T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORLICZ FONKSİYONLU DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan : Yusuf TORUN

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Adem EROĞLU

TOKAT-2006

ORLICZ FONKSİYONLU DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Yusuf TORUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

2006-TOKAT

T.C.

GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLICZ FONKSİYONLU DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Yusuf TORUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../........../ 2006 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Ünvanı ,	**Adı ve Soyadı**	**İmza**
Başkan	:Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU	
Üye	:Prof.Dr.Bahtiyar MEHMEDOĞLU	
Üye	:Yrd.Doç.Dr.Osman ÖZDEMİR	
Üye	:Yrd.Doç.Dr.Ercan TUNÇ	
Üye	:Yrd.Doç.Dr.Adem EROĞLU	

ONAY :

Bu tez ..../........../ 2006 tarihli ve .... sayılı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu tarafından belirlenen jüri üyelerince kabul edilmiştir.

......./........./2006

Enstitü Müdürü

Prof.Dr.Adem ÖNAL

ÖZET

ORLICZ FONKSİYONLU DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Yusuf TORUN

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2006, 63 sayfa

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Adem EROĞLU
Jüri : Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU
Jüri : Prof.Dr.Bahtiyar MEHMEDOĞLU
Jüri : Yrd.Doç.Dr.Osman ÖZDEMİR
Jüri : Yrd.Doç.Dr.Ercan TUNÇ
Jüri : Yrd.Doç.Dr.Adem EROĞLU

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde çalışmamız boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verildi.

İkinci bölümün ilk kısmında ℓ_M Orlicz dizi uzayının lineerlik, tamlık gibi özellikleri verildi. Bu bölümde ayrıca Parashar ve Choudhary tarafından genelleştirilen $\ell_M(p)$ dizi uzayı, Mursaleen ve Mushir tarafından çalışılan fark dizi uzayları, Savaş tarafından tanımlanmış Orlicz fonksiyonlu kuvvetli toplanabilir dizi uzayları, Altın ve arkadaşları tarafından tanımlanan $\left|\overline{N}_p\right|(M,r,q,s)$ yarınormlu dizi uzayı ve bazı topolojik özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde ise $\ell_\infty(p,M,q,s)$ ve $\ell_\infty(p,M^v,q,s)$ dizi uzayları ilk defa tanımlandı, temel özellikleri ve bazı kapsama bağıntıları incelendi.

Anahtar Kelimeler : Orlicz Fonksiyonu, Dizi Uzayı

ABSTRACT

A STUDY ON THE SEQUENCE SPACES WITH ORLICZ FUNCTION

Yusuf TORUN

Gaziosmanpaşa University

Graduate School of Natural Applied Science
Department of Mathematics

Masters Thesis 2006, 63 pages

Supervisor :Asst. Prof. Dr. Adem EROĞLU
Jury :Prof.Dr.Oktay MUHTAROĞLU
Jury :Prof.Dr.Bahtiyar MEHMEDOĞLU
Jury :Asst. Prof. Dr. Osman ÖZDEMİR
Jury :*Asst. Prof. Dr. Ercan TUNÇ*
Jury :*Asst. Prof. Dr. Adem EROĞLU*

This study consist of three chapters.In the first chapter, basic concepts and theorems that will be used through this work are given.

In the first section of the second chapter, some properties of Orlicz sequence space ℓ_M like linearity and completity are given. In this chapter also, Orlicz sequence space $\ell_M(p)$ that is generalized by Parashar and Choudhary, difference sequence spaces studied by Mursaleen and Mushir, strongly summable sequence spaces defined by Savaş, seminormed spaces $\left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ which is defined by Altın and his friends and some topolojical properties of the sequences are investigated.

In the third chapter, sequence spaces $\ell_\infty(p,M,q,s)$ and $\ell_\infty(p,M^v,q,s)$ are defined for the first time, some basic properties and including relations are investigated.

Key Words : Orlicz Function, Sequence Space

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmamda, başından sonuna kadar büyük özveri ve fedakarlık ile yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Adem EROĞLU hocama, ayrıca yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen sayın Yrd.Doç.Dr.Zülfigar AKDOĞAN hocama , bölümdeki diğer tüm hocalarıma, arkadaşım Mustafa GÜNSELİ ' ye , maddi, manevi desteklerini sürekli yanımda hissettiğim dayım Arif BAYOĞLU' na, aileme ve eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
Sup	:	En küçük üst sınır
Inf	:	En büyük alt sınır
Θ	:	Uzayın sıfır elemanı
$\sum_k f$	:	$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$
(C,1)	:	Kuvvetli Cesaro toplanabilir dizi uzayı
bv	:	Sınırlı salınımlı dizi uzayı
$\pi[E]$	:	E ' nin çarpım uzayı
W	:	Bütün kompleks (veya reel) terimli diziler uzayı
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
$\Leftrightarrow$	:	Gerekli ve yeterli şart

1. GİRİŞ

$\forall u_{1,} u_2 \in \mathbb{R}$ için

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[M\left(u_1\right)+M\left(u_2\right)\right]$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M'ye konveks fonksiyon denir.

Yukarıdaki eşitsizlik u_1 ve u_2 reel sayılarının aritmetik ortalamalarının M altındaki değerinin u_1 ve u_2 nin M altındaki değerlerinin ortalamalarından büyük olamayacağını ifade eder.

Bu çalışmaya temel teşkil eden Orlicz fonksiyonu ilk kez 1951'de Polonyalı matematikçi W. Orlicz tarafından tanımlandı. Orlicz fonksiyonunun Modülüs fonksiyonundan tek farkı $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ eşitsizliğinin yerine konveksliğin kullanılmasıdır. Orlicz fonksiyonu konveks ve azalmayan olduğundan geniş bir kullanım alanına sahip oldu. Orlicz fonksiyonu kullanılarak tanımlanan dizi uzayları genişletilerek matematiğin birçok dalında uygulama alanı buldu.

Daha sonraları Lindenstrauss ve Tzafriri (1971), Orlicz fonksiyonu fikrini kullanarak,

$$l_M=\left\{x \in w: \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right)<\infty, \exists \rho>0 \text{için}\right\}$$

dizi uzayını inşa etti. l_M Orlicz dizi uzayı

$$\|x\|=\inf\left\{\rho>0: \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right) \leq 1\right\}$$

normuna sahip bir Banach uzayıdır.$M(x)=x^p \;\; ; 1 \leq p<\infty$ olmak üzere bir Orlicz fonksiyonu alınırsa l_M Orlicz dizi uzayı l_p dizi uzayına dönüşür.

Son zamanlarda Parashar ve Choudhary (1994) iyi bilinen l_M dizi uzaylarının ve kuvvetli toplanabilir $[c,1,p]$, $[c,1,p]_0$, $[c,1,p]_{\infty}$ dizi uzaylarının bir genelleştirmesi olan ve M Orlicz fonksiyonunu içeren dört yeni dizi uzayı tanımladılar ve bazı özelliklerini incelediler.

Yine yakın zamanlarda Savaş (2004), Et (2004), Esi (2004), Bilgin (2003), Mursaleen (1999) gibi araştırmacılar Orlicz fonksiyonunu kullanarak yeni dizi uzayları tanımladılar ve bazı özelliklerini incelediler.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan temel tanım, teorem ve eşitsizliklere yer verilecektir.

Tanım 1.1.1. X, boş olmayan bir cümle ve K, kompleks veya reel sayıların bir cismi olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için $+(x,y) = x+y$ ve $.\,(\lambda x) = \lambda x$ ile tanımlı

$$\begin{aligned} + &: X \mathrm{x} X \to X \\ \cdot &: K \mathrm{x} X \to X \end{aligned} \tag{1}$$

fonksiyonları,

L1) $\forall x, y \in X$ için, $x + y = y + x$

L2) $\forall x, y, z \in X$ için, $x + (y+z) = (x+y) + z$

L3) $\forall x \in X$ için, $x + \Theta = x$ olacak şekilde bir tek $\Theta \in X$ vardır.

L4) $\forall x \in X$ için, $x + (-x) = \Theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır.

L5) $\forall x \in X$ için, $1.x \in X$

L6) $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için, $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu y$

L8) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için, $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$

özelliklerini sağlıyorsa, X cümlesine (1) de tanımlanan "+" ve "." işlemlerine göre K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

Tanım 1.1.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y , X' in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer $x, y \in Y$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için $\lambda x + \mu y \in Y$ ise Y'ye X'in bir lineer alt uzayı denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.3. X, boş olmayan bir cümle olmak üzere

$$d : X\text{x}X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

M1) $d\left(x,y\right)=0 \Longleftrightarrow x=y$

M2) $\forall x,y\in X$ için, $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$

M3) $\forall x,y,z\in X$ için, $d\left(x,z\right)\leq d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

özelliklerini sağlıyorsa d'ye X için bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.4. X, boş olmayan bir cümle olmak üzere

$$d : X\text{x}X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

SM1) $d\left(x,x\right)=0$

SM2) $\forall x,y\in X$ için, $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$

SM3) $\forall x,y,z\in X$ için, $d\left(x,z\right)\leq d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

şartlarını sağlıyorsa d'ye X için bir yarımetrik, (X,d) ikilisine de yarımetrik uzay denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.5. (X,d) bir metrik uzay, (x_n)'de X de bir dizi olsun.Eğer,

$$\lim_{n\rightarrow\infty} d\left(x_n,x\right)=0$$

olacak şekilde bir $x\in X$ varsa (x_n) dizisi x ' e yakınsaktır denir.

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(x_n\right)=x \text{ veya } \left(x_n\right)\rightarrow x\left(n\rightarrow\infty\right)$$

şeklinde gösterilir.(Maddox,1988).

Tanım 1.1.6. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n)'de X'de bir dizi olsun.Eğer,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(x_n, x_m) = 0$$

ise, (x_n) dizisine X'de bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.1.7. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu uzayda her Cauchy dizisi , uzayın bir noktasına yakınsıyorsa metrik uzaya tamdır denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.8. X,K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer,

$$q : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

SN1) Her $\lambda \in K$ ve $\forall x \in X$ için $q(\lambda x) = |\lambda| \, q(x)$

SN2) $\forall x, y \in X$ için $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$

özelliklerini sağlıyorsa q ye bir yarınorm, (X, q) ikilisine de yarınormlu uzay denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.9. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer,

$$g : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

PN1) $g(\Theta) = 0$

PN2) $\forall x \in X$ için $g(x) = g(-x)$

PN3) $\forall x, y \in X$ için $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

PN4) $x_n, x_0 \in X$ ve $\lambda_n, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \lambda_0$ ve $g(x_n - x_0) \to 0$ iken $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$ özelliklerini sağlıyorsa g ye X için bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.10. $g(x) = 0$ iken $x = \Theta$ ise g'ye total paranorm denir(Wilansky,1964).

Tanım 1.1.11. (X, q_1) ve (X, q_2) verilen iki yarınormlu uzay olsun.Eğer $\forall x \in X$ için

$$q_2(x) \leq M q_1(x)$$

olacak şekilde $\exists M > 0$ varsa q_1' e q_2' den kuvvetli yarıorm denir(Wilansky,1964).

Tanım 1.1.12. Yarımetriği bir paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer yarımetrik uzay ve yarımetriği bir total paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer metrik uzay denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.13. X, bir kompleks (veya reel) lineer uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

N1) $\forall x \in X$ için $\|x\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dır.

N2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

N3) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

N4) $\forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ ye X üzerinde bir norm,$(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir(Kreyszig,1978).

Tanım 1.1.14. $\|.\|$ normuna göre tam olan $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayına Banach uzayı denir(Maddox,1988).

Bu çalışmada kompleks veya reel terimli tüm dizilerin cümlesi w ile gösterilecektir.w diziler cümlesi,

$x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve a bir sabit olmak üzere, $x + y = (x_k + y_k)$ ve $ax = (ax_k)$ şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

$\{x = (x_k) : \lim x = l, l \in \mathbb{C}\}$

$\{x = (x_k) : \lim x = 0\}$

$\left\{x = (x_k) : \sup\limits_k |x_k| < \infty\right\}$

$\left\{x = (x_k) : \sum\limits_k |x_k| < \infty\right\}$

cümlelerine sırasıyla yakınsak,sıfıra yakınsak,sınırlı,mutlak yakınsak seri teşkil eden dizi uzayı denir.Sırasıyla $c, c_0, \ell_\infty, \ell$ ile gösterilir.c_0 uzayı $\|x\| = \max\limits_k |x_k|$ normuna göre, c ve ℓ_∞ uzayları $\|x\| = \sup\limits_k |x_k|$ normuna göre ve ℓ uzayı da $\|x\| = \sum\limits_k |x_k|$ normuna göre birer normlu uzaydır.

Tanım 1.1.15.

$$\left\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty\right\}$$

olacak şekildeki $x = (x_k)$ dizilerin uzayına sınrlı salınımlı diziler uzayı denir, bv ile gösterilir.Yani,

$$bv = \left\{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty\right\}$$

olarak ifade edilir(Maddox,1988).

Kızmaz (1981), aşağıdaki fark dizi uzaylarını tanımladı.

$\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$olmak üzere,

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

Daha sonraları bir çok araştırmacı tarafından bu dizi uzayları genelleştirilerek yeni dizi uzayları inşa ettiler.

Tanım 1.1.1.6 w, kompleks (veya reel) değerli dizilerin uzayı ve E 'de w'nin lineer alt uzayı olsun. Bu takdirde E nin çarpım uzayı,

$$\pi\left[E\right]=\left\{a\in w:\forall x\in E \text{ için } ax\in E\right\}$$

şeklinde tanımlıdır(Maddox,1986).

Tanım 1.1.17. X **ve** Y, aynı bir K cismi üzerinde tanımlı lineer dizi uzayları ve $\mathbf{A}=(a_{nk})$, reel veya kompleks terimli bir matris olsun.Bu takdirde, $\forall x=(x_k)\in X$ için

$$Tx=(t_n)=\left(\sum_k a_{nk}x_k\right)$$

ile tanımlı $T:X\rightarrow Y$ fonksiyonuna dönüşüm(operatör) denir.

T operatörünün tanımlı olması için,$\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk}x_k$$

serisinin yakınsak olması şarttır.Burada (t_n) 'e x dizisinin A-dönüşüm dizisi denir.Eğer (t_m) dizisi yakınsak ise o zaman $x=(x_k)$ dizisine A-toplanabilir denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.18. Bir $A=(a_{mk})$ matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti koruyorsa, A matrisine regülerdir denir(Petersen,1966).

Tanım 1.1.19. Bir A=(a_{mk}) matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar

(i) Her k için $lim a_{mk}=0,(m\rightarrow\infty)$

(ii) $\lim\limits_{m\rightarrow\infty}\sum\limits_k a_{mk}=1$

(iii) Her m için $\sum\limits_{k} |a_{mk}| \leq K$

olacak şekilde m den bağımsız bir K pozitif reel sayısının varolmasıdır(McFadden,1942).

Tanım 1.1.20. $(X, \|.\|)$, bir normlu uzay ve (x_n) de X de bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall m, n \geq n_0$, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ kalıyorsa varsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.21. X, bir lineer uzay ve $p > 0$ olsun. $\forall x \in X$, $\|.\|(x) = \|x\|$ ile tanımlı $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

(i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için $\|\lambda x\| = |\lambda|^p . \|x\|$

(iii) $\forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, $\|.\|$' a X üzerinde bir p-norm ve $(X, \|.\|, p)$ üçlüsüne de p-normlu uzay denir(Maddox,1988).

Tanım 1.1.22. $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonuna,

(i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y),$

(iii) f, artan ,

(iv) $f, 0$ 'da sağdan sürekli

şartlarını sağlıyorsa bir Modülüs fonksiyonu denir.

Modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Modülüs fonksiyonu fikri ilk kez Nakano(1953) tarafından verildi. Daha sonraları Modülüs fonksiyonu fikri bazı kompleks dizi uzaylarının tanımlanması için Ruckle(1973) ve Maddox(1986) tarafından kullanıldı.

Tanım 1.1.23. $\forall u_{1,}u_2 \in \mathbb{R}$ için

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[M\left(u_1\right)+M\left(u_2\right)\right]$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M 'ye konveks fonksiyon denir(Krasnoselskii and Rutitskii,1961).

Tanım 1.1.24. $M:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonuna,

(i) M, Sürekli,

(ii) M, Azalmayan,

(iii) $M(0)=0$, $x>0$ için $M(x)>0$ ve M konveks,

(iv) $x\to\infty$ iken $M(x)\to\infty$

şartlarını sağlıyorsa, bir Orlicz fonksiyonu denir. Eğer Orlicz fonksiyonunda M'nin konveksliği yerine

$$M(x+y) \leq M(x)+M(y)$$

özelliği alınırsa M Orlicz fonksiyonu, Modülüs fonksiyonuyla çakışır. Orlicz fonksiyon fikri daha sonraki bölümlerde değinileceği gibi bir çok araştırmacı tarafından yeni dizi uzayları inşa etmek için kullanılmıştır. Lindenstrauss ve Tzafriri (1971), Orlicz fonksiyon fikrini kullanarak,

$$\left\{x\in w:\exists\rho>0 \text{ için,}\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\frac{|x_k|}{p}\right)<\infty\right\}$$

cümlesini tanımlamışlar ve bu cümleyi ℓ_M ile göstermişlerdir.ℓ_M cümlesi,

$$\|x\|=\inf\left\{p>0\ :\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\frac{|x_k|}{p}\right)<1\right\}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.(Lindberg,1975).

Tanım 1.1.25. M,bir Orlicz fonksiyonu olsun.

$$M\left(2u\right)\leq KM\left(u\right)\quad\left(u\geq 0\right)$$

olacak şekilde bir $K>0$ sabiti varsa M, u ' nun bütün değerleri için Δ_2 şartını sağlıyor denir. Δ_2 şartı, $\ell>1$ ve u 'nun tüm değerleri için

$$M\left(\ell u\right)\leq K\ell M\left(u\right)$$

eşitsizliğinin sağlanmasına denktir(Krasnoselskii and Rutitskii,1961).

Tanım 1.1.26. $a_0,a_1,...,a_n$ ve $b_0,b_1,...,b_n$ verilen skalerler olsun.

$A_n=a_0+a_1+...+a_n$ olmak üzere

$$\sum_{v=0}^{n}a_vb_v=\sum_{v=0}^{n}A_v\left(b_v-b_{v+1}\right)+A_nb_{n+1}$$

toplamına abel kısmi toplam formülü(abel dönüşümü) denir. Eğer

$$\sum_{v=0}^{\infty}A_v\left(b_v-b_{v+1}\right)$$

serisi yakınsak ve $\left(A_n,b_{n+1}\right)$ dizisi yakınsak $\sum\limits_{v=0}^{\infty}a_vb_v$ serisi yakınsaktır.

Tanım 1.1.27. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum\limits_{n}a_n$ serisi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n}s_v$$

ile verilen (σ_n) dizisine (s_n)'in 1. mertebeden Cesaro ortalaması veya Cesaro dönüşümü denir ve (C,1) ile gösterilir(Petersen,1966).

Tanım 1.1.28. Bir $x=(x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Eğer

$$\lim_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|x_k-\ell\right|=0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisine kuvvetli $(C,1)$ toplanabilirdir denir. Kuvvetli Cesaro toplanabilir dizi uzayı, Kuttner(1946) ve diğer bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. Bu kavram daha sonraları Maddox (1967) tarafından genelleştirilmiştir. $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu taktirde,

$$\left\{ x = (x_k) : \exists \ell > 0 \text{ için } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell|^{p_k} \to 0, (n \to \infty) \right\},$$
$$\left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{p_k} \to 0, (n \to \infty) \right\},$$
$$\left\{ x = (x_k) : \sup_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

cümleleri sırasıyla $[C,1,p]$, $[C,1,p]_0$, $[C,1,p]_\infty$ ile gösterilir.Eğer her k için $p_k = 1$ ise $[C,1,p]$, $[C,1,p]_0$ ve $[C,1,p]_\infty$ uzayları sırasıyla $[C,1]$, $[C,1]_0$ ve $[C,1]_\infty$ uzayları elde edilir.

Şimdi ileriki bölümlerde kullanacağımız bazı eşitsizlikleri verelim.

Lemma 1.1.29.

(i) $a, a_1, a_2, ..., a_m \geq 0$ ve $b, b_1, b_2, ..., b_m \geq 0$ olsun. Bu takdirde $i \geq 1$ ise

$$\left[\sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k)^i \right]^{\frac{1}{i}} \leq \left[\sum_{k=1}^{m} (a_k)^i \right]^{\frac{1}{i}} + \left[\sum_{k=1}^{m} (b_k)^i \right]^{\frac{1}{i}}$$

dir.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için, $p_k > 0$ ve $H = \sup_k p_k$ olmak üzere $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ alalım. Bu takdirde

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C. \left\{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right\}$$

Burada $C = \max\left(1, 2^{H-1}\right)$ dir(Maddox,1988).

2.ORLICZ FONKSİYONU İLE TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARI

Çalışmanın bu bölümünde Orlicz fonksiyonlu dizi uzayları ve bu uzaylara ait bazı özellikleri incelenecektir. Orlicz fonksiyonlu dizi uzayı inşa etme fikrini ilk olarak kullanan Lindenstrauss ve Tzafriri (1971)' nin tanımladığı dizi uzayı ve daha sonraları birçok araştırmacı tarafından tanımlanan Orlicz fonksiyonlu dizi uzaylarından bazıları incelenirse konu daha iyi anlaşılacaktır.

2.1. ℓ_M, $W[M,p]$, $W_0[M,p]$ ve $W_\infty[M,p]$ Dizi Uzayları

Lindenstrauss ve Tzafriri (1971), Orlicz fonksiyonunu,

$$\ell_M = x \in w : \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right) < \infty$$

dizi uzayını inşa etmek için kullandı. ℓ_M Orlicz dizi uzayı,

$$\|x\| = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right) \leq 1\right\}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $M(x) = x^p \;\; ; 1 \leq p < \infty$ olmak üzere bir Orlicz fonksiyonunu alınırsa ℓ_M Orlicz dizi uzayı ℓ_p dizi uzayına dönüşür.

Parashar ve Choudhary (1994), Orlicz fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayıp bazı özelliklerini inceledi.

$p = (p_k)$,pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun.

$$l_M(p) = \left\{x \in w : \; \exists\rho > 0 \text{ için}, \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\tfrac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k} < \infty\right\}$$

$$W[M,p] = \left\{x \in w : \exists\rho > 0 \text{ ve } l > 0 \text{ için}, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(M\left(\tfrac{|x_k - l|}{\rho}\right)\right)^{p_k} \to 0 \, (n \to \infty)\right\}$$

$$W_0[M,p] = \left\{x \in w : \exists\rho > 0 \text{ için}, \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(M\left(\tfrac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k} \to 0, n \to \infty,\right\}$$

$$W_\infty[M,p] = \left\{x \in w : \exists\rho > 0 \text{ için}, \sup_n \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(M\left(\tfrac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k} < \infty,\right\}$$

her k için $p_k = 1$ olduğunda $l_M(p)$ dizi uzayı , l_M dizi uzayına dönüşür. Eğer $M(x) = x$ ise yukarıda tanımlı dizi aileleri sırasıyla $l(p), [C,1,p], [C,1,p]_0$ ve $[C,1,p]_\infty$ dizi uzaylarına dönüşür.Her k için $p_k = 1$ olduğunda $W[M,p], W_0[M,p]$ ve $W_\infty[M,p]$ dizi uzayları sırasıyla $W[M], W_0[M]$,$W_\infty[M]$ dizi uzaylarına indirgenir.

Teorem 2.1.1. $H = \sup\limits_k p_k$ olsun. Bu takdirde $l_M(p)$, kompleks sayılar cümlesi üzerinde bir lineer uzaydır(Parashar and Choudhary,1994).

İspat : $x, y \in l_M(p)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Buna göre $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ olmak üzere ;

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right)^{p_k} < \infty \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right)^{p_k} < \infty$$

yazılabilir. w bir lineer (vektör) uzay olduğundan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|\alpha x_k + \beta y_k|}{\rho_3}\right)\right)^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde bir ρ_3 ün varlığı gösterilebilirse ispat tamamlanmış olur. Burada, $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ şeklinde tanımlıdır. M azalmayan ve konveks bir fonksiyon olduğu için $C = \max\left(1, 2^{H-1}\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|\alpha x_k + \beta y_k|}{\rho_3}\right)\right)^{p_k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|\alpha x_k|}{\rho_3} + \frac{|\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right)^{p_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{p_k}}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right) + M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right) + M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k} + C\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir ki, $\alpha x + \beta y \in \ell_M(p)$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ta ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.2. H=max$\left(1, \sup_k p_k\right)$ olmak üzere, $\ell_M(p)$ uzayı

$$g(x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, \quad n = 1, 2, 3...\right\}$$

paranormu altında bir paranormlu uzaydır(Parashar and Choudhary,1994).

İspat : $g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. Teorem 2.1.1.' de $\alpha = \beta = 1$ alınırsa $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ elde edilir. $M(0) = 0$ olduğundan $x = \Theta$ için $\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}}\right\} = 0$ elde edilir.Tersine olarak $g(x) = 0$ olsun.Bu takdirde

$$\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1\right\} = 0$$

olur. Bu ise $\varepsilon > 0$ için

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

olacak şekilde bir $\rho_\varepsilon\,(0 < \rho_\varepsilon < \varepsilon)$ 'ün var olmasını gerektirir. Böylece,

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}}$$

elde edilir. Bazı m ler için $x_{n_m} \neq 0$ ve $\varepsilon \to 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\frac{|x_{n_m}|}{\varepsilon}\right) \to \infty$$

elde edilir ve

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_{n_m}|}{\rho}\right)\right)^{p_m}\right]^{\frac{1}{H}} \to \infty$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise bir çelişkidir. O halde her m için $x_{n_m} = 0$ dır. Son olarak, skalerle çarpımın sürekliliği gösterilirse ispat biter. λ, herhangi bir sayı (kompleks olabilir) olsun. Tanımdan,

$$g(\lambda x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left[\frac{|\lambda x_k|}{\rho}\right]\right)^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, \quad n = 1, 2, ...\right\}$$

olur. $r = \frac{\rho}{\lambda}$ olacak şekilde seçilsin. O zaman,

$$g(\lambda x) = \inf \left\{ (|\lambda|\, r)^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(M \left[\frac{|x_k|}{r} \right] \right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, \quad n = 1, 2, ... \right\}$$

olur. Bu takdirde $|\lambda|^{p_k} \leq \max \left(1, |\lambda|^H\right)$ olduğundan $|\lambda|^{\frac{p_k}{H}} \leq \max \left(1, |\lambda|^H\right)^{\frac{1}{H}}$ elde edilir. Böylece,

$$g(\lambda x) \leq \max \left(1, |\lambda|^H\right)^{\frac{1}{H}} . \inf \left\{ r^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{r} \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, \quad n = 1, 2, ... \right\}$$

olur ki $\ell_M(p)$ de $g(x)$ sıfıra yakınsarken bu ifade sıfıra yakınsar. Şimdi $\lambda_n \to 0$ ve $x \in \ell_M(p)$ olduğu varsayılsın. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\rho > 0$ olmak üzere N,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^H$$

olacak şekilde pozitif bir sayı olsun. Bu durum

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olmasını gerektirir. $0 < |\lambda| < 1$ olsun. M 'nin konveksliğini kullanarak

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|\lambda x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[|\lambda|\, M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^H$$

elde ederiz. $M, [0, \infty)$ aralığının her yerinde sürekli olduğu için

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \left[M \left(\frac{|t x_k|}{\rho} \right) \right]$$

fonksiyonu 0 noktasında süreklidir. Dolayısıyla, $0 < t < \delta$ için $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $1 > \delta > 0$ mevcuttur. $n > K$ için $|\lambda_n| < \delta$ olacak şekilde bir K sayısı alınsın. Bu durumda, $n > K$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left[M \left(\frac{|\lambda_n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Bu nedenle $n > K$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|\lambda_n x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.3. $1 \leq p_k < \infty$ olsun Bu takdirde $\ell_M(p)$ uzayı,

$$g(x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} > 0 : \left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, 3...\right\}$$

paranormu altında tam paranormlu uzaydır(Parashar and Choudhary,1994).

İspat : (x^i), $\ell_M(p)$ de herhangi bir Cauchy dizisi, r ve x_0 sabit olsun. Bu takdirde, her bir $\frac{\varepsilon}{rx_0} > 0$ için, her $i, j \geq N$ olmak üzere $g(x^i - x^j) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır. Paranorm tanımından her i , $j \geq N$ için

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(M\left(\frac{|x_k^i - x_k^j|}{g(x^i - x^j)}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

elde edilir. Böylece her $i, j \geq N$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k^i - x_k^j|}{g(x^i - x^j)}\right)\right]^{p_k} \leq 1$$

olur. $1 \leq p_k < \infty$ olduğundan her bir $k \geq 1$ için her $i, j \geq N$ olmak üzere

$$M\left(\frac{|x_k^i - x_k^j|}{g(x^i - x^j)}\right) \leq 1$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece,

$$M\left(\frac{|x_k^i - x_k^j|}{g(x^i - x^j)}\right) \leq M\left(\frac{rx_0}{2}\right)$$

olacak şekilde $M\left(\frac{rx_0}{2}\right) \geq 1$ özelliğine sahip $r > 0$ bulunabilir. Bu ,

$$|x_k^i - x_k^j| < \frac{rx_0}{2}\frac{\varepsilon}{rx_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

olması demektir. O halde (x^i), $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisidir. Böylece , her $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$ için $i, j \geq N$ olmak üzere $q(x^i - x^j) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

M' nin sürekliliği kullanılarak

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\left[M\left(\frac{\left|x_k^i-\lim\limits_{j\to\infty}x_k^j\right|}{g\left(x^i-x^j\right)}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1$$

bulunur. Buradan da

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\left[M\left(\frac{\left|x_k^i-x_k\right|}{g\left(x^i-x^j\right)}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1$$

elde edilir. ρ ' lar üzerinden infumum alınırsa her $i\geq N$ ve $j\to\infty$ için

$$\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}}:\left(\sum_{k=1}^{N}\left[M\left(\frac{\left|x_k^i-x_k\right|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1\right\}<\varepsilon$$

olur. $(x^i)\in\ell_M(p)$ ve M sürekli olduğundan $(x)\in\ell_M(p)$ bulunur ki bu sonuç ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.5. Her bir k için $0<p_k<q_k<\infty$ olsun. Bu takdirde ,

$$\ell_M(p)\subseteq\ell_M(q)$$

dir(Parashar and Choudhary,1994).

İspat : $x\in\ell_M(p)$ olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty$$

olacak şekilde bir $\rho>0$ vardır. Bu durum i ' nin yeteri kadar büyük değerleri için $M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right)\leq 1$ olmasını gerektirir. Ayrıca M azalmayan olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{q_k}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

olur. Böylece $x\in\ell_M(q)$ olur ki bu sonuç ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.6. $p=(p_k)$ sınırlı reel terimli bir dizi olsun. Bu takdirde $W[M,p]$, $W_0[M,p]$, $W_\infty[M,p]$ dizi uzayları $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde birer lineer uzaydır(Parashar and Choudhary,1994).

Teorem 2.1.7. $H = \max\left(1, \sup_k p_k\right)$ olmak üzere,$W_0\left[M, p\right]$uzayı

$$g^*\left(x\right) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, ...\right\}$$

paranormu altında bir paranormlu uzaydır(Parashar and Choudhary,1994).

Verilen son iki teoremin ispatı bu bölümde yapılan önceki ispatlara benzer şekilde yapıldığından ispatları aynı şekilde elde edilir.

Hatırlatma 2.1.8. Aşağıdaki teoreme geçmeden önce

$$[C,1] = W_1 \quad , \quad [C,1]_0 = W_0 \quad \text{ve} \quad [C,1]_\infty = W_\infty$$

eşitlikleri göz önüne alınmalıdır(Parashar and Choudhary,1994).

Teorem 2.1.9. M, Δ_2 şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

$$W_1 \subseteq W\left(M\right) \quad , \quad W_0 \subseteq W_0\left(M\right) \quad \text{ve} \quad W_\infty \subseteq W_\infty\left(M\right)$$

dir(Parashar and Choudhary,1994).

İspat : $x \in W_1$ olsun. Bu takdirde , $n \to \infty$ iken

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_n - \ell| \to 0$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ olsun ve $0 \leq t \leq \delta$ için $M\left(t\right) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ özelliğine sahip bir δ sayısı seçilsin. $y_k = |x_k - \ell|$ olsun ve

$$\sum_{k=1}^{n} M\left(|y_k|\right) = \sum_1 + \sum_2$$

olarak göz önüne alalım. Burada ilk toplam $y_k \leq \delta$ ve ikinci toplam $y_k > \delta$ üzerinden alınmıştır. M, sürekli olduğundan,

$$\sum_1 \leq n\varepsilon$$

ve $y_k > \delta$ için $y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \frac{y_k}{\delta}$ olduğu görülür. M, konveks ve azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$M(y_k) \leq M\left(1 + \frac{y_k}{\delta}\right) < \frac{1}{2}M(2) + \frac{1}{2}M\left(\frac{2y_k}{\delta}\right)$$

elde edilir. Ayrıca M, Δ_2 şartını sağladığından,

$$M(y_k) \leq \frac{1}{2}K\frac{y_k}{\delta}M(2) + \frac{1}{2}K\frac{y_k}{\delta}M(2) = Ky_k\delta^{-1}M(2)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $K > 2$ sabit sayısı vardır. Böylece de

$$\sum_2 M(y_k) \leq K\delta^{-1}M(2)\, nS_n \quad \text{ve} \sum_1 \leq n\varepsilon$$

eşitsizlikleri birlikte düşünülürse, $W_1 \subseteq W(M)$ sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $W_0 \subseteq W_0(M)$ ve $W_\infty \subseteq W_\infty(M)$ olduğu da gösterilebilir.

Teorem 2.1.10.

(i) $0 < inf p_k \leq p_k \leq 1$ olsun. Bu takdirde $W(M,p) \subseteq W(M)$ olur.

(ii) $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ olsun. Bu takdirde, $W(M) \subseteq W(M,p)$ olur(Parashar and Choudhary,1994).

İspat :

(i) $x \in W(M,p)$ olsun . $0 < \inf p_k \leq 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[M\left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho}\right)\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[M\left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

ve böylece $x \in W(M)$ olur ki bu sonuç ispatı tamamlar.

(ii) Her bir k için $p_k \geq 1$ ve $\sup p_k < \infty$ olsun. $x \in W(M)$ olsun. $0 < \varepsilon < 1$ ve her $n \geq N$ için,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[M\left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho}\right)\right] \leq \varepsilon < 1$$

olacak sekilde pozitif bir N sayısı vardır. Bu,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[M\left(\frac{|x_k-\ell|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[M\left(\frac{|x_k-\ell|}{\rho}\right)\right]$$

olmasını gerektirir. Böylece $x\in W\left(M,p\right)$ elde edilirki bu sonuç teoremin iddiasını ispatlar.

Teorem 2.1.11. 0< $p_k\leq q_k$ ve $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$ sınırlı olsun. Bu takdirde

$$W\left(M,q\right)\subseteq W\left(M,p\right)$$

dir(Parashar and Choudhary,1994).

İspat : $x\in W\left(M,q\right)$ olsun.

$$t_k=\left[M\left(\frac{x_k-\ell}{\rho}\right)\right]^{q_k}$$

ve $\lambda_k=\frac{p_k}{q_k}$ olacak şekilde seçilsin. $p_k\leq q_k$ olduğundan $0<\lambda_k\leq 1$ dir. $0<\lambda\leq\lambda_k$

olsun. $\forall k\in\mathbb{N}$ için u_k ve v_k,

$$u_k=\left\{\begin{array}{c} t_k, t_k\geq 1 \text{ için} \\ 0, t_k<1 \text{ için}\end{array}\right\}$$

$$v_k=\left\{\begin{array}{c} 0, t_k\geq 1 \text{ için} \\ v_k, t_k<1 \text{ için}\end{array}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $t_k^{\lambda_k}=u_k^{\lambda_k}+v_k^{\lambda_k}$dır. Buna göre $u_k^{\lambda_k}\leq u_k\leq t_k$ ve $v_k^{\lambda_k}\leq v_k^{\lambda}$

olduğu çıkar. Böylece,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}t_k^{\lambda_k}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}t_k+\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v_k\right]^{\lambda}$$

elde edilir ki bu sonuç $x\in W\left(M,p\right)$ olması demektir. İspat biter.

2.2. $W[A,M,p], W_0[A,M,p]$ ve $W_\infty[A,M,p]$ Dizi Uzayları

Bu bölümde, Böyük (2002) tarafından çalışılmış $W_0(A,M,p), W(A,M,p)$, $W_\infty(A,M,p)$ dizi uzayları incelenecektir.

$M=(M_k)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve bir $A=(a_{nk})$, regüler matrisi verilsin.

$W_0(A,M,p)=\left\{x\in w:\exists\ \rho>0 \text{ için,} \sum_k a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\to 0\,(n\to\infty)\right\}$,

$W(A,M,p)=\left\{x\in w:\exists\ \rho>0 \text{ ve } \ell>0 \text{ için,} \sum_k a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|x_k-\ell|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\to 0\,(n\to\infty)\right\}$,

$W_\infty(A,M,p)=\left\{x\in w:\exists\ \rho>0 \text{ için,} \sup_n\sum_k a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\infty\right\}$

şeklinde tanımlıdır. Her k için $M_k(x)=x$ olduğunda yukarıda tanımlı dizi aileleri sırasıyla $[A,p]_0, [A,p]$ ve $[A,p]_\infty$ dizi uzayları ile gösterilir. Her k için $M_k(x)=x$ ve $A=(C,1)$ Cesaro matrisi alınırsa, Parashar ve Choudhary (1994) tarafından tanımlanan $W_0(M,p), W(M,p), W_\infty(M,p)$ dizi uzayları elde edilir.

Teorem 2.2.1. $p=(p_k)$ sınırlı reel terimli bir dizi olsun. Bu takdirde $W_0[A,M,p], W[A,M,p], W_\infty[A,M,p]$ cümleleri $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde birer lineer uzaydır(Böyük,2002).

İspat : Yalnız $W_0[A,M,p]$ kümesi için ispat yapmak yeterlidir. Diğerleri benzer biçimde yapılabilir. $x,y\in W_0[A,M,p]$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olsun.

$$\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right)^{p_k}\to 0 \text{ ve } \sum a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right)^{p_k}\to 0 \quad , \quad (n\to\infty)$$

lacak biçimde ρ_1 ve ρ_2 ler mevcuttur. İspatı tamamlamak için,

$$\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|\alpha x_k+\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right)^{p_k}\to 0, \qquad (n\to\infty)$$

olacak biçimde ρ_3 sayısının varlığını göstermek yeterlidir. Burada $\rho_3=\max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ şeklinde tanımlıdır. M Orlicz fonksiyonu azalmayan ve konveks bir fonksiyon olduğu için $C = max\left(1, 2^{H-1}\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|\alpha x_k+\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right)^{p_k} &\leq \sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|\alpha x_k|}{\rho_3}+\frac{|\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right)^{p_k} \\
&\leq \sum_k \frac{1}{2^{p_k}} a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)+M_k\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right)^{p_k} \\
&\leq \sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)+M_k\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right)^{p_k} \\
&\leq C\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right)^{p_k} \\
&\quad +C\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right)^{p_k}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu sonuç $W_0\left(A, M, p\right)$ dizi uzayının lineer uzay olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.2. $H = \max\left(1, \sup_k p_k\right)$ olmak üzere, $W_0\left(A, M, p\right)$ dizi uzayı ,

$$G\left(x\right) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left[\sum_k a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1, \quad n = 1, 2, 3...\right\}$$

paranormu ile bir lineer topolojik uzaydır(Böyük,2002).

İspat : $G\left(x\right) = G\left(-x\right)$ olduğu açıktır. Bir önceki teoremde $\alpha = \beta = 1$ alınırsa

$G\left(x+y\right) \leq G\left(x\right) + G\left(y\right)$ elde edilir. $M\left(0\right) = 0$ olduğundan x=Θ için $inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}}\right\} = 0$ elde edilir. Tersine olarak $g\left(x\right) = 0$ olsun. Bu takdirde,

$$\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left[\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1\right\} = 0$$

olur. Bu ise verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left[\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

olacak şekilde bir $\rho_\varepsilon\left(0 < \rho_\varepsilon < \varepsilon\right)$ 'ün var olmasını gerektirir. Böylece,

$$\left[\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq \left[\sum_k a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

elde edilir. Bazı m ler için $x_{n_m} \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon \to 0$ olsun. Bu durumda,

$$\left(\frac{|x_{n_m}|}{\varepsilon}\right) \to \infty$$

olur ve

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left(M_k\left(\frac{|x_{n_m}|}{\rho}\right)\right)^{p_m}\right]^{\frac{1}{H}} \to \infty$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise bir çelişkidir. O halde her m için $x_{n_m} = 0$ dır. Son olarak, skalerle çarpımın sürekliliği gösterilirse ispat biter. λ, herhangi bir sayı olsun. Tanımdan, $r = \frac{\rho}{\lambda}$ olmak üzere,

$$G(\lambda x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_k a_{nk}\left(M_k\left[\frac{|\lambda x_k|}{\rho}\right]\right)^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, ...\right\}$$

olur. Bu halde $|\lambda|^{p_k} \leq \max\left(1, |\lambda|^H\right)$ olduğundan $|\lambda|^{\frac{p_k}{H}} \leq \max\left(1, |\lambda|^H\right)^{\frac{1}{H}}$ elde edilir.Böylece,

$$G(\lambda x) \leq \max\left(1, |\lambda|^H\right)^{\frac{1}{H}} \inf\left\{r^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sum_k a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|x_k|}{r}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, ...\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu nedenle $G(x)$ sıfıra yaklaşırken bu ifade sıfıra yaklaşır.$\lambda_m \to 0$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists \rho > 0$ için N,

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde pozitif bir tamsayı olsun. Bu takdirde,

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. $0 < |\lambda| < 1$ olsun. M 'nin konveksliğini kullanarak

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|\lambda x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk}\left[|\lambda| M_k\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$$

elde edilir. M, Orlicz fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığının her yerinde sürekli olduğu için

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|tx_k|}{\rho}\right)\right]$$

fonksiyonu 0 noktasında süreklidir. Dolayısıyla, $0 < t < \delta$ için $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $1 > \delta > 0$ mevcuttur. $n > K$ için $|\lambda_n| < \delta$ için olacak biçimde bir K sayısı alınırsa, $n > K$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{N} a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|\lambda_n x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Bu nedenle $n > K$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left[M_k\left(\frac{|\lambda_n x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.3. A, negatif olmayan regüler bir matris ve $M = (M_k)$, Orlicz fonksiyonlarının her k için Δ_2 şartını sağlayan bir dizisi olsun. Bu durumda,

$$[A,p]_0 = \left\{x \in w : \sum_k a_{nk}|x_k|^{p_k} \to 0, n \to \infty\right\},$$

$$[A,p] = \left\{x \in w : \sum_k a_{nk}|x_k - \ell|^{p_k} \to 0, n \to \infty\right\},$$

$$[A,p]_\infty = \left\{x \in w : \sum_k a_{nk}|x_k|^{p_k} < \infty\right\}$$

olmak üzere,

(i) $[A,p]_0 \subseteq W_0(A,M,p)$

(ii) $[A,p] \subseteq W(A,M,p)$

(iii) $[A,p]_\infty \subseteq W_\infty(A,M,p)$ dir(Böyük,2002).

İspat : Diğerleri benzer şekilde gösterilebileceğinden, teoremin yalnız (ii) şıkkı gösterilecektir. $x \in [A,p]$ olsun. Bu durumda, $n \to \infty$ iken

$$S_n = \sum_k a_{nk}|x_k - \ell|^{p_k} \to 0$$

alınabilir. $\varepsilon > 0$ olsun ve $0 \leq t \leq \delta$ için $M_k(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ özelliğine sahip bir δ sayısı seçilsin. $y_k = |x_k - \ell|$ olsun ve

$$\sum_k a_{nk} \left[M_k(|y_k|)\right]^{p_k} = \sum_1 + \sum_2$$

toplamı göz önünde bulundurulsun. Burada ilk toplam $y_k \leq \delta$ ve ikinci toplam $y_k > \delta$ üzerinden alınmıştır. Her k için M_k, sürekli olduğundan,

$$\sum_1 < \varepsilon^H \sum_k a_{nk} \tag{2}$$

ve $y_k > \delta$ için $y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \frac{y_k}{\delta}$ gerçeğinden hareketle, her k için M_k konveks ve azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$M_k(y_k) \leq M_k\left(1 + \frac{y_k}{\delta}\right) < \frac{1}{2} M_k(2) + \frac{1}{2} M_k\left(\frac{2y_k}{\delta}\right)$$

elde edilir. Ayrıca her k için M_k, Δ_2 şartını sağladığından,

$$M_k(y_k) \leq \frac{1}{2} k \frac{y_k}{\delta} M_k(2) + \frac{1}{2} k \frac{y_k}{\delta} M_k(2) = k y_k \delta^{-1} M_k(2)$$

olur. Böylece de

$$\sum_2 M_k(y_k) \leq k y_k \delta^{-1} M_k(2)\, n S_n \tag{3}$$

elde edilir. (2) ve (3) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse $[A, p] \subseteq W(A, M, p)$ sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde $[A, p]_0 \subseteq W_0(A, M, p)$ ve $[A, p]_\infty \subseteq W_\infty(A, M, p)$ olduğu da gösterilebilir.

Teorem 2.2.4.

(i) $0 < inf p_k \leq p_k \leq 1$ olsun. Bu takdirde $W(A, M, p) \subseteq W(A, M)$ olur.

(ii) $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ olsun. Bu takdirde, $W(A, M) \subseteq W(A, M, p)$ olur(Böyük,2002).

İspat :

(i) $x \in W(A, M, p)$ olsun. $0 < inf p_k \leq p_k \leq 1$ olduğundan,

$$\sum_k a_{nk} \left[M_k \left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho} \right) \right] \leq \sum_k a_{nk} \left[M_k \left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

ve böylece $x \in W(A, M)$ olur ki bu sonuç ispatı tamamlar.

(ii) Her bir k için $1 \leq p_k \leq \sup p_k$ ve $\sup p_k < \infty$ olsun. $x \in W(A, M)$ olsun.

$0 < \varepsilon < 1$ ve her $n \geq N$ için,

$$\sum_k a_{nk} \left[M_k \left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho} \right) \right] \leq \varepsilon < 1$$

olacak sekilde pozitif bir N sayısı vardır. Bu,

$$\sum_{k=1} a_{nk} \left[M_k \left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k=1} a_{nk} \left[M_k \left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho} \right) \right]$$

olmasını gerektirir. Böylece $x \in W(A, M, p)$ elde edilirki bu sonuç teoremin iddiasını ispatlar.

Teorem 2.2.5. $0 < p_k < q_k$ ve $\left(\frac{p_k}{q_k} \right)$ sınırlı ise $W(A, M, q) \subseteq W(A, M, p)$ dir(Böyük,2002).

İspat : $x \in W(A, M, q)$ olsun.

$$t_k = \left[a_{nk} M_k \left(\frac{x_k - \ell}{\rho} \right) \right]^{q_k}$$

ve $\lambda_k = \frac{p_k}{q_k}$ olacak şekilde seçilsin. $p_k \leq q_k$ olduğundan $0 < \lambda_k \leq 1$ dir. $0 < \lambda \leq \lambda_k$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için u_k ve v_k,

$$u_k = \left\{ \begin{array}{c} t_k, t_k \geq 1 \text{ için} \\ 0, t_k < 1 \text{ için} \end{array} \right\}$$

$$v_k = \left\{ \begin{array}{c} 0, t_k \geq 1 \text{ için} \\ \\ v_k, t_k < 1 \text{ için} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $t_k^{\lambda_k} = u_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k}$dır. Buna göre $u_k^{\lambda_k} \leq u_k \leq t_k$ ve $v_k^{\lambda_k} \leq v_k^{\lambda}$

olduğu çıkar. Böylece,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k^{\lambda_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k + \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right]^{\lambda}$$

elde edilir ki bu sonuç $x \in W(M,p)$ olması demektir. İspat biter.

Sonuç 2.2.6 $A = (C,1)$, bir Cesaro matrisi ve $M = (M_k)$,Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu durumda

(i) $$W_0 = \left\{ x \in w : \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{p_k} \to 0, \qquad n \to \infty \right\}$$

$$W_1 = \left\{ x \in w : \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - \ell|^{p_k} \to 0, \qquad n \to \infty \right\}$$

$$W_\infty = \left\{ x \in w : \sup_n \left(\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{p_k} \right) < \infty, n \to \infty \right\}$$

olmak üzere eğer $M = (M_k)$, her k için Δ_2 şartını sağlıyorsa $W_1 \subset W(M,p)$, $W_0 \subset W_0(M,p)$, $W_\infty \subset W_\infty(M,p)$ dir.

(ii) $0 < inf p_k \leq p_k \leq 1$ ise $W(M,p) \subseteq W(M)$ olur.

(ii) $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ ise $W(M) \subseteq W(M,p)$ olur.

(iii) $0 < p_k < q_k$ ve $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$ sınırlı ise $W(M,q) \subseteq W(M,p)$ dir(Böyük,2002).

2.3. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Fark Dizi Uzayları

Bu bölümde Mursaleen ve ark. (1999) tarafından çalışılan, Orlicz fonksiyonları yardımlarıyla tanımlanan bazı fark dizi uzaylarını ve bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

M Orlicz fonksiyonu olmak üzere,

$$\ell_\infty(\Delta, M) = \left\{ x = (x_k) : \sup_{k\geq 0} M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho}\right) < \infty \text{ ,bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

$$c(\Delta, M) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} M\left(\frac{|\Delta x_k - \ell|}{\rho}\right) = 0 \text{ ,bazı } \rho > 0 \text{ ve } \ell > 0 \text{için} \right\}$$

$$c_0(\Delta, M) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho}\right) = 0 \text{ ,bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

dir. Bu uzaylar,

$$\|x\|_\Delta = \inf\left\{ \rho > 0 : \sup_{k\geq 0} M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normuna göre birer normlu uzaydırlar(Mursaleen et al.,1999).

Teorem 2.3.1. $\ell_\infty(\Delta, M)$ uzayı,

$$\|x\|_\Delta = \inf\left\{ \rho > 0 : \sup_{k\geq 0} M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu altında birer Banach uzayıdır(Mursaleen et al.,1999).

İspat : $(x^i), \ell_\infty(\Delta, M)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Burada her bir $i \in \mathbb{N}$ için $x^i = (x_k^i) = (x_1^i, x_2^i, ...) \in \ell_\infty(\Delta, M)$ dır.$r, x_0 > 0$ sabit olsun. Her $\frac{\varepsilon}{rx_0} > 0$ ve her $i, j > N$ olmak üzere

$$\left\|x^i - x^j\right\|_\Delta < \frac{\varepsilon}{rx_0}$$

olacak şekilde pozitif bir $N \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır. Norm tanımından her $i, j > N$ için

$$\sup_{k\geq 0} M\left(\frac{\Delta x_k^i - \Delta x_k^j}{\|x^i - x^j\|}\right) \leq 1$$

elde ederiz. Buradan,her bir $k > 0$ ve her $i, j > N$ için

$$M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right|}{\|x^i - x^j\|_\Delta}\right) \leq 1$$

olur. Böylece,

$$M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right|}{\|x^i - x^j\|_\Delta}\right) \leq M\left(\frac{rx_0}{2}\right)$$

olacak şekilde $M\left(\frac{rx_0}{2}\right) \geq 1$ özelliğine sahip $r > 0$ bulunabilir. Bu durum

$$\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right| < \frac{rx_0}{2}\frac{\varepsilon}{rx_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

olmasını gerektirir. Böylece,$\left(\Delta x_k^i\right)$, $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisidir. O halde, her ε $(0 < \varepsilon < 1)$ ve her $i, j \geq N$ için $\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

M' nin sürekliliğinden

$$\sup_{k\geq N} M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \lim\limits_{j\to\infty} \Delta x_k^j\right|}{\rho}\right) \leq 1$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{k\geq N} M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k\right|}{\rho}\right) \leq 1$$

ρ' lar üzerinden infumum alınırsa, $j \to \infty$ iken her $i \geq N$ için

$$\inf\left\{\rho > 0 : \sup_{k\geq N} M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k\right|}{\rho}\right) \leq 1\right\} < \varepsilon$$

elde edilir. $(x^i) \in \ell_\infty(\Delta, M)$ ve M'de Orlicz fonksiyon olduğundan $x \in \ell_\infty(\Delta, M)$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.2. M,Δ_2 şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde,

(i) $c_0(\Delta) \subset c_0(\Delta, M)$;

(ii) $c(\Delta) \subset c(\Delta, M)$;

(iii) $l_\infty(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta, M)$ olur(Mursaleen et al.,1999).

İspat :

(i) $x \in c_0(\Delta)$ olsun. Bu takdirde,

$$\lim_{k\to\infty} |\Delta x_k| = 0$$

olacaktır. Öte yandan M, nin sürekliliği de kullanılarak

$$\lim_{k\to\infty} M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho}\right) = M\left(\frac{\lim\limits_{k\to\infty} |\Delta x_k|}{\rho}\right) = M(0) = 0$$

elde edilir. Böylece $x \in c_0(\Delta, M)$ bulunur. Buradan da $c_0(\Delta) \subset c_0(\Delta, M)$ yazılır. Teoremin (ii) şıkkının ispatıda benzer yolla yapıldığı için şimdi de (iii)'nin ispatı verilecektir.

$x \in \ell_\infty(\Delta)$ olsun. Bu taktirde, her k için $|\Delta x_k| \leq N$ olacak şekilde bir N sayısı vardır. M , Δ_2 şartını sağladığından

$$M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho}\right) \leq M\left(\frac{N}{\rho}\right) \leq K\ell M(N)$$

olur. O halde

$$\sup_{k\geq 0} M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho}\right) < \infty$$

elde edilir ki böylece, $\ell_\infty(\Delta) \subset \ell_\infty(\Delta, M)$ sonucuna ulaşılır.

$p = (p_k)$pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Bu taktirde , aynı yolla M Orlicz fonksiyonu için c_0, c ve ℓ_∞ dizi uzaylarının $c_0(p), c(p)$ ve $\ell_\infty(p)$ uzaylarına genelleştirildiği gibi aşağıdaki dizi uzayları $\rho > 0$ için,

$$\begin{aligned} c_0(\Delta, M, p) &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} \left(M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \right) \right)^{p_k} = 0 \right\} \\ c(\Delta, M, p) &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} \left(M\left(\frac{|\Delta x_k - \ell|}{\rho} \right) \right)^{p_k} = 0 \right\} \\ \ell_\infty(\Delta, M, p) &= \left\{ x = (x_k) : \sup_{k\geq 0} \left(M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \right) \right)^{p_k} < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Her k için $p_k = 1$ ise $c_0(\Delta, M, p) = c_0(\Delta, M)$, $c(\Delta, M, p) = c(\Delta, M)$ ve $\ell_\infty(\Delta, M, p) = \ell_\infty(\Delta, M)$ olur.

Teorem 2.3.3. $\ell_\infty(\Delta, M, p)$ uzayı

$$G(x) = \inf\left\{ p^{\frac{p_n}{H}} : \left\{ \sup_{k\geq 0} \left(M\left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \right) \right)^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

paranormuna göre tamdır. Burada, $H = \max\left(1, \sup_{k\geq 0} p_k\right)$ dır(Mursaleen et al.,1999).

İspat : (x^i), $\ell_\infty(\Delta, M, p)$ de herhangi bir Cauchy dizisi ve $r, x_0 > 0$ sabit olsun. Her $i, j \geq N$ için her $\frac{\varepsilon}{r x_0} > 0$ olmak üzere

$$G\left(x^i - x^j\right) < \frac{\varepsilon}{r x_0}$$

olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır. Paranorm tanımından her $i, j \geq N$ için

$$\left\{ \sup_{k\geq 0} \left(M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right|}{G(x^i - x^j)} \right) \right)^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

elde ederiz. Böylece, her $i, j \geq N$ için

$$\sup_{k\geq 0} \left(M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right|}{G(x^i - x^j)} \right) \right)^{p_k} \leq 1$$

elde edilir. Her bir $k \geq 0$ ve her $i, j \geq N$ için $M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right|}{G(x^i - x^j)} \right) \leq 1$ yazılabilir. $M\left(\frac{r x_0}{2}\right) \geq 1$ olmak üzere $r > 0$ için $M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right|}{G(x^i - x^j)} \right) \leq M\left(\frac{\varepsilon}{r x_0}\right)$ elde edilir. Bu,

$$\left|\Delta x_k^i - \Delta x_k^j\right| \leq \frac{r x_0}{2} \frac{\varepsilon}{r x_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

olmasını gerektirir. Böylece$\left(\Delta x^i\right)$, $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisidir. O halde her ε $(0 < \varepsilon < 1)$ ve her $i, j \geq N$ için $\left|\Delta x^i - \Delta x\right| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır. M'nin sürekliliğinden

$$\sup_{k\geq 0}\left(M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x\right|}{\rho}\right)\right)^{p_k} \leq 1$$

elde edilir. ρ üzerinden infumum alınırsa, her $i, j \geq N$ ve $j \to \infty$ için

$$\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left[\sup_{k\geq 0}\left(M\left(\frac{\left|\Delta x_k^i - \Delta x\right|}{\rho}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1\right\} < \varepsilon$$

olur. $\left(x^i\right) \in \ell_\infty\left(\Delta, M, p\right)$ ve M sürekli olduğundan $x \in \ell_\infty\left(\Delta, M, p\right)$ çıkar. Bu sonuç ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.4. Her bir k için $0 < p_k \leq q_k$ olsun. Bu taktirde,

$$c_0\left(\Delta, M, p\right) \subset c_0\left(\Delta, M, q\right)$$

olur(Mursaleen et al.,1999).

İspat $x \in c_0\left(\Delta, M, p\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty}\left(M\left(\frac{\left|\Delta x_k\right|}{\rho}\right)\right)^{p_k} = 0$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ vardır. Bu i ' nin yeterince büyük değerleri için

$$M\left(\frac{\left|\Delta x_i\right|}{\rho}\right) \leq 1$$

olmasını gerektir. M azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$M\left(\frac{\left|\Delta x_k\right|}{\rho}\right)^{q_k} \leq M\left(\frac{\left|\Delta x_k\right|}{\rho}\right)^{p_k}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $k \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{k\to\infty}\left(M\left(\frac{\left|\Delta x_k\right|}{\rho}\right)\right)^{q_k} = 0$$

elde edilir ki $c_0\left(\Delta, M, p\right) \subset c_0\left(\Delta, M, q\right)$ sonucu bulunur.

2.4. Orlicz Fonksiyonu İle Tanımlanmış Bazı Kuvvetli Toplanabilir Dizi Uzayları

Bu bölümde E.Savaş ve R.Savaş (2004) tarafından çalışılan dizi uzayları incelenecektir.

$\lambda = (\lambda_n)$ pozitif reel sayıların azalmayan bir dizisi , $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olsun. Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ dır. Eğer $n \to \infty$ için $t_n(x) \to \ell$ oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi ℓ sayısına (V, λ) toplanabilir denir(Leindler,1965).

$[V, \lambda]_0 = \left\{ x \in w : \lim\limits_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{k \in I_n} |x_k| = 0 \right\}$

$[V, \lambda] = \left\{ x \in w : \lim\limits_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{k \in I_n} |x_k - \ell e| = 0, \text{bazı } \ell \in \mathbb{C} \text{ için} \right\}$

$[V, \lambda]_\infty = \left\{ x \in w : \sup\limits_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{k \in I_n} |x_k| < \infty \right\}$

Yukarıdaki dizi uzayları sırasıyla de la Vallée-Poussin metoduyla tanımlanmış,

0 ' a kuvvetli toplanabilir, kuvvetli toplanabilir, kuvvetli sınırlı dizi uzaylarıdır. Burada özel olarak n=1,2,3,... için $\lambda_n = n$ alınırsa $[V, \lambda]_0, [V, \lambda], [V, \lambda]_\infty$ dizi uzayları Maddox(1967) tarafından çalışılan w_0, w, w_∞ dizi uzaylarına indirgenir. E.Savaş ve R.Savaş(2004) Orlicz fonksiyonunu kullanarak,

$[V, M, p]_0 = \left\{ x \in w : \lim\limits_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{k \in I_n} \left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} = 0, \exists\, \rho > 0 \right\}$

$[V, M, p] = \left\{ x \in w : \lim\limits_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{k \in I_n} \left[M\left(\frac{|x_k - \ell|}{\rho}\right) \right]^{p_k} = 0, \ \exists \rho > 0 \text{ ve } \ell > 0 \right\}$

$[V, M, p]_\infty = \left\{ x \in w : \sup\limits_n \frac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{k \in I_n} \left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} < \infty, \exists\, \rho > 0 \right\}$

dizi uzaylarını elde ettiler. Burada her k için $p_k = 1$ alınırsa sırasıyla $[V, M]_0$, $[V, M]$, $[V, M]_\infty$ dizi uzayları elde edilir. Eğer her k için $p_k = 1$ ve $M(x) = x$ alınırsa o zaman $[V, M, p]_0 = [V, \lambda]_0$, $[V, M, p] = [V, \lambda]$ ve $[V, M, p]_\infty = [V, \lambda]_\infty$ dizi uzaylarına indirgenir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ alınırsa $[V,M,p]_0\,,[V,M,p]\,,[V,M,p]_\infty$ dizi uzayları Parashar ve Choudhary(1994) tarafından çalışılan $[C,M,p]_0\,,[C,M,p]\,,$

$[C,M,p]_\infty$ dizi uzaylarına indirgenir.

Teorem 2.4.1. M bir Orlicz fonksiyonu ve $p=(p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu takdirde $[V,M,p]_0\,,[V,M,p]\,,[V,M,p]_\infty$ dizi uzayları kompleks sayılar cümlesi üzerinde lineerdir(Savaş and Savaş , 2004).

Burada sadece $[V,M,p]_0$ için teoremin iddiası ispatlanacaktır. Diğerleri benzer yolla gösterilebilir. $x,y \in [V,M,p]_0$ ve $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ olsun. O zaman tanımdan

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}=0$$

ve

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}=0$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. $\rho_3=\max\left(2|\alpha|\rho_{1,}2|\beta|\rho_2\right)$ olsun. M azalmayan ve konveks bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\alpha x_k+\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k} &\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\alpha x_k|}{\rho_3}+\frac{|\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}\\
&\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\frac{1}{2^{p_k}}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)+M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\\
&\le \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)+M\left(\frac{|y_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}\\
&\le C\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}+C\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_2}\right)\right]^{p_k}
\end{aligned}$$

elde edilir ki, $n\to\infty$ için eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\alpha x_k+\beta y_k|}{\rho_3}\right)\right]^{p_k}=0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $\alpha x_k+\beta y_k \in [V,M,p]_0$ demektir. Yani $[V,M,p]_0$ dizi uzayı lineerdir.

Teorem 2.4.2. M bir Orlicz fonksiyonu ve $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde $[V, M, p]_0$ dizi uzayı

$$g(x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_1}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, 3, ...\right\}$$

ile total paranormlu uzaydır(Savaş and Savaş , 2004).

İspat $g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. Teorem 2.4.1. de $\alpha = \beta = 1$ alınırsa $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ elde ederiz. $M(0) = 0$ olduğundan $x = \Theta$ için $\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}}\right\} = 0$ elde edilir. Tersine olarak $g(x) = 0$ olsun. Bu takdirde

$$\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1\right\} = 0$$

olur. Bu ise verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

olacak şekilde bir $\rho_\varepsilon\,(0 < \rho_\varepsilon < \varepsilon)$ 'ün var olmasını gerektirir. Böylece her bir n için,

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho_\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

elde edilir. Bazı $m \in I_n$ ler için $x_{n_m} \neq 0$ ve $\varepsilon \to 0$ olsun. Bu takdirde ,

$$\left(\frac{|x_{n_m}|}{\varepsilon}\right) \to \infty$$

olur ve

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_{n_m}|}{\varepsilon}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \to \infty$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise bir çelişkidir. O halde her bir m için $x_{n_m} = 0$ dır. Son olarak, skalerle çarpımın sürekliliği gösterilecektir. μ, herhangi bir kompleks sayı olsun. Tanımdan, $r = \frac{\rho}{|\mu|}$ olmak üzere

$$g(\mu x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\mu x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, 3, ...\right\}$$

yazılabilir. O zaman,

$$g(\mu x)=\inf\left\{(|\mu r|)^{\frac{p_n}{H}}:\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{r}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1, n=1,2,3,...\right\}$$

olur. Bu halde $|\mu|^{p_k}\leq\max\left(1,|\mu|^H\right)$ olduğundan $|\mu|^{\frac{p_k}{H}}\leq\max\left(1,|\mu|^H\right)^{\frac{1}{H}}$ elde edilir. Böylece,

$$g(\mu x)\leq\max\left(1,|\mu|^H\right)^{\frac{1}{H}}\inf\left\{r^{\frac{p_n}{H}}:\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{r}\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1, n=1,2,...\right\}$$

olur ki , $[V,M,p]_0$ de $g(x)\to 0$ ise $g(\mu x)\to 0$ olacaktır. $\mu_m\to 0$ ve $x\in[V,M,p]_0$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde $\exists\rho>0$ ve her $n>N$ için N,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\leq\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$$

olacak şekilde pozitif bir tamsayı olsun. Bu durum $\exists\rho>0$ ve her $n>N$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

olmasını gerektirir. $0<|\mu|<1$ olsun. M 'nin konveksliğini kullanarak $n>N$ için,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|\mu x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[|\mu|\,M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$$

elde ederiz. $M,[0,\infty)$ aralığının her yerinde sürekli olduğu için $n\leq N$ için

$$f(t)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[M\left(\frac{|tx_k|}{\rho}\right)\right]^{p_k}$$

fonksiyonu 0 noktasında süreklidir. Dolayısıyla, $0<t<\delta$ için $|f(t)|<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^H$olacak şekilde $1>\delta>0$ mevcuttur. $m>K$ için $|\mu_m|<\delta$ olacak biçimde bir K sayısı alınsın. O zaman $m>K$ ve $n\leq N$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[\left(M\left(\frac{|\mu_m x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}}\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[\left(M\left(\frac{|\mu_m x_k|}{\rho}\right)\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır ki $m > K$ ve her n için $g(\mu x) \to 0$, $(\mu \to 0)$ dir. İspat biter.

Teorem 2.4.3. M , Δ_2 şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. O zaman

$$[V,\lambda] \subseteq [V,M]$$

dir(Savaş and Savaş, 2004).

İspat $x \in [V,\lambda]$ olsun. O zaman

$$T_n = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - \ell| \to 0 \text{ , } n \to \infty \text{ ve bazı } \ell \text{ için}$$

$\varepsilon > 0$ olsun ve $0 \leq t \leq \delta$ için $M(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ özelliğine sahip bir δ sayısını seçilsin. $y_k = |x_k - \ell|$ olsun.

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}M(|y_k|) = \sum_1 + \sum_2$$

olarak göz önüne alalım. Burada ilk toplam $y_k \leq \delta$ ve ikinci toplam $y_k > \delta$ üzerinden alınmıştır. M, sürekli olduğundan,

$$\sum_1 \leq \lambda_n \varepsilon$$

ve $y_k > \delta$ için $y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \frac{y_k}{\delta}$ olduğu görülür. M konveks ve azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$M(y_k) \leq M\left(1 + \frac{y_k}{\delta}\right) < \frac{1}{2}M(2) + \frac{1}{2}M\left(\frac{2y_k}{\delta}\right)$$

elde edilir. Ayrıca M, Δ_2 şartını sağladığından $K > 2$ sabiti vardır öyle ki

$$M\left(\frac{2y_k}{\delta}\right) \leq \frac{1}{2}K\frac{y_k}{\delta}M(2)$$

olduğundan

$$M(y_k) \leq \frac{1}{2}k\frac{y_k}{\delta}M(2) + \frac{1}{2}k\frac{y_k}{\delta}M(2) = ky_k\delta^{-1}M(2)$$

elde edilir.Böylece de

$$\sum_2 M(y_k) \leq k y_k \delta^{-1} M(2)\,\lambda_n T_n \qquad \text{ve} \qquad \sum_1 \leq n\varepsilon$$

eşitsizlikleri birlikte düşünülürse $[V,\lambda] \subseteq [V,M]$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ispatı tamamlar.

M, Δ_2 şartını sağlayan Orlicz fonksiyonu olmak üzere Teorem 2.4.3 ün ispatındaki metod kullanılarak $[V,\lambda]_0 \subseteq [V,M]_0$, $[V,\lambda]_\infty \subseteq [V,M]_\infty$ olduğu da gösterilebilir.

2.5. $\left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ Yarı Normlu Uzayları ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda Altın ve ark. (2004) tarafından çalışılan Orlicz fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $\left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ dizi uzayları ve bazı kapsama bağıntıları incelendi.

Tanım 2.5.1. "a" ile gösterilmek üzere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi verilsin.

$$s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$$

olsun (s_n) dizisi "s" ile gösterilsin. Pozitif reel sayıların bir dizisi $(p_n)_{n\geq 0}$ olsun ve $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$ yazılsın. Eğer $n \to \infty$,

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v \to \ell$$

ise a serisi ℓ'ye $\left(\overline{N}, p_n\right)$ toplanabilir denir. Eğer

$$\sum_n |t_n - t_{n-1}| < \infty$$

ise "a" serisine mutlak $\left(\overline{N}, p_n\right)$ toplanabilir ya da $\left|\overline{N}, p_n\right|$ toplanabilir denir(MEAR,1937).

$$t_n = \left(\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v\right)$$

olmak üzere $\varphi_n(a) = t_n - t_{n-1}$ olsun. Abel dönüşümünü uygulayarak,

$\Delta s_v = s_v - s_{v+1} = -a_{v+1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
t_n - t_{n-1} &= \frac{1}{P_n}\left(\sum_{v=0}^{n} P_v \Delta s_v + P_n s_{n+1}\right) - \frac{1}{P_{n-1}}\left(\sum_{v=0}^{n-1} P_v \Delta s_v + P_{n-1} s_n\right) \\
&= (s_{n+1} - s_n) + \frac{1}{P_n}\left(\sum_{v=0}^{n} P_v \Delta s_v\right) - \frac{P_n \Delta s_n}{P_n} - \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1} P_v \Delta s_v \\
&= a_{n+1} + \frac{1}{P_n}\left(\sum_{v=0}^{n-1} P_v \Delta s_v\right) - a_{n+1} - \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1} P_v \Delta s_v \\
&= -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1} P_v \Delta s_v = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1} P_v a_{v+1} \\
&= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \\
\varphi_n(a) &= t_n - t_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \ , \ \ (n \geq 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Herhangi bir " a " ve " b " serileri ve λ skaleri için

$$\varphi_n(a+b) = \varphi_n(a) + \varphi_n(b)$$

ve

$$\varphi_n(\lambda a) = \lambda \varphi_n(a)$$

bulunur.

M, bir Orlicz fonksiyonu ve X de q yarınormuyla birlikte yarınormlu uzay olsun. $s \geq 0$ olacak şekilde bir reel sayı ve $r = (r_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $w(x)$ sembolüyle x değerli dizilerin uzayı gösterilsin. Bu takdirde

$$\left\{ a \in w(x) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k} < \infty, \mathrm{s} \geq 0, \text{bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlanmış cümle $\left|\overline{N}_p\right|(M, r, q, s)$ ile gösterilir.

Altın ve ark. (2004) s ve r_k'ya değerler vererek aşağıdaki dizi uzaylarını elde ettiler.

Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $r_k = 1$ alınırsa;

$\left|\overline{N_p}\right|(M,q,s) = \left\{ a \in w(x) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho} \right) \right) \right] < \infty, \quad s \geq 0, \text{bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$

dizi uzayı elde edilir.Eğer $s = 0$ alınırsa;

$\left|\overline{N_p}\right|(M,r,q) = \left\{ a \in w(x) : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k} < \infty, \quad \text{bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$

dizi uzayı elde edilir. Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $r_k = 1$ ve $s = 0$ alınırsa;

$\left|\overline{N_p}\right|(M,q) = \left\{ a \in w(X) : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho} \right) \right) \right] < \infty, \quad \text{bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$

dizi uzayı elde edilir.

$r = (r_k)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $0 < r_k \leq \sup r_k = H$ ve $C = max(1, 2^{H-1})$ olsun. O zaman

$$|a_k + b_k|^{r_k} \leq C.\left(|a_k|^{r_k} + |b_k|^{r_k}\right)$$

şeklindeki eşitsizliği gözönüne alınız.

Teorem 2.5.2. $H = \sup r_k$ olsun. O zaman, $\left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ dizi uzayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde lineerdir(Altın et al., 2004).

İspat $a, b \in \left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ ve $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$ olsun. O zaman,
$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho_1} \right) \right) \right]^{r_k} < \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho_2} \right) \right) \right]^{r_k} < \infty$ olacak şekilde pozitif ρ_1 ve ρ_2 sayıları vardır. $\rho_3 = \max\left(2|\lambda|\rho_1, 2|\mu|\rho_2\right)$ olsun. M azalmayan, konveks bir fonksiyon olduğundan ve q bir yarınorm olduğundan

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\lambda\phi_k(a) + \mu\phi_k(b)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{r_k} \\ \leq & \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\lambda\phi_k(a)}{\rho_3} \right) + q\left(\frac{\mu\phi_k(b)}{\rho_3} \right) \right) \right]^{r_k} \\ \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r_k}} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho_1} \right) \right) + M\left(q\left(\frac{\phi_k(b)}{\rho_2} \right) \right) \right]^{r_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho_1}\right)\right)+M\left(q\left(\frac{\phi_k(b)}{\rho_2}\right)\right)\right]^{r_k} \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho_1}\right)\right)\right]^{r_k}+C\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(b)}{\rho_2}\right)\right)^{r_k}\right]^{r_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu sonuç $\lambda a+\mu\beta \in \left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ olması demektir. Böylece ispat biter.

Teorem 2.5.3. $\left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ dizi uzayı

$$g(a)=\inf\left\{\rho^{\frac{r_n}{H}}:\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n=1,2,...\right\}$$

paranormu ile paranormlu uzaydır(Altın et al., 2004).

İspat $g(a)=g(-a)$ olduğu kolaylıkla görülür. Teorem 2.5.2. ve Lemma 1.1.29. (i) kullanılarak

$$g(a+b) \leq g(a)+g(b)$$

elde edilir. Her $a=\Theta$ için $q(\Theta)=0$ ve $M(0)=0$ olduğundan $inf\left\{\rho^{\frac{r_n}{H}}\right\}=0$ olduğu görülür. Skalerle çarpımın sürekli olduğu da gösterilirse ispat biter. λ herhangi bir reel sayı olsun. O zaman

$$g(\lambda a)=\inf\left\{\rho^{\frac{r_n}{H}}:\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\lambda\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n=1,2,...\right\}$$

olduğundan, $v=\frac{\rho}{|\lambda|}$ için

$$g(\lambda a)=\inf\left\{(|\lambda|\, v)^{\frac{r_n}{H}}:\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{v}\right)\right)\right]^{r_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n=1,2,...\right\}$$

yazılabilir. Bu halde $|\lambda|^{p_k} \leq \max\left(1,|\lambda|^H\right)$ olduğundan $|\lambda|^{\frac{p_k}{H}} \leq \max\left(1,|\lambda|^H\right)^{\frac{1}{H}}$ elde edilir. Böylece ,

$$g(\lambda x) \leq \max\left(1,|\lambda|^H\right)^{\frac{1}{H}}.\inf\left\{v^{\frac{r_n}{H}}:\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{v}\right)\right)\right]^{r_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq 1, n=1,2,...\right\}$$

olur ki $\left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$' de $g(a)$ sıfıra yakınsarken bu ifade sıfıra yakınsar. Şimdi $n \to \infty$ için $\lambda_n \to 0$ ve $x \in \left|\overline{N_p}\right|(M,r,q,s)$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde bazı $\rho > 0$ sayıları için N,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde pozitif bir tamsayı olsun. Bu durum

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olmasını gerektirir. $0 < |\lambda| < 1$ olsun. M 'nin konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\lambda\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k} &< \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s}\left[|\lambda|\, M\left(q\left(\frac{\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k} \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{H}\end{aligned}$$

elde ederiz. $M, [0,\infty)$ aralığının her yerinde sürekli olduğu için

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{t\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{r_k}$$

fonksiyonu 0 noktasında süreklidir. Dolayısıyla, $0 < t < \delta$ için $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $1 > \delta > 0$ mevcuttur. $n > K$ için $|\lambda_n| < \delta$ olacak biçimde bir K sayısı alınırsa, bu durumda, $n > K$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{N} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\lambda_n\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Bu nedenle $n > K$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\lambda_n\phi_k(a)}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}} < \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır ki böylece $\lambda \to 0$ için $g(\lambda a) \to 0$ dir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3. ORLICZ FONKSİYONUYLA TANIMLANMIŞ $\ell_\infty(p, M, q, s)$ DİZİ UZAYI

3.1. $\ell_\infty(p, M, q, s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde Orlicz fonksiyonu yardımıyla bazı dizi uzayları ilk kez tanımlanacak, bu uzayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1. X, Θ birim elemanlı kompleks(veya reel) lineer uzay ve (X, q) yarınormlu bir uzay olsun. $X-$değerli dizilerin uzayı $w(X)$ ile gösterilirsin.$w(X)$,

$x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve a bir skaler olmak üzere,

$$x + y = (x_k + y_k) \text{ ve } ax = (ax_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. M bir Orlicz fonksiyonu, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 0$ olmak üzere $p = (p_k)$ artan bir dizi olsun.

$$\left\{ x = (x_k) \in w(X) : \exists \rho > 0 \text{ ve } s > 0 \text{ için } \sup_k k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty \right\}$$

şeklindeki cümle $\ell_\infty(p, M, q, s)$ ile gösterilsin. $\varphi(X)$ ile Θ dan farklı terimleri sonlu olan $X-$değerli dizilerin uzayı gösterilirse,

$$\varphi(X) \subseteq \ell_\infty(p, M, q, s)$$

olduğunu görmek zor değildir. O halde tanımlanan cümlenin bir anlamı vardır.$\ell_\infty(p, M, q, s)$ de herhangi bir dizi $x = (x^n)$ ile gösterilecektir.Burada her bir n için,

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n, ...) \in \ell_\infty(p, M, q, s)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.2. $\ell_\infty(p, M, q, s)$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi üzerinde bir lineer uzaydır.

İspat $x, y \in \ell_\infty(p, M, q, s)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $ax + \beta y \in \ell_\infty(p, M, q, s)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in \ell_\infty(p, M, q, s)$ olduğundan;

$$\sup k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho_1}\right)\right)\right]^{p_k} < \infty \qquad \text{ve} \quad \sup k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{y_k}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k} < \infty$$

yazılabilir. Şimdi $\rho_3 = \max(2|a|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olacak şekilde seçilsin. Buna göre M, azalmayan ve konveks bir fonksiyon olduğundan ;

$$\begin{aligned}
\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{ax_k+\beta y_k}{\rho_3}\right)\right)\right]^{p_k} &\leq \sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\left(\frac{ax_k}{\rho_3}\right)+q\left(\frac{\beta y_k}{\rho_3}\right)\right)\right)\right]^{p_k} \\
&\leq \sup_k k^{-s}\frac{1}{2^{p_k}}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho_1}\right)\right)+M\left(q\left(\frac{y_k}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&\leq \sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho_1}\right)\right)+M\left(q\left(\frac{y_k}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&\leq C\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho_1}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&\quad +C\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{y_k}{\rho_2}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada , $C = \max\left(1, 2^{H-1}\right)$, $H = \sup p_k$ dır. Böylece, $ax + \beta y \in \ell_\infty(p, M, q, s)$ olduğu görülmüş olur ki ispat biter.

Teorem 3.1.3. $\ell_\infty(p, M, q, s)$ dizi uzayı ,

$$g(x) = \inf\left\{\rho^{p_n/H} : \left(\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} < 1, n \in N\right\}$$

paranormuyla bir paranormlu uzaydır.

İspat Θ , $\ell_\infty(p, M, q, s)$ dizi uzayının sıfır elemanı olsun. Bu takdirde $g(\Theta) = 0$ ve $M(0) = 0$ olduğu için $g(\Theta) = 0$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan $g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 3.1.2.' de $\alpha = \beta = 1$ alınırsa $g(x+y) = g(x) + g(y)$ elde edilir. Skalerle çarpımın sürekliliği gösterilirse ispat biter. λ herhangi bir sayı olsun. Tanımdan, $r = \frac{\rho}{\lambda}$ olmak üzere

$$g(\lambda x) = \inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\lambda x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} < 1, n \in N\right\}$$

olur. Öyleyse ;

$$g(\lambda x) = \inf\left\{ (|\lambda|\, r)^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sup_k k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{x_k}{r} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} < 1, n \in N \right\}$$

$$|\lambda|^{p_k} \leq \max\left(1, |\lambda|^H\right)$$

olduğundan

$$|\lambda|^{p_k/H} \leq \max\left(1, |\lambda|^H\right)^{1/H}$$

elde edilir. Bu sonuçla da

$$g(\lambda x) \leq \max\left(1, |\lambda|^H\right)^{1/H} \inf\left\{ \rho^{\frac{p_n}{H}} : \left(\sup_k k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\lambda x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} < 1, n \in N \right\}$$

olur ki $g(x)$, 0 ' a yakınsarken bu ifade sıfıra yakınsar. Şimdi de $\lambda_n \to 0$ ve $x \in \ell_\infty(p, M, q, s)$ olduğunu varsayalım. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\rho > 0$ olmak üzere N,

$$\sup_{k \geq N+1} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\lambda x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq \varepsilon/2$$

olacak şekilde pozitif bir sayı olsun. Buradan açıkca ,

$$\left(\sup_{k \geq N+1} \mathtt{k}^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\lambda x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi $0 < |\lambda| < 1$ olduğunu kabul edelim. M nin konveksliğini kullanarak,

$$\sup_{k \geq N+1} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\lambda x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \sup_{k \geq N+1} k^{-s} \left[|\lambda|\, M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. M , $[0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olduğundan,

$$f(t) = \sup_{1 \leq k \leq N} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{t x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k}$$

ile tanımlı f fonksiyonu da 0 da süreklidir. Buna göre $0 < \delta < 1$ olacak şekilde bir δ sayısı vardır. Öyle ki $0 < t < \delta$ için $|\, f(t)| < \varepsilon/2$ kalır. $n > K$ için $|\lambda_n| < \delta$ olacak şekilde bir K sayısı alalım. $n > K$ için

$$\left(\sup_{1 \leq k \leq N} \mathtt{k}^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{\lambda_n x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq \varepsilon/2$$

bulunur. Böylece $n > K$ için,

$$\left(\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{\lambda x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{1/H} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise; $\lambda \to 0$ iken $g(\lambda a) \to 0$ olması demektir ki bulunan sonuç ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.4. (X, q) yarınormlu uzayı tam ve $1 \leq p_k < \infty$ olsun. Bu takdirde $\ell_\infty(p, M, q, s)$ uzayı g paranormu ile tamdır.

İspat (x^i), $\ell_\infty(p, M, q, s)$ de herhangi bir Cauchy dizisi, r ve x_0 sabit sayılar olsun. Bu takdirde, her bir $\frac{\varepsilon}{rx_0} > 0$ için, her $i, j \geq N$ olmak üzere $g(x^i - x^j) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır. Paranorm tanımından her i , $j \geq N$ için

$$\left[\sup_k k^{-s}\left(M\left[q\left(\frac{x_k^i - x_k^j}{g(x^i - x^j)}\right)\right]\right)^{p_k}\right]^{\frac{1}{H}} \leq 1$$

elde ederiz. Böylece her $i, j \geq N$ için

$$\sup_k k^{-s}\left(M\left[q\left(\frac{x_k^i - x_k^j}{g(x^i - x^j)}\right)\right]\right)^{p_k} \leq 1$$

olur. $1 \leq p_k < \infty$ olduğundan her bir $k \geq 1$ için her $i, j \geq N$ olmak üzere

$$M\left(q\left(\frac{x_k^i - x_k^j}{g(x^i - x^j)}\right)\right) \leq 1$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece,

$$M\left(q\left(\frac{x_k^i - x_k^j}{g(x^i - x^j)}\right)\right) \leq M\left(\frac{rx_0}{2}\right)$$

olacak şekilde $M\left(\frac{rx_0}{2}\right) \geq 1$ özelliğine sahip $r > 0$ bulunabilir. Bu,

$$q\left(x_k^i - x_k^j\right) < \frac{rx_0}{2}\frac{\varepsilon}{rx_0} = \frac{\varepsilon}{2}$$

olması demektir. O halde (x^i), X'de bir Cauchy dizisidir. Böylece, her $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$ için $i, j \geq N$ olmak üzere $q(x^i - x) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N sayısı vardır.

M nin sürekliliği kullanılarak

$$\left(\sup_{1\leq k\leq N} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k^i-\lim\limits_{j\to\infty}x_k^j}{g\left(x^i-x^j\right)}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1$$

bulunur. Buradan da

$$\left(\sup_{1\leq k\leq N} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k^i-x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1$$

elde edilir. ρ ' lar üzerinden infumum alınırsa her $i\geq N$ ve $j\to\infty$ için

$$\inf\left\{\rho^{\frac{p_n}{H}}:\left(\sup_{1\leq k\leq N} k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k^i-x_k^j}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\right)^{\frac{1}{H}}\leq 1\right\}<\varepsilon$$

olur. $(x^i)\in\ell_\infty(p,M,q,s)$ ve M sürekli olduğundan $(x)\in\ell_\infty(p,M,q,s)$ bulunur ki bu sonuç ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.5. M , Δ_2 şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. O zaman

$$\ell_\infty\subseteq\pi\left[\ell_\infty(p,M,q,s)\right]$$

dir.

İspat $a=(a_k)\in\ell_\infty$ olsun. Bu takdirde $\forall k\in\mathbb{N}$ için $|a_k|\leq\ell$ olacak şekilde bir $\ell>1$ vardır. $\forall x\in\ell_\infty(p,M,q,s)$ için

$$\begin{aligned}
\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k a_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &= \sup_k k^{-s}\left[M\left(|a_k|\,q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&\leq \sup_k k^{-s}\left[M\left(\ell q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&\leq K^H\ell^H\sup_k k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\\
&\leq \infty
\end{aligned}$$

olacaktır. Tanım1.1.16. göz önüne alınırsa $a\in\pi\left[\ell_\infty(p,M,q,s)\right]$ yazılabilir. Dolayısıyla,

$\ell_\infty\subseteq\pi\left[\ell_\infty(p,M,q,s)\right]$ elde edilir.

Yukarıda tanımlanan $\ell_\infty(p,M,q,s)$ dizi uzayında her k için $s=0$ alınırsa $\ell_\infty(p,M,q)$ dizi uzayı, her k için $M(x_k)=x_k$ alınırsa $\ell_\infty(p,q,s)$ dizi uzayı, her k için $p_k=1$ alınırsa $\ell_\infty(M,q,s)$ dizi uzayları elde edilir.

Teorem 3.1.6. M, M_1 ve M_2 , Δ_2 şartını sağlayan Orlicz fonksiyonları q, q_1 , q_2 yarınormlar ve s , s_1 , s_2 negatif olmayan reel sayılar olsunlar.O zaman aşağıdakiler doğrudur.

(i) $s>1$ ise $\ell_\infty(p,M_1,q,s)\subseteq\ell_\infty(p,M\circ M_1,q,s)$

(ii) $\ell_\infty(p,M_1,q,s)\cap\ell_\infty(p,M_2,q,s)\subseteq\ell_\infty(p,M_{1+}M_2,q,s)$

(iii) $\ell_\infty(p,M,q_1,s)\cap\ell_\infty(p,M,q_2,s)\subseteq\ell_\infty(p,M,q_1+q_2,s)$

(iv) q_1 , q_2 den kuvvetli ise $\ell_\infty(p,M,q_1,s)\subseteq\ell_\infty(p,M,q_2,s)$

(v) $s_1\le s_2$ ise $\ell_\infty(p,M,q,s_1)\subseteq\ell_\infty(p,M,q,s_2)$

İspat :

(i) $x=(x_k)\in\ell_\infty(p,M_1,q,s)$ olsun. M sıfırda sağdan sürekli olduğundan $\varepsilon>0$ için $0<\delta<1$ olacak şekilde $\exists\,\delta>0\ \ni\ 0\le t\le\delta$ iken $M(t)\le\varepsilon$ olur. Şimdi $t_k=M_1(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right))$ yazalım ve

$$\begin{aligned}I_1&=\{k\in\mathbb{N}:M_1(q(\frac{x_k}{\rho}))\le\delta\ \}\\ I_2&=\{k\in\mathbb{N}:M_1(q(\frac{x_k}{\rho}))>\delta\ \}\end{aligned}$$

olsun. Buna göre ;

$$\sup_k k^{-s}\left[M(t_k)\right]^{p_k}\le\sup_{k\,\in\,I_1}k^{-s}\left[M(t_k)\right]^{p_k}+\sup_{k\,\in\,I_2}k^{-s}\left[M(t_k)\right]^{p_k}$$

olacaktır. Burada birinci aralık $t_k\le\delta$ üzerinden , ikinci aralık $t_k>\delta$ üzerinden alınmıştır. M sürekli olduğundan ,

$$\sup_{k\,\in\,I_1}k^{-s}\left[M(t_k)\right]^{p_k}<\max\left(1,\varepsilon^H\right)\sup_k k^{-s}<\infty \tag{4}$$

elde edilir. $t_k > \delta$ icin aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$t_k < \frac{t_k}{\delta} \leq 1 + \left(\frac{t_k}{\delta}\right)$$

M azalmayan ve konveks bir fonksiyon olduğundan aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir,

$$M(t_k) < M\left(1 + \left(\frac{t_k}{\delta}\right)\right) < \frac{1}{2}M(2) + \frac{1}{2}M(2\frac{t_k}{\delta})$$

Öte yandan M, Δ_2 şartlarını sağladığından,

$$M(t_k) < \frac{1}{2}K\frac{t_k}{\delta}M(2) = Kt_k\delta^{-1}M(2)$$

yazılabilir. Böylece de

$$\sup_{k \in I_2} k^{-s}[M(t_k)]^{p_k} \leq \max\left(1, \left[K\delta^{-1}M(2)\right]^H\right) \sup_{k \in I_2} k^{-s}(t_k)^{p_k} < \infty \tag{5}$$

elde edilir ki , (4) ve (5) eşitsizliklerinden

$$\sup_k k^{-s}[M(t_k)]^{p_k} \leq \sup_{k \in I_1} k^{-s}[M(t_k)]^{p_k} + \sup_{k \in I_2} k^{-s}[M(t_k)]^{p_k} < \infty$$

bulunur. Bu ise

$$\ell_\infty(p, M_1, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M \circ M_1, q, s)$$

demektir. Böylece teoremin (i) kısmının ispatı tamamlanmış olur.

(ii) $\forall\, k \in \mathbb{N}$ ve $x = (x_k) \in \ell_\infty(p, M_1, q, s) \cap \ell_\infty(p, M_2, q, s)$ olsun.

Lemma1.1.29. (ii) kullanılarak

$$\begin{aligned}\left[(M_1 + M_2)\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &= \left[M_1\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) + M_2\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\leq C\left[M_1\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} + C\left[M_2\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\end{aligned}$$

yazılır ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $k^{-s} > 0$ olduğundan ;

$$
\begin{aligned}
k^{-s}\left[(M_1+M_2)\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &\leq k^{-s}C\left[M_1\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&+k^{-s}C\left[M_2\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafının k üzerinden supremumu alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\sup_k k^{-s}\left[(M_1+M_2)\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &\leq \sup_k k^{-s}C\left[M_1\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&+\sup_k k^{-s}C\left[M_2\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

elde edilir ki

$$x=(x_k)\in\ell_\infty\left(p,M_1+M_2,q,s\right)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan da

$$\ell_\infty\left(p,M_1,q,s\right)\cap\ell_\infty\left(p,M_2,q,s\right)\subseteq\ell_\infty\left(p,M_1+M_2,q,s\right)$$

kapsamasının sağlandığı görülür.

(iii) Burada sonuç , (ii) dekine benzer olarak

$$k^{-s}C\left[M\left((q_1+q_2)\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}\leq Ck^{-s}\left[M\left(q_1\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}+Ck^{-s}\left[M\left(q_2\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$

eşitsizliği kullanılarak kolayca elde edilir.

(iv) q_1 yarınormu q_2 yarınormundan kuvvetli ise Tanım 1.1.10. gereği $\forall k\in\mathbb{N}$ için $q_2\left(x_k\right)\leq Kq_1\left(x_k\right)$ olacak şekilde K pozitif tam sayısı bulunabilir. Böylece $x\in\ell_\infty\left(p,M,q,s\right)$ ise

$$
\begin{aligned}
\sup_k k^{-s}\left[M\left(q_2\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &\leq \sup_k k^{-s}\left[M\left(K.q_1\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&\leq K^H\sup_k k^{-s}\left[M\left(q_1\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

olur ki bu sonuçla $x\in\ell_\infty\left(p,M,q_2,s\right)$ elde edilir.

(v) $s_1 < s_2$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < k^{-s} \leq 1$ olduğundan ,$\forall k \in \mathbb{N}$ için $k^{-s_2} < k^{\ -s_1}$ yazılabilir. Böylece $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $x_k \in \ell_\infty(p, M, q, s_1)$ için ,

$$k^{\ -s_2}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \leq k^{\ -s_1}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın k üzerinden supremumu alınırsa;

$$\ell_\infty(p, M, q, s_1) \subseteq \ell_\infty(p, M, q, s_2)$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 3.1.7. $s > 1$ ve M , Δ_2 şartını sağlayan Orlicz fonksiyonu olsun.

(i) $\ell_\infty(p, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M, q, s)$

(ii) Eğer $q_1 \equiv q_2$ ise $\ell_\infty(p, M, q_1, s) = \ell_\infty(p, M, q_2, s)$ dir

(iii) $\ell_\infty(p, M, q) \subseteq \ell_\infty(p, M, q, s)$

(iv) $\ell_\infty(M, q) \subseteq \ell_\infty(M, q, s)$

İspat :

(i) Teorem 3.1.6 i ’ de $M_1(t) = t$ alınırsa $s > 1$ iken $\ell_\infty(p, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M, q, s)$ olduğu görülür ki bu durum M Orlicz fonksiyonunun uzayı daha da genişlettiğini gösterir.

(ii) $q_1 \equiv q_2$ ise $\forall u \in X$ için $T_1 \leq \frac{q_{1(u)}}{q_{2(u)}} \leq T_2$ olacak sekilde T_1 ve T_2 pozitif sayıları vardır. Buradan da Teorem 3.1.6 (iv) kullanılarak sonuç elde edilir.

(iii) 3.1.6 (v) de $s_1 = 0$ ve $s_2 = s$ alınırsa $\ell_\infty(p, M, q) \subseteq \ell_\infty(p, M, q, s)$ olduğu görülür.

(iv) Teorem 3.1.6 (v) de Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$, $s_1 = 0$ ve $s_2 = s$ alınırsa $\ell_\infty(M, q) \subseteq \ell_\infty(M, q, s)$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.8. $t = (t_k)$ ve $r = (p_k)$ sınırlı diziler ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < t_k \leq p_k$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\sup\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) < 1$ ise $\ell_\infty(t, M, q) \subseteq \ell_\infty(p, M, q)$

(ii) $\inf\limits_k M\left[q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right] > 1$ ise $\ell_\infty(p, M, q) \subseteq \ell_\infty(M, t, q)$ dır

İspat :

(i) $\sup\limits_k [M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)] < 1$ olsun. Bu takdirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $t_k \leq p_k$ olduğundan,

$x = (x_k) \in \ell_\infty(t, M, q)$ olacak şekilde bir $x = (x_k)$ dizisini alalım. Buna göre;

$$\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \leq \left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{t_k}$$

olacağından $x \in \ell_\infty(p, M, q)$ bulunur ki bu sonuç istenendir.

(ii) $\inf\limits_k M\left[q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right] > 1$ olsun Bu takdirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $t_k \leq p_k$ olduğundan,

$x = (x_k) \in \ell_\infty(p, M, q)$ olacak şekilde bir $x = (x_k)$ dizisini alalım. Buna göre;

$$\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{t_k} \leq \left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$

olacağından $x \in \ell_\infty(M, t, q)$ elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.9. $\forall k \in \mathbb{N}$ için ,

(i) $0 < p_k \leq 1$ ve $\sup\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) < 1$ iken $\ell_\infty(p, M, q) \subseteq \ell_\infty(M, q)$

(ii) $0 < p_k \leq 1$ ve $\inf\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) > 1$ iken $\ell_\infty(M, q) \subseteq \ell_\infty(p, M, q)$

(iii) $p_k \geq 1$ ve $\sup\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) < 1$ iken $\ell_\infty(M, q) \subseteq \ell_\infty(p, M, q)$

(iv) $p_k \geq 1$ ve $\inf\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) > 1$ iken $\ell_\infty(p, M, q) \subseteq \ell_\infty(M, q)$

İspat :

(i) Teorem 3.1.8 (i) de $\forall k \in \mathbb{N}$ için $t_k = p_k$ ve $p_k = 1$ alınırsa sonuç çıkar.

(ii) Teorem 3.1.8 (ii) de $\forall k \in \mathbb{N}$ için $t_k = p_k$ ve $p_k = 1$ alınırsa sonuç çıkar. (iii) ve (iv) de benzer şekilde gösterilir.

Bu sonuçta da $M(t) = t$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar çıkar.

Sonuç 3.1.10. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

(i) $0 < p_k \leq 1$ ve $\sup\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) < 1$ ise $\ell_\infty(p,q) \subseteq \ell_\infty(q)$

(ii) $0 < p_k \leq 1$ ve $\inf\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) > 1$ ise $\ell_\infty(q) \subseteq \ell_\infty(p,q)$

(iii) $p_k \geq 1$ ve $\sup\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) < 1$ ise $\ell_\infty(p) \subseteq \ell_\infty(p,q)$

(iv) $p_k \geq 1$ ve $\inf\limits_k M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) > 1$ ise $\ell_\infty(p,q) \subseteq \ell_\infty(q)$

3.2. $\ell_\infty(p, M^v, q, s)$ Dizi Uzayı Üzerinde Bağıntılar

Bu bölümde $\ell_\infty(p, M^v, q, s)$ dizi uzayı tanımlanacak ve bu uzaya ait bazı özellikler incelenecektir.

Teorem 3.2.1. M bir Orlicz fonksiyonu ise $v \in \mathbb{N}$ olmak üzere M^v fonksiyonu da bir Orlicz fonksiyonudur.(Özdemir,2003)

Burada $M^v = M \circ M \circ ... \circ M$ (M nin v defa bileşkesi) şeklindedir.

İspat İspatı tümevarım metoduyla yapılacaktır. $v = 1$ için $M^v = M$ olacağından M^v fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonudur. $v \in \mathbb{N}$ için M^v fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonu olsun. Böylece M^v fonksiyonu, çift, konveks, sürekli, ve $M^v(0) = 0$,

$x \to \infty$ için $M^v(x) \to \infty$ şartlarını sağlar. Son olarak , $M^{v+1}(x) = M[M^v(x)]$ olduğu ve yukarıda M^v nin özellikleri dikkate alındığında ,

$$M^{v+1}(-x) = M(M^v(-x)) = M(M^v(x)) = M^{v+1}(x)$$

olduğundan M^{v+1} çift fonksiyondur ve sürekli fonksiyonların bileşkesi sürekli olduğundan , M^{v+1} süreklidir. Ayrıca, M^v konvevks bir fonksiyon olduğundan, her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbf{M}^v\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\mathbf{M}^v(x) + \frac{1}{2}\mathbf{M}^v(y)$$

ve M azalmayan konveks bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} M^{v+1}\left(\frac{x+y}{2}\right) &= M\left(M^v\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \\ &\leq M\left(\frac{1}{2}M^v(x) + \frac{1}{2}M^v(y)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}M(M^v(x)) + \frac{1}{2}M(M^v(y)) \\ &= \frac{1}{2}M^{v+1}(x) + \frac{1}{2}M^{v+1}(y) \end{aligned}$$

yazılabilir. $M^{v+1}(0) = 0$ ve $x \to \infty$ için $M^{v+1}(x) \to \infty$ olacağı açıktır. Böylece , M^{v+1} fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonudur.

$$\left\{x = (x_k) \in w : \exists\rho > 0, s > 0 \text{ için, } \sup_k k^{-s}\left[M^v\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan cümle $\ell_\infty(p, M^v, q, s)$ ile gösterilsin. Teorem 3.2.1. ve Teorem 3.1.2. birlikte düşünülürse $\ell_\infty(p, M^v, q, s)$ nin lineer uzay olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.2.2. $m \leq v$, $m, v \in \mathbb{N}$ ve M , Δ_2 şartını sağlayan Orlicz fonksiyonu ise

$$\ell_\infty(p, M^m, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M^v, q, s) \tag{6}$$

kapsaması doğrudur.

İspat : İspatı tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $v - m = r$ olsun. $r \in \mathbb{N}$ ve $r \geq 1$ olur. $r = 1$ için (6) kapsamasının doğru olduğunu göstermek için

$$\ell_\infty (p, M^m, q, s) \subseteq \ell_\infty \left(p, M^{m+1}, q, s\right)$$

olduğu gösterilmelidir. M sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ için $0 < \delta < 1$ olacak şekilde $\exists\, \delta > 0 \ni\; 0 \leq t \leq \delta$ iken $M(t) < \varepsilon$ kalır. $x \in \ell_\infty (p, M^m, q, s)$ olsun.

Teorem 3.1.6. göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} k^{-s}\left[M^{m+1}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &= k^{-s}\left[M\left(M^m\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\leq k^{-s}\left[KM(1)\, M^m\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\leq \max\left(1, K^H M(1)^H\right) k^{-s}\left[M^m\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \end{aligned}$$

olup , buradan

$$k^{-s}\left[M^{m+1}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \leq \max\left(1, K^H M(1)^H\right) k^{-s}\left[M^m\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k}$$

elde edilir ki son eşitsizliğin her iki tarafının k üzerinden supremumu alınırsa, $x \in \ell_\infty (p, M^{m+1}, q, s)$ olduğu görülür. $r \in \mathbb{N}$ için (6) ifadesi, yani

$$\ell_\infty (p, M^m, q, s) \subseteq \ell_\infty \left(p, M^{m+r}, q, s\right)$$

kapsaması doğru olsun. Bu takdirde, $M^{m+r+1}(t) = M\left(M^{m+r}(t)\right)$ olduğundan $r = 1$ durumuna benzer şekilde

$$\ell_\infty (p, M^m, q, s) \subseteq \ell_\infty \left(p, M^{m+r+1}, q, s\right)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu da , $r + 1$ için (6) ifadesinin doğru olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.3. $s \geq 0$, $v \in \mathbb{N}$ ve M, Δ_2 şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu ise

(i) $\ell_\infty(p, M, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M^v, q, s)$

(ii) $\ell_\infty(p, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M^v, q, s)$ dir.

İspat : $m = 1$ için Teorem 3.2.2. kullanılarak (i) kolayca elde edilir. Teorem 3.2.3 (i) ve Sonuç 3.1.7(i) dikkate alınırsa (ii) nin doğru olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.2.4. $m < v$ ve $m, v \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde,

(i) $M(t) < t$ ise $\ell_\infty(p, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M^m, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M^v, q, s)$

(ii) $M(t) \geq t$ ise $\ell_\infty(p, M^v, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, M^m, q, s) \subseteq \ell_\infty(p, q, s)$ dir.

İspat :

(i) $M(t) < t$ ise M Orlicz fonksiyonu azalmayan olduğundan.

$$M^v(t) \leq M^{v-1}(t) \leq M^{v-2}(t) \leq ... \leq M^2(t) \leq M(t) < t$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $\forall k \in \mathbb{N}$,$x_k \in X$ ve $\rho > 0$ için $q\left(\frac{x_k}{\rho}\right) \geq 0$ olacağından

$$\begin{aligned} M^v\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) &\leq M^{v-1}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) \leq ... \leq M^m\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) \\ &\leq ... \leq M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) < q\left(\frac{x_k}{\rho}\right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 0$ ve $\exists \rho > 0$ için $q\left(\frac{x_k}{\rho}\right) \geq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliklerde $t = q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left[M^v\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &\leq \left[M^{v-1}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \leq ... \leq \left[M^m\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\leq ... \leq \left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} < \left[q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right]^{p_k} \end{aligned}$$

yazılabilir. $k^{-s}>0$ olduğundan $\forall k\in\mathbb{N}$ için $p_k>0$ için

$$\begin{aligned} k^{-s}\left[M^{v}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &\leq k^{-s}\left[M^{v-1}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\leq \ ... \leq k^{-s}\left[M^{m}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\leq \ ... \leq k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &< k^{-s}\left[q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan k üzerinden supremum alınırsa

$$\ell_\infty(p,q,s)\subseteq\ \ell_\infty(p,M^m,q,s)\subseteq\ \ell_\infty(p,M^v,q,s)$$

olduğu görülür.

(ii) $M(t)\geq t$ iken (i) dekine benzer olarak $\forall k\in\mathbb{N}$, $x_k\in X$ için $q(x_k)>0$ ve $\rho>0$ olduğundan

$$\begin{aligned} k^{-s}\left[M^{v}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} &\geq k^{-s}\left[M^{v-1}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\geq \ ... \geq k^{-s}\left[M^{m}\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\geq \ ... \geq k^{-s}\left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right)\right]^{p_k} \\ &\geq k^{-s}\left[q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan k üzerinden supremum alınırsa

$$\ell_\infty(p,M^v,q,s)\subseteq\ \ell_\infty(p,M^m,q,s)\subseteq\ \ell_\infty(p,q,s)$$

sonucu kolayca elde edilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin konusu olan Orlicz fonksiyonlu dizi uzaylarına temel teşkil eden Orlicz fonksiyonu ilk olarak Polonyalı matematikçi W. Orlicz tarafından tanımlandı. Orlicz fonksiyonlu dizi uzayları teorisi oldukça kapsamlı olarak genişletilerek matematiğin birçok dallarına uygulanma imkanı buldu. Çalışmanın ikinci bölümünde önceden tanımlanmış Orlicz fonksiyonlu dizi uzayları ve bazı özellikleri çalışıldı. Üçüncü bölümde, Eroğlu (1994) tarafından tanımlanan $\ell_\infty(p, f, q, s)$ modülüs fonksiyonlu dizi uzaylarından hareketle, $\ell_\infty(p, M, q, s)$ ve $\ell_\infty(p, M^v, q, s)$ Orlicz fonksiyonlu dizi uzayları ilk kez tanımlandı. $\ell_\infty(M, q, s), \ell_\infty(p, M, q), \ell_\infty(M, q)$ dizi uzayları elde edildi. Bu uzayların bazı topolojik özellikleri ve bu uzaylara ait bazı kapsama bağıntıları araştırıldı.

Bu uzayların α ve β dual uzayları ve diğer uzaylarla ilişkileri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

ALTIN,Y,ET, M. and TRIPATHY,B.,C.,2004.The Sequence Space $\left|\overline{N}_{P}\right|(M,r,q,s)$on Seminormed Spaces,Appl. Math. and Comp.,154,423-430

BİLGİN,T.,2003. Some New Difference Sequences Spaces Defined by an Orlicz Function. Filomat 17,1-8

BÖYÜK, T., 2002.Orlicz Fonksiyonları Ve Bazı Dizi Uzayları, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Y. Lisans Tezi (Yayınlanmamış),Sakarya.

EROĞLU,A.,1994. $\ell_{\infty}(p, f, q, s)$ Paranormlu Uzayı ve Bu Uzayda Bazı Matris Dönüşümleri,E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi (Yayımlanmamış),Kayseri.

ESI A, ISIK M,ESI,A.2004. On Some New Sequence Space Defined by Orlicz Functions. Indian J Pure Appl Math , 35(1), 31-6.

FADDEN,L.MC.1942.Absolute Norlund Summability,Duke Math.J.,9,168-207

KIZMAZ,H.,1981.On Ceratain Sequence Spaces Canad.Math.Bull.,24,169-176

KRASNOSEL'SKII,M.A. and RUTICKII,Y.B.,1961.Convex Functions and Orlicz Spaces,Noordhoff Ltd.,Groningen,Netherlands.

KREYSZIG, E.,1978. Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley

KUTTNER,B.1966.Note On Strong Summability.J.London Math.Soc.,21,118-122

LEINDLER,L.,1965.Über de la Vallee Pousinsche Summierbarkeit Allgemeiner Orthogonalreihen,Acta Math.Hung.,16,375-378

LINDBERG,K.J.,1975.On Subspaces of Orlicz Sequences Spaces,Studia Math. , 45,119-146

LINDENSTRAUSS,J. and TZAFRIRI,L., 1971.On Orlicz Sequence Spaces,Israel J.Math.,10(3),379-390

MADDOX,I.,J.,1967.Spaces of Strongly Summable Sequences,Quart.J.Math.Oxford Ser. (2),18,345-355

MADDOX,I.J. and WILLEY,M.A. L.,1974.Continous Operators on Paranormed Spaces and Matrix Transformations,Pacific J. Math.,53,217-228

MADDOX,I.J.,1986.a. Statistical Convergence in a Locally Convex Space Math.Proc. Cambridge Philos Soc.100,161-166

MADDOX,I.J.1986.b. Sequence Spaces Defined by a Modulus Math.Proc.Cambridge Philos Soc.,100,161-166

MADDOX,I.J.,1988.Elements of functional analysis,Cambridge Universty Press (Second Edition),Cambridge.

MEARS,F. M.,1937. Absolute Regularity and the Norlund Means, Annals Math., 38, 594-601.

MURSALEEN,MUSHIR,A.K. and QAMARUDDIN,1999. Difference Sequence Spaces Defined By Orlicz Functions.Demonstratio Math.32(1):145-150

NAKANO,H.,1953. Concave Modulus.J.Math.Soc.Japan ,5,29-49.

ÖZDEMİR,M.K.,2003. Orlicz Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Yeni Dizi U-zayları,Yayımlanmamış Doktora Tezi,İnönü Üniversitesi Fen Bil.Enst.

PARASHAR,S.D. and CHOUDHARY,B.,1994. Sequence Spaces Defined by a Orlicz Functions,Indian J. Pure Appl. Math,25 (14), 419-28

PETERSEN,M.G.,1966. Regular Matrix Transformations,McGraw-Hill Publishing Company Limited,London

RUCKLE,W.H.,1973.FK Spaces in Which the Sequence of Coordinate Vectors is Bounded,Canad. J. Appl. Math., 30,973-978

SAVAŞ,E.,SAVAŞ,R.,2004. Some Sequence Spaces defined by Orlicz Functions,Archivum Mathematicum (BRNO), 40, 33-40

WILANSKY,A.,1964. Functional Analiysis,Blaisdell Publishing Company,New York

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf TORUN, 19.10.1977 tarihinde AMASYA ' da dünyaya geldi. İlk,orta ve lise öğrenimini Amasya'da tamamladı. 1997 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 2001 yılında mezun oldu. 2003 yılında Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalında Yüksek Lisans kazandı. Halen, Amasya Alptekin Anadolu Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.