T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\ell(p), \ell_\infty(p), c_0(p)$ ve $c(p)$ DİZİ UZAYLARININ SÜREKLİ DUALLERİ VE BU UZAYLAR ARASINDAKİ MATRİS KARAKTERİZASYONLARI

YÜSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan: Müberra CEMEK

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Osman ÖZDEMİR

TOKAT-2006

$\ell(p), \ell_{\infty}(p), c_0(p)$ ve $c(p)$ DİZİ UZAYLARININ SÜREKLİ DUALLERİ VE BU UZAYLAR ARASINDAKİ MATRİS KARAKTERİZASYONLARI

Müberra CEMEK

YÜSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TOKAT-2006

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\ell(p), \ell_\infty(p), c_0(p)$ ve $c(p)$ DİZİ UZAYLARININ SÜREKLİ DUALLERİ VE BU UZAYLAR ARASINDAKİ MATRİS KARAKTERİZASYONLARI

Müberra CEMEK

YÜSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 26/07/2006 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Ünvanı,		**Adı ve Soyadı**	**İmza**
Başkan	:	Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU	
Üye	:	Prof.Dr. Bahtiyar MEHMEDOĞLU	
Üye	:	Yrd.Doç.Dr.Osman ÖZDEMİR	
Üye	:	Yrd.Doç.Dr. Ercan TUNÇ	
Üye	:	Yrd.Doç.Dr. Adem EROĞLU	

ONAY:

Bu tez ……../……../2006 tarihli ve ………..sayılı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu tarafından belirlenen jüri üyelerince kabul edilmiştir.

……./…../2006

Enstitü Müdürü

Doç.Dr.Metin YILDIRIM

ÖZET

$\ell(p), \ell_\infty(p), c_0(p)$ ve $c(p)$ DİZİ UZAYLARININ SÜREKLİ DUALLERİ VE BU UZAYLAR ARSINDAKİ MATRİS KARAKTERİZASYONLARI

Müberra CEMEK
Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
2006, 47 sayfa

Danışman	:	Yrd.Doç.Dr.Osman ÖZDEMİR
Jüri	:	Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU
Jüri	:	Prof.Dr. Bahtiyar MEHMEDOĞLU
Jüri	:	Yrd.Doç.Dr.Osman ÖZDEMİR
Jüri	:	Yrd.Doç.Dr. Ercan TUNÇ
Jüri	:	Yrd.Doç.Dr. Adem EROĞLU

Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; ilk olarak $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere, $c_0(p), c(p), \ell_\infty(p), \ell(p)$ dizi uzayları tanımlandı. Daha sonra, E, K cismindeki $x=(x_k)$ dizilerinin uzayı olmak üzere, E'nin genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali tariflenerek, bu dizi uzayları ile ilgili teoremler ispat edildi. Son olarak $\ell^*(p)$- sürekli dual uzayı ile ilgili teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde $c_0(p)$ ve $c_0(q)$, $\ell(p)$ ve $\ell_\infty(q)$, $\ell(p)$ ve $c_0(q)$, $\ell(p)$ ve $c(q)$, $c_0(p)$ ve $\ell_\infty(q)$, $c_0(p)$ ve $c(q)$, $c(p)$ ve $\ell_\infty(q)$ dizi uzayları arasındaki matris karakterizasyonları incelendi.

Dördüncü bölümde sonuç ve tartışma verildi.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzayı, paranormlu uzay, Köthe-Toeplitz duali, matris karakterizasyonu

ABSTRACT

THE MATRIX CHARACTERIZATIONS BETWEEN THESE SPACES AND CONTINUOUS DUALS OF SEQUENCE SPACES $\ell(p), \ell_{\infty}(p), c_0(p)$ and $c(p)$

Müberra CEMEK

Gaziosmanpaşa University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Masters Thesis

2006, 47 pages

Supervisor	:	**Asst.Prof.Dr. Osman ÖZDEMİR**
Jury	:	Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU
Jury	:	Prof.Dr. Bahtiyar MEHMEDOĞLU
Jury	:	Asst.Prof.Dr. Osman ÖZDEMİR
Jury	:	Asst.Prof.Dr. Ercan TUNÇ
Jury	:	Asst.Prof.Dr. Adem EROĞLU

This study consists of four main chapters. In the first chapters, the basic definitions and theorems which will be used throughout this study have been given.

In the second chapter; firstly, the sequence spaces $c_0(p), c(p), \ell_{\infty}(p), \ell(p)$ are defined where $p = (p_k)$ the bounded sequence of positive real numbers and then the theorems is included of these sequences spaces are provided by defined the generalized Köthe-Toeplitz duals of E where E is the space of the sequence $x = (x_k)$ in field *K*. Finally, the theorems related to $\ell^*(p)$- continuous dual spaces have been given.

In the third chapter, the matrix characterization among the sequence spaces $c_0(p)$ and $c_0(q)$, $\ell(p)$ and $\ell_{\infty}(q)$, $\ell(p)$ and $c_0(q)$, $\ell(p)$ and $c(q)$, $c_0(p)$ and $\ell_{\infty}(q)$, $c_0(p)$ and $c(q)$, $c(p)$and $\ell_{\infty}(q)$ were investigated.

In the fourth chapter, result and discussion were given.

Key words: The sequence space, paranormed space, the Köthe-Toeplitz dual, the matrix characterization.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışmamda, başından sonuna kadar geçen zaman içerisinde değerli fikir ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan, yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR hocama ve bölümdeki değerli hocalarıma, ayrıca eşim Yrd. Doç. Dr. Bilal CEMEK, çocuklarım Emirhan ve Berra'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

N	Doğal sayılar cümlesi
Z	Tam sayılar cümlesi
R	Reel sayılar cümlesi
C	Kompleks sayıla cümlesi
Z^+	Pozitif tam sayılar cümlesi
R^+	Pozitif reel sayılar cümlesi
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart
$\Rightarrow$	Gerektirme
$\leq$	Büyük olmayan
$\geq$	Küçük olmayan
$\subset$	Öz alt cümle
$\subseteq$	Alt cümle
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Arakesit
$\sum$	Toplam sembolü
$\in$	Elemanıdır
$\sup$	En küçük üst sınır
$\inf$	En büyük alt sınır
$\limsup$	Üst limit
$\liminf$	Alt limit
c	Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	Sınırlı diziler uzayı
A'	A 'nın yığılma noktalarının cümlesi
$\overline{A}$	A 'nın kapanış noktaları cümlesi
$B(X,Y)$	X 'ten Y 'ye bütün sınırlı lineer operatörlerin cümlesi
$L(X,Y)$	X 'ten Y 'ye bütün lineer operatörlerin cümlesi
$D(T)$	T dönüşümünün tanım cümlesi
$R(T)$	T dönüşümünün değerler cümlesi
$\|f\|$	f 'nin normu
$SpanM$	M cümlesinin span'i (germesi)
X^*	X 'in sürekli duali
X^+	X 'in Köthe-Toeplitz duali

1. GİRİŞ

Fonksiyonel Analizin temel kavramları kullanılarak, dizi uzaylarından dizi uzaylarına sürekli lineer operatörlere karşılık gelen matrislerin karakterizasyonunu yapmak matematiğin uzun zamandan beri uğraştığı en önemli çalışmalardan birisidir. Bugüne kadar bir çok araştırmacı tarafından bir hayli dizi uzayları tariflenerek, bu uzaylar arasında sürekli lineer operatörlere karşılık gelen matrislerin karakterizasyonları incelenmiştir. Bu matris sınıflarından dizi uzayları çalışmalarında önemli bir yeri olan, $(c_0,\ell_\infty),(c_0,c_0),(c_0,c),(c,\ell_\infty),(c,c_0),(c,c)$ matris sınıfları **(Stieglitz and Tietz, 1977)** adlı çalışmada karakterize edilmiştir. Bu çalışmanın birinci bölümünde, çalışma boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir. ikinci bölümde ise ilk olarak, $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere, c_0,c,ℓ_∞,ℓ dizi uzaylarının birer genellemesi olan, $c_0(p),c(p),\ell_\infty(p),\ell(p)$ dizi uzayları, ve daha sonra, E,K'daki $x=(x_k)$ dizilerinin uzayı olmak üzere, E'nin genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali tariflenerek, bu dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerini veren teoremler ispatlanacaktır. Son olarak $\ell^*(p)$ sürekli dual uzayı ile ilgili teoremler verilecektir. Üçüncü bölümde, ilk olarak bir uzayın temel cümlesi ve ilgili teoremler verildikten sonra, $c_0(p)$ ve $c_0(q)$, $\ell(p)$ ve $\ell_\infty(q)$, $\ell(p)$ ve $c_0(q)$, $\ell(p)$ ve $c(q)$, $c_0(p)$ ve $\ell_\infty(q)$, $c_0(p)$ ve $c(q)$, $c(p)$ ve $\ell_\infty(q)$ dizi uzaylarının matris karakterizasyonu verilecektir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Teorem1.1.1. E üstten sınırlı bir cümle ise, üst sınırlarının içerisinde bir en küçüğü vardır (**Anderson, 1970**).

Tanım1.1.1.(Sınırlı Dizi) $x = (x_n)$ sınırlıdır.$\Leftrightarrow$ $\forall n \in N, |x_n| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ vardır.

Bütün sınırlı dizilerin cümlesi, ℓ_∞ ile gösterilir (**Anderson, 1970**).

Tanım1.1 2.(Yakınsak Dizi) Eğer $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N \ni \forall n > N, |x_n - \ell| < \varepsilon$ kalıyorsa, $x = (x_n)$ dizisi ℓ değerine yakınsaktır denir ve

$$x_n \longrightarrow \ell(n \longrightarrow \infty) \text{ veya } \lim x_n = \ell$$

ile gösterilir.

Bütün yakınsak dizilerin cümlesi c ile gösterilir (**Maddox, 1988**).

Tanım1.1.3. (Cauchy Dizisi) Eğer

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N \ni \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \varepsilon$$

kalıyorsa, $x = (x_n)$ dizisine R'de veya C'de bir Cauchy dizisi denir.

Bütün Cauchy dizilerinin cümlesi, ile gösterilir (**Maddox, 1988**).

Tanım1.1.4. (Alt ve Üst Limit) $x \in \ell_\infty$, bir reel dizi ise, bu taktirde x'in alt ve üst limitleri

$$\limsup x_n = \inf_{k \geq 1}\left(\sup_{n \geq k} x_n\right),$$

$$\liminf x_n = \sup_{k \geq 1}\left(\inf_{n \geq k} x_n\right)$$

ile gösterilir. Aşağıdaki eşitsizlik lim sup ve lim inf arasındaki temel ilişkiyi verir:

(i) $\forall x, y \in \ell_\infty$,

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

dir.

(ii) $\forall n \in N$, $x_n \leq y_n$ ise,

$$\lim \sup x_n \leq \lim \sup y_n$$

dir.

(ii) $\forall n \in N$, $x_n \leq y_n$ ise,

$$\lim \inf x_n \leq \lim \inf y_n$$

dir (**Maddox, 1988**).

Teorem1.1.2. (s_n), $\lim \sup s_n = \mu$ olacak şekilde, sınırlı bir dizi olsun. Bu taktirde

$(i)\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N \ni \forall n > n_0(\varepsilon),\ s_n < \mu + \varepsilon$

kalır.

$(ii)\varepsilon > 0, r \in Z^+$ ise, $s_n > \mu - \varepsilon$ olacak şekilde $n > r$ şartını sağlayan $\exists n \in N$ vardır.

Tersine olarak, (i) ve (ii) şartlarını sağlayan bir μ sayısı varsa,

$$\mu = \lim \sup_n s_n$$

dir (**Anderson, 1970**).

Teorem1.1.3. (s_n), sınırlı bir dizi ve $\lim \inf_n s_n = \lambda$ olsun. Bu taktirde

$(i)\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in N \ni \forall n > n_0,\ s_n > \lambda - \varepsilon$

$(ii)\varepsilon > 0$ ve $r \in Z^+$ ise, $s_n < \lambda + \varepsilon$ olacak şekilde $n > r$ şartını sağlayan $\exists n \in N$ vardır.

Tersine olarak, (i) ve (ii) şartlarını sağlayan bir λ sayısı varsa,

$$\lambda = \lim \inf_n s_n$$

dir (**Anderson, 1970**).

Teorem1.1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaksa, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$'dır (**Anderson, 1970**).

Teorem1.1.5. $((s_n),(t_n)) \in c_0 \times \ell_\infty \Rightarrow (s_n.t_n) \in c_0$ (**Anderson, 1970**).

Teorem1.1.6. $\forall a,b \in R^{+} \cup \{0\}$ ve $0 < p < 1$,

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p$$

dir.

Tanım1.1.5.(Metrik Uzay) $X \neq \varnothing$ olsun. $d : X \times X \rightarrow R$ tanımlı fonksiyon, aşağıdaki özelikleri sağlıyorsa, X için bir metrik denilir ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir:

M_1) d reel değerli, sonlu ve nonnegatiftir.

M_2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M_3) $\forall x,y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$ dir.

M_4) $\forall x,y,z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dir.

M_3 özeliğine simetri özeliği, M_4 özeliğine üçgen eşitsizliği denir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.6. (X,d) bir metrik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Eğer $\forall x,y \in Y$,

$$d_Y(x,y) = d(x,y)$$

ile tanımlı $d_Y : Y \times Y \rightarrow R$ metriğine d'nin Y'ye kısıtlaması denir. (Y,d_Y)'ye de (X,d)'nin alt metrik uzayı denir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.7. (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$de boştan farklı bir cümle olsun. $\sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$ sayısına, A cümlesinin çapı denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir. Yani

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

dır. Eğer $\delta(A) < \infty$ ise, A cümlesine, sınırlı cümle denir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.8.(*i*) (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verilsin. Bu taktirde $\{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ cümlesine, x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık top denir ve $B(x_0,r)$ ile gösterilir

(*ii*) $\{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$ cümlesine, x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı top denir ve $\widetilde{B}(x_0,r)$ ile gösterilir.

(iii) $\{x \in X : d(x,x_0) = r\}$ cümlesine, x_0 merkezli r yarıçaplı küre denir ve $S(x_0,r)$ ile gösterilir.

$S(x_0,r) = \widetilde{B}(x_0,r) \backslash B(x_0,r)$ dir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.9. (**Sürekli Dönüşüm**) $X = (X,d)$, $Y = \left(Y,\widetilde{d}\right)$ verilen iki metrik uzay olsun. Bir $T : X \rightarrow Y$ dönüşümüne, eğer

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni d(x,x_0) < \delta$ şartını sağlayan bütün x'ler için $\widetilde{d}(T_x, T_{x_0}) < \varepsilon$

kalıyorsa, X'in x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer T, X'in her noktasında sürekli ise X'te süreklidir ya da sadece süreklidir denir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.10. X, bir metrik uzay, $M \subset X$ olsun. Eğer M'nin her noktasının her bir civarı bir açıktop ihtiva ediyorsa, M'ye açıktır denir (**Kreyszig, 1978**).

Teorem1.1.7. Bir X metrik uzayından bir Y metrik uzayına bir T dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ Y'nin herhangi bir açık alt cümlesinin ters görüntüsü X'in açık alt cümlesidir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.11. (**Yığılma Noktası**) M, bir X metrik uzayının bir alt cümlesi olsun. Bu taktirde eğer x_0'ın her komşuluğunda x_0'dan farklı M'nin en az bir noktası varsa, X'in bir x_0 noktasına (M'nin elemanı olabilir de olmayabilir de) M'nin bir yığılma noktası (limit noktası) denir.

M'nin noktalarından ve M'nin yığılma noktalarından oluşan cümleye M'nin kapanışı denir ve $\overline{M}$ ile gösterilir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.12. (**Metrik uzayda yakınsaklık ve limit**) (X,d) bir metrik uzay, (x_n) de X'te bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N \ni \forall n > N,\ d(x_n,x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x'e (x_n) dizisinin limiti denir. Bu, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya

$x_n \to x \; (n \to \infty)$ şeklinde gösterilir. Eğer (x_n) yakınsak değilse, buna ıraksak denir (**Kreyszig, 1978**).

Teorem1.1.8.(i) (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde X'te yakınsak bir dizi sınırlıdır ve limiti tektir.

(ii) $x_n \to x \, , y_n \to y$, $x,y \in X$ ise, $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$ dir (Kreyszig, 1978).

Tanım1.1.13. (**Metrik uzayda Cauchy dizisi ve tamlık**) (X,d) metrik uzay, (x_n), X'te bir dizi olsun. (x_n)'e, eğer

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N \ni \forall n,m > N(\varepsilon), \; d(x_n,x_m) < \varepsilon$

kalıyorsa, bir Cauchy dizisi (esas dizi) denir. Eğer X'teki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X'e, tamdır denilir (**Kreyszig, 1978**).

Teorem1.1.9. R, reel doğrusu ve C, kompleks düzlemi tamdır (**Anderson, 1970**).

Teorem1.1.10. Bir metrik uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir (**Kreyszig, 1978**).

Teorem1.1.11. Bir (X,d) metrik uzayından bir $\left(Y,\tilde{d}\right)$ metrik uzayı içine bir $T : X \to Y$ dönüşümü bir $x_0 \in X$ noktasında süreklidir.$\Leftrightarrow$ $x_n \to x_0$ ise, $T_{x_n} \to T_{x_0}$ dir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.14.(**İzometrik dönüşüm ve İzometrik uzay**) (i) $X = (X,d)$ ve $\tilde{X} = \left(\tilde{X},\tilde{d}\right)$ verilen iki metrik uzay olsun. Bu taktirde eğer

$\forall x,y \in X, \; \tilde{d}(T_x,T_y) = d(x,y)$ ise,

X'ten $\tilde{X}$'ya Tdönüşümüne izometri denir (**Kreyszig, 1978**).

(ii) X'ten $\tilde{X}$'ya üzerine ve birebir bir izometri varsa, X uzayına $\tilde{X}$ uzayı ile izometriktir denir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.15. X, boş olmayan bir cümle, X'in alt cümlelerinin bir τ cümlesi aşağıdaki üç özeliği sağlıyorsa τ ailesine, X için bir topoloji denir:

τ_1) Hem $\varnothing$ hem de X cümlesi, τ ailesine aittir.

τ_2) τ ailesindeki cümlelerin herhangi sayılabilir birleşimi yine τ ailesindedir.

τ_3) τ ailesindeki cümlelerin herhangi sonlu arakesiti yine τ ailesindedir.

(X,τ)'ya topolojik uzay denilir. X ile de gösterilebilir (**Lipschutz, 1965**).

Tanım1.1.16. K, bir cisim olsun, X de elemanlarının bileşenleri K'da seçilen bir cümle olsun.

$$+ : X \times X \to X$$
$$(x,y) \to +(x,y) = (x+y)$$

ile tanımlı "+" işlemi ve

$$\bullet : K \times X \to X$$

$$(\alpha,x) \to \bullet(\alpha,x) = \alpha x$$

ile tanımlı "•" işlemi tanımlı olsun.

$V_1) \forall x,y \in X, x+y \in X$

$V_2) \forall x,y \in X, x+y = y+x \in X$

$V_3) \forall x,y,z \in X, x+(y+z) = (x+y)+z$

$V_4) \forall x \in X, x+\theta = \theta+x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır.

$V_5) \forall x \in X, x+x' = x'+x = \theta$ olacak şekilde $x' = -x \in X$ vardır.

$V_6) \forall \alpha \in K, \forall x \in X, \alpha x \in X$

$V_7) \forall x \in X, 1x = x$

$V_8) \forall \alpha,\beta \in K, \forall x \in X, (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

$V_9) \forall \alpha,\beta \in K, \forall x \in X, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$V_{10}) \forall \alpha \in K, \forall x,y \in X, \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Eğer X üzerinde "+" ve "•" işlemleri yukarıdaki özelikleri sağlıyorsa, X'e K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir ve $(X, +, \bullet)$ ile gösterilir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.17. Bir X lineer uzayından bir Y lineer uzayına dönüşüme, bir operatör denilir. X'ten Y'ye bütün lineer operatörlerin cümlesi $L(X, Y)$ ile gösterilir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.18. X bir K cismi üzerinde lineer uzay olsun. X'ten K'ya bir operatöre, fonksiyonel denir. Eğer, $K = R$ ise, fonksiyonele reel değerli fonksiyonel, $K = C$ ise, fonksiyonele kompleks değerli fonksiyonel denir. Reel değerli fonksiyonellerin cümlesi $L(X, R)$, kompleks değerli fonksiyonellerin cümlesi $L(X, C)$ ile gösterilir. $L(X, R)$ ve $L(X, C)$'ye, X'in cebirsel duali denir ve $X^{\dagger}$ ile gösterilir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.19. Bir X vektör uzayının alt uzayı $\forall y_1, y_2 \in Y$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ olacak şekildeki X'in boş olmayan bir Y alt cümlesidir. Bu yüzden de tanımdan dolayı Y'nin kendisi bir vektör uzayıdır (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.20. Bir X vektör uzayının $x_1, x_2, ..., x_m$ elemanlarının lineer kombinasyonu (birleşimi), $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ herhangi skalerler olmak üzere

$$\beta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in X$$

şeklinde ifade edilen bir vektördür. X'in boş olmayan herhangi bir M alt cümlesi için, M'nin vektörlerinin bütün lineer kombinasyonlarının cümlesine M'nin Span (germe)'i denir. Yani

$$SpanM = \left\{\beta : \beta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m \ \Lambda \ x_1, x_2, ..., x_m \in M, m \in N, \alpha_i \in K\right\}$$

dir. Eğer $Y = SpanM$ dersek, Y, X'in bir alt vektör uzayıdır (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.21. $x_1, x_2, ..., x_r$ vektörlerinin cümlesi, M olsun. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ de skalerler olsun. Eğer,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_r x_r = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0 \text{ ise,}$$

M cümlesine, lineer bağımsız cümle denir. Aksi taktirde lineer bağımlıdır denir **(Kreyszig, 1978)**.

Tanım1.1.22. Bir X vektör uzayına eğer X, n –tane lineer bağımsız vektör ihtiva edecek şekilde bir $n \in Z^+$ varsa, sonlu boyutludur denir.

n'ye de X'in boyutu denir ve $\dim X = n$ ile gösterilir. Eğer X sonlu boyutlu değilse, sonsuz boyutludur denir.

Eğer $\dim X = n$ ise, X'in vektörlerinin bir lineer bağımsız n –lisine, X için bir baz ya da X'te bir baz denir.

Eğer $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, X için bir baz ise, $\forall x \in X$, baz vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak bir tek şekilde ifade edilir **(Kreyszig, 1978)**.

Tanım1.1.23. $X \neq \emptyset$ bir vektör uzayı olsun (reel veya kompleks). Bu taktirde

$\forall x \in X, \|.\|(x) = \|x\|$ ile tanımlı $\|.\| : X \to R$ fonksiyonu;

$N_1) \forall x \in X, \quad \|x\| \geq 0$

$N_2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$N_3) \forall \alpha \in K$ ve $\forall x \in X, \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$N_4) \forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özeliklerini sağlıyorsa, X üzerinde bir norm denir. Eğer X uzayı üzerinde $\|.\|$ fonksiyonu tanımlıysa, $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir, kısaca X ile gösterilir **(Kreyszig, 1978)**.

Tanım1.1.24. X üzerinde bir $\|.\|$ normu $\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = \|x - y\|$ ile verilen X için bir d metriğini tarifler. Bu metriğe norm ile doğrulan metrik denir **(Kreyszig, 1978)**.

Tanım1.1.25. (i) Eğer T'nin $D(T)$ tanım cümlesi ve $R(T)$ değerler cümlesi, aynı bir cisim üzerinde vektör uzayları olmak üzere T bir dönüşüm (operatör)

(ii) $\forall x,y \in D(T)$ ve $\forall \alpha \in K$ (cisim) için $\quad T_{x+y} = T_x + T_y \quad ve \quad T_{\alpha x} = \alpha T_x$

ise, bu taktirde $T : D(T) \to R(T)$ operatörüne, $D(T)$ üzerinde bir lineer operatör

denir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.26. X ve Y, normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ bir lineer

operatör olsun. Eğer,

$\forall x \in D(T), \|T_x\| \leq c.\|x\|$

olacak şekilde bir c pozitif reel sabiti varsa, $T-$ lineer operatörüne sınırlıdır denir.

X'ten Y'ye bütün sınırlı lineer operatörlerin cümlesi, $B(X,Y)$ ile gösterilir.

$B(X,R)$ veya $B(X,C)$'ye, X'in sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir (**Kreyszig, 1978**).

Teorem1.1.12.(i) X normlu uzayından Y normlu uzayı içine bütün sınırlı lineer operatörlerin

$B(X,Y)$ liner uzayı, $A \in B(X,Y)$ olmak üzere,

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\|/\|x\| : x \neq \theta\}$$

ile bir normlu uzaydır.

(ii) Y, bir Banach uzayı ise, bu taktirde $B(X,Y)$, (i)'nin normu altında bir Banach uzayıdır

(**Maddox, 1988**).

Teorem1.1.13. Eğer X normlu uzayı, sonlu boyutlu ise, X üzerinde her lineer operatör

sınırlıdır (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.27. $T : D(T) \to R(T)$ (lineerliği gerekli olmayan) herhangi bir operatör ve

$D(T) \subset X$ ve X ve Y de normlu uzaylar olsun.

T operatörü, bir $x_0 \in D(T)$ 'de süreklidir.$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall x \in D(T) \cap B(x_0,\delta)$

için $T_x \in R(T) \cap B(T_{x_0},\varepsilon)$ kalır (**Kreyszig, 1978**).

Teorem1.1.14. $D(T) \subset X$ ve X ve Y de normlu uzaylar olmak üzere $T : D(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu taktirde

(i) T süreklidir.$\Leftrightarrow$ T sınırlıdır.

(ii) Eğer T bir noktada sürekli ise, T süreklidir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.28. $B \subset D(T)$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ bir operatör olsun. $\forall x \in B$ için

$T_x^* = T_x$ olacak şekilde $T^* : B \to Y$

operatörü varsa, T^* operatörüne, T operatörünün B'ye kısıtlaması denilir ve $T^* = T_B$

ile gösterilir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.29. $D(T) \subset M$ ve $T : D(T) \to Y$ bir operatör olsun. $\forall x \in D(T)$ için $\tilde{T}_x = T_x$

olacak şekilde tariflenen bir $\tilde{T} : M \to Y$ operatörü varsa, $\tilde{T}$ operatörüne T operatörünün

M'ye genişlemesi denir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.30. X, bir vektör uzayı, $D(f) \subset X$, K bir cisim (reel veya kompleks), $R(f) \subset K$

olmak üzere $f : D(f) \to K$ olarak tanımlanan operatör, eğer lineerse bu operatöre

lineer fonksiyonel denilir (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.31. $\forall x \in D(f)$, $|f(x)| \leq c.\|x\|$ olacak şekilde bir c sabiti varsa, f, lineer

fonksiyoneline sınırlıdır denir. f'in normu da

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad \text{veya} \quad \|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

şeklinde tarif edilir. f sınırlı lineer bir fonksiyonelse, $\forall x \in D(f)$, $|f(x)| \leq \|f\|.\|x\|$

yazılabilir (**Kreyszig, 1978**).

Teorem1.1.15. Normlu bir uzayda, $D(f)$ tanım cümleli bir lineer fonksiyonel, süreklidir.$\Leftrightarrow$

f, sınırlıdır.

Tanım 1.1.32. X, K cismi üzerinde aşikar olmayan bir lineer uzay olsun. Eğer $g : X \to R$

fonksiyonu;

$PN_1)\ g(\theta) = 0$

$PN_2)\ \forall x \in X, g(x) = g(-x)$

$PN_3)\ \forall x,y \in X, g(x+y) \leq g(x) + g(y)$

$PN_4)\ (\lambda_n), \lambda_n \to \lambda$ olacak şekilde K'da bir dizi ve $(x_n), g(x_n - x) \to 0$ olacak şekilde X'te bir dizi ise, $g(\lambda_n x_n - \lambda x) \to 0\ (n \to \infty)$

şartlarını sağlıyorsa, X üzerinde bir paranorm denir ve (X, g)'ye de paranormlu uzay denir (**Maddox, 1988**).

Örneğin; 1. $X = C$ olmak üzere $\forall a \in X, p(a) = |a|$ ile tanımlı $p : C \to R$ fonksiyonu bir paranormdur (**Wilansky, 1964**).

2. $\forall a \in C, p(a) = \frac{|a|}{1+|a|}$ ile tanımlı $p : C \to R$ fonksiyonu

bir paranormdur (**Wilansky, 1964**).

3. $0 < p < 1$ olsun. $\forall a \in \ell^p$,

$$p(a) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p$$

ile tanımlı $p : \ell^p \to R$ fonksiyonu, ℓ^p'nin bir paranormudur (**Wilansky, 1964**).

4. R^2, $\forall a = (x,y) \in R^2$, $0 < p < 1$, $p(a) = |x|^p + |y|^p$

ile tanımlı $p : R^2 \to R$ fonksiyonu ile, bir paranormlu uzaydır (**Wilansky, 1964**).

5. (X,p) paranorm uzayı olsun. Bu taktirde,

$$p,\ \frac{p}{1+p},\ p^r\ (0 < r < 1),\ \forall t \in R^+, tp$$

X üzerinde paranormlardır (**Wilansky, 1964**).

Tanım1.1.33. $X = (X, g)$, bir paranormlu uzay olsun. X'te bir A – lineer fonksiyoneli, X^*'ın elemanıdır$\Leftrightarrow \exists M > 1 \ni \|A\|_M = \sup\left\{|A(x)| : g(x) \leq \frac{1}{M}\right\} < \infty$

(Maddox and Willey,1974).

Tanım1.1.34. (Lineer Topolojik Uzay) Bir lineer topolojik uzay, *X*'te toplama ve skalerle çarpma cebirsel işlemleri sürekli olacak şekilde bir *T* topolojisine sahip olan lineer *X* uzayına denir **(Maddox,1988).**

Tanım1.1.35. *X*, bir topolojik uzay ve *S* de *X*'in bir alt cümlesi olsun. Bu taktirde *S*, birinci kategoridendir$\Leftrightarrow$ *S* hiçbir yerde yoğun cümlelerin sayılabilir bir birleşimi olarak ifade edilebilir.

S, ikinci kategoridendir$\Leftrightarrow$ *S*, birinci kategoriden değildir **(Maddox, 1988).**

Tanım1.1.36. (i) $\forall n \in N,\ x,y \in X_n \Rightarrow x \pm y \in X_{n+1}$
ve
(ii) $\theta \in X_1$

olacak şekilde *X*'in alt cümlelerinin bir alt dizisi (X_n) olsun. Bu taktirde (X_n) dizisine, *X*'te α –dizisi denir. Eğer her bir X_n, *X*'te hiçbir yerde yoğun ve (X_n),*X*'te bir α –dizisi olmak üzere, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ise, *X*'e bir α –uzayı denir. Aksi taktirde β – uzayı denir.
Aşikar olarak, her α –uzayı birinci kategoriden bir uzaydır **(Maddox and Willey, 1974).**

Teorem1.1.16. (Baire Kategori Toremi) Bir *X* tam metrik uzayı, ikinci kategoridendir **(Maddox, 1988).**

Tanım1.1.37. a,*X*'in herhangi bir elemanı ve $\delta > 0$ olsun. Bu tatirde

$$\{x \in X : g(x-a) < \delta\}$$

cümlesine, a –merkezli δ yarıçaplı paranorma göre açık küre denir **(Maddox and Willey, 1974).**

Tanım1.1.38. *S*, bir *X* lineer uzayının bir alt cümlesi olsun. Bu taktirde, *S*'yi ihtiva eden bütün alt uzayların arakesitine, *S*'nin lineer hull'u denir ve *l.hull*(*S*) ile gösterilir. Yani,

$$l.hull(S) = \cap\{V : S \subset V \text{ ve } V, X\text{'in alt uzayı}\}$$

dır (**Maddox, 1988**).

Tanım1.1.39. Eğer $l.hull(G)$, X'te yoğun ise, X'in bir G alt cümlesine, X'te bir temel cümle denir (**Maddox and Willey, 1974**).

Tanım1.1.40. Eğer $\forall x \in X$, $g\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k\right) \to 0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir tek kompleks (λ_k) dizisi varsa, X'in elemanlarının bir (b_k) dizisine, X için bir baz denir.

Bu tanıma göre X'te herhangi bir baz X'te bir temel cümledir (**Maddox and Willey, 1974**).

Tanım1.1.41. Eğer X'in herhangi bir x vektörü için, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n b_n = x$ olacak şekilde skalerlerin bir tek (t_n) dizisi varsa, bir (b_n) dizisine, bir X lineer metrik uzay için Schauder bazı denir (**Wilansky, 1984**).

Tanım1.1.42. (Homeomorfizm) X ve Y, topolojik uzaylar olsun. Bu taktirde, $f : X \to Y$ bir homeomorfizmdir$\Leftrightarrow$ f, bijektif ve bicontinuous'tur.

Bunlardan ikincisi (bicontinuous), f ve f^{-1}'ün her ikisinin de sürekli olması anlamına gelir.

Denk olarak, f bir homeomorfizmdir$\Leftrightarrow$ f, bijektif, sürekli ve açıktır (**Kreyszig, 1978**).

Tanım1.1.43. X ve Y, aynı bir cisim üzerinde iki lineer uzay olmak üzere, X'ten Y'ye bütün lineer dönüşümlere karşılık gelen matrislerin oluşturduğu cümle (X, Y) ile gösterilecektir. X ve Y, dizi uzayları olduğu zaman, (X, Y) deki matrisin incelenmesine matris karakterizasyonu denir.

2.$c_0(p)$, $\ell(p)$, $\ell_\infty(p)$ ve $c(p)$ DİZİ UZAYLARININ KÖTHE-TOEPLİTZ DUALLERİ

2.1. $c_0, c, \ell_\infty, c_0(p)$, $\ell(p)$, $\ell_\infty(p)$ ve $c(p)$ Dizi Uzayları

Tanım2.1.1. c_0, c, ℓ_∞, sırasıyla $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli sfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizilerin uzayı olsun.Yani

$$c_0 = \left\{x = (x_n) \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$$

$$c = \left\{x = (x_n) \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n \text{ mevcut}\right\}$$

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_n) \ : \ \sup_n |x_n| \langle \infty\right\}$$

olsun **(Natarajan, 1990)**.

Tanım2.1.2. $p = (p_k)$, pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty$ olacak şekildeki bütün $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli dizilerin uzayı, $\ell(p)$ ile gösterilsin. Yani $\ell(p)$,

$$\ell(p) = \left\{x = (x_k) \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\right\}$$

olsun **(Natarajan, 1990)**.

(ii) $(|x_k|^{p_k}) \in c_0$ olacak şekildeki reel veya kompleks terimli bütün $x = (x_k)$ dizilerinin uzayı $c_0(p)$ ile gösterilsin. Yani $c_0(p)$,

$$c_0(p) = \{x = (x_k) \ : \ (|x_k|^{p_k}) \in c_o\}$$

olsun **(Natarajan, 1990)**.

(iii) $\exists \ell \in C \ni (|x_k - \ell|)^{p_k} \in c_0$

olacak şeildeki reel veya kompleks terimli bütün $x = (x_k)$ dizilerinin uzayını $c(p)$ ile gösterilsin. Yani $c(p)$,

$$c(p) = \{x = (x_k) : \exists \ell \in C \ni (|x_k - \ell|^{p_k}) \in c_o\}$$

olsun (**Natarajan, 1990**).

(iv) $(|x_k|^{p_k}) \in \ell_\infty$ olacak şekildeki reel veya kompleks terimli bütün $x = (x_k)$ dizilerinin cümlesi $\ell_\infty(p)$ ile gösterilsin. Yani $\ell_\infty(p)$,

$$\ell_\infty(p) = \{x = (x_k) : (|x_k|^{p_k}) \in \ell_\infty\}$$

olsun (**Natarajan, 1990**).

Önerme 2.1.1. Eğer, $p_k = m$ olacak şekilde, $p = (p_k)$ sabit dizi ise, bu taktirde

$$c_0(p) = c_0\,, \qquad c(p) = c\,, \qquad \ell_\infty(p) = \ell_\infty\,, \qquad \ell(p) = \ell_m$$

dir (**Natarajan, 1990**).

Tanım 2.1.3. E, K cismindeki $x = (x_k)$ dizilerinin uzayı olsun. Bu taktirde,

$$\{x = (x_k) : \forall y = (y_k) \in E, (x_k y_k) \in c_o\}$$

cümlesine, E'nin genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz Duali denir ve E^+ ile gösterilir. E'nin sürekli duali ise E^* ile gösterilir (**Natarajan, 1990**).

2.2. $c_0(p)$, $\ell(p)$, $\ell_\infty(p)$ ve $c(p)$ Dizi Uzaylarının Köthe-Toeplitz Dualleri

Teorem2.2.1. K, aşikar olmayan değerli bir cisim, (x_k) da bu cisimde bir dizi olsun. Bu taktirde,

$$c_0(p) \subset c_o \qquad \text{ve} \qquad c(p) \subset c$$

dir (**Natarajan, 1990**).

İspat: $x = (x_k)$, $c_0(p)$'nin keyfi bir elemanı fakat $x = (x_k) \notin c_o$ olsun. Bu taktirde

$$\exists \varepsilon > 1 \ni \forall k_o \in N, \exists k > k_o \ni |x_k|^{p_k} \geq \varepsilon^{p_k} > 1$$

kalır. Bu ise $|x_k|^{p_k} \longrightarrow o$ olduğu kabulü ile çelişir. O halde $x = (x_k) \notin c_o$ kabulümüz yanlıştır. $x = (x_k) \in c_o$ dır. $\forall x = (x_k) \in c_0(p)$, $x = (x_k) \in c_0$ olduğundan

$$c_0(p) \subset c_0$$

elde edilir.

$x = (x_k)$, $c(p)$' nin keyfi bir elemanı fakat $x \notin c$ olsun. Bu taktirde,

$$\sim (\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in N \ni \forall k > k_0, |x_k - \ell| < \varepsilon) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ni \forall k_0 \in N, \exists k > k_0 \ni |x_k - \ell| \geq \varepsilon$$

kalır. Bu yüzden de

$$\exists \varepsilon > 1 \ni \forall k_0 \in N, \exists k > k_0 \ni |x_k - \ell|^{p_k} \geq \varepsilon^{p_k} > 1$$

kalır. Bu ise $|x_k - \ell|^{p_k} \longrightarrow 0$ olduğu kabulü ile çelişir. O halde $x \in c$ olmalıdır. Buna göre, $\forall x = (x_k) \in c(p), x \in c$ olduğundan

$$c(p) \subset c$$

dir.

Teorem 2.2.2. $c_0^+(p) = \ell_\infty(p)$ dir (**Natarajan, 1990**).

İspat: $x \in c_0^+(p)$ keyfi olsun. Bu taktirde, $\forall y = (y_k) \in c_0(p)$, $x_k y_k \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$ ve $|y_k|^{p_k} \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$ yazılabilir. Bu yüzden de, $\sup p_k < \infty$ ve $|y_k|^{p_k} \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$ olduğundan

$$|x_k y_k|^{p_k} = |x_k|^{p_k} |y_k|^{p_k} \longrightarrow 0 \ (k \longrightarrow \infty) \qquad (2.2.1.)$$

yazılabilir. 2.2.1.'in çarpanlarından birisi sıfır dizisi olduğundan $(|x_k|^{p_k})$ dizisi sınırlı olmak zorundadır. Bu yüzden de $\sup_k |x_k|^{p_k} < \infty$ dır. Yani $x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$ dir. O halde $\forall x = (x_k) \in c_0^+(p), x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$ olduğundan

$$c_0^+(p) \subseteq \ell_\infty(p) \qquad (2.2.2.)$$

elde edilir.

Tersine olarak, $x = (x_k)$, $\ell_\infty(p)$' de keyfi olsun. Bu taktirde, $M = \sup\limits_k |x_k|^{p_k} < \infty$ dır. Bu yüzden de, $\forall y = (y_k) \in c_0(p), \lim\limits_{k\to\infty} |y_k|^{p_k} = 0$ olduğundan

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in N \ni \forall k > k_0, |y_k|^{p_k} < \frac{\varepsilon}{M+1}$ kalır. O halde

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in N \ni \forall k > k_0, |x_k y_k|^{p_k} \leq M.|y_k|^{p_k} < \varepsilon$ kalır. Bu yüzden de,

$\lim\limits_{k\to\infty} |x_k y_k|^{p_k} = 0$ olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = 0$ dır. Ohalde $x = (x_k) \in c_0^+(p)$ dir.

$\forall x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$, $x = (x_k) \in c_0^+(p)$ olduğundan

$$\ell_\infty(p) \subseteq c_0^+(p) \qquad (2.2.3.)$$

elde edilir. 2.2.2. ve 2.2.3. birleştirilerek,

$$c_0^+(p) = \ell_\infty(p)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3. $\ell^+(p) = \ell_\infty(p)$ dır (**Natarajan, 1990**).

İspat: $x = (x_k) \in \ell^+(p)$ keyfi olsun. Bu taktirde $\forall y = (y_k) \in \ell(p)$, $(x_k y_k) \in c_o$ yazılabilir. Yani $\sum\limits_k |y_k|^{p_k} < \infty$ ve $(x_k y_k) \in c_0$ dır. $\sum\limits_k |y_k|^{p_k} < \infty$ olduğundan ve Teorem 1.1.4.'ten dolayı $|y_k|^{p_k} \to 0$ dır. Buradan da $(x_k y_k) \to 0$ ve $|y_k|^{p_k} \to 0$ olduğundan $\sup|x_k|^{p_k} < \infty$ yazılabilir. Bu yüzden de $x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$ dir. $\forall x = (x_k) \in \ell^+(p), x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$ olduğundan

$$\ell^+(p) \subseteq \ell_\infty(p) \qquad (2.2.4.)$$

elde edilir.

Tersine olarak, $x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$ olsun. Bu taktirde, $\sup|x_k|^{p_k} < \infty$ dır.

$\forall y = (y_k) \in \ell(p)$, $|x_k y_k| \to 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall y \in \ell(p)$, $\sum\limits_k |y_k|^{p_k} < \infty$ olduğundan ve Teorem 1.1.4.'ten dolayı $|y_k|^{p_k} \to 0$ dır.

$$(|x_k|^{p_k}) \in \ell_\infty \ \Lambda\ (|y_k|^{p_k}) \in c_o$$

$$\Rightarrow (|x_k y_k|^{p_k}) \in c_0$$

$$\Rightarrow (p_k) \in \ell_\infty \ \Lambda\ (|x_k y_k|^{p_k}) \in c_0$$

$$\Rightarrow (x_k y_k) \in c_0$$

dır. Bu ise $\forall y = (y_k) \in \ell(p)$, $(x_k y_k) \in c_0$ olduğundan $x = (x_k) \in \ell^+(p)$ olduğunu gösterir.

Bu yüzden de, $\forall x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$, $x = (x_k) \in \ell^+(p)$ olduğundan,

$$\ell_\infty(p) \subseteq \ell^+(p) \qquad (2.2.5.)$$

elde edilir. 2.2.4. ve 2.2.5. birleştirilerek,

$$\ell^+(p) = \ell_\infty(p)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4. $\ell_\infty^+(p) = c_0(p)$ dir (**Natarajan, 1990**).

İspat: $x = (x_k) \in \ell_\infty^+(p)$, keyfi olsun. Bu taktirde, $\forall y = (y_k) \in \ell_\infty(p)$, $x_k y_k \to 0\ (k \to \infty)$ yazılabilir. $y \in \ell_\infty(p)$ olduğundan $\sup_k |x_k|^{p_k} < \infty$ yazılabilir. Diğer taraftan,

$$(x_k y_k) \in c_0 \Rightarrow (|x_k y_k|) \in c_0$$

$$\Rightarrow (|x_k y_k|^{p_k}) \in c_0$$

$$\Rightarrow (|x_k|^{p_k}.|y_k|^{p_k}) \in c_0$$

yazılabilir. $y = (y_k) \in \ell_\infty(p)$ ve $(|x_k|^{p_k}.|y_k|^{p_k}) \in c_0$ olduğundan Teorem 1.1.5.'ten dolayı $|x_k|^{p_k} \to 0\ (k \to \infty)$ olmalıdır. Bu yüzden de, $x = (x_k) \in c_0(p)$ dir. O halde, $\forall x = (x_k) \in \ell_\infty^+(p)$, $x = (x_k) \in c_o(p)$ olduğundan,

$$\ell_\infty^+(p) \subseteq c_0(p) \qquad (2.2.6.)$$

elde edilir.

Tersine olarak, $x = (x_k) \in c_0(p)$, keyfi olsun. $y = (y_k) \in \ell_\infty(p)$, keyfi olsun.

$x = (x_k) \in c_0(p)$ ve Teorem 2.2.1.'den dolayı $c_0(p) \subset c_0$ olduğundan $x = (x_k) \in c_0$ dır.

$m = \inf p_k > 0$ olduğundan, $\forall k \in N$, $0 < m \le p_k \le M$ olacak şekilde $\exists m, M \in R^+$ vardır. Bu yüzden de $y = (y_k) \in \ell_\infty(p)$ olduğundan $\sup\limits_k |y_k|^{p_k} < \infty$ olması nedeniyle $\forall k \in N$,

$$|y_k|^{p_k} \le K \qquad (2.2.7.)$$

olacak şekilde $\exists K > 0$ vardır. Bu yüzden de $\forall k \in N$, $0 < m \le p_k \le M$ olduğundan $\forall k \in N$,

$$\frac{1}{M} \le \frac{1}{p_k} \le \frac{1}{m} \qquad (2.2.8.)$$

yazılabilir. 2.2.7. ve 2.2.8. kullanılarak, $\forall k \in N$, $|y_k| \le K^{\frac{1}{p_k}} \le K^{\frac{1}{m}}$ yazılabilir. Bu yüzden de $y = (y_k) \in \ell_\infty$ dır. $x = (x_k) \in c_0$ ve $y = (y_k) \in \ell_\infty$ olduğundan Teorem 1.1.5. kullanılarak $(x_k y_k) \in c_0$ dır. Bu yüzden de $\forall x = (x_k) \in c_0(p)$, $x = (x_k) \in \ell_\infty^+(p)$ yazılabilir. Bu yüzden de

$$c_0(p) \subseteq \ell_\infty^+(p) \qquad (2.2.9.)$$

elde edilir. 2.2.6. ve 2.2.9. birleştirilerek,

$$\ell_\infty^+(p) = c_0(p)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.5. $c^+(p) = c_0$ dır (**Natarajan, 1990**).

İspat: $x = (x_k) \in c^+(p)$, keyfi olsun. Bu yüzden,

$$\forall y = (y_k) \in c(p),\ (x_k y_k) \in c_0 \qquad (2.2.10)$$

yazılabilir. Teorem 2.2.1.'den dolayı $c(p) \subseteq c$ olduğundan $y = (y_k) \in c$'dir. Ayrıca, $c \subseteq \ell_\infty$ olduğundan, $y = (y_k) \in \ell_\infty$'dır. 2.2.10. ve $y = (y_k) \in \ell_\infty$ olduğundan dolayı $x = (x_k) \in c_0$ olmak zorundadır. $\forall x = (x_k) \in c^+(p)$, $x = (x_k) \in c_0$ olduğundan

$$c^+(p) \subseteq c_0 \qquad (2.2.11)$$

elde edilir.

Tersine olarak, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$, sırasıyla c_o ve $c(p)$'de keyfi diziler olsun. Bu yüzden, $\exists \ell \in C \ni (|y_k - \ell|^{p_k}) \in c_0$ dır. p_k'nın tanımından dolayı, $(y_k) \in c$ dir. $c \subseteq \ell_\infty$ olduğundan

$y = (y_k) \in \ell_\infty$ dur. Bu yüzden de Teorem 1.1.5.'ten dolayı, $(x_k y_k) \in c_0$ yazılabilir. Bu yüzden de $\forall x = (x_k) \in c_0$ ve $\forall y = (y_k) \in c(p)$, $(x_k y_k) \in c_0$ olduğundan, $c^+(p)$'nin tanımından dolayı, $x \in c^+(p)$'dir. Bu yüzden, $\forall x = (x_k) \in c_0$, $x = (x_k) \in c^+(p)$ olduğundan,

$$c_0 \subseteq c^+(p) \tag{2.2.12}$$

elde edilir. 2.2.11. ve 2.2.12. birleştirilerek,

$$c^+(p) = c_0$$

elde edilir.

2.3. $\ell^*(p)$ Sürekli Dual Uzayı

Teorem 2. 3.1. $f \in \ell^*(p) \Leftrightarrow \exists (a_k) \in \ell_\infty(p) \ni \forall x = (x_k) \in \ell(p)$, $f(x) = ax$ kalır (**Natarajan, 1990**).

İspat: $f \in \ell^*(p)$, keyfi olsun. Bu taktirde, $f : \ell(p) \to C$ sınırlı lineer fonksiyoneldir. Bu yüzden, $\forall x \in \ell(p)$ için, $x = \sum_k x_k e_k$ olacak şekilde $\ell(p)$'de bir (e_k) bazı vardır. Bu yüzden de, f lineer olduğundan, $\forall x \in \ell(p)$ için,

$$f(x) = f\left(\sum_k x_k e_k\right) = \sum_k f(x_k e_k) = \sum_k x_k f(e_k) = \sum_k f(e_k) x_k = \sum_k a_k x_k = ax$$

yazılabilir. Şimdi $a_k = f(e_k)$ olmak üzere $(a_k) \in \ell_\infty(p)$ olduğunu gösterelim.

$f \in \ell^*(p)$ olduğundan $\forall x \in \ell(p)$ için,

$$|f(x)| \leq \|f\|.\|x\| \tag{2.3.1.}$$

olarak yazılabilir. 2.3.1. eşitsizkiği, bütün $x \in \ell(p)$ için doğru olduğundan, $x = e_k \in \ell(p)$ için de doğrudur. Bu yüzden $\|e_k\| = 1$ olduğundan,

$$|f(e_k)| \leq \|f\|.\|e_k\| = \|f\|$$

$$\Rightarrow |a_k| \leq \|f\| \qquad (2.3.2.)$$

elde edilir. $H = \sup_k p_k$ olduğundan 2.3.2. 'den

$$|a_k|^{p_k} \leq \|f\|^{p_k} \leq \|f\|^H$$

$$\Rightarrow |a_k|^{p_k} \leq \|f\|^H \qquad (2.3.3.)$$

elde edilir. Bu yüzden de 2.3.3. 'dan dolayı da $\{|a_k|^{p_k} : k \in N\}$ cümlesi, $\|f\|^H$ ile üstten sınırlıdır. Teorem 1.1.1'den dolayı

$$\sup_k |a_k|^{p_k} \leq \|f\|^H < \infty \qquad (2.3.4.)$$

yazılabilir. Bu yüzden de $a = (a_k) \in \ell_\infty(p)$ dir.

Tersine olarak, kabul edelim ki $\forall x \in \ell(p)$ için $f(x) = ax$ olacak şekilde en az bir $a = (a_k) \in \ell_\infty(p)$ var olsun. Bu taktirde, $\forall x,y \in \ell(p)$, $f(x) = ax$, $f(y) = ay$ olduğundan, $\forall \alpha, \beta \in C$,

$$\begin{aligned}
f(\alpha x + \beta y) &= \sum_k a_k(\alpha x_k + \beta y_k) \\
&= \sum_k (a_k \alpha x_k + a_k \beta y_k) \\
&= \sum_k (\alpha a_k x_k + \beta a_k y_k) \\
&= \sum_k \alpha a_k x_k + \sum_k \beta a_k y_k \\
&= \alpha \sum_k a_k x_k + \beta \sum_k a_k y_k \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden de, $f : \ell(p) \to C$ lineerdir. $\forall x = (x_k) \in \ell(p)$, $a = (a_k) \in \ell_\infty(p)$ olduğu kullanılarak,

$$|f(x)| = \left|\sum_k a_k x_k\right|$$

$$\leq \sum_k |a_k x_k|$$

$$\leq \left(\sum_k |a_k x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$= \left(\sum_k |a_k|^{p_k}.|x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\leq \left(\sup_k |a_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}.\left(\sum_k |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

$$\forall x \in \ell(p),\ |f(x)| \leq \left(\sup_k |a_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \|x\|$$

yazılabilir. Bu yüzden de

$$\forall x \in \ell(p),\ |f(x)| \leq K.\|x\|$$

olacak şekilde $\exists K = \left(\sup_k |a_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} > 0$ var olduğundan $f : \ell(p) \rightarrow C$ sınırlı lineer bir fonksiyoneldir. Bu yüzden de, Teorem 1.1.15.'ten dolayı, $f \in \ell^*(p)$'dir.

Teorem 2. 3. 2. $\ell^*(p)$ ve $\ell_\infty(p)$ dizi uzayları, lineer homeomorfik uzaylardır (**Natarajan, 1990**).

İspat: $\forall f \in \ell^*(p)$ için, $T(f) = a$ ile tanımlanan $T : \ell^*(p) \rightarrow \ell_\infty(p)$ dönüşümü, göz önüne alınırsa, $\ell^*(p)$ dizi uzayı, bir normlu lineer uzay olduğundan Teorem 2.3.1.'den dolayı $\|a\| = \|f\|$ olduğundan $\forall f \in \ell^*(p)$ için,

$$\|T(f)\| = \|f\| \qquad (2.3.5.)$$

yazılabilir. Bu yüzden de $T : \ell^*(p) \rightarrow \ell_\infty(p)$ operatörü bir izometridir. 2.3.5.'ten dolayı da T, sınırlıdır. Bu yüzden de Teorem 1.1.14.'ten dolayı T, süreklidir. T, birebir - örten ve sınırlı olduğundan dolayı da,

$$T(f) = g \Leftrightarrow f = T^{-1}(g)$$

yazılabilir. T, birebir - örten olduğundan T^{-1} de birebir - örtendir. 2.3.5. kullanılarak,

$$\|T^{-1}(g)\| = \|f\| = \|T(f)\| = \|g\|$$

$$\Rightarrow \|T^{-1}(g)\| = \|g\| \qquad (2.3.6.)$$

elde edilir. Bu yüzden de $\forall g \in \ell_\infty(p)$ için,

$$\|T^{-1}(g)\| = \|g\| \leq K.\|g\|$$

olacak şekilde $\exists K \geq 1$ vardır. Bu yüzden de, $T^{-1} : \ell_\infty(p) \rightarrow \ell^*(p)$ dönüşümü, bir sınırlı operatördür. Bu yüzden de, T^{-1} süreklidir. Bu yüzden de hem T hem de T^{-1} sürekli olduğundan $\ell^*(p)$ ve $\ell_\infty(p)$ dizi uzayları, homeomorfiktir.

3. $c_0(p), c(p), \ell_\infty(p)$, ve $\ell(p)$ DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ MATRİS KARAKTERİZASYONLARI

3.1.Bir Uzayın Temel Cümlesi ve İlgili Teoremler

Teorem 3.1.1. *X*, bir paranormlu uzay ve (A_n), X^*'ın elemanlarının bir dizisi ve q, sınırlı olsun. Bu taktirde

$$(i)\exists M > 1 \ni \sup_n (\|A_n\|_M)^{q_n} < \infty \Rightarrow (ii)\forall x \in X, (A_n(x)) \in \ell_\infty(q)$$

dır.

Eğer *X* tam ise, $(ii) \Rightarrow (i)$ dir (**Natarajan, 1990**).

İspat: $\forall n \in N, q_n \leq 1$ olduğunu kabul edelim. İlk olarak (i)'nin sağlandığını ve herhangi bir $x \in X$'in de seçildiğini kabul edelim. Paranormlu uzayda, skalarle çarpımın sürekliliğinden dolayı, *M*, (i)'deki gibi olmak üzere,

$$g(K^{-1}x) \leq \tfrac{1}{M}$$

olacak şekilde bir $K \geq 1$ vardır. Bu taktirde, $\forall n \in N, q_n \leq 1$ olduğundan dolayı,

$\|A_n\|_M = \sup\left\{|A_n(K^{-1}x)| : g(K^{-1}x) \leq \tfrac{1}{M}\right\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}|A_n(x)|^{q_n} &= |K.A_n(x).K^{-1}|^{q_n} \\ &= |K.A_n(K^{-1}x)|^{q_n} \\ &\leq K^{q_n}(\|A_n\|_M)^{q_n}\end{aligned}$$

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq K.\sup_n(\|A_n\|)^{q_n}$$

yazılabilir. Bu yüzden de, $\forall x \in X$ için, (i)'den dolayı

$$\sup_n |A_n(x)|^{q_n} < \infty$$

elde edilir. Bu ise, $\forall x \in X, (A_n(x)) \in \ell_\infty(q)$ olduğunu gerektirir. Bu yüzden de, (ii)

sağlanır.

Şimdi de kabul edelim ki $\forall x \in X, (A_n(x)) \in \ell_\infty(q)$ ve X de tam olsun. Ayrıca herhangi bir $m \in N$ için,

$$X_m = \{x : x \in X \wedge \forall n \in N, |A_n(x)|^{q_n} \leq 2^m\}$$

cümlesi tariflensin. Bu taktirde $(X_m), \theta \in X_1$ için X'de bir α-dizisidir. Eğer bazı $m \geq 1$ için $x, y \in X_m$ ise, $\forall n \in N, q_n \leq 1$ olduğundan, herhangi bir n için, (A_n sınırlı olduğundan),

$$|A_n(x \pm y)|^{q_n} = |A_n(x) \pm A_n(y)|^{q_n} \leq |A_n(x)|^{q_n} + |A_n(y)|^{q_n} \leq 2.2^m$$

yazılabilir. Aynı zamanda, $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$'dir. X, tam olduğundan dolayı β-uzayıdır. Bu yüzden de X_B, hiç bir yerde yoğun olmayacak şekilde bir $B \in N$ vardır. A_n'in sürekliliği kullanılarak, $S(a, \delta) \subset X_B$ var olması nedeniyle, her m için $\overline{X_m} = X_m$ olduğunu göstermek zor değildir. Bu yüzden, eğer $g(x-a) < \delta$ ise, $x \in X_B$ olduğundan, $\forall n \in N$,

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq 2^B$$

yazılabilir. Bu yüzden de, eğer $g(x) < \delta$ ise, $\forall n \in N$ için,

$$|A_n(x)|^{q_n} = |A_n(x+a) + A_n(-a)|^{q_n} \leq |A_n(x+a)|^{q_n} + |A_n(-a)|^{q_n}$$

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq 2^B + 2^B = 2^{B+1}$$

elde edilir. Bu yüzden de, sup'un tanımı kullanılarak, $\forall n \in N$ için,

$$\sup\{|A_n(x)|^{q_n} : g(x) \leq \tfrac{1}{M}\} \leq 2^{B+1} \tag{3.1.1.}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\|A_n\|_M^{q_n} = \sup\{|A_n(x)|^{q_n} : g(x) \leq \tfrac{1}{M}\} \tag{3.1.2.}$$

olduğundan dolayı, $\forall n \in N$ için. 3.1.1. ve 3.1.2. kullanılarak,

$$\|A_n\|_M^{q_n} \leq 2^{B+1}$$

yazılabilir. Yine sup'un tanımı kullanılarak, $M > \delta^{-1}$ için,

$$\sup_n\{\|A_n\|_M^{q_n}\} \leq 2^{B+1} < \infty$$

elde edilir. Bu yüzden de teoremin (i) kısmı sağlanır.

Teorem 3.1.2. X, bir paranormlu uzay ve (A_n) de X^*'ın elemanlarının bir dizisi olsun.

(i) Eğer X'in bir G temel alt cümlesi var ve q dizisi de sınırlı ise, bu taktirde,

$$\forall b \in G,\ (A_n(b)) \in c_0(q) \tag{3.1.3.}$$

ve

$$\lim_M \lim\sup_n(\|A_n\|_M)^{q_n} = 0 \tag{3.1.4.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in X,\ (A_n(x)) \in c_0(q) \tag{3.1.5.}$$

(ii) Eğer $q_n \to 0\ (n \to \infty)$ ise, bu taktirde, 3.1.4. $\Rightarrow$ 3.1.5. dir.

(iii) X, tam olsun. Bu taktirde q sınırsız bile olsa 3.1.5. $\Rightarrow$ 3.1.4.dir (**Natarajan, 1990**).

İspat: (i) Genelliği bozmaksızın $\forall n \in N, q_n \leq 1$ olduğu kabul edilecektir. X, bir G temel cümlesine sahip ve (i)'nin yeterlilik kısmının da sağlandığı kabul edilsin. $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ de keyfi olarak seçilsin.

$\lim_M \lim\sup_n(\|A_n\|_M)^{q_n} = 0$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \ni \forall n \geq n_0(\varepsilon)$ ve $M > 1$ için

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

kalır. $l.hull(G)$, X'de yoğun olduğundan dolayı, $g\left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k\right) < \frac{1}{M}$ olacak şekilde $b_1, b_2, ..., b_m \in G$ ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in C$ vardır. $L = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, ..., |\lambda_m|, 1)$ olsun. Bu taktirde 3.1.3.'ten dolayı $\forall\varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in N \wedge n_1 \geq n_0 \ni \forall n \geq n_1\ k = 1,2,...,m$ için $|A_n(b_k)|^{q_n} < \frac{\varepsilon}{2Lm}$ kalır. Bu yüzden de $\forall n \geq n_1$ için,

$$|A_n(x)|^{q_n} = \left|A_n\left(x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k\right)\right|^{q_n}$$

$$= \left| A_n\left(x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k\right) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_n(b_k) \right|^{q_n}$$

$$\leq \left| A_n\left(x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_k\right) \right|^{q_n} + L \sum_{k=1}^{m} |A_n(b_k)|^{q_n}$$

$$\leq (\|A_n\|_M)^{q_n} + mL\frac{\varepsilon}{2Lm} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|A_n(x)|^{q_n} < \varepsilon$$

kalır. Bu yüzden de, $\forall x \in X$, $\lim_{n\to\infty} |A_n(x)|^{q_n} = 0$ dır. Yani $\forall x \in X, (A_n(x)) \in c_0(q)$ dır. Bu ise 3.1.5.'in sağlandığını gösterir.

(ii) $q \in c_0$ ve 3.1.4. de sağlansın. Bu taktirde $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N \wedge \exists M > 1 \ni$

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır ve skalerle çarpma X üzerinde sürekli olduğundan dolayı, $g(K^{-1}x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde $\exists M \geq 1$ vardır. Bu taktirde $\exists n_1 \in N \ni \forall n \geq n_1 \geq n_0$ için $K^{q_n} \leq 2$ kalır. Bu yüzden de $\forall n \geq n_1$ için,

$$|A_n(x)|^{q_n} = |K.A_n(K^{-1}x)|^{q_n} = K^{q_n}|A_n(K^{-1}x)|^{q_n}$$

$$|A_n(x)|^{q_n} < 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|A_n(x)|^{q_n} < \varepsilon$$

kalır. Bu yüzden de $\forall x \in X, (A_n(x)) \in c_0(q)$ dır. Onun için de 3.1.5. doğrudur.

(iii) X tam olsun. Bu taktirde X, bir β-uzayıdır. Kabul edelim ki 3.1.5. de doğru olsun. Aşağıdaki gibi kesin pozitif reel sayıların $r = (r_n)$, $s = (s_n)$ dizisi ve X^*'ın elemanlarının (B_n), (C_n) dizileri tariflensin. Eğer $q_n < 1$ ise, $B_n = 0, C_n = A_n,\ r_n = 1,\ s_n = q_n$

tariflensin. Bu taktirde, X üzerinde $(B_n(x)) \in c_0(r)$ ve $(C_n(x)) \in c_0(s)$, $\sup_n s_n \leq 1$ ve

$\forall n \in N$, $r_n \geq 1$ dir. Aynı zamanda yeterince büyük M ve $n = 1,2,3,...$ için,

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} = (\|B_n\|_M)^{r_n} + (\|C_n\|_M)^{s_n}$$

yazılabilir. Bu yüzden de limsup'un özeliği kullanılarak,

$$\lim_M \limsup_n (\|A_n\|_M)^{q_n} \leq \lim_M \limsup_n (\|B_n\|_M)^{r_n} + \lim_M \limsup_n (\|A_n\|)^{s_n}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere, $\forall m \in N$ için,

$$X_m = \left\{x \in X : \forall n \geq m,\ |2^{-m}C_n(x)|^{s_n} \leq \tfrac{\epsilon}{2}\right\}$$

cümlesi tariflensin. Aşikar olarak, $\theta \in X_1$ dir. Eğer $\exists m \in N$ için $x, y \in X_m$ ise,

$n \geq m+1$ için

$$\begin{aligned} |2^{-(m+1)}C_n(x \pm y)|^{s_n} &= |2^{-(m+1)}C_n(x) + 2^{-(m+1)}C_n(y)|^{s_n} \\ &\leq [2^{-(m+1)}|C_n(x)| + 2^{-(m+1)}|C_n(y)|]^{s_n} \\ &\leq [2\max(|2^{-(m+1)}C_n(x)|, |2^{-(m+1)}C_n(y)|)]^{s_n} \\ &= \max(|2^{-m}C_n(x)|^{s_n}, |2^{-m}C_n(y)|^{s_n}) \leq \tfrac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

kalır. Böylece X_m, X'te bir α-dizisidir. Aynı zamanda da $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$ ve $\forall m \in N$ için

$\overline{X_m} = X_m$ dir. X bir β-uzayı olduğundan dolayı, bir X_B, bir $S(a,\delta)$ kümesini ihtiva eder.

Bu taktirde eğer $g(x) < \delta$ ise, $n \geq B$ için $|2^{-B}C_n(x)| \leq \varepsilon$ kalır. $\rho = 2^{-B}\delta$ yazılır ve

$M > \rho^{-1}$ seçilirse, g'nin alt toplamsallığından dolayı, $g(x) < \rho$ ise, $g(2^B x) < \delta$ yazılabilir.

Bu yüzden de, eğer $g(x) \leq \frac{1}{M}$ ve $n \geq B$ ise,

$$|C_n(x)|^{s_n} = |2^{-B}C_n(2^B x)|^{s_n} \le \varepsilon$$

kalır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, $\lim_M \lim \sup_n (\|C_n\|_m)^{s_n} = 0$ elde edilir. Şu halde, X üzerinde $(B_n(x)) \in c_0(r) \Rightarrow X$ üzerinde $(B_n(x)) \in c_0$ dır. Eğer tamsayıların bir $(n(i))$ dizisi ve $x \in X$ için $\inf|B_{n(i)}(x)| = \alpha < 0$ ise, inf tanımından $\forall i \in N, |B_{n(i)}(x)| \ge \alpha$ olduğundan dolayı $\forall i \in N, |B_n(\alpha^{-1}x)| \ge 1$ yazılabilir. Bu ise hipoteze aykırıdır. Yukarıda kullanılan argumentlerden dolayı, $\forall n$ için, $r_n \ge 1$ olduğundan

$$\lim_M \lim \sup_n (\|B_n\|_M)^{r_n} = 0 \tag{3.1.6.}$$

olması nedeniyle $\lim_M \lim \sup_n \|B_n\|_M = 0$ olduğu sonucuna varılır.

3.2. $c_0(p)$ ve $c_0(q)$ Dizi Uzayları Arasındaki Matris Karakterizasyonları

Teorem 3.2.1. $A : c_0(p) \to c_0(q) \Leftrightarrow (i)\ \forall k \in N, |a_{nk}|^{q_n} \to 0 (n \to \infty)$

$$\Leftrightarrow (ii)\ \exists B > 1 \ni \sup_n \left(\sup_k |a_{nk}| B^{-\frac{1}{p_k}} \right) < \infty$$

$$\Leftrightarrow (iii)\ \lim_{M\to\infty} \lim \sup_{n\to\infty} \left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}} \right)^{q_n} = 0$$

dır (**Natarajan, 1990**).

İspat: (i) $A : c_0(p) \to c_0(q)$ olsun. Bu taktirde $\forall x \in c_0(p), (A_n(x)) \in c_0(q)$ olduğundan özel olarak, $x = (\delta_{ik})$ için de $(A_n(x)) \in c_0(q)$dır. Dolayısıyla, $\forall i \in N$,

$$|A_n(x)|^{q_n} = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|^{q_n}$$

$$= \left| \sum_{k \neq i} a_{nk} x_k + \sum_{k=i} a_{nk} x_k \right|^{q_n}$$

$$= \left| \sum_{k \neq i} a_{nk} x_k + a_{ni} x_i \right|^{q_n}$$

$$= |a_{ni}|^{q_n}$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} |a_{ni}|^{q_n} = 0 \quad (i = 1,2,3,...)$ elde edilir. Bu ise (i)' nin ispatını gerektirir.

(ii) $A : c_0(p) \to c_0(q)$ olduğundan (Natarajan ve Rangachari, 1979), $\forall n \in N$ için $(a_{nk}) \in \ell_\infty(p)$ dir. Yani $\sup_k |a_{nk}|^{p_k} < \infty$ dır. Bu ise (ii)'yi gerektirir.

Aynı zamanda, $\forall n \in N, A_n \in c_0^*(p)$ ve $c_0(p)$ tamdır. Bu yüzden de Teorem 3.1.2.den dolayı,

$$\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup(\|A_n\|_M)^{q_n} = 0$$

yazılabilir. Bu yüzden, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 1$ ve $\exists n_0 \in N \ni \forall n \geq n_0$ için

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} < \varepsilon$$

kalır. Başka bir ifadeyle,

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} = \sup\left\{|A_n(x)|^{q_n} : g(x) \leq \tfrac{1}{M}\right\}$$

olduğundan, $\forall n \geq n_0$, sup'un tanımı kullanılarak, $\forall x \in c_0(p)$ için

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq (\|A_n\|_M)^{q_n} < \varepsilon$$

kalır. Bu yüzden de g, $c_0(p)$ üzerinde bir paranorm olmak üzere $g(x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde $\forall x \in c_0(p)$, $\forall n \geq n_0$,

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq (\|A_n\|_M)^{q_n} < \varepsilon$$

kalır. Şu halde $0 < \rho = |\pi| < 1$ olacak şekilde $\pi \in K$ verilmek üzere,

$$\rho^{\alpha_{n+1}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{q_n}} < \rho^{\alpha_n}$$

olacak şekilde en az bir α_n tam sayısı vardır. Eğer $g(x) \leq \frac{1}{M}$ ise, $\forall n \geq n_0$ için

$$|\pi^{-\alpha_n} A_n(x)| = \rho^{-\alpha_n} |A_n(x)| < \rho^{-\alpha_n} . \varepsilon^{\frac{1}{q_n}} < \rho^{-\alpha_n} . \rho^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow |\pi^{-\alpha_n} A_n(x)| < \rho^{-\alpha_n + \alpha_n} = \rho^0 = 1$$

$$\Rightarrow |\pi^{-\alpha_n} A_n(x)| < 1$$

kalır. $x = (x_k) \in c_o(p)$ ve $g(\lambda^{-1} x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde $|\lambda| \geq 1$ şartını sağlayan $\lambda \in K$ verilsin. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{-\alpha_n} a_{nk} \lambda^{-1} x_k \right| &= \left| \pi^{-\alpha_n} \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| \\ &= |\pi^{-\alpha_n} \lambda^{-1} A_n(x)| \\ &= |\pi^{-\alpha_n} A_n(x)| . |\lambda|^{-1} \\ &< |\lambda|^{-1} < 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{-\alpha_n} a_{nk} \lambda^{-1} x_k \right| < 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, $n \geq n_0$ için,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{-\alpha_n} a_{nk} x_k \right| < |\lambda| \tag{3.2.1.}$$

yazılabilir. Eğer $B = (b_{nk})$, $b_{nk} = \pi^{-\alpha_n} a_{nk}$, $k, n \in N$ ise, $\forall x = (x_k) \in c_0(p)$ için 3.2.1. eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} B_x &= (B_n(x)) \\ &= \left(\sum_k b_{nk} x_k \right)_{n \in N} \in \ell_\infty \end{aligned}$$

ve bu yüzden de,

$$\sup_{n,k}(\rho^{-\alpha_n}|a_{nk}|)^{p_k} < \infty$$

yazılabilir. Bu yüzden de, $\forall n, k \in N$,

$$\rho^{\alpha_{n+1}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{q_n}} < \rho^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \rho^{-\alpha_n - 1} \geq \varepsilon^{-\frac{1}{q_n}} > \rho^{-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \rho^{-\alpha_n} \geq \varepsilon^{-\frac{1}{q_n}}.\rho > \rho^{-\alpha_n + 1}$$

$$\Rightarrow \rho^{-\alpha_n}|a_{nk}| \geq \varepsilon^{-\frac{1}{q_n}}\rho|a_{nk}| > \rho^{-\alpha_n+1}|a_{nk}|$$

$$\Rightarrow (\rho^{-\alpha_n}|a_{nk}|)^{p_k} \geq \left(\varepsilon^{-\frac{1}{q_n}}\rho|a_{nk}|\right)^{p_k} > (\rho^{-\alpha_n+1}|a_{nk}|)^{p_k}$$

olduğundan,

$$\sup_{n,k}\left(\varepsilon^{-\frac{1}{q_n}}\rho|a_{nk}|\right)^{p_k} \leq \sup_{n,k}(\rho^{-\alpha_n}|a_{nk}|)^{p_k} < \infty$$

yazılabilir. Bu yüzden de bir $L > 1$ için

$$\sup_{n,k}\left(\varepsilon^{-\frac{1}{q_n}}\rho|a_{nk}|\right)^{p_k} < L$$

kalır. Bu halde, sup'un tanımı kullanılarak, $\forall n, k \in N$ için

$$\left(\varepsilon^{-\frac{1}{q_n}}\rho|a_{nk}|\right)^{p_k} < L$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{-\frac{1}{q_n}}\rho|a_{nk}| < L^{\frac{1}{p_k}}$$

$$\Rightarrow |a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}} < \rho^{-1}\varepsilon^{\frac{1}{q_n}} \qquad (3.2.2.)$$

yazılabileceğinden, $\forall n \in N$,

$$\sup_{k}|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}} < \rho^{-1}\varepsilon^{\frac{1}{q_n}}$$

elde edilir. Yani $U = \sup_n q_n$ olmak üzere, $\forall n \in N$ için

$$\left(\sup_{k}|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \rho^{-q_n}.\varepsilon < \rho^{-U}.\varepsilon$$

kalır. Bu yüzden de limsup'un özeliği kullanılarak, $L > 1$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\sup_k|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} = 0$$

kalır. Bu yüzden de $M > 1$,

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup\left(\sup_k|a_{nk}|M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} = 0$$

elde edilir ki bu (iii)'nin ispatıdır.

Kabul edelim ki (i), (ii) ve (iii) şartları var olsun. $e_k = (\delta_{ik})$ ile verilen (e_k) dizisini göz önüne alalım ve (e_k), tam olan $c_0(p)$ 'nin bazı olsun. (ii)'den dolayı, bir $B > 1$ için,

$$M = \sup_n\left(\sup_k|a_{nk}|B^{-\frac{1}{p_k}}\right) < \infty$$

olduğundan, sup tanımı kullanılarak, $U = \sup_k p_k$ olmak üzere, $\forall n,k \in N$,

$$|a_{nk}|B^{-\frac{1}{p_k}} \leq M$$

$$|a_{nk}|^{p_k}B^{-1} \leq M^{p_k} \leq M^U = K$$

$$|a_{nk}|^{p_k} \leq K.B$$

yazılabilir. Bu yüzden de, $\forall n \in N$,

$$\sup_k|a_{nk}|^{p_k} < \infty$$

yazılabilir. Bu ise, $(a_{nk})_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty(p)$ olduğunu gösterir. Teorem 2.2.2. 'den dolayı $\ell_\infty(p) = c_o^+(p)$ olduğundan $n \in N$,

$$(a_{nk})_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty(p) = c_o^+(p)$$

elde edilir. Böylece de, her $n \in N$,

$$A_n(x) = \sum a_{nk}x_k \tag{3.2.3.}$$

tanımlıdır. 3.2.3. eşitliği, her $x \in c_0(p)$ için tanımlı olduğuna göre özel olarak $e_k \in c_0(p)$ için de tanımlıdır. Bu yüzden de

$$A_n(e_k) = \sum a_{nk}\delta_{ik} = a_{nk} \qquad (k = 1,2,3,...)$$

olduğundan

$$|A_n(e_k)|^{q_n} = |a_{nk}|^{q_n}$$

olması nedeniyle (i) kullanılarak $\forall k \in N$ için,

$$\lim_{n\to\infty}|A_n(e_k)|^{q_n} = \lim_{n\to\infty}|a_{nk}|^{q_n} = 0$$

elde edilir. Bu yüzden de $\forall k \in N$, $(A_n(e_k)) \in c_0(q)$

elde edilir. (iii)'den dolayı, $\forall \varepsilon < 0, \exists M_0 > 1$ ve $\exists N \in N \ni \forall n \geq N$ ve $\forall M > M_0$,

$$\left(\sup_k |a_{nk}|M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \varepsilon \tag{3.2.4}$$

kalır. Eğer, $x = (x_k) \in c_0(p)$, $g(x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde bir dizi ise,

$$g(x) = \sup_k |x_k|^{\frac{p_k}{H}} \leq \frac{1}{M}$$

olduğundan $\forall k \in N$,

$$|x_k|^{\frac{p_k}{H}} \leq \frac{1}{M}$$

$$M^{\frac{1}{p_k}}|x_k| < M^{\frac{H}{p_k}}|x_k| \leq 1$$

$$M^{\frac{1}{p_k}}|x_k| \leq 1$$

elde edilir. Bu yüzden de, $\forall n \geq N$,

$$|A_n(x)| \leq \sup_k |a_{nk}|.|x_k|$$

$$= \sup_k \left(|a_{nk}|.M^{-\frac{1}{p_k}}.M^{\frac{1}{p_k}}.|x_k|\right)$$

$$\leq \sup_k \left(|a_{nk}|M^{-\frac{1}{p_k}}.1\right)$$

$$\Rightarrow |A_n(x)| \leq \sup_k |a_{nk}|M^{-\frac{1}{p_k}}$$

olduğundan 3.2.4.'ten dolayı, $g(x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde $x = (x_k) \in c_0(p)$ için,

$\exists M > 1 \ni \forall M > M_0$ ve $\forall n \geq N$,

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq \left(\sup_k |a_{nk}|M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \varepsilon$$

kalır. Bu yüzden de, $\lim\limits_{M\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \sup(\|A_n\|_M)^{q_n} = 0$ dır. Teorem 3.1.2. kullanılarak,

$\forall x = (x_k) \in c_0(p)$, $(A_n(x)) \in c_0(q)$ olduğu sonucuna

varılır. Bu yüzden de $\forall x = (x_k) \in c_0(p)$ için $Ax = (A_n(x)) \in c_0(q)$ olduğundan

$$\begin{aligned} A : c_0(p) &\to c_0(q) \\ x &\to Ax = (A_n(x)) \end{aligned}$$

bir dönüşümdür.

3.3. $\ell(p)$ ve $\ell_\infty(q)$ Dizi Uzayları Arasındaki Matris Karakterizasyonları

Teorem 3.3.1. $A : \ell(p) \to \ell_\infty(q) \Leftrightarrow \exists M > 1 \ni \sup\limits_n \left(\sup\limits_k |a_{nk}|M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \infty$

dır (**Natarajan, 1990**).

İspat: $A : \ell(p) \to \ell_\infty(q)$ olsun. Bu taktirde, $\forall x = (x_k) \in \ell(p)$ için $(A_n(x)) \in \ell_\infty(q)$ dır. Ayrıca, $\ell(p)$, $g(x) = \left(\sum\limits_k |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}$ ile verilen paranormla bir paranormlu uzaydır. Aynı zamanda da, $\forall n \in N$, $A_n \in \ell^*(p)$ ve $q_n > 0$ olmak üzere, $q = (q_n)$ de sınırlıdır. Ayrıca, $\ell(p)$ tam olduğundan (verilen paranorma göre), Teorem 3.1.1.'in ikinci kısmından dolayı, $\forall x \in \ell(p)$ için, $A_n(x) \in \ell_\infty(q)$ ise,

$$\exists M > 1 \ni K = \sup_n (\|A_n\|_M)^{q_n} < \infty$$

yazılabilir. Bu yüzden de,

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} = \sup\left\{|A_n(x)|^{q_n} : g(x) \leq \tfrac{1}{M}\right\}$$

olduğundan $\forall n \in N$, g, $g(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} < \frac{1}{M}$

olacak şekilde $\ell(p)$ üzerinde paranorm olmak üzere,

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq (\|A_n\|_M)^{q_n} \leq \sup_n(\|A_n\|_M)^{q^n} = \widetilde{K} < \infty$$

yazılabilir. K, aşikar olmayan değerli bir cisim olduğundan, $0 < \rho = |\pi| < 1$ olacak

şekilde $\pi \in K$ var olmak üzere

$$\rho^{\alpha_n+1} \leq \widetilde{K}^{\frac{1}{q_n}} < \rho^{\alpha_n}$$

olacak şekilde bir α_n tam sayısı vardır. Bu yüzden de $\forall n \in N$ için, $g(x) \leq \frac{1}{M}$ ise,

$$|\rho^{-\alpha_n} A_n(x)| < \widetilde{K}^{-\frac{1}{q_n}} |A_n(x)|$$

$$|A_n(x)|\rho^{-\alpha_n} < |A_n(x)|\widetilde{K}^{-\frac{1}{q_n}} < \widetilde{K}^{\frac{1}{q_n}}.\widetilde{K}^{-\frac{1}{q_n}}$$

$$|A_n(x)|\rho^{-\alpha_n} < 1$$

elde edilir.

$x = (x_k) \in \ell(p)$ için $g(\lambda^{-1}x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde, $|\lambda| \geq 1$ şartını sağlayan, $\lambda \in K$

verilsin. Bu taktirde $\forall n \in N$,

$$|A_n(\lambda^{-1}x)|\rho^{-\alpha_n} < 1$$

$$\Rightarrow \left|\sum_k a_{nk}(\lambda^{-1}x)\right|\rho^{-\alpha_n} < 1$$

$$\Rightarrow \left|\sum_k a_{nk}\lambda^{-1}x_k.\pi^{-\alpha_n}\right| < 1$$

kalır. Bu yüzden de, $\forall n \in N$ için, $g(\lambda^{-1}x) \leq \frac{1}{M}$ ise,

$$\left|\sum_k \pi^{-\alpha_n} a_{nk} x_k\right| < |\lambda|$$

yazılabilir. Eğer $B = (b_{nk}), n,k \in N$ dersek, $\forall x \in \ell(p)$ için, $Bx = \left(\sum_k b_{nk}x_k\right) \in \ell_\infty$ dır.

Bu yüzden de, (Natarajan and Rangachari, 1979)'dan dolayı $\sup_{n,k}(\rho^{-\alpha_n}|a_{nk}|)^{p_k} < \infty$ yazılabilir. Bu taktirde,

$$\exists L > 1 \ni \sup_{n,k}\left(\widetilde{K}^{-\frac{1}{q_n}}\rho|a_{nk}|\right)^{p_k} < L$$

kalır. Bu yüzden de Teorem 3.2.1. dekine benzer olarak,

$$\sup_k\left(|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right) < \rho^{-1}\widetilde{K}^{\frac{1}{q_n}} \qquad (n = 1,2,3,...)$$

kalır. $U = \sup_n q_n$ olmak üzere, $\forall n \in N$,

$$\left(\sup_k|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \rho^{-q_n}\widetilde{K} < \rho^{-U}.\widetilde{K}$$

elde edilir.

$$\left\{\left(\sup_k|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} : n \in N\right\} \tag{3.3.1.}$$

cümlesi $\rho^{-U}.\widetilde{K}$ ile üstten sınırlıdır. Teorem 1.1.1.'den dolayı da, $\exists L > 1 \ni$

$$\sup_n\left\{\left(\sup_k|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} : n \in N\right\} \leq \rho^{-U}.\widetilde{K}$$

veya

$$\sup_n\left(\sup_k|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} \leq \rho^{-U}.\widetilde{K} < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n\left(\sup_k|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \infty$$

kalır.

Tersine olarak, kabul edelim ki $\exists L > 1 \ni$

$$\sup_n\left(\sup_k|a_{nk}|L^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \infty \tag{3.3.2.}$$

kalsın. $e_k = (\delta_{ik})$ olmak üzere $\ell(p)$'nin, (e_k) bazını göz önüne alalım. 3.3.2. şartından dolayı,

$$(a_{nk})_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty(p) = \ell^+(p)$$

dir. Bu yüzden de, $\forall n \in N$, $\forall x = (x_k) \in \ell(p)$,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k \tag{3.3.3.}$$

dönüşümü tanımlıdır. Bu yüzden de 3.3.3., özel olarak $e_k \in \ell(p)$ için de tanımlıdır.

Yani $\forall n \in N$,

$$A_n(e_k) = \sum_k a_{nk}\delta_{jk} = a_{nk}$$

elde edilir. 3.3.2.'den dolayı $(a_{nk})_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(q)$ dır. Dolayısıyla $(A_n(e_k)) \in \ell_\infty(q)$ dır.

Ayrıca, $\exists M > 1 \ni$

$$K_1 = \sup_n\left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \infty$$

olduğundan, $\exists M > 1 \ni \forall n \in N$,

$$\left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} \leq K_1$$

yazılabilir. Eğer $x = (x_k) \in \ell(p)$, $g(x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde bir eleman ise,

$$g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{1}{M}$$

olduğundan, $\forall k \in N$ için,

$$M^H.|x_k|^{p_k} \leq M^H.\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k} \leq 1$$

$$M^{\frac{1}{q_k}}|x_k| \leq M^{\frac{H}{p_k}}|x_k| < 1$$

$$M^{\frac{1}{q_k}}|x_k| < 1 \tag{3.3.4.}$$

yazılabilir. Bu yüzden de, $g(x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekildeki $\forall x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$ ve

$\forall n \in N$ için,

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq \left(\sup_k |a_{nk}|.|x_k|\right)^{q_n} = \left(\sup_k |a_{nk}|.M^{-\frac{1}{p_k}}.M^{\frac{1}{p_k}}.|x_k|\right)^{q_n}$$

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq \left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} \leq K_1$$

$$|A_n(x)|^{q_n} \le K_1$$

kalır. Böylece $\forall x = (x_k) \in \ell(p)$ için, $\{|A_n(x)|^{q_n} : n \in N\}$ cümlesi, K_1 ile üstten sınırlıdır. Teorem1.1.1.'den dolayı,

$$\sup_n \{|A_n(x)|^{q_n} : n \in N\} \le K_1$$

yazılabilir. Bu ise, $\forall x \in \ell(p)$, $Ax = (A_n(x)) \in \ell_\infty(q)$ olduğunu gösterir. Bu yüzden de $A : \ell(p) \to \ell_\infty(q)$ bir dönüşümdür.

3.4. $\ell(p)$ ve $c_0(q)$ Dizi Uzayları Arasındaki Matris Karakterizasyonları

Teorem 3.4.1. $A : \ell(p) \to c_0(q) \Leftrightarrow (i) \forall k \in N, \lim_{n\to\infty} |a_{nk}|^{q_n} = 0$

$$(ii) \exists B > 1 \ni \sup_n \left(\sup_k |a_{nk}| B^{-\frac{1}{p_k}} \right) < \infty$$

$$(iii) \lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup \left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}} \right)^{q_n} = 0$$

dır (**Natarajan, 1990**).

İspat: $A : \ell(p) \to c_0(q)$ olsun. Butaktirde, $\forall x = (x_k) \in \ell(p)$ için $\sum_k |x_k|^{p_k} < \infty$ olduğundan, $\lim_{k\to\infty} |x_k|^{p_k} = 0$ dır. Bu yüzden de, $x = (x_k) \in c_0(p)$ dir.

$\forall x = (x_k) \in \ell(p)$, $x = (x_k) \in c_0(p)$ olduğundan, $\ell(p) \subset c_0(p)$ dir. Dolayısıyla $A : \ell(p) \subset c_0(p) \to c_0(q)$ dır. Teorem 3.2.1.'in gereklilik kısmından dolayı, $(i), (ii)$ ve (iii) şartları sağlanır.

Tersine olarak, $(i), (ii)$ ve (iii) şartları sağlanmış olsun. $x = (x_k)$, $\ell(p)$'de keyfi bir dizi olsun. $(e_k) = ((\delta_{ik}))$ da $\ell(p)$'de herhangi bir baz olsun. Dolayısıyla (e_k), $c_0(p)$'de bir bazdır ve $c_o(p)$ tamdır. Teorem 3.2.1.(iii) şartından dolayı da, $\forall n \in N$ için $(a_{nk})_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty(p) = c_0^+(p)$ dir. Bu yüzden de, $\forall n \in N$,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

dönüşümü tanımlıdır. (i)'den dolayı, $\forall k \in N$ için, $\lim_{n\to\infty} |a_{nk}|^{q_n} = 0$ olduğundan,

$$A_n(e_k) = \sum_k a_{nk}\delta_{ik} = a_{nk}$$

olması nedeniyle, $\forall k \in N, (A_n(e_k)) \in c_0(q)$ yazılabilir. Teorem 3.2.1.(iii)'den dolayı

$\forall \varepsilon > 0, \exists M_0 \in N \ni \forall M > M_0, \forall n \geq N,$

$$\left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \varepsilon$$

kalır. Şu halde eğer, $x = (x_k) \in \ell(p) \subset c_0(p), g(x) = \left(\sum_k |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{1}{M}$ olacak şekilde ise, $\forall k \in N$,

$$M.\left(\sum_k |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

$$\Rightarrow M^H.|x_k|^{p_k} \leq M^H.\sum_k |x_k|^{p_k} \leq 1$$

$$\Rightarrow M^{\frac{H}{p_k}}.|x_k| \leq 1 \qquad (3.4.1.)$$

yazılabilir. $\forall k \in N, M^{\frac{1}{p_k}} |x_k| \leq M^{\frac{H}{p_k}} |x_k|$ olduğundan, $\forall k \in N$, 3.4.1. kullanılarak,

$$M^{\frac{1}{p_k}} |x_k| \leq 1 \qquad (3.4.2.)$$

elde edilir. Bu yüzden de 3.4.2. kullanılarak,

$$|A_n(x)| \leq \sup_k |a_{nk}||x_k| \leq \sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}}.M^{\frac{1}{p_k}} |x_k|$$

$$|A_n(x)| \leq \sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}} \qquad (3.4.3.)$$

yazılabilir. Bu yüzden de 3.4.3. kullanılarak, $g(x) \leq \frac{1}{M}$ olacak şekildeki

$x = (x_k) \in \ell(p) \subset c_0(p), \forall M > M_0, \forall n \geq N,$

$$|A_n(x)|^{q_n} \leq \left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \varepsilon \qquad (3.4.4.)$$

kalır. Bu yüzden de,

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} = \sup\left\{|A_n(x)|^{q_n} : g(x) \leq \tfrac{1}{M}\right\}$$

olduğundan 3.4.4.'ten dolayı, $\forall M > M_0, \forall n \geq N$,

$$(\|A_n\|_M)^{q_n} < \varepsilon \qquad (3.4.5.)$$

kalır. Buna göre, $\forall M > M_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup(\|A_n\|_M)^{q_n} < \varepsilon \qquad (3.4.6.)$$

kalır. Bu yüzden de 3.4.6.'dan dolayı,

$$\lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup(\|A_n\|_M)^{q_n} = 0 \qquad (3.4.7.)$$

elde edilir. Teorem 3.1.2.'den dolayı da, $\forall x = (x_k) \in \ell(p) \subset c_0(p), (A_n(x)) \in c_0(q)$ dır. Bu ise, $A : \ell(p) \to c_0(q)$ dönüşümünün var olduğunu gösterir.

3.5. $\ell(p)$ ve $c(q)$, $c_0(p)$ ve $\ell_\infty(q)$, $c_0(p)$ ve $c(q)$, $c(p)$ ve $\ell_\infty(q)$ Dizi Uzayları Arasındaki Matris Karakterizasyonları

Teorem 3.5.1. $A : \ell(p) \to c(q) \Leftrightarrow (i) \exists B > 1 \ni \sup_n \left(\sup_k |a_{nk}| B^{-\frac{1}{p_k}}\right) < \infty$

$(ii) \forall k \in N, \exists \alpha_k \in K \ni$

$(a) \lim_{n\to\infty} |a_{nk} - \alpha_k|^{q_n} = 0$

$(b) \lim_{M\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup\left(\sup_k |a_{nk} - \alpha_k| M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} = 0$

dır (**Natarajan, 1990**).

Teorem 3.5.2. $A : c_0(p) \to \ell_\infty(q) \Leftrightarrow \exists M > 1 \ni \sup_n \left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n} < \infty$

dır (**Natarajan, 1990**).

Teorem 3.5.3. $A : c_0(p) \rightarrow c(q) \Leftrightarrow (i)\exists B > 1 \ni \sup_n \left(\sup_k |a_{nk}| B^{-\frac{1}{p_k}} \right) < \infty$

$$(ii) \forall k \in N, \exists \alpha_k \in K \ni$$

$$(a) \lim_{n \to \infty} |a_{nk} - \alpha_k|^{q_n} = 0$$

$$(b) \lim_{M \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sup \left(\sup_k |a_{nk} - \alpha_k| M^{-\frac{1}{p_k}} \right)^{q_n} = 0$$

dır (**Natarajan, 1990**).

Teorem 3.5.4. $A : c(p) \rightarrow \ell_\infty(q) \Leftrightarrow (i)\forall n \in N, \lim_{k \to \infty} a_{nk} = 0$

$$(ii) \exists M > 1 \ni \sup_n \left(\sup_k |a_{nk}| M^{-\frac{1}{p_k}} \right)^{q_n} < \infty$$

dır (**Natarajan, 1990**).

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere, $c_0(p), c(p), \ell_\infty(p), \ell(p)$ dizi uzayları, daha sonra E, K'daki $x=(x_k)$ dizilerinin uzayı olmak üzere, E'nin genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali tariflenerek, bu dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerini veren teoremler ispatlandı. Sonra $\ell^*(p)$ sürekli dual uzayı ile ilgili teoremler verildi.

Bir uzayın temel cümlesi ve ilgili teoremler verildikten sonra, $c_0(p)$ ve $c_0(q)$, $\ell(p)$ ve $\ell_\infty(q)$, $\ell(p)$ ve $c_0(q)$, $\ell(p)$ ve $c(q)$, $c_0(p)$ ve $\ell_\infty(q)$, $c_0(p)$ ve $c(q)$, $c(p)$ ve $\ell_\infty(q)$ dizi uzayları arasında matris karakterizasyonları verildi.

KAYNAKLAR

1. **ANDERSON, J. A., 1970**. Real Analysis, Logos Press.

2. **GAMELIN, T.W., and GREENE, R.E., 1984**. Introduction to Topology, Saunder College Publishing, New York.

3. **GOLDBERG, R.R., 1976**. Methodts of Real Analysis, John Willey and Sons,New York.

4. **KREYSZIG, E., 1978**. Introductory Functional Analysis with Applications, John Willey and Sons,New York.

5. **LIPSCHUTZ, S., 1965**. General Topology, McGraw- Hill Book Company, New York.

6. **MADDOX, I.J., 1988**. Elements of Functional Analysis, Cambridge at the University Press, Cambridge.

7. **MADDOX, I.J., and WILLEY, M.A.L., 1974**. Continuous Operators on Paranormed Spaces and Matrix Transformations, Pasific J. Math. 53 No:1, 217-228.

8. **NATARAJAN, P.N., 1990**. Countinuous Duals of Certain Sequence Spaces and the Related Matrix Transformations over Non-archimedean Fields, Indian J.Pure Appl.Math. 21(1): 82-87.

9. **NATARAJAN, P.N., and RANGACHARI, M.S., 1979**. Rev. Roumaine Appl. 24, 615-618.

10. **STIEGLITZ,M., and TIETZ, H., 1977**. Matrixtransformationen Von Folgenraumen, Eine Ergebnisübrsicht. Math. Z. 154,1-16.

11. **WILANSKY, A., 1964**. Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York.

12. **WILANSKY, A., 1981**. Summability Through Functional Analysis, North Holland, Mathematics Studies, Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Adana'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Zile, Niksar ve Tokat'ta tamamladıktan sonra 1993 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 1997 Haziranında Fakülte ve Bölüm birincisi olarak mezun oldu ve aynı yıl Yüksek Lisans eğitimine başladı. Samsun-Kavak Yaşar Doğu Çok Programlı Lisesi'ne Matematik öğretmeni olarak atanınca, Yüksek Lisans eğitimine ara vermek zorunda kaldı. Samsun Mimar Sinan ve Seyfi Demirsoy İlköğretim Okullarında Matematik öğretmenliği yaptıktan sonra halen Tokat-Emirseyit İlköğretim Okulu'nda görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk annesidir.