümelerinin her ikisi birden sonlu ise $\wp$ sunuşunun temsil ettiği gruba ***sonlu sunuşludur*** denir.

X kümesi üzerindeki kelimeler için *indirgeme* ((**♪i**)) ve *ekleme* ((**♪ii**)) işlemlerinden başka aşağıdaki işlemler kullanılarak, $\wp$ sunuşunun bir grup tanımladığı görülür. Bunun için, X kümesi üzerinde bir w kelimesi alalım.

(♪iii) w kelimesi $r^{\varepsilon}(r \in R, \varepsilon = \pm 1)$ şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelime silinir.

(♪iv) w kelimesinde herhangi bir yere $r^{\varepsilon}(r \in R, \varepsilon = \pm 1)$ alt kelimesi eklenir.

X kümesi üzerinde iki kelime w_1 ve w_2 olsun. Eğer w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu sayıda **(♪i)**, **(♪ii)**, **(♪iii)**ve **(♪iv)** işlemleri ile ulaşılabiliyorsa w_1 ve w_2 kelimelerine $\wp$ sunuşuna bağlı olarak ***denk kelimeler*** denir ve bu denklik $w_1 \approx_{\wp} w_2$ ile gösterilir. Buradaki $\approx_{\wp}$ bağıntısı X üzerindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. w kelimesini içeren denklik sınıfı $[w]_{\wp}$ ile gösterilirse bu denklik sınıfı üzerindeki çarpma işlemi

$$[w_1]_{\wp}[w_2]_{\wp} = [w_1 w_2]_{\wp}$$

şeklinde tanımlanır. Tanımlanan bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu çarpma işlemi altında, tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup oluşturur. Bu grup $G(\wp)$ ile gösterilir ve birimi $[1]_{\wp}$ şeklindedir.

Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu $\wp$ ile ***sunuluyor*** (ya da $\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup G dir) denir. Ayrıca $\{[r] : r \in R\}$ kümesinin ***normal kapanışı*** (G nin $\{[r] : r \in R\}$ kümesini içeren en küçük normal alt grubu) N olarak ifade edilirse şu teorem elde edilir.

1.5.5 Teorem: $G(\wp) \cong F(X)/N$

dir.

İspat: $\wp$ sunuşunun temsil ettiği $G(\wp)$ grubu ve X kümesi için,

$$\begin{aligned} \phi_0 &: X \to G(\wp) \\ & x \mapsto [x]_\wp \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. 1.5.3 Teoremden bu fonksiyonun genişlemesi olan

$$\begin{aligned} \phi &: F(X) \to G(\wp) \\ & [w] \mapsto [w]_\wp \end{aligned}$$

biçiminde tek bir homomorfizma vardır ve $\phi|_X = \phi_0$ (ϕ nin X kümesi üzerindeki kısıtlanışı) dır. Kolayca görülebileceği gibi ϕ fonksiyonu örtendir. Ayrıca $\ker\phi = N$ dir. Dolayısıyla gruplardaki 1. İzomorfizma Teoremi gereği

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

elde edilir. □

1.5.6 Örnek: X kümesi üzerindeki serbest grubun sunuşu $\wp = \langle X;\ \rangle$ şeklindedir. Burada $R = \varnothing$ dir. ◊

1.5.7 Örnek: $\wp = \langle x; x^n \rangle$ sunuşu n mertebeli devirli grubu temsil eder. ◊

Gruplarda olduğu gibi monoidlerde de sunuş oluşturulabilir. Ancak bilindiği gibi monoidler tersinir elemana sahip olmak zorunda değildir. Bu nedenle M gibi bir monoid için tanımlanan herhangi bir kelime, A harflerin kümesi olmak üzere,

$A^* = A^+ \cup \{1\}$ kümesinden alınır (1.1.8 Tanım). Bununla birlikte gruplarda olduğu gibi, monoidlerde A kümesinin elemanlarıyla A^{-1} kümesinin elemanları arasında $a \leftrightarrow a^{-1} (a \in A)$ şeklinde bir eşleme yoktur (1.5.1 Tanım). Bu nedenle gruplar için 1.5.1 Tanımda verilen **(♩i)** ve **(♩ii)** işlemleri monoidler için geçerli değildir. Şimdi bir *M* monoidi için sunuş tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz:

1.5.8 Tanım (Monoid Sunuşu): *A* boştan farklı bir küme (üreteç kümesi) ve $U \subseteq A^* \times A^*$ bağıntı kelimelerinin bir kümesi olsun. Bu durumda

$$\wp_M = [A;U]$$

ikilisine bir ***monoid sunuşu*** denir. Gruplarda olduğu gibi, eğer *A* kümesi sonlu ise $\wp_M$ sunuşunun temsil ettiği monoide ***sonlu üreteçlidir***, *A* ve *U* kümelerinin ikisi de sonlu ise $\wp_M$ sunuşunun temsil ettiği monoide ***sonlu sunuşludur*** denir.

1.5.9 Teorem: *M* bir monoid, *A* kümesi *M* için bir üreteç kümesi ve ρ, A^* kümesi üzerinde *U* yu içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda

$$M \cong A^*/\rho$$

dir.

Bu teoremin ispatı 1.5.5 Teoremin ispatına benzer şekilde yapılır.

Bu bölümde son olarak yarıgrup sunuşlarından bahsedilecektir. Monoid sunuşu oluşturulurken verilen tanımlar yarıgrup sunuşu oluşturulurken de geçerlidir. Ancak yarıgruplar, monoidlerden farklı olarak birim eleman içermediklerinden yarıgruplar için tanımlanan bir kelime, *A* harflerin kümesi olmak üzere, sadece A^+ kümesinden alınır (1.1.8 Tanım). O halde bir *S* yarıgrubu için sunuş tanımı şöyledir:

1.5.10 Tanım (Yarıgrup Sunuşu): *A* boştan farklı bir küme (*üreteç kümesi*) ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ kümesi, $u, v \in A^+$ için $(u,v) \in R$ (ki bu genellikle $u = v$ şeklinde gösterilir) elemanlarından oluşan bir *bağıntı kümesi* olsun. Bu durumda $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ ve $R = \{u_1 = v_1, ..., u_n = v_n\}$ için,

$$\wp_S = [A; R] = [a_1, ..., a_m \; ; u_1 = v_1, ..., u_n = v_n]$$

ikilisine bir ***yarıgrup sunuşu*** denir. Eğer *A* kümesi sonlu ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarıgruba ***sonlu üreteçlidir***, *A* ve *R* kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarıgruba ***sonlu sunuşludur*** denir.

Gruplar için verilen 1.5.5 Teorem ve monoidler için verilen 1.5.9 Teoremin bir benzeri yarıgruplar için verilmeden önce bu teoremin ispatında gerekli olacak bir tanım verilmelidir.

1.5.11 Tanım: $\wp_S = [A; R]$ bir yarıgrup sunuşu ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $\alpha, \beta \in A^+$ ve $(u,v) \in R$ (ya da $(v,u) \in R$) için $w_1 = \alpha u \beta$ ve $w_2 = \alpha v \beta$ oluyorsa, w_2 ***kelimesi*** w_1 ***kelimesinden elde ediliyor*** denir. Ayrıca w_1 ve w_2 kelimeleri arasında, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in A^+$ olmak üzere, $w_1 = \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n = w_2$ şeklinde sonlu bir dizi varsa (ki burada her bir γ_{i+1}, γ_i' den *R* bağıntısı ile elde edilir) w_1 ve w_2 kelimelerine ***denk kelimeler*** denir. Herhangi bir *w* kelimesinin $\wp_S$ sunuşuna bağlı olarak denklik sınıfı $[w]_{\wp_s}$ biçimindedir.

1.5.12 Teorem: *S* bir yarıgrup, *A* kümesi *S* için bir üreteç kümesi ve ρ, A^+ kümesi üzerinde *R* yi içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda

$$S \cong A^+ / \rho$$

dir.

İspat: $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği S yarıgrubu ve A üreteç kümesi üzerinde,

$$\begin{aligned} \phi_0 &: A \to S \\ &x \mapsto [x]_{\wp_S} \quad (x \in A) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. 1.2.5 Teorem gereği bu fonksiyon,

$$\begin{aligned} \phi &: A^+ \to S \\ &[w] \mapsto [w]_{\wp_S} \end{aligned}$$

şeklindeki tek bir örten homomorfizmaya genişletilebilir. Ayrıca $\ker\phi$ kümesi R yi içeren en küçük kongrüans bağıntısı olduğundan, $\ker\phi = \rho$ dur. O halde, 1.4.3 Teorem gereğince,

$$S \cong A^+ / \rho$$

elde edilir. □

Yarıgrup sunuşları ile ilgili olarak aşağıdaki örnekler incelenebilir.

1.5.13 Örnek: A kümesi üzerindeki serbest yarıgrup olan A^+ yarıgubunun sunuşu $[A;\varnothing]$ şeklindedir. Burada, 1.5.6 Örnekte olduğu gibi, $R = \varnothing$ dir. Ayrıca A^+ üzerinde R boş bağıntısını içeren en küçük bağıntı olan ρ, Δ_A ile gösterilir ve 1.5.12 Teorem den $A^+ / \Delta_A \cong A^+$ dir. ◊

1.5.14 Örnek: Aşikâr yarıgrup olan $\{a\}$ nın sunuşu $[a \,;\, a^2 = a]$ şeklindedir. Daha genel olarak m-1 mertebeli ***devirli*** (*monogenic*) bir yarıgrubun sunuşu $[a \,;\, a^m = a]$ şeklindedir. Ayrıca $[a \,;\, a^{m+r} = a^m]$ sunuşu $m + r - 1$ mertebeli sonlu devirli yarıgrubu temsil eder. ◊

1.5.14 Örnekte kısaca verilen devirli yarıgruplar, 3. Bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir.

1.5.15 Örnek: S yarıgrubu $\left[a_1, a_2, ..., a_n \text{ ; } a_i^2 = a_i,\ a_i a_j = a_j a_i\ (1 \le i,\ j \le n)\right]$ sunuşu ile tanımlansın. S nin her bir elemanı a_i nin kuvveti şeklindedir. Gerçekten, herhangi çarpım şeklindeki bir eleman, $a_i a_j = a_j a_i$ bağıntısı kullanılarak, $a_1^{i_1} a_2^{i_2} ... a_n^{i_n}$ $(i_j \ge 0,\ 1 \le j \le n)$ biçiminde yazılabilir ve burada i_j lerin hepsi birden 0 değildir. Ayrıca $a_i^2 = a_i$ bağıntısını kullanarak bu çarpımdaki i_j kuvvetlerini $i_j = 0,1$ sayılarına indirgeyebiliriz. Böylece S en çok $2^n - 1$ elemanlı bir yarıgrup olur. ◊

1.5.16 Örnek: S yarıgrubu $\left[a, b \text{ ; } a^4 = a,\ b^3 = b,\ ba = ab\right]$ sunuşu ile tanımlansın. $ab = ba$ bağıntısı kullanılarak S nin her bir elemanı $a^i b^j$ $(i, j \ge 1)$ biçiminde yazılabilir. Ayrıca $a^4 = a$ ve $b^3 = b$ bağıntılarını kullanarak i ve j sayılarını $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 2$ olarak indirgeyebiliriz. Böylece S, en çok 11 elemanlı bir yarıgrup olur. ◊

Buraya kadar grup, monoid ve yarıgruplar için sunuş tanımlarından ve aralarındaki farklılıklardan bahsedildi. Bu üç cebirsel yapının sunuşları arasında birinden diğerine geçiş yapılabilir. Bu durum aşağıdaki gibi özetlenebilir.

• Her yarıgrup sunuşu bir monoid sunuşu haline getirilebilir. Örneğin $[A; R]$ sunuşu S yarıgrubunu temsil etsin. Bu yarıgruba birim eklenirse $[A; R]$ sunuşunun temsil ettiği bir monoid elde edilir.

• Eğer S yarıgrubu $e \in A^+$ ile temsil edilen bir birim eleman içeriyorsa bu durumda $[A; R, e = 1]$ sunuşu S yarıgrubu için bir monoid sunuşudur.

- Şimdi de $[B;Q]$ sunuşu M monoidini temsil etsin. Bu durumda $[B,e\ ;\ Q',\ e^2=e\ ,\ eb=be=b\ (b\in B)]$ sunuşu M monoidi için bir yarıgrup sunuşudur (Burada Q' bağıntı kümesi, Q daki $w=1$ şeklindeki her bir bağıntının $w=e$ ile yer değiştirilmesinden elde edilen kümedir).

- Ayrıca $\langle A;R\rangle$ sunuşunun temsil ettiği grup G ise $\langle A,A^{-1}\ ;\ R\ ,\ aa^{-1}=a^{-1}a=1\ (a\in A)\rangle$ sunuşu G grubu için bir monoid sunuşudur (Burada $A^{-1}=\{a^{-1}:a\in A\}$ kümesi A dan farklı olan ancak A nın elemanları ile bire-bir eşlenebilen yeni bir kümedir).

2. YARIGRUPLARIN SINIFLANDIRILMASI

Tezimizin temasını *yarıgruplar* oluşturduğundan, yarıgrupları daha detaylı incelemeye yönelmemiz gerekir. Bundan dolayı 2. ve 3. Bölümlerde, daha önceden bahsettiğimiz gibi, yarıgruplar belli bir takım özelliklerine göre detaylandırılıp, çalışılacaktır. Bu tezin ülkemizde son 20 yıldır çalışılan bu konuların irdelenip - incelenmesi ve literatüre katılması anlamındaki önemini, bu son iki bölüm gösterecektir.

Dolayısıyla 2. Bölümde, genel anlamda, yarıgrupların sağladığı birtakım özelliklerine göre farklı kategorilere ayrılmasından bahsedilecektir. Bu kategorilere ayırmanın içinde önemli bir yer tutan *Green Bağıntıları* tanıtılıp, özel bir örnek üzerinde bu bağıntıların önemi vurgulanacaktır. Bunun için, bu bağıntıların içinde bir köşe taşı olan *Green Teoremi* verilecektir.

Yukarıda bahsettiğimiz ve bu bölümde incelenecek olan kavramların bir kısmı ve burada belirtilmeyecek detayları için, [2, 8, 10, 11, 15, 17, 18] gibi kaynaklara yönlendirme yapabiliriz.

2.1 İdealler

İdeal kavramı, halka teoride özel bir alt halka çeşidi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bilindiği gibi, halka yapısı oluşturulurken toplama ve çarpma işlemleri şeklinde iki farklı ikili işlem kullanılmaktadır. Bunlardan toplama işlemi kullanılarak bir halkanın idealinin kosetleri (kalan sınıfları) oluşturulabilir. Ayrıca bir halka yapısı toplama işlemine göre abelyan bir grup olduğundan, bu işlem ile kosetler arasında da yeni bir toplama işlemi tanımlanıp bir bölüm grubu inşa edilir. Bu düşünceden hareketle, yine halka üzerindeki çarpma işleminden yararlanılarak, kosetler arasında ikinci bir işlem olarak çarpma işlemi tanımlanabileceğinden bir bölüm halkası meydana getirilmiş olur. Bölüm halkaları yardımıyla halka teoride önemli olan bazı teoremler ve özel halka çeşitleri elde edilmiştir.

Yukarıda halkalar için hatırlatılan bu konular, yarıgruplara ilgili alanlarda belirli birtakım değişiklikler yapılarak karşımıza çıkacaktır. Bunun için bölüm halkalarının elemanları olan sağ ve sol kalan sınıflarına benzer yapılar yarıgrupların içinde aranmak zorundadır. Bu bölümün ileriki aşamalarında görülebileceği üzere, birtakım *sınıflar* tanımlanarak çalışılan yarıgruptan yeni özellikler elde edilebilecektir. Adı geçen bu sınıfları belirlemek için, bir yarıgrup yardımıyla tanımlanacak *ideal* kavramının varlığı incelenecektir. Bundan dolayı bu alt bölümde ilk olarak bir yarıgrubun ideali ile ilgili temel tanım ve teoremler verildikten sonra idealler üzerinde tanımlanacak olan birtakım yeni sınıflar (ki bunlar ideallerin uygulaması olarak düşünülebilir) tanıtılacaktır.

2.1.1 Tanım: S bir yarıgrup ve S nin boştan farklı bir alt kümesi I olsun. Eğer her $s \in S$ ve $i \in I$ için,

- $si \in I$ oluyorsa, I ya S nin ***sol ideali*** ve
- $is \in I$ oluyorsa, I ya S nin ***sağ ideali***

denir. Bununla birlikte I kümesi, S nin *hem sağ hem de sol* ideali ise bu durumda I ya S nin bir ***ideali*** denir. Örneğin sıfır elemanını barındıran bir yarıgrup için $\{0\}$ kümesi bir idealdir.

2.1.2 Örnek: 1.1.5 Tanımda verilen T_n tam transformasyon yarıgrubunu göz önüne alalım. T_n için, her

$$K(r,n) = \{\alpha \in T_n : rank\alpha \leq r,\ 1 \leq r \leq n\}$$

kümesi bir idealdir. (Burada $rank\alpha$ ' nın $|\mathrm{im}\alpha|$ olduğu 1.1.6 Not ile bilinmektedir). Bu ideallik durumu,

$$rank(\alpha\beta) \leq \min(rank\alpha, rank\beta)$$

eşitsizliğinin bir sonucudur. Bunu $\alpha \in K(r,n)$ ve $\beta \in T_n$ alarak,

$$rank(\alpha\beta) \leq \min(rank\alpha, rank\beta) \leq rank\alpha \leq r \Rightarrow \alpha\beta \in K(r,n)$$

ve

$$rank(\beta\alpha) \leq \min(rank\beta, rank\alpha) \leq rank\alpha \leq r \Rightarrow \beta\alpha \in K(r,n)$$

olmasından dolayı rahatlıkla görebiliriz. ◊

2.1.3 Teorem: S bir yarıgrup olmak üzere, S nin boştan farklı bir alt kümesi X olsun. Bu durumda

$$S^1X = \{sx : s \in S^1 , x \in X\}$$

kümesi S yarıgrubunun X kümesini içeren ***en küçük sol ideali*** olup, benzer şekilde

$$XS^1 = \{xs : x \in X , s \in S\}$$

kümesi S yarıgrubunun X kümesini içeren ***en küçük sağ ideali*** ve

$$S^1XS^1 = \{sxt : s,t \in S , x \in X\}$$

kümesi S yarıgrubunun X kümesini içeren ***en küçük hem sağ hem de sol ideali*** dir.

İspat: Her $sx \in S^1X$ ve $t \in S$ için,

$$t(sx) = (ts)x \in S^1X$$

olduğundan, S^1X kümesi S yarıgrubunun bir sol idealidir. Bu idealin X kümesini içerdiği, $S^1X = \{sx : s \in S^1 , x \in X\}$ tanımından açıktır. S yarıgrubunun X kümesini içeren başka bir sol ideali I olmak üzere, herhangi bir $s \in S^1$ ve $x \in X$ için, $sx \in I$ olacaktır. Böylece $S^1X \subseteq I$ elde edilir.

Diğer ifadelerin ispatları da benzer şekilde yapılır. □

1.5.13 Örnekte adı geçen Δ_S bağıntısını tekrar göz önüne alalım. Bu bağıntı yardımı ile aşağıdaki denklik bağıntısını elde ederiz.

2.1.4 Tanım [18]: S herhangi bir yarıgrup olmak üzere, S nin bir alt kümesi I olsun.

$$\rho_I = (I \times I) \cup \Delta_S = \{(x, y) : x, y \in I \text{ veya } x = y\} \tag{2.1}$$

bağıntısına I kümesine bağlı ***Rees Denklik Bağıntısı*** denir.

2.1.5 Teorem: S bir yarıgrup ve S nin bir alt kümesi I olsun. Eğer I bir sol (sırasıyla sağ, hem sağ hem sol) ideal ise bu takdirde (2.1)'de verilen ρ_I Rees denklik bağıntısı bir sol (sırasıyla sağ, hem sağ hem sol) kongrüans olur.

İspat: $(x, y) \in \rho_I$ ve $s \in S$ alalım. Eğer $x = y$ ise $sx = sy$ elde edilir ve $(sx, sy) \in \rho_I$ bulunur. Aksi takdirde $x, y \in I$ olacağı açıktır. Bu durumda I sol ideal olduğundan, 2.1.1 Tanım gereği, $sx, sy \in I$ dir ki böylece, yine $(sx, sy) \in \rho_I$ elde edilir. O halde, 1.4.1 Tanım gereği, ρ_I bir sol kongrüanstır.

ρ_I bağıntısının sağ ve bir adım sonrası hem sağ hem sol kongrüans bağıntısı olduğu da benzer şekilde ispatlanır. □

1.4 Alt Bölümden hatırlanacağı gibi, bir yarıgrup üzerindeki kongrüans yardımı ile bölüm yarıgrubu tanımlanabilmektedir. O halde (2.1)'de verilen ρ_I

kongrüans bağıntısı ile aşağıdaki bölüm yarıgrubu tanımlanabilir. Aşağıda verilen tanım, 1.5 Alt Bölümde verilen materyalin kökenini oluşturmaktadır.

2.1.6 Tanım: S bir yarıgrup olmak üzere, S nin bir ideali I ve ρ_I bağıntısı da (2.1)'de verilen Rees denklik bağıntısı olsun. Bu durumda S nin ρ_I ile oluşturduğu S/ρ_I bölüm yarıgrubuna S nin I ile oluşturduğu ***Rees Bölümü*** denir ve S/I ile gösterilir.

2.2 Green Denklik Sınıfları

2.1.4 Tanımda verilen Rees denklik bağıntısı kümelerinin elemanlarına dikkat edilirse, S yarıgrubunun bir I ideali üzerinde alınan elemanlarının ya ideale ait olması ya da bu elemanların eşitliğinden bahsedilmektedir. Ancak giriş bölümünde söz edildiği gibi yarıgrupları farklı kategorilere ayırabilmek için, herhangi bir S yarıgrubu üzerinde tanımlanan bir bağıntının S nin sağ, sol veya hem sağ hem de sol ideallerini üretmek için kullanılabildiğini belirtmeliyiz.

Burada verilecek olan bağıntılar ***Green Bağıntıları*** adını almaktadır. Green bağıntıları, yarıgrup teoride günümüzde halen çalışılmakta olan, birçok önemli problemin çözümünde kullanılmaktadır. Bu tür problemler ile ilgili ayrıntılar [7] den elde edilebilir. Şimdi sırası ile bu bağıntılardan ve teoremlerinden bahsedelim.

2.2.1 Tanım: S bir yarıgrup ve $x, y \in S$ olmak üzere S üzerindeki bir L bağıntısı

$$xLy \Leftrightarrow S^1x = S^1y \Leftrightarrow sx = y \text{ ve } ty = x \qquad (s,\, t \in S^1)$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde bağıntılı olan $x, y \in S$ elemanları S nin aynı sol idealini üretirler. Bu x ve y elemanlarına ***L-bağıntılıdır*** denir ve xLy veya $(x, y) \in L$ ile gösterilir. Benzer olarak $x, y \in S$ olmak üzere S üzerindeki bir R bağıntısı

$$xRy \Leftrightarrow xS^1 = yS^1 \Leftrightarrow xs = y \text{ ve } yt = x \quad (s,\, t \in S^1)$$

olarak tanımlandığında $x, y \in S$ elemanları S nin aynı sağ idealini üretirler. Bu x ve y elemanlarına ***R-bağıntılıdır*** denir ve xRy veya $(x, y) \in R$ ile gösterilir.

1.1.5 Tanımda verilen tam transformasyon yarıgrup T_n in elemanlarının L veya R bağıntılı olup olmadıkları, seçilen elemanların aşağıdaki teoremde belirtilen özelliklerine göre belirlenir. Dolayısıyla bu önemli sonuç;

2.2.2 Teorem: $\alpha, \beta \in T_n$ olmak üzere,

(i) $\alpha L \beta \Leftrightarrow \operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$

(ii) $\alpha R \beta \Leftrightarrow \ker\alpha = \ker\beta$

dir.

İspat: **(i)** Öncelikle $\alpha L \beta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda 2.2.1 Tanımdan $\gamma, \delta \in T_n$ için, $\alpha = \gamma\beta$ ve $\beta = \delta\alpha$ elde edilir. Buradan $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}(\gamma\beta) \subseteq \operatorname{im}\beta$ ve benzer şekilde $\operatorname{im}\beta = \operatorname{im}(\delta\alpha) \subseteq \operatorname{im}\alpha$ olduğundan,

$$\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta$$

eşitliği elde edilir.

Tersine $\operatorname{im}\alpha = \operatorname{im}\beta = I$ olduğunu varsayalım. Ayrıca her bir $i \in I$ için, $a_j, b_j \in \{1, 2, ..., n\}$ elemanları, $a_j\alpha = b_j\beta = i \quad (1 \le j \le n)$ olacak şekilde alınsın. Buna ek olarak $\mu, \nu \in T_n$ fonksiyonlarını da

$$x\mu = a_j \Leftrightarrow x\beta = i$$

$$x\nu = b_j \Leftrightarrow x\alpha = i$$

şeklinde tanımlayalım. Bu tanımlar ile

$$x\mu\alpha = a_j\alpha = i = x\beta$$

$$x\nu\beta = b_j\beta = i = x\alpha$$

elde edilir. Böylece $\mu\alpha = \beta$ ve $\nu\beta = \alpha$ olduğu görülür. O halde 2.2.1 Tanım gereği $\alpha L\beta$ dir. Böylece (i) nin ispatı tamamlanmış olur.

(ii) İlk olarak $\alpha R\beta$ olsun. 2.2.1 Tanımdan $\gamma, \delta \in T_n$ için, $\alpha = \beta\gamma$ ve $\beta = \alpha\delta$ elde edilir. Ayrıca $(x, y) \in \ker\alpha$ için $x\alpha = y\alpha$ dır. Böylece

$$x\beta = x\alpha\delta = y\alpha\delta = y\beta \Rightarrow (x, y) \in \ker\beta$$

olur, ki buradan $\ker\alpha \subseteq \ker\beta$ sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $\ker\beta \subseteq \ker\alpha$ olduğu da gösterilebilir. O halde

$$\ker\alpha = \ker\beta$$

elde edilir.

Tersine $\ker\alpha = \ker\beta = K$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda K nın denklik sınıflarının sayısı ile $\mathrm{im}\alpha$ kümesindeki elemanların sayıları birbirine eşit olur. Üstelik $\mathrm{im}\alpha$ nın bu sayısı, aslında, $\mathrm{im}\beta$'daki elemanların sayısı ile aynıdır. Şimdi bu sayının q olduğunu varsayalım. Ayrıca K nın her bir denklik sınıfından, özel olarak p_i $(i = 1, 2, ..., q)$ şeklindeki tekil elemanlarını göz önüne alalım. Buna ek olarak

$$\mathrm{im}\alpha = J = \{j_1, j_2, ..., j_q\} \quad \text{ve} \quad \mathrm{im}\beta = M = \{m_1, m_2, ..., m_q\}$$

şeklinde olsun. Böylece $j_i = p_i\alpha$ ve $m_i = p_i\beta$ olacak şekilde $j_i \in J$ ve $m_i \in M$ elemanları vardır. Şimdi $\mu, \nu \in T_n$ fonksiyonları,

$$j_i\mu = m_i \qquad (i=1,2,...,q)$$
$$m_i\nu = j_i \qquad (i=1,2,...,q)$$

şeklinde tanımlanırsa, $x \in \{1,2,...,n\}$ ve $(x, p_i) \in K$ olmak üzere,

$$x\alpha\mu = p_i\alpha\mu = j_i\mu = m_i = p_i\beta = x\beta$$

olur. Böylece $\alpha\mu = \beta$ olduğu rahatlıkla görülür.

Benzer şekilde $\beta\nu = \alpha$ olduğu da ispatlanabileceğinden sonuç olarak $\alpha R \beta$ elde edilir. □

2.2.3 Not: 2.2.1 Tanımda verilen *L* ve *R* bağıntılarının birer denklik bağıntısı oldukları açıktır. Bir $s \in S$ elemanının *L* bağıntısına bağlı olan denklik sınıfı ***L-sınıf*** olarak adlandırılır ve genellikle L_s veya s/L ile ifade edilir. Benzer şekilde *s* nin *R* bağıntısına bağlı olan denklik sınıfı ***R-sınıf***, notasyonel olarak R_s veya s/R ile gösterilir.

2.2.4 Teorem: 2.2.1 Tanımda verilen *L* bağıntısı bir sağ kongrüans ve *R* bağıntısı bir sol kongrüanstır.

İspat: 2.2.3 Not ile belirtilen her iki bağıntı da birer denklik bağıntısıdır. Şimdi $(x, y) \in L$ ve $z \in S$ alalım. Bu durumda *L* nin tanımından $y = sx$ ve $x = ty$ ($s,\ t \in S^1$) yazılabilir. Buradan $yz = s(xz)$ ve $xz = t(yz)$ olur. Böylece $(xz, yz) \in L$ elde edilir. Dolayısıyla, 1.4.1 Tanım gereği, *L* bağıntısı bir sağ kongrüanstır. *R* bağıntısının bir sol kongrüans olduğu da benzer şekilde ispatlanabilir. □

2.2.5 Not: Genel olarak *L* ve *R* bağıntıları iki yanlı kongrüans değildir.

Örnek: $X=\{1,2,3,4\}$ olmak üzere T_X tam transformasyon yarıgrubunu alalım. T_X içindeki iki eleman,

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&3&4\end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&4\end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. Görüldüğü gibi $\mathrm{im}\alpha=\mathrm{im}\beta$ dır. Dolayısıyla 2.2.2 Teorem gereği $\alpha L\beta$ olur. Diğer yandan, $\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\end{pmatrix}\in T_X$ için,

$$\gamma\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \gamma\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&3&3&3\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan bu iki fonksiyonun *L*-bağıntılı olmadığı sonucuna varılır. O halde *L* bağıntısı sol kongrüans değildir. ◊

2.2.6 Tanım: S bir yarıgrup ve $s,t\in S$ olsun. S üzerinde $H=L\cap R$ şeklinde yeni bir bağıntı tanımlayalım. Bu takdirde aynı anda hem *L*-bağıntılı hem de $R-$bağıntılı olan *s* ve *t* elemanlarına ***H-bağıntılıdır*** denir.

L ve *R* bağıntıları gibi, *H* bağıntısının da bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir. Bir $s\in S$ elemanının *H* bağıntısına bağlı denklik sınıfı ***H-sınıf*** olarak adlandırılır ve H_s ile gösterilir. Bu denklik sınıfı matematiksel olarak,

$$H_s=\{t : t\in L_s\cap R_s\}$$

şeklinde ifade edilir. Genel olarak *H* bağıntısı, 2.2.5 Not gereği, sol ve sağ kongrüans değildir.

2.2.7 Tanım: *S* bir yarıgrup olmak üzere, *S* üzerinde *L* ve *R* bağıntılarının $D=L\circ R$ şeklinde bileşkesi olarak oluşturulan bağıntıya ***D bağıntısı*** denir. Burada

$x,\ y \in S$ için, $(x, y) \in D$ oluyorsa x ve y elemanlarına ***D-bağıntılıdır*** denir. Açıkça bu D bağıntısı,

$$D = \{(x, y) : \exists z \in S\,;\ (x, z) \in L \wedge (z, y) \in R\} \tag{2.2}$$

şeklindedir.

D bağıntısı da tanımlanan diğer bağıntılar (L, R ve H bağıntıları) gibi bir denklik bağıntısıdır. Ancak D nin sadece tanımından yararlanarak denklik bağıntısı olduğunu göstermek diğerleri gibi kolay değildir. Bunu gösterebilmek için aşağıdaki teoreme gerek vardır.

2.2.8 Önerme: L ve R bağıntıları değişmelidir, diğer bir deyişle $L \circ R = R \circ L$ dir.

İspat: $(x, y) \in L \circ R$ alalım. Bu durumda (2.2)'deki tanımdan $(x, z) \in L$ ve $(z, y) \in R$ olacak biçimde bir $z \in S$ vardır. O halde

$$z = s_1 x, \quad x = s_2 z, \quad y = z t_1, \quad z = y t_2 \qquad (s_1, s_2, t_1, t_2 \in S^1)$$

yazılabilir. S nin $u = x t_1$ şeklinde yeni bir elemanı tanımlanırsa

$$u t_2 = x t_1 t_2 = s_2 z t_1 t_2 = s_2 y t_2 = s_2 z = x\,,$$
$$s_1 u = s_1 x t_1 = z t_1 = y\,,$$
$$s_2 y = s_2 z t_1 = x t_1 = u$$

elde edilir. Buradan $(x, u) \in R$, $(u, y) \in L$ olduğu ve sonuç olarak da (2.2)'deki tanım yardımıyla $(x, y) \in R \circ L$ olduğu görülür. O halde

$$L \circ R \subseteq R \circ L$$

dir.

Ters kapsamanın varlığı da benzer şekilde ispatlanabileceğinden R ve L bağıntıları değişmelidir. □

2.2.8 Önerme yardımı ile ispatını yapabileceğimiz teorem aşağıdaki gibidir.

2.2.9 Teorem: (2.2) ile verilen D bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: L ve R bağıntılarının her ikisi de birer denklik bağıntısı olduğundan bunlar için yansıyanlık özelliği sağlanıp, dolayısıyla D bağıntısının yansıyan olacağı açıktır. Şimdi

$$\begin{aligned}(x,y)\in D &\Rightarrow (\exists z\in S)((x,z)\in L \text{ ve } (z,y)\in R)\\ &\Rightarrow (\exists z\in S)((z,x)\in L \text{ ve } (y,z)\in R)\\ &\Rightarrow (y,x)\in R\circ L = R\circ L = D\end{aligned}$$

olduğundan, D bağıntısı simetri özelliğini sağlar. Son olarak

$$\begin{aligned}(x,y),(y,z)\in D &\Rightarrow (\exists u,v\in S)\ ((x,u)\in L \text{ ve } (u,y)\in R \text{ ve } (y,v)\in L \text{ ve } (v,z)\in R)\\ &\Rightarrow (\exists u,v\in S)\ ((x,u)\in L \text{ ve } (u,v)\in R\circ L \text{ ve } (v,z)\in R)\\ &\Rightarrow (\exists u,v\in S)\ ((x,u)\in L \text{ ve } (u,v)\in L\circ R \text{ ve } (v,z)\in R)\\ &\Rightarrow (\exists u,v,w\in S)\ ((x,u)\in L \text{ ve } (u,w)\in L \text{ ve } (w,v)\in R \text{ ve } (v,z)\in R)\\ &\Rightarrow (\exists w\in S)\ ((x,w)\in L \text{ ve } (w,z)\in R)\\ &\Rightarrow (x,z)\in L\circ R = D\end{aligned}$$

olduğundan, D bağıntısı geçişmelidir.

O halde D bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. □

D bağıntısı için son olarak 2.2.2 Teoreme benzer bir teorem ifade edilebilir. Bu teorem, T_n tam transformasyon yarıgrubunun elemanlarının hangi durumda D-bağıntılı olduğunu göstermektedir.

2.2.10 Teorem: $\alpha,\ \beta \in T_n$ olmak üzere, $\alpha D \beta$ olması için gerekli ve yeterli koşul $rank\alpha = rank\beta$ olmasıdır.

İspat: Öncelikle $\alpha D \beta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda 2.2.7 Tanımdan $\alpha L \gamma$ ve $\gamma R \beta$ olacak biçimde bir $\gamma \in T_n$ fonksiyonu vardır. 2.2.2 Teorem gereği $\mathrm{im}\alpha = \mathrm{im}\gamma$ ve $\ker\gamma = \ker\beta$ olduğu söylenebilir. Böylece $rank\alpha = rank\gamma = rank\beta$ sonucuna varılır.

Tersine $rank\alpha = rank\beta$ olsun. Bu durumda α ve β fonksiyonlarının görüntü kümelerindeki eleman sayıları eşittir ve bu iki fonksiyonun çekirdekleri de aynı sayıda denklik sınıfına sahiptir. Eğer $\ker\beta$ nın denklik sınıfları $K_1, ..., K_r$ ve $\mathrm{im}\alpha = \{i_1, i_2, ..., i_r\}$ arasında

$$x\delta = i_j \qquad (x \in K_j)$$

şeklinde bir δ fonksiyonu tanımlanırsa, $\mathrm{im}\delta = \mathrm{im}\alpha$ olduğu görülür. O halde $\delta L \alpha$ ve $\ker\delta = \ker\beta$ olduğundan $\delta R \beta$ elde edilir. Sonuç olarak

$$(\alpha, \beta) \in L \circ R = D$$

olacaktır ki bu ise aranılan sonuçtur. □

Bu bölümde son olarak *Green bağıntılarının* sonuncusu olan *iki-yanlı bağıntıdan* bahsedelim.

2.2.11 Tanım: S bir yarıgrup ve $x, y \in S$ olsun. x ve y elemanları S nin aynı iki-yanlı idealini üretiyorlarsa, bu elemanlara ***J-bağıntılıdır*** denir. Matematiksel olarak

$$xJy \Leftrightarrow S^1 x S^1 = S^1 y S^1$$

bize J-bağıntılılığı verecektir.

Verilen tüm Green bağıntıları arasında en genel anlamıyla

$$H \subseteq L,\ H \subseteq R,\ L \subseteq D,\ R \subseteq D,\ D \subseteq J \tag{2.3}$$

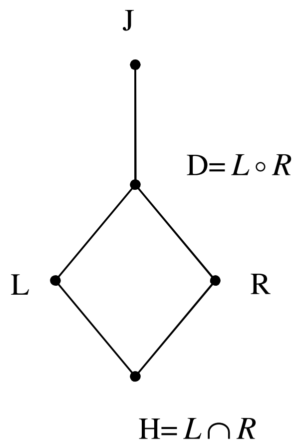
şeklinde bir sıralama vardır. Green bağıntıları özel olarak *bir G grubu üzerinde* oluşturulursa

$$H = L = R = D = J = G \times G \tag{2.4}$$

şeklinde bir sıralama elde edilir. Bunlara ek olarak Green bağıntılarının oluşturulduğu *yarıgrup değişmeli* ise ilgili sıralama

$$H = L = R = D = J \tag{2.5}$$

halini alır. Not etmeliyiz ki Green bağıntıları arasındaki (2.3) sıralaması şekildeki gibi sembolleştirilebilir [18].



Green bağıntıları arasında verilen yukarıdaki bu sıralamalardan başka, sırasıyla, son iki bağıntı olarak 2.2.7 Tanım ve 2.2.11 Tanım ile verilen D ve J bağıntıları arasında diğerlerinden daha özel bir karşılaştırma yapılabilir. Aşağıda bu karşılaştırmaya ön koşul oluşturacak bir tanım verilmektedir.

2.2.12 Tanım: Bir S yarıgrubunun tek bir elemanla üretilmiş her alt yarıgrubu sonlu ise (yani, her $a \in S$ için, $a^{m+r} = a^m$ olacak şekilde $m, r \in \mathbb{Z}^+$ sayıları var ise) S ye ***periyodik yarıgrup*** denir.

Yukarıdaki tanımdan kolayca anlaşılabileceği gibi *her sonlu yarıgrup periyodik* olur.

2.2.13 Teorem: Eğer S yarıgrubu periyodik ise $J = D$ dir.

İspat: (2.3)'deki sıralamada $D \subseteq J$ olduğu belirtilmişti. O halde eşitliğin ispatı için ters kapsamanın varlığını göstermemiz yeterlidir. Bunun için $(x, y) \in J$ alalım. Bu durumda, 2.2.11 Tanımdan, $x = ayb$ ve $y = cxd$ $(a, b, c, d \in S^1)$ yazılabilir. Buradan

$$x = (ac)x(db) = a(cxd)b = ayb = x$$

$$x = (ac)^2 x(db)^2 = (ac)(ac)x(db)(db) = (ac)x(db) = x$$

$$\ldots$$

$$\ldots = (ac)^i x(db)^i = x = \ldots$$

elde edilir. S periyodik olduğundan $(ac)^i$ idempotent eleman olacak şekilde $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayısı vardır. O halde

$$x = (ac)^i x(db)^i = (ac)^i (ac)^i x(db)^i = (ac)^i x = (ac)^{i-1} az \qquad (z = cx)$$

olur, ki bu durumda xLz olduğu sonucuna varılır. Ayrıca

$$y = (ca)y(bd) = (ca)^2 y(bd)^2 = \ldots = (ca)^j y(bd)^j = \ldots$$

dir. Benzer şekilde, $(bd)^j$ idempotent olacak şekilde $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayısı var olduğundan

$$z = cx = c(ac)^{j+1} x(db)^{j+1} = (ca)^{j+1} cxd(bd)^j b = (ca)^{j+1} y(bd)^j b$$

$$= (ca)^{j+1} y(bd)^{2j} b = (ca)^{j+1} y(bd)^{j+1}(bd)^{j-1} b = y(bd)^{j-1} b$$

elde edilir. Son olarak $y = cxd = zd$ olduğundan zRy dir ve dolayısıyla xDy sonucuna ulaşılır. Böylece $J \subseteq D$ kapsaması da elde edildiğinden, $J = D$ eşitliğinin varlığı ispatlanmış olacaktır. □

Şimdi de kısaca D-sınıf yapısından bahsedip ardından bu bölümün ana teoremi olan *Green Teoremi*' ni verelim.

$D = L \circ R = R \circ L$ bağıntısı L ve R yi içeren bir denklik bağıntısıdır. Bu nedenle alınacak bir D-sınıf aslında L-sınıf ile R-sınıfın bileşkesinden oluşur. Ayrıca $a, b \in S$ için, $L = L_a$ eşitliği, D de herhangi bir L-sınıf ve $R = R_b$ eşitliği, D de herhangi bir R-sınıf ise bu sınıfların arakesiti olan $L \cap R$ (ki bu bir H-sınıftır) boştan farklıdır. D nin tanımından (2.2.7 Tanım) anlaşılabileceği gibi $(a,b) \in D$ olması durumunda $(a,c) \in L$ ve $(c,b) \in R$ olacak şekilde bir $c \in S$ vardır ki bu eleman aslında $L \cap R$ de bulunur. Yapılan bu açıklamalar kullanılarak çok popüler olan aşağıdaki teorem elde edilir.

2.2.14 Teorem [10, 11, 18] (*Green Teoremi*):

(i) S bir yarıgrup olmak üzere, $a, b \in S$ için, $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde R-bağıntılı iki eleman alalım. Ayrıca

$$\rho_s : L_a \to L_b, \quad x\rho_s = xs$$

ve

$$\rho_t : L_b \to L_a, \quad x\rho_t = xt$$

şeklinde iki fonksiyonun varlığını kabul edelim. Bu durumda ρ_s ve ρ_t fonksiyonları, $H = L \cap R$ sınıfından H sınıfına birbirinin tersi olan bire-bir ve örten fonksiyonlardır.

(ii) S bir yarıgrup olmak üzere, $a, b \in S$ için, $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde L-bağıntılı iki eleman alalım. Ayrıca

$$\lambda_s : R_a \to R_b, \quad x\lambda_s = sx$$

ve

$$\lambda_t : R_b \to R_a, \quad x\lambda_t = tx$$

şeklinde iki fonksiyonun varlığını kabul edelim. Bu durumda λ_s ve λ_t fonksiyonları, $H = L \cap R$ sınıfından H sınıfına birbirinin tersi olan bire-bir ve örten fonksiyonlardır.

İspat: **(i)** Öncelikle $\rho_s : L_a \to L_b$ fonksiyonunun varlığını gösterelim. Bunun için, bir $x \in L_a$ alalım. Bu durumda $(x, a) \in L$ olur. 2.2.4 Teorem gereği $(xs, as) \in L$ olduğu açıktır ve böylece $x\rho_s \in L_b$ olur. Benzer şekilde $\rho_t : L_b \to L_a$ fonksiyonunun varlığı da gösterilebilir. Herhangi bir $x \in L_a$ alınıp, $x = ua$ yazılarak

$$x\rho_s\rho_t = xst = uast = ubt = ua = x$$

elde edilir. Benzer şekilde her $x \in L_b$ için $x\rho_t\rho_s = x$ bulunur. Böylece ρ_s ve ρ_t fonksiyonlarının tersinir oldukları sonucuna varılır. Bir fonksiyonun tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun, alınan bu fonksiyonun bire-bir ve örten olması zorunluluğu nedeniyle, ρ_s ve ρ_t fonksiyonları bire-bir ve örtendir. Ayrıca $xst = x$ olduğundan, *R*-bağıntılılık tanımı gereği, $xR(x\rho_s)$ dir. Eğer $x, y \in L_a$ elemanları *H*-bağıntılı ise $(x\rho_s)\,R\,x\,R\,y\,R\,(y\rho_s)$ olur. $x\rho_s$ ve $y\rho_s$ elemanları *L*-bağıntılı olduğundan (her ikisi de L_b'nin içindedir) $(x\rho_s)H(y\rho_s)$ elde edilir.

(ii)' nin ispatı (i)' nin benzeridir. □

Aşağıdaki teorem *H*-sınıfları ve alt gruplar ile ilgili önemli bir bağlantıyı göstermektedir.

2.2.15 Teorem: H ile bir *S* yarıgrubunun *H*-sınıfını gösterelim. Bu durumda H sınıfı ya bir gruptur veya $H^2 \cap H = \varnothing$ dir.

İspat: İlk olarak $H^2 \cap H \neq \varnothing$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $ab \in H$ olacak şekilde $a, b \in H$ vardır. Ayrıca herhangi bir $h \in H$ alalım. 2.2.14 Teoremin (i). maddesinden

$$\rho_b : x \mapsto xb$$

fonksiyonu $H_a = H$ dan $H_{ab} = H$ üzerine bire-bir ve örtendir. 2.2.14 Teoremin (ii). maddesinden de

$$\lambda_h : x \mapsto hx$$

fonksiyonu $H_b = H$ dan $H_{hb} = H$ üzerine bire-bir ve örtendir. Buradan

$$hH = im\lambda_h = H \text{ ve } Hh = H$$

elde edilir. O halde H bir gruptur. □

Yukarıdaki teorem ile herhangi bir yarıgruptan, tanımlanan özel bir sınıf yardımıyla hangi şartlarda grup elde edilebileceği gösterilmiştir. Green bağıntılarının diğer birçok öneminin yanında böyle bir uygulamasının olması kayda değerdir.

2.3 Regülerlik

Bir önceki alt bölümün en son paragrafında kısmen değinildiği gibi, yarıgruplar ile gruplar arasındaki ilişki (bağlantı) bu konuda çalışan birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bilindiği üzere her grup bir yarıgrup iken bu ifadenin ters kısmı için bir takım özel şartlar yerine getirilmek zorundadır. Bu özel şartlar (ki bunları özellikler olarak da düşünebiliriz) her yarıgupta sağlanmak zorunda olmayan bir takım teknik matematiksel ifadelerdir. Tezimizin belli kısımlarında kısmen bunlardan bahsedilmektedir. Bu bölümün başlığını oluşturan "*regülerlik*" konusu da yukarıda söz ettiğimiz gibi her yarıgrupta olmak zorunda olmayan ancak bulunduğu yarıgruplara karakteristik birçok özellik katan ve de yarıgruplar ile gruplar arasında köprü kurmada önemli bir yere sahip olan bir özel şarttır.

Bu bölümde, genel olarak, bir yarıgrubun regüler olmasından ve Green bağıntıları ile regülerlik arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Ayrıca regüler eleman tanımlanıp, bu eleman yardımı ile herhangi bir yarıgrupta *tersinir eleman* oluşturulacaktır. Son olarak da, regülerliği çalışılması anlamında oldukça popüler olan, tam transformasyon yarıgruplarının Green sınıfları ile ilgili [18] de yer alan bir örnek verilecektir.

2.3.1 Tanım: S bir yarıgrup olmak üzere $x \in S$ için, $xyx = x$ olacak şekilde en az bir $y \in S$ varsa, bu x elemanına S nin ***regüler elemanı*** denir. Bununla birlikte her elemanı regüler olan bir S yarıgrubuna ise ***regüler yarıgrup*** adı verilir.

2.3.2 Örnek: X boştan farklı bir küme olmak üzere, $\alpha \in T_X$ alalım. Her bir $x \in \operatorname{im}\alpha$ için, $t_x\alpha = x$ olacak şekilde $t_x \in X$ seçelim. Ayrıca herhangi bir $x_0 \in X$ için,

$$x\beta = \begin{cases} t_x & , \quad x \in \operatorname{im}\alpha \\ x_0 & , \quad x \notin \operatorname{im}\alpha \end{cases}$$

şeklinde bir $\beta \in T_X$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$x\alpha\beta\alpha = t_{x\alpha}\alpha = x\alpha$$

eşitliği ve dolayısıyla $\alpha\beta\alpha = \alpha$ eşitliği elde edilir. O halde α regülerdir. Burada $\alpha \in T_X$ rastgele seçildiğinden, T_X yarıgrubunun regüler olduğu sonucuna ulaşırız. ◊

2.3.1 Tanım ile verilen regüler eleman olma özelliği herhangi bir yarıgrubun bir D-sınıfının elemanları için de geçerlidir. Ayrıca herhangi bir D-sınıfta regülerlik değişmezdir. Açıkça belirtirsek bir yarıgrup içinde regüler olan bir elemanın D-bağıntılı olduğu eleman da regüler olur. Aşağıda bu durum ile ilgili bir teorem verilmektedir.

2.3.3. Teorem: Bir S yarıgrubundaki a elemanı regüler olsun. Eğer bir $b \in S$ için aDb ise bu durumda b elemanı da regüler olur.

İspat: Öncelikle aLb olduğu düşünülürse $ua = b$ ve $vb = a$ olacak şekilde $u, v \in S^1$ vardır. Üstelik, a regüler olduğundan $axa = a$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. Buradan

$$b = ua = uaxa = bxa = bxvb$$

elde edilir. O halde b regülerdir. Benzer şekilde aRb olduğunda da b nin regüler olduğu görülebilir.

(2.2)'deki eşitlikte belirtildiği gibi, aDb nin anlamı $aRcLb$ olacak şekilde bir $c \in S$ elemanının varlığıdır. Dolayısıyla a nın regüler olmasından c nin regülerliğine ve buradan da b nin regülerliğine ulaşılır. □

2.3.3 Teorem ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

2.3.4 Sonuç: Bir S yarıgrubunda a regüler eleman ise a nın D-sınıfı olan D_a nın her elemanı regülerdir.

2.3.3 Teorem ve 2.3.4 Sonuçtan yararlanarak herhangi bir D-sınıf olan D nin ya her elemanının regüler olacağını ya da hiçbir elemanının regüler olmayacağını söyleyebiliriz. Ayrıca idempotent olan bir e elemanı regüler olduğundan idempotent eleman içeren bir D-sınıfın regüler olduğu sonucuna da ulaşırız. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

2.3.5 Teorem: Bir S yarıgrubunun regüler olan bir D-sınıfında her bir L-sınıfı ve R-sınıfı en az bir idempotent eleman içerir.

İspat: $a \in S$ regüler bir D-sınıfının elemanı olsun. Bu durumda S yarıgrubunda $axa = a$ olacak şekilde bir x elemanı vardır. O halde xa idempotenttir ve $xaLa$ dır. Benzer şekilde ax idempotenttir ve $axRa$ dır. □

2.3.6 Teorem: Bir S yarıgrubunda idempotent olan her e elemanı, R_e için bir sol ve L_e için bir sağ birimdir.

İspat: $a \in R_e$ alalım. Bu durumda $a = ex$ olacak şekilde bir $x \in S^1$ vardır. Buradan

$$ea = e(ex) = e^2x = ex = a$$

elde edilir. O halde, 1.1.9 Tanım gereği, e elemanı R_e de bir sol birimdir.

Benzer şekilde e nin L_e de sağ birim olduğu da ispatlanabilir. □

Bölümün girişinde de bahsedildiği gibi, regüler eleman yardımı ile bir elemanın tersinir olması aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

2.3.7 Tanım: Herhangi bir S yarıgrubundaki x ve y elemanları

$$xyx = x \quad \text{ve} \quad yxy = y$$

özelliğini sağlıyorsa, bu iki elemana ***tersinirdir*** denir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılabileceği gibi herhangi bir elemanın tersi birden fazla olabilir. Örneğin 2.5.1 Tanımda verilecek olan *rectangular band* yarıgrupta her bir eleman diğer elemanın tersidir.

2.3.8 Teorem: S bir yarıgrup olmak üzere, herhangi bir $x \in S$ nin tersinir olması için gerekli ve yeterli koşul bu x elemanının regüler olmasıdır.

İspat: Bu teoremin gereklilik kısmının ispatı 2.3.4 Tanımdan açıkça görülmektedir. O halde yeterlilik kısmını gösterelim.

x elemanı regüler olsun. Bu durumda, 2.3.1 Tanımdan, $xyx = x$ olacak şekilde bir $y \in S$ vardır. Bununla birlikte $z = yxy$ dersek buradan

$$xzx = xyxyx = xyx = x$$

ve

$$zxz = yxyxyxy = yxyxy = yxy = z$$

elde edilir. O halde, 2.3.4 Tanım gereği, x ve z elemanları tersinirdir. □

2.3.3 Teorem ile herhangi bir yarıgrupta regülerlik altında değişmez olduğunu gösterdiğimiz bir D-sınıfı, tersinir olan bir elemanı içerme konusunda da benzer bir özelliğe sahiptir. Aşağıda bununla ilgili bir teorem yer almaktadır.

2.3.9 Teorem: a elemanı bir S yarıgrubunda regüler bir eleman olmak üzere, D bu elemanın D-sınıfı olsun.

(i) Eğer a nın tersi a' ise bu durumda $a' \in D$ dir. Üstelik H-sınıf olan $R_a \cap L_{a'}$ kümesi aa' idempotent elemanını ve $L_a \cap R_{a'}$ kümesi de $a'a$ idempotent elemanını içerir.

(ii) Eğer $R_a \cap L_b$ kümesi e ve $R_b \cap L_a$ kümesi de f idempotent elemanlarını içerecek şekilde $b \in D$ varsa H_b kümesi a nın tersi olan a' elemanlarından sadece birini içerir ve $aa' = e$ ve $a'a = f$ eşitlikleri sağlanır.

İspat: **(i)** aa' ve $a'a$ elemanlarının idempotent olduğu kolayca görülür. Ayrıca $aa'a = a$ eşitliğinden $aRaa'$ ve $a'aa' = a'$ eşitliğinden de $aa'La'$ elde edilir. O halde aDa' olur.

Benzer şekilde $aLa'aRa'$ olduğu gösterilebileceği için ispat tamamlanır.

(ii) Hipotezde aRe ve aLf verildiğinden

$$as = e, \quad et = a, \quad ua = f, \quad vf = a \quad (s,t,u,v \in S^1)$$

yazılabilir. $a' = fse$ şeklinde tanımlanırsa

$$aa'a = afsea = vf^2se^2t = vfset = aset = e^2t = et = a,$$

$$a'aa' = fseafse = fsevf^2se = fsevfse = fsease = fse^3 = fse = a'$$

elde edilir. Sonuç olarak a ve a' tersinirdir. Ayrıca

$$aa' = afse = vf^2se = vfse = ase = e^2 = e,$$
$$a'a = fsea = uase^2t = ue^3t = uet = ua = f$$

dir. O halde $a' \in L_e \cap R_f$ olduğu ve buradan da $a' \in L_b \cap R_b = H_b$ olduğu elde edilir.

Şimdi H_b nin a'' tersinir elemanını içerdiğini varsayalım. O halde yukarıdaki (i). madde ve 2.2.15 Teorem yardımıyla, $aa'' = e = aa'$ ve $a''a = f = a'a$ yazılabilir. Buradan ise

$$a' = a'aa' = a''aa' = a''aa'' = a''$$

olacağından, H_b kümesi a nın tersi olan a' elemanlarından sadece birini içerir. □

2.2.15 Teoremden herhangi bir yarıgrubun H-sınıfının grup olabileceğini biliyoruz. Bu teorem ve 2.3.9 Teoremin bir sonucu olarak verilen aşağıdaki teoremin ispatına [11] deki referans yardımıyla ulaşılabilir.

2.3.10 Teorem: Regüler bir *D*-sınıfından grup olan *H* ve *K* şeklinde iki *H*-sınıfı alalım. Bu durumda *H* ile *K* izomorftur.

Green bağıntıları ile ilgili belirtilen tüm bilgilerin ardından şimdi $X = \{1,2,3,4\}$ kümesi için T_4 yarıgrubunun Green denklik sınıfları ile ilgili bir örneği inceleyelim.

2.3.11 Örnek: 2.2.10 Teorem gereği T_4 yarıgrubunun dört tane *D*-sınıfı vardır. Ayrıca 2.2.13 Teorem gereği bu *D*-sınıfları aynı zamanda *J*-sınıflarıdır.
T_4 için herhangi bir $i \in X$ için *D*-sınıf

$$D_i = \{\alpha : rank\,\alpha = i\}$$

şeklindedir.

• D_4 sınıfı X kümesindeki elemanların permütasyonlarını içerir. Dolayısıyla $D_4 = S_4$ tür. (Burada S_4 ile 4 elemanlı bir küme üzerindeki simetrik grup gösterilmektedir). O halde (2.4)'den S_4 aynı zamanda *R*-, *L*- ve *H*-sınıfıdır.

Şimdi D_3 ve D_2 sınıflarını belirleyelim. Bu sınıfların içerdiği *R*-sınıflarının belirlenmesinde kolaylık sağlaması açısından fonksiyonların çekirdeklerini temsil etmek için $rs|t|u$ gösterimi kullanılacaktır. Bu ifade ile *r*, *t* ve *u* sayılarını görüntü kümesindeki farklı elemanlara ve *s* sayısını da *r* ile aynı elemana götüren fonksiyonlar resmedilmektedir.

• D_3 sınıfı, görüntüleri 1 2 3, 1 2 4, 1 3 4 ve 2 3 4 olan dört tane *L*-sınıfına sahiptir. Ayrıca çekirdekleri $12|3|4$, $13|2|4$, $14|2|3$, $23|1|4$, $24|1|3$ ve $34|1|2$ olan altı tane *R*-sınıfı içermektedir. Buna göre D_3 ün *H*-sınıfı ise görüntüsü *i j k* ve çekirdeği $rs|t|u$ olan bir idempotent eleman içerir ki burada *i*, *j* ve *k* sayıları çekirdeğin farklı sınıflarında yer almaktadır. Örneğin görüntüsü 1 2 3 ve çekirdeği $14|2|3$ olan fonksiyonlardan oluşan bir *H*-sınıfın içerdiği idempotent eleman $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Böylece bu sınıf altı elemanlı olur ve dolayısıyla S_3 simetrik grubuna izomorftur. 2.3.10 Teorem gereği, D_3 de bulunan tüm *H*-sınıfları S_3 grubuna izomorftur.

• D_2 sınıfı, görüntüleri 1 2, 1 3, 1 4, 2 3, 2 4 ve 3 4 olan altı tane *L*-sınıf içerir. Ayrıca çekirdekleri $123|4$, $124|3$, $134|2$, $234|1$, $12|34$, $13|24$ ve $14|23$ olan yedi tane *R*-sınıfı içermektedir. Dolayısıyla D_2 nin her bir *H*-sınıfı iki elemandan oluşur ve her biri idempotent eleman içeren iki elemanlı devirli gruptur.

$\bullet$ Son olarak D_1 sınıfında dört tane sabit fonksiyon vardır. Bunlar aynı zamanda bir *R*-sınıfıdır. Bununla birlikte *L*-sınıfları ise her biri tek elemanlı olmak üzere dört tanedir. ◊

Bu bölümde son olarak bir regüler yarıgrupta *L*, *R* ve *H* bağıntılarının ters elemandan yararlanılarak tanımlanabileceğini gösteren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.3.12 Teorem: S herhangi bir regüler yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun. Bu durumda

(i) *aLb* olması için gerekli ve yeterli koşul, *a* nın tersi a' ve *b* nin tersi b' olmak üzere, $a'a = b'b$ olmasıdır.

(ii) *aRb* olması için gerekli ve yeterli koşul, *a* nın tersi a' ve *b* nin tersi b' olmak üzere, $aa' = bb'$ olmasıdır.

(iii) *aHb* olması için gerekli ve yeterli koşul, *a* nın tersi a' ve *b* nin tersi b' olmak üzere, $a'a = b'b$ ve $aa' = bb'$ olmasıdır.

İspat: **(i)** Öncelikle *aLb* olduğunu varsayalım. Eğer *a* nın tersi a' ise $a'a$ elemanı $L_a = L_b$ içinde idempotenttir. 2.3.5 Teorem gereği *R*-sınıf olan R_b en az bir idempotent eleman içerir. Bu eleman *e* olsun. Ayrıca 2.3.9 Teorem (ii)'den *H*-sınıf olan $R_{a'a} \cap L_e$ kümesi *b* nin tersi olan b' elemanını içerir ve $b'b = a'a$ eşitliği sağlanır.

Tersine $a'a = b'b$ olduğunu varsayalım. 2.3.9 Teorem (i) gereği $aLa'a$ ve $b'bLb$ olur. *L* bir denklik bağıntısı olduğundan, *geçişme* özelliği ile *aLb* elde edilir.

Diğer ifadelerin ispatları da benzer şekilde yapılabilir. □

2.4 Basit Yarıgruplar

Yarıgrup teoride en az 2.3 Alt Bölümde verilen regüler yarıgruplar kadar önemli olan bir yarıgrup çeşidi de *basit yarıgruplardır*. Bu tip yarıgruplar, tanımında açıklanacağı gibi, ideal içermezler.

Bir yarıgrupta idealin varlığı ile ne gibi özelliklerin incelenebileceğini önceki alt bölümlerden biliyoruz. Burada ise hiçbir ideali var olmayan bir yarıgrubun hangi özellikleri sağlayabileceği araştırılacaktır. Ayrıca sıfır elemanı içeren yarıgruplar için basitlik kavramının farklı şekilde ele alınması gerektiğinden, bu yarıgruplar için biraz daha farklı özelliklerden ve tanımlardan bahsedilecektir. Tüm bunların yanı sıra bu bölümde sonlu basit yarıgrupların karakterini belirlemede çok önemli bir yeri olan *Rees-Suschkewitsch Teoremi* verilecektir.

2.4.1 Tanım: Herhangi bir S yarıgrubu kendisinden başka hiçbir (öz) iki-yanlı ideale sahip değil ise bu yarıgruba ***basit yarıgrup*** denir.

2.4.2 Teorem: Bir S yarıgrubu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) S yarıgrubu basittir.

(ii) $\forall a \in S$ için, $SaS = S$ dir.

(iii) S nin herhangi iki a ve b elemanı için, $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ vardır.

(iv) S tek bir J-sınıfına sahiptir.

İspat: **(i)$\Rightarrow$(ii):** Herhangi bir $a \in S$ için, SaS kümesinin S nin bir ideali olacağı açıktır. Ancak S yarıgrubu basit olduğu için, 2.4.1 Tanımdan, $SaS = S$ elde edilir.

(ii)$\Rightarrow$(iii): $SaS = S$ olduğundan ispat açıkça görülmektedir.

(iii)$\Rightarrow$(iv): $a, b \in S$ alalım. (iii)'den $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ ve ayrıca $ubv = a$ olacak şekilde $u, v \in S$ elemanları vardır. O halde 2.2.11 Tanımdan aJb olduğu elde edilir. Böylece $S \times S \subseteq J$ olur. Ayrıca J bağıntısının 2.2.11 Tanımından $J \subseteq S \times S$ olacağı açıktır. Sonuç olarak S yargrubunun $J = S \times S$ şeklinde tek bir J-sınıfı vardır.

(iv)$\Rightarrow$(i): I kümesi, S yarıgrubunun bir ideali olsun. $a \in I$ ve $b \in S$ şeklindeki herhangi iki elemanı alalım. (iv) gereği aJb olur. Bu durumda $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır. I bir ideal ve $a \in I$ olduğundan $sat = b \in I$ olur. O halde $S \subseteq I$ ve buradan da $S = I$ elde edilir. Sonuç olarak S yarıgrubu basittir. □

2.4.3 Örnek: G herhangi bir grup olmak üzere, $\forall a, b \in G$ için, $baa^{-1} = b$ olduğundan 2.4.2 Teorem (iii) sağlanır. O halde G grubu basit bir yarıgruptur. ◊

2.4.4 Tanım: S bir yarıgrup ve I kümesi, S nin bir (sol, sağ veya iki-yanlı) ideali olsun. Eğer I ideali, S nin başka hiçbir (sağ, sol veya iki-yanlı) idealini içermiyorsa ***minimal ideal*** adını alır. Örneğin 1.1.11 Tanımda verilen bir S sol sıfır yarıgrubunu ele aldığımızda, $\forall x \in S$ için, $\{x\}$ kümesi S yarıgrubunun bir minimal sağ idealidir.

2.4.4 Tanımdan anlaşılabileceği gibi her sonlu yarıgrup bir minimal sağ, sol ve iki-yanlı ideale sahip iken, sonsuz bir yarıgrup bir minimal sağ, sol ve iki-yanlı ideale sahip olmayabilir. Örneğin $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi minimal ideale sahip değildir. Bu durumun diğer sonsuz devirli yarıgruplar için genel hali 3. Bölümde verilecektir. Ayrıca sağ veya sol sıfır yarıgrup göz önüne alındığında minimal sağ veya sol idealin birden fazla olabileceği görülür. Ancak herhangi bir yarıgrupta minimal iki-yanlı ideal en fazla bir tane olur. Bu durum şu şekilde ifade edilebilir: Bir yarıgrubun I ve J gibi iki tane minimal iki-yanlı ideali var olsun. Bu durumda $I \cap J$ de bir idealdir ve 2.4.4 Tanımdan $I = I \cap J = J$ olduğu söylenir.

2.4.1 ve 2.4.4 Tanımlar ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

2.4.5 Teorem: Eğer I ideali S yarıgrubunun minimal iki-yanlı ideali ise I basit bir yarıgruptur.

İspat: I nın basit olduğunu gösterebilmek için 2.4.2 Teorem (ii)'nin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Bunun için bir $a \in I$ alalım. I bir ideal olduğundan $IaI \subseteq I$ da bir idealdir. Ancak I minimal olduğundan $IaI = I$ elde edilir. O halde I basittir. □

Not: Bazı kaynaklarda 2.4.5 Teoremdeki I minimal iki-yanlı idealine S yarıgrubunun ***çekirdeği*** denir ve bu $K(S)$ ile gösterilir ([11]).

Bölümün girişinde de bahsedildiği gibi sonlu basit yarıgrupların karakterini belirlememizi sağlayan önemli bir teorem vardır. Şimdi bu teoremde geçecek olan *Rees Matrisi* ve *Rees Matris Yarıgrubunun* tanımlarını verelim.

2.4.6 Tanım: T herhangi bir yarıgrup, I ve Λ iki indeks kümesi olsun. Ayrıca T deki elemanlar ile $\Lambda \times I$ boyutlu $P = \left(p_{\lambda i} \right)_{\substack{\lambda \in \Lambda, \\ i \in I}}$ biçimindeki matris tanımlansın. Bu matrise ***Rees Matrisi*** denir.

$I \times T \times \Lambda$ kümesi üzerinde

$$(i, g, \lambda)(j, h, \mu) = (i, g p_{\lambda j} h, \mu) \tag{2.6}$$

işlemi tanımlansın.

$I \times T \times \Lambda$ kümesi, üzerinde tanımlanan (2.6) şeklindeki işleme göre, bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba (P matrisine bağlı olarak T ile oluşturulan) ***Rees Matris Yarıgrubu*** denir ve bu yarıgrup $M\left[T; I, \Lambda; P\right]$ ile gösterilir.

İspatı [18] de bulunabilecek olan bölümün asıl teoremi, 2.4.6 Tanım yardımı ile aşağıdaki gibidir.

2.4.7 Teorem [16] (Rees-Suschkewitsch Teoremi): I ve Λ sonlu indeks kümeleri ve G sonlu bir grup olmak üzere, sonlu bir S yarıgrubunun basit olması için gerekli ve yeterli koşul, S yarıgrubunun bir $M\left[G; I, \Lambda; P\right]$ Rees Matris yarıgrubuna izomorf olmasıdır.

2.4.7 Teoremin ifadesinde yarıgrubun "sonlu olması" ön koşuldur. Buradan da anlaşılabileceği gibi sonsuz yarıgruplar için teorem geçerliliğini yitirebilir. Sonluluk koşulu kaldırıldığında 2.4.7 Teoremin daha genel halinin elde edilebilmesi için yarıgrup, basitlikten daha kuvvetli bir özelliğe sahip olmalıdır. Aşağıda bu özelliğin tanımı verilmektedir.

2.4.8 Tanım: Bir S yarıgrubu hem basit ise hem de minimal sol ve sağ ideal içeriyor ise bu yarıgruba ***tam basit*** (*completely simple*) denir.

2.4.9 Teorem [18] (Rees Teoremi): I ve Λ indeks kümeleri ve G bir grup olmak üzere, bir S yarıgrubunun tam basit olması için gerekli ve yeterli koşul, S yarıgrubunun bir $M\left[G;I,\Lambda;P\right]$ Rees Matris yarıgrubuna izomorf olmasıdır.

2.4.7 ve 2.4.9 Teoremler ile her sonlu basit yarıgrubun tam basit olduğu sonucuna varırız. O halde 2.4.7 Teorem, 2.4.9 Teoremin bir sonucudur.

Bu bölümün girişinden buraya kadar olan kısımda alınan S yarıgrubu sıfır eleman içermemekteydi. Eğer S yarıgrubu sıfır eleman içeriyor ise 2.4.1 Tanım sağlanmaz, yani S yarıgrubu basit olamaz. Çünkü 2.1 Alt Bölümde de belirtildiği gibi sıfır elemanını içeren bir yarıgrupta $\{0\}$ kümesi öz idealdir. Şimdi sıfır elemanını içeren ve $\{0\}$'dan başka hiçbir öz ideali olmayan yarıgrup sınıfını inceleyelim.

2.4.10 Tanım: Herhangi bir sıfırlı S yarıgrubu $\{0\}$'dan ve kendisinden başka hiçbir öz ideale sahip değil ise bu yarıgruba ***0-basit yarıgrup*** denir.

Yukarıdaki tanımda verilen yarıgrup sınıfı için 2.4.2 Teoremin bir benzeri aşağıdaki gibidir. Bu teoremin ispatı [11] de yer almaktadır.

2.4.11 Teorem: Sıfır elemanı içeren bir S yarıgrubunun 0-basit olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall a \in S-\{0\}$ için, $SaS = S$ olmasıdır.

Basit yarıgruplarda önemli bir yeri olan Rees Matris Yarıgrubu 0-basit yarıgruplar için şu şekilde tanımlanır.

2.4.12 Tanım: T (0 elemanını içermeyen) herhangi bir yarıgrup, I ve Λ iki indeks kümesi olsun. Ayrıca $T \cup \{0\}$ kümesindeki elemanlar ile $\Lambda \times I$ boyutlu $P = \left(p_{\lambda i}\right)_{\substack{\lambda \in \Lambda, \\ i \in I}}$ biçimindeki matris tanımlansın.

$(I \times T \times \Lambda) \cup \{0\}$ kümesi, üzerinde tanımlanan

$$(\mathrm{i}, \mathrm{g}, \lambda)(\mathrm{j}, \mathrm{h}, \mu) = \begin{cases} (\mathrm{i}, \mathrm{g}\mathrm{p}_{\lambda \mathrm{j}}\mathrm{h}, \mu), & \mathrm{p}_{\lambda \mathrm{j}} \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$0(i, g, \lambda) = (i, g, \lambda)0 = 00 = 0$$

işlemine göre, bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba (P matrisine bağlı olarak T ile oluşturulan) ***sıfırlı Rees Matris Yarıgrubu*** denir ve bu yarıgrup $M^0\left[T; I, \Lambda; P\right]$ ile gösterilir.

2.4.13 Tanım: S sıfırlı bir yarıgrup ve I kümesi S nin bir (sol, sağ veya iki-yanlı) ideali olsun. Eğer $I \neq 0$ ve I kümesi S nin sadece I ve $\{0\}$ ideallerini içeriyorsa ***0-minimal ideal*** adını alır.

Sıfır eleman içermeyen bir yarıgrubun ideallerinin sınıflandırılması ile ilgili verilen 2.4.5 Teoremin bir benzeri sıfırlı yarıgruplar için aşağıdaki gibidir.

2.4.14 Teorem: I ideali S yarıgrubunun 0-minimal ideali olsun. Bu durumda ya $I^2 = \{0\}$ dır veya I ideali 0-basit bir yarıgruptur.

İspat: I kümesi S nin bir ideali olduğundan I^2 kümesi de S nin I tarafından içerilen bir ideali olur. Ancak I ideali 0-minimal olduğundan, 2.4.13 Tanım gereği, ya $I^2 = I$ ya da $I^2 = \{0\}$ olur.

İlk olarak $I^2 = I$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda $I^3 = I$ eşitliğinin varlığı açıktır. Ayrıca bir $a \in I - \{0\}$ elemanı için, S^1aS^1 kümesi S nin I tarafından içerilen ideali olur ve dolayısıyla I ya eşittir. Buradan

$$IaI \subseteq S^1aS^1 = I = I^3 = I(S^1aS^1)I = (IS^1)a(S^1I) \subseteq IaI \Rightarrow IaI = I$$

eşitliği elde edilir. O halde, 2.4.11 Teorem gereği, I ideali 0-basit bir yarıgruptur.

$I^2 = \{0\}$ eşitliğinin sağlanması durumunda ispat açıktır. □

2.4.15 Tanım: Bir S yarıgrubu hem 0-basit hem de 0-minimal sol ve sağ ideal içeriyor ise bu yarıgruba ***tam* 0*-basit*** (*completely 0-simple*) denir.

Not: 2.4.15 Tanımda verilen tam 0-basit yarıgrupların üreteç kümeleri ile ilgili bir çalışma R. Gray ve N. Ruškuc tarafından yapılmıştır. Bu çalışma [8] de yer almaktadır.

Bu bölümde son olarak verilecek olan teorem, sıfır elemanı içeren yarıgruplar için 2.4.9 Teorem (Rees Teoremi) in benzeridir.

2.4.16 Teorem [11, 18] (Rees Teoremi): I ve Λ indeks kümeleri, G grup ve P de regüler matris olmak üzere, bir S yarıgrubunun tam 0-basit olması için gerekli ve yeterli koşul, S yarıgrubunun bir $M^0[G; I, \Lambda; P]$ Rees Matris yarıgrubuna izomorf olmasıdır.

Not: 2.4.16 Teoremde geçen regüler matrisin anlamı, alınan matrisin her bir satırında ve sütununda en az bir tane sıfırdan farklı elemanın olmasıdır.

2.5 Rectangular Band

Giriş kısmında belirttiğimiz gibi, bu bölümde temel amacımız yarıgrupların sağlamış olduğu farklı özelliklere göre ayrıldığı kategorileri irdelemektir. Dolayısıyla burada da bu amaca yönelik çalışmalara devam edilecektir.

Bu bölümde verilecek olan *rectangular band* olma özelliğini sağlayan yarıgruplar tam olarak gruplardan ayrılabilmektedir. Ayrıca tanım verildiğinde kolayca anlaşılabileceği gibi, rectangular olan bir yarıgrupta her bir eleman diğerinin (2.3.7 Tanımdaki tersinir eleman tanımına göre) tersidir. Bu bölüm ile ilgili ayrıntılar [10, 11, 15] gibi kaynaklardan elde edilebilir.

2.5.1 Tanım: S bir yarıgrup olmak üzere, $\forall a, b \in S$ için, $aba = a$ eşitliği sağlanırsa S yarıgrubuna ***rectangular band*** denir. Örneğin 1.1.11 Tanımda verilen sağ sıfır ve sol sıfır yarıgruplar rectangular banddır.

Herhangi bir yarıgrubun rectangular band olup olmadığını araştırabilmek için, aşağıda denkliğini göstereceğimiz ifadelerden yararlanılabilir.

2.5.2 Teorem: S bir yarıgrup olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) S rectangular banddır.

(ii) S nin her elemanı idempotenttir ve $\forall a, b, c \in S$ için, $abc = ac$ dir.

(iii) $S \cong L \times R$ olacak şekilde bir L sol sıfır yarıgrubu ve R sağ sıfır yarıgrubu vardır.

(iv) A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere, $A \times B$ kümesi üzerinde

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2) \tag{2.7}$$

işlemi tanımlansın. Tanımlanan bu işlem altında $A \times B$ bir yarıgruptur ve $S \cong A \times B$ dir.

İspat: **(i)** $\Rightarrow$ **(ii):** Bir $a \in S$ alalım. S rectangular band olduğundan

$$a^3 = aaa = a \Rightarrow a^4 = a^2 \qquad \text{ve} \qquad a^4 = a(a^2)a = a$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitliğin sonucu olarak $a^2 = a$ dır ve dolayısıyla $a \in S$ elemanı idempotenttir. Burada seçilen a elemanı keyfi olduğundan S nin her elemanının idempotent olduğunu söyleriz.

Şimdi $a, b, c \in S$ alalım. (i)'den

$$a = aba, \quad c = cbc \quad \text{ve} \quad b = b(ac)b$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$ac = (aba)(cbc) = a(bacb)c = abc$$

elde edilir.

(ii)$\Rightarrow$(iii): S nin herhangi bir c elemanını seçelim ve bunu sabit tutalım. $L = Sc$ ve $R = cS$ şeklinde iki yarıgrup tanımlayalım. Şimdi L nin sol ve R nin sağ sıfır yarıgrup olduklarını gösterelim. Bunun için (ii) kullanılırsa, L içindeki her

$$x = zc \quad \text{ve} \quad y = tc \quad (z, t \in S)$$

elemanları için,

$$xy = zctc = zcc = zc^2 = zc = x$$

eşitliği elde edilir. Böylece L nin bir sol sıfır yarıgrup olduğu görülür. Benzer şekilde R nin sağ sıfır yarıgrup olduğu gösterilebilir.

Şimdi izomorfluğu gösterebilmek için,

$$\phi : S \to L \times R$$
$$x \mapsto (xc, cx) \quad (x \in S)$$

biçiminde bir fonksiyon tanımlayalım. $x, y \in S$ olmak üzere,

$$x\phi = y\phi \Rightarrow (xc, cx) = (yc, cy)$$

alınırsa (ii)'den

$$x = x^2 = xcx = ycx = ycy = y^2 = y \Rightarrow x = y$$

eşitliği sağlandığından ϕ fonksiyonu bire-birdir. Ayrıca $\forall(ac, cb) \in L \times R$ için, (ii) kullanılarak

$$(ac, cb) = (abc, cab) = (ab)\phi$$

elde edilebileceği için ϕ fonksiyonu örtendir.

Son olarak ϕ fonksiyonunun bir homomorfizma olduğunu göstermeliyiz. $\forall x, y \in S$ için, yine (ii) kullanılarak

$$(xy)\phi = (xyc, cxy) = (xc, cy) = (xcyc, cxcy) = (xc, cx)(yc, cy) = (x\phi)(y\phi)$$

bulunur. O halde ϕ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Buradan $S \cong L \times R$ sonucuna varılır.

(iii)$\Rightarrow$(iv): L sol ve R sağ sıfır yarıgrup olmak üzere $S = L \times R$ olduğunu varsayalım. Bu durumda S den alınan herhangi iki (a,b) ve (c,d) elemanının çarpımı

$$(a,b)(c,d) = (ac, bd) = (a,d)$$

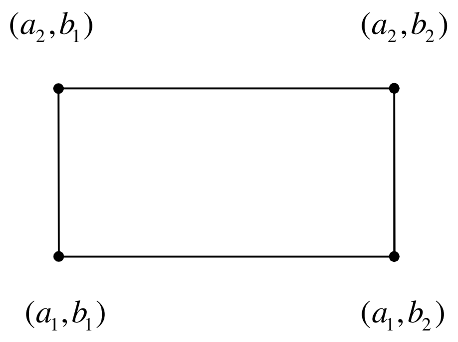
biçiminde olur. O halde $A = L$ ve $B = R$ alınırsa istenilen elde edilmiş olur.

(iv)$\Rightarrow$(i): $S = A \times B$ olsun ve bu yarıgrup üzerinde (2.7)'deki işlem tanımlansın. S nin herhangi iki a ve b elemanını alalım. Bu elemanlar $a=(x,y)$ ve $b=(z,t)$ biçimindedir. (2.7)'de tanımlanan işlem kullanılarak

$$aba = (x,y)(z,t)(x,y) = (x,t)(x,y) = (x,y) = a$$

eşitliği elde edilir. O halde, 2.5.1 Tanım gereği, S yarıgrubu bir rectangular banddır. $\square$

Not: 2.5.1 Tanımda verilen "rectangular band" tanımındaki "rectangular" kelimesi 2.5.2 Teoremin (iv) ifadesinden gelmektedir. Eğer (iv)'de verilen (a_1,b_1) ve (a_2,b_2) kartezyen düzlemde iki nokta olarak düşünülürse $(a_1,b_1)(a_2,b_2)$ ve $(a_2,b_2)(a_1,b_1)$ çarpımları ile bu noktalar bir dikdörtgenin köşelerini oluştururlar.



Tanımdaki "band" kelimesi ise genellikle idempotent elemanları içeren bir yarıgrup için kullanılmaktadır.

Herhangi bir yarıgrubun sağlayabileceği iki farklı özellik arasında bir bağlantı kurulabilir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

2.5.3 Teorem: Bir S yarıgrubu rectangular band ise basit yarıgruptur.

İspat: S yarıgrubu bir rectangular band olsun. S nin basitliğini gösterebilmek için, 2.4.2 Teorem (ii)'nin sağlandığını göstermemiz yeterlidir.

S bir yarıgrup olduğundan, 1.1.2 Tanım gereği, $\forall a \in S$ için, $SaS \subseteq S$ olacağı açıktır. Ayrıca $\forall b \in S$ için, S rectangular band olduğundan, 2.5.2 Teorem (ii) gereği,

$$b = b^2 = bb = bab \Rightarrow b \in SaS$$

olur ve buradan $S \subseteq SaS$ elde edilir. O halde $SaS = S$ dir ve dolayısıyla 2.4.2 Teorem (ii) sağlanır. Böylece S basit bir yarıgruptur. □

2.5.4 Not: Aslında yarıgrupların sınıflandırılmasında şu ana kadar bahsedilenlerden farklı birçok kategori daha vardır. Aşağıda bunların birkaç tanesinden kısaca bahsedilecek ve bu yarıgrup sınıfları arasında geçişler varsa bunlar incelenecektir. Bu konular ile daha ilgili ayrıntılı bilgiler [10, 11] gibi kaynaklarda bulunabilir.

2.5.5 Tanım: Herhangi bir S yarıgrubu regüler olmak üzere, S nin idempotent elemanlarının oluşturduğu küme bir yarıgrup tanımlıyor ise S yarıgrubuna ***orthodox yarıgrup*** denir.

2.5.1 ve 2.5.5 Tanımlar ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.5.6 Sonuç: Bir S yarıgrubu rectangular band ise orthodox yarıgruptur.

Yukarıda verilen sonucun tersi doğru değildir. Örneğin S yarıgrubu özel olarak bir *grup* ise orthodox olma özelliğini sağlar. Ancak bu bölümün girişinde de belirtildiği gibi rectangular band olma özelliği sadece yarıgruplara aittir. Dolayısıyla orthodox yarıgrup rectangular band olmayabilir.

2.5.7 Tanım: S bir yarıgrup ve $A \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall a \in A$ ve $\forall s \in S$ için,

$$sa \in A \Rightarrow s \in A$$

oluyorsa A kümesine ***sol birimsel*** (***left unitary***),

$$as \in A \Rightarrow s \in A$$

oluyorsa A kümesine ***sağ birimsel*** (***rigt unitary***) denir. Bununla birlikte A kümesi hem sol hem de sağ birimsel ise ***birimsel*** (***unitary***) adını alır.

Bu tanımdan hareketle aşağıdaki yarıgrup sınıfını tanımlayabiliriz.

2.5.8 Tanım: Bir S regüler yarıgrubunun idempotent elemanlarının oluşturduğu E kümesi S nin birimsel alt yarıgrubu oluyorsa, S yarıgrubuna ***E-birimsel*** denir.

2.5.9 Teorem [11]: Bir S regüler yarıgrubu E-birimsel olsun. Bu durumda $\forall a, b \in S$ için, $ab \in E \Rightarrow ba \in E$ dir.

İspat: S yarıgrubu E-birimsel ve $\forall a, b \in S$ için, $ab \in E$ olsun. S yarıgrubu regüler olduğundan, 2.3.1 Tanım gereği, $b = bb'b$ olacak şekilde bir $b' \in S$ vardır. Burada öncelikle

$$(babb')^2 = babb'babb' = bababb' = babb'$$

eşitliği sağlandığından $babb' \in E$ olur. Ayrıca

$$(bb')^2 = bb'bb' = bb'$$

eşitliğinden, $bb' \in E$ elde edilir. O halde E kümesi birimsel olduğundan, 2.5.7 Tanım gereği, $ba \in E$ olur. □

Yarıgrupların sınıflandırılmasında son olarak verilecek olan tanım bir yarıgrubun *sadeleştirilebilir* (*cancelletive*) olmasıdır. Aşağıda bu özelliği sağlayan yarıgrup tanımı ve regüler bir yarıgrup için önemli bir teorem yer almaktadır. İlgili teorem verildiğinde göreceğiz ki regüler bir yarıgrubun sadeleştirilebilir olması bu yarıgrubu grup olmaya bir adım yaklaştırmaktadır.

2.5.10 Tanım: S bir yarıgrup olmak üzere, $\forall a,b,c \in S$ için,

$$ac = bc \Rightarrow a = b$$

eşitliği sağlanıyorsa, S yarıgrubuna ***sağdan sadeleştirilebilir*** (*right cancelletive*) ***yarıgrup***,

$$ca = cb \Rightarrow a = b$$

eşitliği sağlanıyorsa, S yarıgrubuna ***soldan sadeleştirilebilir*** (*left cancelletive*) ***yarıgrup*** denir. Bununla birlikte S yarıgrubu, hem sağdan hem de soldan sadeleştirilebilir ise ***sadeleştirilebilir*** (*cancelletive*) ***yarıgrup*** adını alır. Örneğin

- Her sol sıfır yarıgrup sağdan sadeleştirilebilir,
- Her sağ sıfır yarıgrup soldan sadeleştirilebilir ve
- Her grup sadeleştirilebilir bir yarıgruptur.

2.5.11 Teorem [11]: S regüler bir yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) S yarıgrubu sadece bir tane idempotent elemana sahiptir.

(ii) S yarıgrubu sadeleştirilebilirdir.

(iii) S yarıgrubu bir gruptur.

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii): $a,b,c \in S$ alalım ve $ac = bc$ olsun. S regüler bir yarıgrup olduğundan, 2.3.1 Tanım gereği, $axa = a$, $byb = b$ ve $czc = c$ olacak şekilde $x, y, z \in S$ elemanları vardır. Bu üç eşitlikten kolayca anlaşılabileceği gibi ax, xa,

by, yb, cz ve zc elemanları S nin idempotent elemanlarıdır. Ancak, (i) gereği, tüm bu elemanlar birbirine eşittir. Buradan

$$ac = bc \Rightarrow acz = bcz \Rightarrow axa = byb \Rightarrow a = b$$

elde edilir. O halde S sağdan sadeleştirilebilir bir yarıgruptur.

Benzer şekilde S nin soldan sadeleştirilebilir olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak S sadeleştirilebilir bir yarıgruptur.

(ii)$\Rightarrow$(iii): S nin bir grup olduğunu gösterebilmek için birim eleman ve ters elemanın varlığını ispatlamamız yeterlidir.

Öncelikle birim elemanın varlığını gösterelim. Bunun için bir $a \in S$ alalım. S regüler olduğundan, 2.3.1 Tanım gereği, $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ elemanı vardır ve (ii) gereği bu x elemanı tektir. Buradan xa elemanının a nın sağ birimi olduğu söylenebilir. Ayrıca $axa = a$ eşitliği ve (ii) kullanılarak

$$axa = a \Rightarrow axaa = aa \Rightarrow xaa = a$$

elde edilir ki bu durumda xa elemanı a nın sol birimi olur. O halde xa, a nın birimidir. Benzer şekilde ax elemanının da a nın birimi olduğu gösterilebilir. Ancak birim elemanın tek olması gereklidir. Bu nedenle yine $axa = a$ eşitliği ve (ii) kullanılarak

$$axa = a \Rightarrow axaa = aa \Rightarrow xaa = a \Rightarrow xaa = axa \Rightarrow xa = ax$$

elde edilir. Şimdi bu xa elemanın S yarıgrubunun birimi olduğunu gösterelim. Bunun için bir $b \in S$ alalım. S regüler olduğundan, 2.3.1 Tanım gereği, $byb = b$ olacak şekilde bir $y \in S$ elemanı vardır ve (ii) gereği bu y elemanı tektir. $yb = by$ elemanının b nin birimi olduğu yukarıdaki gibi gösterilir. Ayrıca $axa = a$, $byb = b$ ve (ii) kullanılırsa

$$axab = ab = abyb \Rightarrow axa = aby \Rightarrow xa = by$$

elde edilir. O halde b nin birimi de xa dır. Burada $b \in S$ rastgele seçildiğinden xa elemanının S yarıgrubu için bir birim eleman olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi ters elemanın varlığını gösterelim.

S regüler olduğundan, 2.3.1 Tanım gereği, $\forall a \in S$ için, $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ nin varlığını ve bu elemanın tekliğini biliyoruz. Buradan

$$axa = a \Rightarrow xaxa = xa = ax = axax$$

eşitliği elde edilir ki bu durumda xax elemanı a nın S içindeki tersi olur. Böylece S bir gruptur.

(iii)$\Rightarrow$(i): S yarıgrubu bir grup olsun. Bu durumda, 1.1.2 Tanım gereği, S birim elemana sahiptir ve bu elemanın idempotent olduğu birim eleman tanımından açıktır $(e^2 = e)$.

Şimdi S içinde idempotent olan başka bir s öğesinin bulunduğunu varsayalım. Bu durumda $s^2 = s$ olur. Ayrıca S bir grup olduğundan, 1.1.2 Tanım gereği, s nin, $ss^{-1} = s^{-1}s = e$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir tersi vardır. Buradan

$$s^2 = s \Rightarrow s^2 s^{-1} = ss^{-1} \Rightarrow s = e$$

olduğu, yani S içindeki idempotent elemanın sadece birim eleman olduğu elde edilir.
□

3. DEVİRLİ (MONOGENIC) YARIGRUPLAR

1. Bölümde herhangi bir yarıgrubun alt kümelerinin de bazı durumlarda yarıgrup yapısı oluşturabileceğinden bahsetmiştik. Bununla birlikte 1.1.4 Tanım ile alt yarıgrup kavramını tanıtmıştık.

Şimdi bir yarıgrubun alt yarıgruplarının bir ailesini düşünelim ve bunların kesişimini göz önüne alalım. 1.1.15 Teoremden hatırlanacağı gibi, aldığımız bu kesişim kümesi de bir yarıgrup oluşturur. Devirli yarıgrup tanımının temelini bu düşünce oluşturmaktadır.

Bu bölümde, bu belirtilen noktadan hareketle, yarıgruplar için özellikler incelenecektir. Diğer bir deyişle, bir yarıgrubun alt yarıgruplarının bir ailesinin kesişiminin yarıgrup olmasından bahsedilecektir. Ardından kesişimin tek elemanlı olması durumunda bölümün asıl amacı olan devirli yarıgrup yapısı tanımlanacak ve bu özel yarıgrubun önemli özellikleri incelenecektir.

Bu bölümde verilen ile ilgili ayrıntılı bilgiler [4, 10, 11, 18] gibi kaynaklarda bulunabilir.

3.1 Devirli Yarıgruplara Giriş

3.1.1 Tanım: S herhangi bir yarıgrup ve $U = \{U_i : i \in I \neq \emptyset\}$ kümesi S nin alt yarıgruplarının bir ailesi olsun. Bu takdirde U kümesindeki $U_i \neq \emptyset$ yarıgruplarının kesişimi, 1.1.15 Teoremden, yine S nin bir alt yarıgrubu olur. S nin boştan farklı her A alt kümesi için, A yı içeren en az bir alt yarıgrubu vardır. Ayrıca S nin A yı içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi de A yı içeren bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgruba ***A kümesi ile üretilen alt yarıgrup*** denir ve $\langle A\rangle$ ile gösterilir.

$\langle A\rangle$ yarıgrubu aşağıdaki iki özelliği sağlar:

- $A\subseteq\langle A\rangle$
- Eğer U kümesi S nin A yı içeren bir alt yarıgrubu ise $\langle A\rangle\subseteq U$ dir.

Ayrıca $\langle A\rangle$ alt yarıgrubu S nin tüm elemanlarını içeriyorsa, S deki elemanlar A nın elemanlarının bir çarpımı şeklinde yazılabilirler. Bu durumda A kümesine S yarıgrubunun ***üreteç kümesi*** denir.

3.1.1 Tanımda verilen A kümesi $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise $\langle A\rangle$ kümesi $\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$ şeklinde yazılır. Aşağıda $n=1$ olması durumu ile ilgili tanım yer almaktadır.

3.1.2 Tanım: S yarıgrubu için 3.1.1 Tanımda verilen A kümesi $A=\{a\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise $A=\langle a\rangle$ yarıgrubuna S nin a ile üretilen ***devirli alt yarıgrubu*** denir. Buradaki a elemanının ***mertebesi***, grup teorideki gibi, $\langle a\rangle$ yarıgrubunun eleman sayısına eşittir.

Eğer S yarıgrubu a ile üretiliyorsa, bu durumda S ye ***devirli*** (*monogenic*) ***yarıgrup*** denir. Açıkça görülebilir ki, tıpkı grup durumunda olduğu gibi, devirli yarıgruplar değişmelilik özelliğini sağlayacaktır.

3.1.3 Tanım: $a\in S$ olmak üzere, $\langle a\rangle=\{a,a^2,a^3,...\}$ şeklinde a ile üretilen yarıgrubu düşünelim. Eğer $a,a^2,a^3,...$ elemanları arasında bir tekrarlama yoksa, yani

$$a^m=a^n\Rightarrow m=n \qquad (m,n\in\mathbb{Z}^+)$$

oluyor ise, $(\langle a\rangle,.)$ yarıgrubu $(\mathbb{N},+)$ doğal sayılar yarıgrubuna izomorf olur. Bu durumda $\langle a\rangle$ ya ***sonsuz devirli yarıgrup*** adı verilir. Dolayısıyla a elemanına da S içinde ***sonsuz mertebelidir*** denir.

3.1.4 Tanım: $a\in S$ olmak üzere, $\langle a\rangle$ yarıgrubunda a nın kuvvetlerinden oluşan bazı elemanlar tekrarlanıyor olsun. Bu durumda

$$\{x\in \mathbb{N} : (\exists y\in \mathbb{N})\ \ a^x = a^y,\ \ x\neq y\}$$

kümesinde en az bir tane eleman vardır ve bu eleman en küçüktür. Bu eleman m ile gösterilir ve a elemanının ***indeksi*** adını alır. Bu durumda

$$\{x\in \mathbb{N} : a^{m+x} = a^m\}$$

kümesi de en az bir tane elemana sahip olur ve bu eleman en küçüktür. Bu eleman da r ile gösterilir ve a elemanının ***periyodu*** adını alır.

Aşağıdaki tanımdan da anlaşılabileceği gibi, 3.1.4 Tanım ile sonlu bir devirli yarıgrup meydana gelir. Şimdi bu yarıgrubun tanımı ve a elemanının, dolayısıyla $\langle a\rangle$ yarıgrubunun mertebesi verilmektedir.

3.1.5 Tanım: İndeksi m, periyodu r olan herhangi bir a elemanını alalım. Bu durumda

$$a^m = a^{m+r} \tag{3.1}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$a^m = a^{m+r} = a^m a^r = a^{m+r} a^r = a^{m+2r}$$

elde edilir. Bu eşitliğe benzer şekilde devam edildiğinde $\forall q\in \mathbb{N}$ için,

$$a^m = a^{m+qr} \tag{3.2}$$

şeklinde bir genellemeye ulaşılır. Böylece, m ve r nin en küçük olması ve (3.1) eşitliği ile, a nın

$$a,\ a^2, \ldots,\ a^m,\ a^{m+1}, \ldots,\ a^{m+r-1}$$

biçiminde her biri farklı olan kuvvetleri elde edilir. Bu durum şu şekilde gösterilebilir:

$s \geq m$ koşulunu sağlayan her s sayısı için bölme algoritması ile

$$s = m + qr + u \qquad (q \geq 0 \quad \text{ve} \quad 0 \leq u \leq r-1)$$

yazılabilir. Buradan

$$a^s = a^{m+qr}a^u = a^m a^u = a^{m+u}$$

elde edilir. O halde indeksi m ve periyodu r olan a elemanı ile üretilen $\langle a \rangle$ yarıgrubu sonludur. Bu yarıgruba ***sonlu devirli*** (***monogenic***) *yarıgrup* denir ve bu yarıgrubun mertebesi $|\langle a \rangle| = m + r - 1$ dir. Dolayısıyla a elemanına da ***sonlu mertebelidir*** denir ve mertebesi yine m+r-1 dir.

3.2 Devirli Yarıgrupların Bazı Özellikleri-I

Devirli yarıgruplara ait bazı tanım ve özellikler vardır. Burada bunlardan biri olan bir devirli yarıgrubun "çekirdeği" kavramı tanımlanıp sağladığı özellikler verilecektir. Ayrıca devirli yarıgrupların hangi koşul altında grup tanımladığından ve bir devirli yarıgrupta idempotent elemanın kesinlikle varlığı için gerekli olan ön koşuldan bahsedilecektir.

3.2.1 Tanım: 3.1.5 Tanımdaki gibi verilen indeksi m ve periyodu r olan bir a elemanın ürettiği $\langle a \rangle$ devirli yarıgrubunu alalım.

$$K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$$

kümesi $\langle a \rangle$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Bu yarıgruba $\langle a \rangle$ nın ***çekirdeği*** adı verilir.

3.2.2 Teorem: 3.2.1 Tanımda verilen K_a kümesi $\langle a \rangle$ nın bir alt grubudur.

İspat: Öncelikle K_a nın kapalılık özelliğini sağladığını gösterelim. Bunun için,

$$a^{m+u},\ a^{m+v} \in K_a \qquad (0 \le u, v \le r-1)$$

elemanlarını alalım. Bu durumda

$$x \equiv v - u - m \pmod r \qquad \text{ve} \qquad 0 \le x \le r-1$$

olacak şekilde bir x sayısı seçildiğinde K_a içinde

$$a^{m+u} a^{m+x} = a^{m+v} \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlayan bir a^{m+x} elemanı bulunabilir.

Şimdi $m,\ m+1,\ ...,\ m+r-1$ sayıları göz önüne alınırsa bu sayıların içinde

$$0 \le g \le r-1 \qquad \text{ve} \qquad m + g \equiv 1 \pmod r \tag{3.4}$$

koşulunu sağlayan bir g sayısı vardır. Buradan $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$k(m+g) \equiv k \pmod r$$

elde edilir. Böylece $k = 1, 2, ..., r$ için, a^{m+g} nin kuvvetleri olan $a^{(m+g)k}$ elemanları K_a kümesinin içindedir. Dolayısıyla K_a devirlidir.

Ayrıca

$$0 \le z \le r-1 \quad \text{ve} \quad m+z \equiv 0 \pmod r \tag{3.5}$$

koşulunu sağlayan z sayısı için, a^{m+z} birim elemandır. Son olarak (3.3) den her elemanın tersinin var olduğu da söylenebilir. O halde K_a kümesi a^{m+g} ($0 \le g \le r-1$ ve $m+g \equiv 1 \pmod r$) ile üretilen r elemanlı devirli bir gruptur. □

3.2.3 Örnek: $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kümesi için, T_X tam transformasyon yarıgrubunun bir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

elemanını alalım. Şimdi bu elemanın kuvvetlerini hesaplayalım.

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 8 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 4 & 2 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 7 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \alpha^7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 7 & 7 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 6 & 6 & 7 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

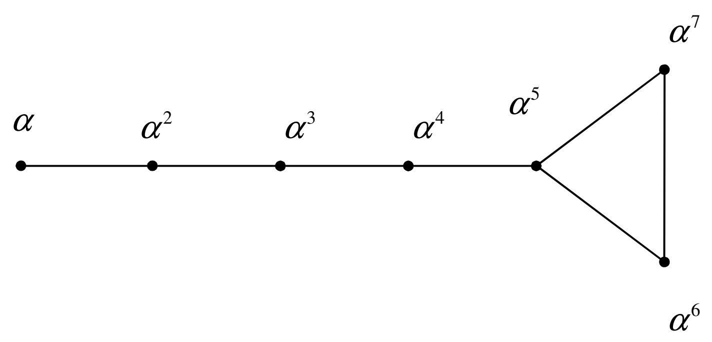
Yapılan hesaplamalardan görüldüğü gibi, $\alpha^5 = \alpha^8$ dir. O halde α dönüşümünün indeksi 5 ve periyodu 3 tür.

Ayrıca, 3.2.1 Tanımdan, $\langle \alpha \rangle$ nın çekirdeği, $K_\alpha = \{\alpha^5, \alpha^6, \alpha^7\}$ biçimindedir. Şimdi K_α ya ait Cayley Tablosu' nu oluşturalım.

	α^5	α^6	α^7
α^5	α^7	α^5	α^6
α^6	α^5	α^6	α^7
α^7	α^6	α^7	α^5

Tablodan görüldüğü gibi K_α nın birimi α^6 dır ve (3.5)'de bahsedilen z sayısı burada 1 dir ($\alpha^6 = \alpha^{5+1}$ ve $5+1 \equiv 0 \pmod 3$). Ayrıca (3.4)'den $7 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan K_α nın üreteç elemanı olarak α^7 yi alırız. Gerçekten tablodan da görülebileceği gibi $(\alpha^7)^2 = \alpha^5$ ve $(\alpha^7)^3 = \alpha^6$ dır. ◊

3.2.3 Örnekte elde edilen $\langle \alpha \rangle$ yarıgrubu aşağıdaki gibi sembolize edilebilir.



Yukarıdaki bütün yazılanlar aşağıdaki teoremle özetlenebilir.

3.2.4 Teorem [11]: Herhangi bir S yarıgrubundaki bir a elemanı için aşağıdaki ifadelerden herhangi biri sağlanır.

(i) a nın tüm kuvvetleri birbirinden farklıdır ve $\langle a \rangle$ devirli yarıgrubu $(\mathbb{N},+)$ doğal sayılar yarıgrubuna izomorftur.

(ii) Aşağıdaki özellikleri sağlayan m (a nın indeksi) ve r (a nın periyodu) pozitif tamsayıları vardır.

- $a^m = a^{m+r}$ dir.
- $\forall u, v \in \mathbb{N}$ için, $a^{m+u} = a^{m+v}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $u \equiv v \pmod r$ olmasıdır.
- $\langle a \rangle = \{a, a^2, ..., a^{m+r-1}\}$ dir.
- $K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$ kümesi $\langle a \rangle$ devirli yarıgrubunun devirli bir alt grubudur.

Buraya kadar verilenlerden her (m,r) pozitif tamsayı çifti için indeksi m ve periyodu r olan bir a elemanını içeren bir S yarıgrubunun kesinlikle bulunabileceği söylenebilir. Çünkü $T_{\{1,2,...,m+r\}}$ tam transformasyon yarıgrubunun

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & m & m+1 & ... & m+r-1 & m+r \\ 2 & 3 & 4 & ... & m+1 & m+2 & ... & m+r & m+1 \end{pmatrix}$$

biçimindeki elemanı indeksi m ve periyodu r olan bir dönüşümdür. Örneğin $T_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ yarıgrubundaki

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

elemanı için, $\alpha^6 = \alpha^4$ dür, yani α nın indeksi 4 ve periyodu 2 dir.

3.2.5 Not: Farklı ya da aynı yarıgrubun a ve b gibi iki elemanı için, kolayca görülebileceği gibi, $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$ olması için gerekli ve yeterli koşul a ve b elemanlarının aynı indeks ve periyoda sahip olmasıdır. O halde aslında (m,r) pozitif tamsayı çifti için indeksi m ve periyodu r olan sadece bir tane devirli yarıgrup vardır. Bu yarıgrup genellikle $M(m,r)$ ile gösterilir.

3.2.2 Teorem ve 3.2.5 Not ile elde edilen önemli bir sonuç şöyledir:

3.2.6 Sonuç: İndeksi 1 ve periyodu r olan $M(1,r)$ devirli yarıgrubu, r mertebeli devirli bir gruptur.

2. Bölümde her elemanı sonlu mertebeli olan bir yarıgrubun periyodik yarıgrup olarak adlandırıldığı ve sonlu bir yarıgrubun periyodik olacağı verilmişti (2.2.12 Tanım). Periyodik bir yarıgrubun içinde bulunan bir elemanla üretilen alt yarıgrubunu düşünelim. Bu yarıgruptan yararlanılarak periyodik bir yarıgrupta idempotent elemanın varlığı garanti altına alınabilir. Aşağıda bu durum ile ilgili teorem yer almaktadır.

3.2.7 Teorem: Periyodik bir yarıgrupta her elemanın idempotent olan bir kuvveti vardır. Sonuç olarak her periyodik yarıgrup (özel olarak sonlu her yarıgrup) en az bir tane idempotent elemana sahiptir.

İspat: S periyodik bir yarıgrup olsun ve $a \in S$ alalım. Bu durumda, 2.2.12 Tanım ve 3.1.5 Tanım gereği, $\langle a \rangle$ sonlu bir yarıgrup olur. Buradan a için (m,r) pozitif tamsayı çiftinin (m indeks, r periyot) bulunabileceğini söyleyebiliriz. Ayrıca 3.2.2 Teorem gereği $\langle a \rangle$ nın çekirdeği olan $K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$ kümesi bir gruptur ve dolayısıyla bu kümenin a^n $(m \le n \le m+r-1)$ şeklinde bir birim elemanı vardır. Buradan $a^n \in K_a \subseteq \langle a \rangle$ elemanının idempotent olduğu elde edilir. Seçilen S yarıgrubu ve bu yarıgruptan alınan a elemanı keyfi olduğundan sonuç açıktır. □

Not: Eğer 3.2.7 Teoremde yarıgrubun periyodik olması önkoşulu ortadan kaldırılırsa idempotent elemanın varlığından kesin olarak söz edilemez. Örneğin $\left(\mathbb{Z}^{+},+\right)$ yarıgrubu (ki bu yarıgrup periyodik değildir) idempotent eleman içermez.

3.3 Devirli Yarıgrupların Bazı Özellikleri-II (*İdealler*)

3.2 Alt Bölümde devirli yarıgrupların çekirdeği tanımlanarak bu çekirdeğin bir grup oluşturduğu gösterilip, buna ek olarak, devirli bir yarıgrupta hangi koşul altında en az bir tane idempotent elemanın var olacağı ispatlanmıştı. Bu alt bölümde ise devirli yarıgrupların *idealleri* incelenecektir. Böylece tezin temasını oluşturan devirli yarıgrupların sınıflandırılmasında bir adım daha ileriye gidilmiş olacaktır.

Aşağıda verilecek 3.3.1 ve 3.3.2 Teoremlerin ispatları tarafımızdan yapılmıştır.

2.1.1 Tanım ile herhangi bir yarıgrubun ideali tanıtılmıştı. Bu tanıma uygun olarak devirli yarıgruplar için aşağıdaki teorem elde edilir.

3.3.1 Teorem [11]: $S=\langle a\rangle$ sonsuz devirli bir yarıgrup olsun. Bu yarıgrubun her öz ideali Sa^{m} $(m\in\mathbb{Z}^{+})$ formunda olup bu idealler arasında

$$S\supset Sa\supset Sa^{2}\supset\ldots$$

şeklinde bir sıralama vardır ve dolayısıyla S nin minimal ideali yoktur. (Minimal ideal için 2.4.4 Tanıma bakılabilir).

İspat: Öncelikle $a^{k}\in S$ ve $m\in\mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere, $a^{l}\in Sa^{m}$ elemanını alalım. S sonsuz devirli olduğundan, $l>m$ olur. O halde alınan bu iki elemanın çarpımı

$$a^{k}a^{l}=a^{k+l}=a^{k+l-m}a^{m}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $a^k a^l \in Sa^m$ olduğundan, 2.1.1 Tanım gereği, Sa^m kümesi S nin sol idealidir. Devirli yarıgruplar değişmeli olduğundan, Sa^m kümesi S için aynı zamanda bir sağ ideal olacaktır. O halde Sa^m $(m \in \mathbb{Z}^+)$ kümesi S nin bir idealidir. Ayrıca S sonsuz devirli olup birim eleman da içermediğinden, $a \notin Sa^m$ olacaktır. Dolayısıyla S yarıgrubunun Sa^m ideali öz idealdir.

Şimdi S nin başka bir I öz idealini alalım. 2.1.1 Tanım gereği, $\forall a^k \in S$ ve $\forall a^l \in I$ için, $a^k a^l \in I$ olur. Ayrıca buradaki k ve l sayıları pozitif tam sayı oldukları için, $k > m$ veya $l > m$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısı bulunabilir. O halde I idealinin her bir elemanı

$$a^k a^l = a^{k+l} = a^{k+l-m} a^m$$

biçiminde yazılabilir. Buradan da I idealinin aslında Sa^m şeklinde olduğu sonucu elde edilir. O halde S nin tüm öz idealleri Sa^m $(m \in \mathbb{Z}^+)$ formundadır.

Bir $t \in \mathbb{Z}^+$ için, S nin Sa^t biçimindeki bir idealini alalım. Bu durumda Sa^{t+1} kümesinin de S için bir ideal olacağı açıktır. Herhangi bir $a^l \in Sa^{t+1}$ elemanı için,

$$a^l = a^k a^{t+1} = a^{k+t+1} = a^{k+1} a^t \qquad (a^k \in S)$$

olur, ki bu durumda $a^l \in Sa^t$ dir ve $Sa^t \supset Sa^{t+1}$ $(t \in \mathbb{Z}^+)$ kapsaması elde edilir. O halde S ve S nin öz idealleri arasında

$$S \supset Sa \supset Sa^2 \supset \ldots$$

şeklinde bir sıralama yapılabilir. Buradan, 2.4.4 Tanım yardımıyla, S içinde hiçbir minimal idealin olamayacağı sonucu elde edilir. □

3.3.1 Teorem ile sonsuz devirli bir yarıgrubun idealleri belirlendi. Sonlu devirli yarıgruplar için de öz idealler benzer şekilde belirlenir. Ancak bu durumda bazı idealler birbirinin aynısı olabilir. Çünkü, aşağıda belirtileceği gibi, sonlu devirli yarıgrup bir minimal ideale sahiptir.

3.3.2 Teorem [11]: $S = \langle a \rangle = M(m,r)$ indeksi m ve periyodu r olan devirli bir yarıgrup olsun. Bu yarıgrup için, 3.2.1 Tanımda verilen, $K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$ kümesi minimal idealdir.

İspat: $K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$ kümesinin S için bir ideal olduğu, 2.1.1 Tanım uygulanarak hemen görülür.

Şimdi bu idealin minimal ideal olduğunu gösterelim. Bunun için, S nin başka bir I idealini alalım ve $I \subseteq K_a$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde I idealinin K_a nın da bir ideali olacağı açıktır. Ancak K_a kümesi, 2.4.2 Teorem (iii) yi sağladığından, basittir. Dolayısıyla, 2.4.1 Tanım gereği, $I = K_a$ dır. □

3.3.3 Örnek: $S = \langle a \rangle = M(3,2)$ indeksi 3 ve periyodu 2 olan devirli bir yarıgrup olsun. Bu durumda $a^5 = a^3$ ve $S = \{a, a^2, a^3, a^4\}$ olur.

Şimdi S nin öz ideallerini belirlersek, karşımıza

$$Sa = \{a^2, a^3, a^4\}$$
$$Sa^2 = \{a^3, a^4\} = Sa^3 = Sa^4$$

çıkar. Buradan

$$Sa \supset Sa^2 = Sa^3 = Sa^4$$

olduğu görülmektedir. Ayrıca, 3.2.1 Tanım gereği, $K_a = \{a^3, a^4\}$ olur. O halde $S = \langle a \rangle = M(3,2)$ devirli yarıgrubu minimal ideale sahiptir ve bu ideal $K_a = \{a^3, a^4\}$ dir. ◊

3.4 Devirli Yarıgrupların Bazı Özellikleri-III (*Basitlik*)

3.3 Alt Bölümde devirli bir yargrubun ideallerinin nasıl belirleneceği ve bu ideallerin hangi özelliği sağlayacağı irdelenmişti. Burada ise, 2.4 Alt Bölümde bahsedilen, yarıgrupların "basit" olma özelliği devirli yarıgruplar için sonluluk ve sonsuzluk durumuna göre incelenecektir. Ancak;

► Sonsuz devirli yarıgrupların basit olamayacağı, 3.3.1 Teorem yardımı ile açıkça görülmektedir.

► Sonlu devirli yarıgrupların, özel durumlar dışında, basit olmayacağı, 3.3.2 Teoremden söylenebilir.

Şimdi sonluluk için söz edilen "özel durum" ile ilgili aşağıdaki teorem elde edilebilir:

3.4.1 Teorem: İndeksi 1 ve periyodu *r* olacak şekildeki bir $M(1,r)$ devirli yarıgrubu basittir.

İspat: $M(1,r)$ yarıgrubu, 3.2.6 Sonuç gereği, bir gruptur. Dolayısıyla bu yarıgruptaki her elemanın tersi vardır ve 2.4.2 Teorem (iii) sağlanır. O halde indeksi 1 ve periyodu *r* olan her devirli yarıgrup basittir. □

3.5 Devirli Yarıgrupların Bazı Özellikleri-IV (*Regülerlik*)

Bir önceki alt bölümde incelenen "basitlik" özelliğine ek olarak, bu alt bölümde devirli yarıgruplar üzerinde "regülerlik" özelliğini inceleyerek, devirli yarıgrupları sınıflandırma işlemine devam edebiliriz.

2.3 Alt Bölümdeki yarıgrupların regülerliğini göz önünde bulundurarak, devirli bir yarıgrubun regülerliği ile ilgili şunları söyleyebiliriz:

► 3.1.3 Tanım ile verilen sonsuz devirli bir yarıgrup için, 2.3.1 Tanımda verilen regülerlik tanımı göz önüne alındığında, bu yarıgrupların regüler olamayacağı ve de hiçbir regüler eleman içermeyeceği kolayca görülür.

► Peki, sonlu devirli yarıgruplar regüler midir? Bu sorunun yanıtı indeksi 1 olan sonlu devirli yarıgruplar için "evet", indeksi 1 den farklı olan sonlu devirli yarıgruplar için "hayır" dır. Çünkü indeksi 1 olan devirli yarıgruplar, 3.2.6 Sonuçta belirtildiği gibi, grup yapısı oluşturur ve bir grupta her elemanın tersi var olduğu için 2.3.1 Tanımdaki regülerlik koşulu doğal olarak sağlanır. İndeksin 1 den farklı olması durumunu ise aşağıdaki teorem ve örnek açıklamaktadır.

3.5.1 Teorem: $m > 1$ olmak üzere, $S = \langle a \rangle = M(m, r)$ sonlu devirli yarıgrubunun regüler elemanlarının oluşturduğu küme, aslında S nin çekirdeği olan $K_a = \{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$ kümesidir.

İspat: Burada öncelikle S yarıgrubunun çekirdeğinde yer almayan elemanların regüler olmadığını gösterip ardından S nin çekirdeğindeki tüm elemanların regüler olduğunu ispatlayacağız.

* <u>$1 \leq s < m$ *olmak üzere,* $a^s \in S$ *elemanı regüler bir eleman olsun*</u>. Bu durumda, 2.3.1 Tanım gereği,

$$a^s a^k a^s = a^s$$

olacak şekilde bir $a^k \in S \quad (1 \le k \le m+r-1)$ elemanı vardır. O halde

$$a^s a^k a^s = a^s \Rightarrow a^{2s+k} = a^s$$

yazılabilir. Burada iki durum söz konusudur.

<u>1. Durum:</u> $2s+k \ge m$ ise, bölme algoritmasından,

$$2s+k = m+qr+u \qquad (q \ge 0 \quad \text{ve} \quad 0 \le u \le r-1)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} a^{2s+k} = a^s &\Rightarrow a^{m+qr}a^u = a^s \\ &\Rightarrow a^m a^u = a^s \qquad \text{((3.2) eşitliğinden)} \\ &\Rightarrow a^{m+u} = a^s \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak bu durum $s < m$ oluşu ile çelişir. O halde $a^s \in S$ regüler değildir.

<u>2. Durum:</u> $2s+k < m$ ise $a^{2s+k} = a^s$ eşitliğinin var olması için gerek ve yeter şart $2s+k = s$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Böyle bir eşitliğin sağlanması *k* ve *s* nin pozitif tamsayı olmaları ile çelişir. O halde $a^s \in S$ regüler değildir.

* <u>$m \le s \le m+r-1$ *olmak üzere,* $a^s \in S$ *elemanını alalım*</u>. Bu durumda, 3.2.1 Tanım gereği, $a^s \in K_a$ olur. Ayrıca, 3.2.2 Teoremden, K_a nın grup olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla a^s nin K_a içinde

$$a^s a^{-s} = a^{-s} a^s = 1_{K_a}$$

olacak şekilde bir tersi vardır. Buradan

$$a^s a^{-s} a^s = 1_{K_a} a^s = a^s$$

eşitliği elde edilir. O halde, 2.3.1 Tanım gereği, $a^s \in K_a \subset S$ elemanı regülerdir ve böylece S nin regüler elemanlarının oluşturduğu küme

$$K_a = \left\{a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\right\}$$

şeklindedir. □

3.5.2 Örnek: 3.3.3 Örnekteki $S = \langle a \rangle = M(3,2)$ yarıgrubunun tüm elemanlarının regülerliğini araştıralım.

İlk olarak

- $a \in S$ elemanı için, $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in S$ elemanı var mıdır?

sorusunu göz önünde bulundurmalıyız.

S yarıgrubu değişmeli olduğundan

$$aba = a \Rightarrow a^2 b = a \tag{3.6}$$

yazılabilir. Ancak S nin indeksi 3 olduğundan, bu eşitliği sağlayacak olan bir b elemanı bulunamaz. O halde $a \in S$ regüler değildir.

İkinci olarak

- $a^2 \in S$ elemanı için, $a^2 b a^2 = a^2$ olacak şekilde $b \in S$ elemanı var mıdır?

sorusuna cevap ararsak,

(3.6)'da belirtilen duruma benzer olarak, $a^4 b = a^2$ eşitliğini sağlayacak bir b elemanı bulunamaz. O halde $a^2 \in S$ elemanı da regüler değildir.

S nin elemanlarının regülerliğini araştırmaya devam ettiğimizde,

- $a^3 \in S$ elemanı için,

$$a^3ba^3 = a^3 \Rightarrow a^6b = a^3 \Rightarrow a^4b = a^3$$

olduğundan $b = a \in S$ elemanı alındığında $a^3ba^3 = a^3$ eşitliği sağlanır. Böylece $a^3 \in S$ elemanının regülerliğini elde ederiz.

Son olarak

- $a^4 \in S$ elemanı için,

$$a^4ba^4 = a^4 \Rightarrow a^8b = a^4 \Rightarrow a^4b = a^4$$

olduğundan $b = a^2 \in S$ elemanı alındığında $a^4ba^4 = a^4$ eşitliği sağlanır. O halde $a^4 \in S$ elemanı regülerdir.

Yapılan işlemlerden görülebileceği gibi S yarıgrubunun regüler elemanlarının oluşturduğu küme $\{a^3, a^4\}$ dir. 3.3.3 Örnekten hatırlanacağı gibi bu küme S yarıgrubunun çekirdeğidir. ◊

Not: 2.3.8 Teorem ve 3.5.2 Teorem ile indeksi 1 den farklı olan sonlu devirli bir yarıgrubun çekirdeğinde yer almayan bir elemanının tersinir (bknz. 2.3.7 Tanım) olamayacağı sonucu elde edilir.

3.6 Devirli Yarıgrupların Bazı Özellikleri-V (*Sadeleştirilebilirlik*)

2.5.10 Tanımda bir yarıgrubun "sadeleştirilebilir" olma özelliğinden, diğer bir deyişle bir S yarıgrubunda $\forall a,b,c \in S$ için, hem $ac = bc$ iken $a = b$ hem de $ca = cb$ iken $a = b$ eşitliğinin sağlanması durumunda S nin sadeleştirilebilir olmasından bahsedilmişti.

Bu alt bölümde, önceki alt bölümde olduğu gibi, devirli bir yarıgrubun sadeleştirilebilir olma özelliği sonluluk ve sonsuzluk durumunda ayrı ayrı incelenecektir. Ancak;

► 3.1.3 Tanımda verilen sonsuz devirli bir yarıgrup için, 2.5.10 Tanımda verilen sadeleştirilebilirlik özelliği göz önüne alındığında, bu yarıgrupların sadeleştirilebilir olduğu kolayca görülebilir.

► Sonlu devirli yarıgruplar sadeleştirilebilir midir? Şeklindeki sorunun yanıtı, regülerlik konusunda olduğu gibi, indeksi 1 olan sonlu devirli yarıgruplar için "evet", indeksi 1 den farklı olan sonlu devirli yarıgruplar için "hayır" dır. Çünkü indeksi 1 olan yarıgruplar, 3.2.6 Sonuçta belirtildiği gibi bir grup ve 3.5 Alt Bölümde verildiği gibi regüler olduğundan, 2.5.10 Teoremin (iii) koşulunu sağlar. Dolayısıyla indeksi 1 olan sonlu devirli yarıgruplar sadeleştirilebilir olur.

Şimdi indeksin 1 den farklı olması durumunu açıklayalım.

$m > 1$ olmak üzere $S = \langle a \rangle = M(m, r)$ sonlu devirli yarıgrubu, 3.1.5 Tanımda verildiği gibi, $S = \{a, a^2, ..., a^m, a^{m+1}, ..., a^{m+r-1}\}$ şeklindedir. Bu yarıgruptan seçilen a, a^{m-1} ve a^{m+r-1} elemanları için, $a^{m-1} \neq a^{m+r-1}$ dir. Fakat seçilen bu elemanlar

$$aa^{m-1} = a^m = a^{m+r} = aa^{m+r-1} \Rightarrow aa^{m-1} = aa^{m+r-1}$$

eşitliğini sağlar. Buradan görüldüğü gibi, $S = \langle a \rangle = M(m, r)$ yarıgrubu 2.5.9 Tanımdaki sadeleştirilebilirlik özelliğini sağlamaz. O halde indeksi 1 den farklı olan sonlu devirli bir yarıgrup sadeleştirilebilir değildir.

Yukarıda yapılan açıklamalar ile aşağıdaki teorem elde edilir.

3.6.1 Teorem: $m > 1$ olmak üzere, $S = \langle a \rangle = M(m, r)$ sonlu devirli yarıgrubu sadeleştirilebilir değildir.

3.7 Devirli Yarıgrupların Bazı Özellikleri (*Sunuşlar*)

1.5.10 Tanım ile herhangi bir yarıgrubun sunuşunun tanımı verilerek,1.5.14 Örnekte sonlu devirli bir yarıgrubu temsil eden sunuş belirtilmişti. Bu bölümde ise verilen bu sunuşun gerçekten m indeksli ve r periyotlu sonlu devirli bir yarıgrubu temsil ettiği ispatlanacaktır.

Bir devirli yarıgrup sunuşu yardımıyla, bu sunuşun temsil ettiği yarıgrubun hali hazırda izomorf olduğu ancak bizim pek bir bilgi sahibi olmadığımız yarıgruba ulaşılabilir. Bunun için diğer yarıgrubun yine sunuşu elde edilmelidir. Bu iki sunuş arasında gidip-gelme işlemini "*Tietze dönüşümleri*" (bknz. [5]) yardımıyla yapabiliriz. Aslında bu kavram yardımıyla, ileri aşama problemleri elde edilip, çözülebilecektir. Örneğin indeksi 5 ve periyodu 2 olan $\left[x; x^5 = x^3\right]$ sunuşlu bir yarıgrubun direkt çarpım (veya yarı-direkt çarpım) altında izomorf olduğu, ancak bizim bilmediğimiz yarıgrubun sunuşu elde edilip, bu sunuş yardımıyla o yarıgrup hakkında gerekli bilgiler sağlanabilecektir.

Şimdi ispatı [18] de bulunabilecek olan aşağıdaki önteoremi verelim ve ardından sonlu devirli bir yarıgrubun sunuşunu ispatlayalım.

3.7.1 Önteorem: S bir yarıgrup, A kümesi S nin üreteç kümesi ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ bir bağıntı kümesi olsun. Bu durumda $\left[A; R\right]$ sunuşunun S yarıgrubunu temsil etmesi için gerekli ve yeterli koşul

(i) S yarıgrubunun R deki bağıntıları sağlaması,

(ii) Eğer $u, v \in A^+$ kelimeleri S de $u = v$ eşitliğini sağlayan herhangi iki kelime ise bu eşitliğin R den elde edilebilmesi,

özelliklerinin sağlanmasıdır.

3.7.2 Teorem: $\left[a; a^{m+r} = a^m\right]$ sunuşu, indeksi m ve periyodu r olan $m + r - 1$ mertebeli devirli yarıgrubu temsil eder.

İspat: İndeksi m ve periyodu r olan $S=\{a,a^2,...,a^m,a^{m+1},...,a^{m+r-1}\}$ yarıgrubunu alalım. 3.1.5 Tanımdan bilindiği gibi, m sayısı bir a^k $(k\in\mathbb{Z}^+)$ elemanının tekrar ettiği en küçük pozitif tamsayıdır ve a^m ye eşit olan ilk kuvvet a nın $m+r$. kuvvetidir. Böylece S yarıgrubu $a^m=a^{m+r}$ bağıntısını sağlar.

S nin $a^{p_1}=a^{p_2}$ şeklindeki bağıntıyı sağladığını varsayalım. Bu eşitlik sayesinde a^{p_1} elemanına eşit olan ilk kuvvetin a^{p_2} olduğunu kabul edelim. Şimdi bu bağıntının $a^m=a^{m+r}$ bağıntısından elde edilebileceğini gösterelim.

- Eğer $p_1=p_2$ ise $a^{p_1}=a^{p_2}$ olup, bu durumda ispat için yapılacak bir şey yoktur.
- $p_2>p_1$ olsun. Buradan sonuca ulaşabilmek için öncelikle aşağıdaki sonuç ispatlanmalıdır.

┌

Önerme: Eğer $p_1,p_2\geq m$ ve $p_1\equiv p_2 \pmod r$ ise bu durumda $a^{p_1}=a^{p_2}$ bağıntısı $a^m=a^{m+r}$ den elde edilebilir.

İspat: $p_1\equiv p_2 \pmod r$ olduğundan $p_2-p_1=kr$ $(k\in\mathbb{N})$ yazılabilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
a^{p_1} &= a^{kr+p_2} = a^{kr+m}a^{p_2-m}\\
&= a^{(k-1)r}a^{r+m}a^{p_2-m} = a^{(k-1)r}a^{m}a^{p_2-m}\\
&= a^{(k-2)r}a^{m+r}a^{p_2-m} = a^{(k-2)r}a^{m}a^{p_2-m}\\
&= \ldots = a^{m}a^{p_2-m} = a^{p_2}
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde $a^{p_1}=a^{p_2}$ bağıntısı $a^m=a^{m+r}$ den elde edilebilir.

┘

S yarıgrubunda tekrarı sağlayan en küçük kuvvet m olduğundan $p_1 \geq m$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $p_1, p_2 \geq m$ elde edilmiş olur.

Şimdi $r \nmid p_2 - p_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bölme algoritmasından

$$p_2 - p_1 = kr + q \qquad (k \in \mathbb{N} \quad \text{ve} \quad 0 < q < r)$$

yazılabilir. Buradan

$$a^{p_1} = a^{p_1 - m} a^m = a^{p_1 - m} a^{m+r} = \ldots = a^{p_1 - m} a^{kr+m} = a^{p_1 + kr} = a^{p_2 - q} \quad ,$$

yani $a^{p_1} = a^{p_2 - q}$ elde edilir. Ancak $p_2 - q < p_2$ olduğundan, bu durum a^{p_1} in ilk tekrarının a^{p_2} olması ile çelişir. O halde $p_1 \equiv p_2 \pmod{r}$ dir ve önerme gereği $a^{p_1} = a^{p_2}$ bağıntısı $a^m = a^{m+r}$ den elde edilir. Böylece, 3.7.1 Önteorem (ii) yardımıyla, S yarıgrubunun sunuşu $\left[a \, ; a^{m+r} = a^m \right]$ olacaktır. □

Not: Burada yarıgruplar üzerinde çalışmalar yapıldığı için sadece devirli yarıgruplara yer verilmiştir. Gruplar ve monoidler ile ilgili yapılan ayrıntılı çalışmalara [1, 5, 6, 9] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez üç ana bölüm altında toplanmış olup bu bölümlerde aşağıda özet olarak belirteceğimiz sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci bölümde, bir S yarıgrubunun yapısı tanımlanarak, tüm çalışmaya bir giriş yapılmıştır. Bununla birlikte bazı yarıgrup çeşitleri ile ilgili temel tanım, özellik ve teoremler verilmiştir. Bölümün son kısmında ise serbest yarıgruplar kullanılarak bölüm yarıgrupları elde edilmesinden ve bu bölüm yarıgruplarının "*sunuş*" olarak isimlendirilmesinden bahsedilmiştir. Ayrıca bu kısımda grup ve monoid yapıları için, sunuş tanımları ve ilgili teoremleri verilerek, bu üç cebirsel yapının sunuşları arasındaki önemli geçişler incelenmiştir.

İkinci bölümde, yarıgrup yapılarının sağladığı bazı özelliklere göre farklı sınıflara ayrılmasından ve buna ek olarak bu sınıfların belirlenmesinde kullanılan genel tanımlardan (2.1 İdealler ve 2.2 Green Denklik Sınıfları) bahsedilmiştir. Sonraki alt bölümlerde ise yarıgrupların birçok sınıfı (2.3 Regülerlik, 2.4 Basitlik ve 2.5 Rectangular Band) ayrıntılı olarak incelenmiş ve bazı sınıflar arasında ilişkilerin olduğu (2.5.3 Teorem ve 2.5.6 Sonuç) görülmüştür. Ayrıca yarıgrup teoride önemli bir yere sahip olan Green Teoremi (2.2.14 Teorem) ve Rees Teoremleri (2.4.7 Teorem, 2.4.9 Teorem ve 2.4.16 Teorem) verilmiştir. Bu bölümün sonunda ise regüler bir yarıgrup için, [11] de ispatsız olarak verilen, 2.5.11 Teoremin ispatı tarafımızdan yapılmıştır.

Üçüncü bölümün tamamı önemli bir yarıgrup çeşidi olan "*devirli yarıgruplara*" ayrılmıştır. Burada ilk olarak devirli yarıgrup tanımı verilerek, elemanlarının nasıl belirlendiği açıklanmıştır. Kalan kısımlarda ise devirli yarıgrupların, 2. Bölümde verilen yarıgrup sınıflarına dahil olup olmadığı ve hangi şartlarda dahil olabileceği tarafımızdan incelenmiştir. Bununla birlikte son alt bölümde devirli bir yarıgrubun sunuşu verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Ateş, F. and Çevik, A. S., "Minimal but Inefficient Presentations for Semi-direct Product of Finite Cyclic Monoids", Groups St. Andrews 2005, *LMS Lecture Note Series*, Volume 1, **339** (2006), 170-185.

[2] Ateş, F., Yarıgrup ve Yarıgrup Sonuçları, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, (2004).

[3] Ayık, G., Ayık, H. and Howie, J. M., "On Factorisations and Generators in Transformation Semigroups", *Semigroup Forum*, **70** (2005), 225-237.

[4] Carvalho, C., Presentations of Semigroups and Inverse Semigroups, M. Sc. Dissertation, University of St. Andrews, (2002).

[5] Çevik, A. S., Minimality of Group and Monoid Presentations, Ph. D. Thesis, University of Glasgow, (1997).

[6] Çevik, A. S., "The *p*-Cockcroft Property of Semi-Direct Product of Monoids", *Int. Journal of Algebra and Comp.*, **13**(1), (2003), 1-16.

[7] Gomes, G. M. S., Pin, J.-□. and Silva, P. V., Semigroups, Algorithms, Automata and Languages, World Scientific Publishing Co., (2001).

[8] Gray, R. and Ruškuc, N., "Generating Sets of Completely 0-Simple Semigroups", *Comm. Algebra*, **33** (2005), 4657-4678.

[9] Güzel, E., Grup ve Monoid Cebirsel Yapısında Karar Verme Problemleri, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, (2006).

[10] Higgins, P. M., Tecniques of Semigroup Theory, Oxford University Press, New York, (1992).

[11] Howie, J. M., Fundamentals of Semigroup Theory, Series ed. H. G. Dales, and P. M. Neumann, *LMS Monographs New Seires*, Clarendon Press, Oxford, (1995).

[12] Johnson, D. L., Presentations of Groups, London Mathematics Society Student Texts, **15**, Cambridge University Pres, (1990).

[13] Magnus, N., Karras, A. and Solitar, D., Combinatorial Group Theory, Dover Publications, Inc., New York, (1976).

[14] Malik, D. S., Mordeson, J. M. and Sen M. K., Fundamentals of Abstract Algebra, The McGraw-Hill Companies, Inc., (1997).

[15] Petrich, M., Introduction to Semigroups, ed. E. Kleinfeld, C. E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, (1973).

[16] Rotman, J. J., An Introduction to the Theory of Groups, Wm. C. Brown Publishers, Third Edition, Iowa, (1988).

[17] Ruškuc, N., “On the Rank of Completely 0-Simple Semigroups”, *Math. Proc. Cambridge Philos Soc.*, **116** (1994), 325-338.

[18] Ruškuc, N., Semigroup Presentations, Ph. D. Thesis, University of St. Andrews, (1995).

[19] Schein, B. M. And Teclezghi, B., “Endomorphisms of Finite Full Transformation Semigroups”, *Proceedings of The American Math. Society*, **129**(9), (1998), 2579-2587.