T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİŞİMSEL ESNEK GRUPLAR VE HALKALAR

Filiz ÇITAK

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN
2011

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

KESİŞİMSEL ESNEK GRUPLAR VE HALKALAR

Filiz ÇITAK

TOKAT
2011

Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN danışmanlığında, Filiz ÇITAK tarafından hazırlanan bu çalışma 07/10/2011 tarihinde asağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU İmza:

Üye : Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN İmza:

Üye : Doç. Dr. Hacı AKTAŞ İmza:

Üye : Doç. Dr. Sultan YAMAK İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN

Enstitü Müdürü

07/10/2011

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Filiz ÇITAK

ÖZET

Doktora Tezi

KESİŞİMSEL ESNEK GRUPLAR VE HALKALAR

Filiz ÇITAK

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN

Bu çalışmada, ilk olarak bulanık küme, esnek küme ve bulanık esnek küme hakkında kısaca bilgi verildi. Daha sonra parametre kümesi grup olan bir esnek küme yardımıyla kesişimsel esnek grup yapısı tanımlandı. Bu yeni yapının cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde incelendi. Kesişimsel esnek altgrup, abelyan esnek alt küme, kesişimsel esnek normal altgrup, α-kapsam kümesi, e-kümesi, esnek koset, bir esnek kümenin görüntüsü ve ters görüntüsü gibi yeni kavramlar tanımlandı. Daha sonra parametre kümesi halka olan bir esnek küme yardımıyla kesişimsel esnek halka yapısı tanımlandı. Bu tanıma bağlı olarak kesişimsel esnek ideal, kesişimsel esnek alt halka ve parametre kümesi halka olan iki esnek kümenin toplamı, farkı, çarpımı, bir esnek kümenin negatifi gibi kavramlar tanımlandı. Bu yeni yapıların bazı cebirsel özellikleri incelendi. Son olarak parametre kümesi grup olan bir bulanık esnek küme yardımıyla kesişimsel bulanık esnek grup ve parametre kümesi halka olan bir bulanık esnek küme yardımıyla kesişimsel bulanık esnek halka yapıları tanımlandı ve cebirsel özellikleri incelendi.

2011, 80 sayfa

Anahtar kelimeler: Esnek küme, Bulanık küme, Kesişimsel esnek grup, Kesişimsel esnek halka, Kesişimsel bulanık esnek grup, Kesişimsel bulanık esnek halka

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

INTERSECTION SOFT GROUPS AND RINGS

Filiz ÇITAK

Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN

In this thesis basic definitions and properties of fuzzy set, soft set and fuzzy soft set are firstly introduced. Then, intersection soft group is defined on a soft set such that its parameter set is a group. Intersection soft subgroup, abelian soft subset, intersection soft normal subgroup, α-inclusion set, e-set, soft coset, image of soft set and pre-image of soft set are then defined. Moreover, intersection soft ring is defined on a soft set such that its parameter set is a ring. Based on the definition of intersection soft ring, intersection soft ideal, intersection soft subring are defined. The sum, difference and product of two soft sets are defined such that their parameter sets are a ring, and the negative of a soft set is also defined. Finally, the intersection fuzzy soft group on a soft set such that parameter set is a group, and the intersection fuzzy soft ring is also defined on a soft set such that its parameter set is a ring. Algebraic properties of the new structures are searched in detail.

2011, 80 pages

Key words: Soft set, Fuzzy set, Soft intersection group, Soft intersection ring, Fuzzy soft intersection group, Fuzzy soft intersection ring

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamamda bana destek olan bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN'a, tez izleme komitesinde yer alan değerli hocalarım Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ve Doç. Dr. Hacı AKTAŞ'a, doktora eğitimim boyunca emeğini geçen tüm bölüm hocalarıma, 2011/36 nolu Bilimsel Araştırma Projesi olarak maddi anlamda destekleyen Gaziosmanpaşa Üniversitesi'ne teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu yoğun süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan biricik eşime, canım anneme, babama ve kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Filiz ÇITAK
Ekim 2011

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Dünyadaki belirsizlik içeren bazı problemleri modellemek, Aristo mantığına dayalı matematikle her zaman mümkün değildir. Her insanın, günlük hayatta kullandığı cümleler içerisinde bulanık ifadeler vardır. Mesela; serin hava, yüksek hız, mavi gökyüzü, genç kız, uzun boy bunlardan bazılarıdır. Etrafımızda, buna benzer belirsizliklerle ifade edilen birçok olay vardır. Zaman geçtikçe, çevremizde bulunan belirsizliğin nesnel olarak incelenmesi için bilinen yöntemlerin dışında bilimsel yöntemlere de ihtiyaç duyulmaktadır. Belirsizliğin birçok çeşidine özellikle biyoloji, ekonomi, mühendislik, çevresel bilimler, sosyal bilimler ve tıp bilimleri gibi alanlarda sık rastlanmaktadır. Bundan dolayı bilim adamları belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok teori geliştirmeye başlamışlardır. Aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler teorisi (Pawlak, 1982), esnek kümeler teorisi (Molodtsov, 1999) en iyi bilinen ve belirsizliği modellemek için sık sık kullanılan matematiksel teorilerden bazılarıdır.

1.1 Literatür Özetleri

Bulanık küme teorisi ilk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Bulanık mantık, Aristo mantığında olduğu gibi önermelerin doğruluk değerini sadece doğru ya da yanlış olarak (0 ya da 1) nitelemez, [0,1] aralığındaki sonsuz değerlerden biri ile niteler. Böylece bulanık mantık, aristo mantığının kabul ettiği kesin hüküm belirten önermelere ek olarak, kişiden kişiye göre değişen yani bulanık ifadeler içeren önermelerle de ilgilenir. Bu da, bulanık mantığın Aristo mantığını içerdiğini, yani Aristo mantığı bulanık mantığın özel bir durumu olduğunu gösterir. Bulanık mantık, güzel, çok güzel, uzun, çok uzun, soğuk, çok soğuk gibi bulanık tabirler içeren problemlerin çözümünde insan düşünce tarzına yakın doğrulukta sonuçlar vermektedir. Bulanık mantık denetleyici kullanılarak çimento sanayiiden su arıtma sistemlerine, veri analizinden yazılım geliştirmeye, metro denetim mekanizmalarından nükleer reaktörlerdeki soğutma sistemlerine, çamaşır makinelerinden asansörlere kadar bir çok alana uygulama imkanı bulunabilir.

İlk defa Zadeh (1965) tarafından tanımlanan bulanık mantığa dayalı bulanık küme kavramı, uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır. 1971 yılında Rosenfeld, bulanık küme kavramını kullanarak bulanık grup teoriyi tanımladı (Rosenfeld, 1971). Bulanık grup teorinin temel özellikleri klasik grup teorideki sonuçlar kullanılarak elde edildi. Çok sayıda araştırmacı cebirsel yapıların bu yeni kavramının özelliklerini çalışmaya başladılar. Bulanık gruplar kullanılarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler Liu (1982) tarafından çalışıldı. Nanda ise 1986 yılında bulanık küme kavramını cisim ve lineer uzaylara uyarlayarak yeni bir kavram ortaya attı (Nanda, 1986). İlerleyen yıllarda bulanık cebir ile yapılan çalışmalar (Mordeson ve Malik, 1998) kitabında ele alındı.

Belirsizliği modellemede farklı bir teori olan esnek kümeler ise ilk olarak 1999 yılında Molodtsov tarafından tanımlandı. Molodtsov (1999, 2004) sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teori, yöneylem araştırması, Rienmann integrali, Peron integrali, olasılık teori, ölçüm teori gibi bir çok alana esnek küme teorisini uyguladı. Daha sonra Maji ve arkadaşları (2003) esnek küme işlemlerini tanımladı. Maji ve ark. (2002, 2003), Pawlak (1982)'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptı ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Xiao ve ark. (2003) esnek küme temelli iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine çalışma yaptı. Yang ve ark. (2004), esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi ve indüksiyon başlıklı bir çalışma yaptı. Chen ve ark. (2003, 2005) ile Kong ve ark. (2008) esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yaptı. Xiao ve ark. (2005) ile Pei ve Miao (2005), esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sundular. Mushrif ve ark. (2006), esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine bir makale yayımladı. Molodtsov ve ark. (2006) tarafından, esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramlar formüle edildi. Bu analiz, Kovkov ve ark. (2007) tarafından optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uygulandı.

Daha sonra esnek kümelerin cebirsel özellikleri de bazı yazarlar tarafından çalışılmaya başlandı. İlk olarak Aktaş ve Çağman (2007) esnek grupların tanımını vererek, bazı temel özelliklerini elde etti. Jun (2008) esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını ortaya atarak, onların bazı temel özeliklerini türetti. Jun ve Park (2008) esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini tartıştı. Park ve ark. (2008), esnek WS-cebirleri üzerine bir çalışma yaptı. Feng ve ark. (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkalar çalışmasını sundu ve ilgili bazı özeliklerini inceledi. Sun ve ark. (2008) esnek modüllerin tanımını verdi. Ayrıca modülleri ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak bazı temel özelikleri inşa etti. Acar ve ark. (2010) esnek küme ve esnek halkalar çalışmasını yayımladı. Zhan ve Jun (2010) bulanık kümelere dayalı esnek BL-cebirleri çalışmasını yayımladılar. İnan ve Öztürk (2011) bulanık esnek halkalar ve bulanık esnek idealler üzerine bir çalışma yaptılar. Bulanık esnek yarı gruplar ve bulanık esnek idealler Yang (2011) tarafından çalışıldı. Zhou ve ark. (2011) sezgisel bulanık esnek yarı grupları çalıştılar. Normalistik esnek grup ve normalistik esnek grup homomorfizmini konu alan çalışma Sezgin ve Atagün (2011) tarafından ele alındı. Ayrıca halka, cisim ve modüllerin esnek alt yapıları da Atagün ve Sezgin (2011) tarafından çalışıldı. Yamak ve ark. (2011) esnek hiper grupları, Feng ve ark. (2011) esnek kümeler ve esnek yaklaşımlı kümeleri, Çağman ve ark. (2011) esnek topolojiyi, Tanay ve Kandemir (2011) ise bulanık esnek kümelerin topolojiksel yapısını çalıştılar.

Aktaş ve Çağman (2007) esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karsılaştırdı. Roy ve Maji (2007) bir karar verme probleminde bulanık esnek kümelerin bir uygulaması üzerinde bazı sonuçlar ortaya koydu. Yang ve ark. (2007) bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yoluyla bir karar verme problemini analiz etti. Majumdar ve Samanta (2008) bulanık esnek kümelerde benzerlik ölçümünü ortaya attı. Kong ve ark.(2008) ile Xiao ve ark. (2009), bulanık esnek küme üzerine dayalı bazı yaklaşımları konu alan bir çalışma yaptı. Yang ve ark. (2009) aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımlayarak bu yeni kümenin De'morgan, birleşme ve kesişme gibi özellikleri sağlayıp sağlamadığını inceledi. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek küme kavramını tanımladı ve bazı özellikleri inceledi. Ayrıca bulanık esnek fonksiyon ve bulanık esnek homomorfizma tanımlarına yer verdi. Feng ve ark. (2010) yaptıkları çalışmada karar vermeye dayalı bulanık esnek kümeye ayarlanabilir yaklaşım tanımını verdiler. Ayrıca Feng ve ark. (2010) aralık değerli bulanık esnek kümeye dayalı kara verme için seviye esnek kümelerinin kullanılmasını önerdiler ve uygulamasına yer verdiler.

Aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme kavramını Jiang ve ark. (2010) literatüre kazandırdı. BCK/BCI cebirlerine bulanık parametreli esnek kümeyi uygulayan Jun ve ark. (2010) oldu. Majumdar ve Samanta (2010) genelleştirilmiş bulanık esnek küme tanımını yaparak çeşitli özelliklerini incelediler. Aynı çalışmada kara verme probleminde ve tıbbi tanı probleminde genelleştirilmiş bulanık esnek kümelerin bir uygulamasını yaptılar. Daha sonra Çağman ve Enginoğlu (2010) esnek küme işlemlerinde oluşan bazı problemleri göz önüne alarak, bu işlemleri yeniden tanımladılar. Çağman ve Enginoğlu (2010), uygulamadaki hesaplamalarda kolaylık sağlamak için esnek kümelerin matris dönüşümlerini yaptılar. Daha sonra Çağman ve ark. (2010) bulanık parametreli bulanık esnek kümeleri ve işlemlerini tanımladılar. fpfs-toplama operatörünü tanımlayarak fpfs-karar verme metodu geliştirmişlerdir. Yaptıkları bir diğer çalışma bulanık esnek küme teori isimli çalışmadır (Çagman ve ark.,2011). Çok yeni bir teori olan esnek küme teorisi ve uygulamaları hızlı bir şekilde her alana yayılmaktadır.

1.2 Materyal ve Metot

Bu tez çalışmasına başlarken, bulanık kümeler ve esnek kümeler hakkında literatürde var olan Zadeh (1965), Mordeson and Malik (1998), Rosenfeld(1971), Liu (1982), Nanda (1986), Molodtsov (1999, 2004), Maji ve ark. (2001, 2003), Xiao ve ark. (2003), Chen ve ark. (2003, 2005), Kong ve ark. (2008), Xiao ve ark. (2005), Pei ve Miao (2005), Mushrif ve ark. (2006), Molodtsov ve ark. (2006), Kovkov ve ark. (2007), Roy ve Maji (2007), Yang ve ark. (2007), Majumdar ve Samanta (2008, 2010), Kong ve ark.(2008), Xiao ve ark. (2009), Yang ve ark. (2009), Aygünoğlu ve Aygün (2009), Feng ve ark. (2010), Jiang ve ark. (2010), Jun ve ark. (2010), Majumdar ve Samanta (2010), Çağman ve Enginoğlu (2010), Çağman ve ark. (2010) kaynakları gözden geçirildi. Daha sonra esnek grup ve esnek halka yapıları ve bu yapıların çeşitli özelliklerini hakkında bilgi edinmek için Aktaş ve Çağman (2007), Jun (2008), Jun ve Park (2008), Park ve ark. (2008), Feng ve ark. (2008), Sun ve ark. (2008), Acar ve ark. (2010), Zhan ve Jun (2010), kaynakları incelendi.

İlk olarak bulanık küme, esnek küme ve bulanık esnek küme hakkında genel bilgilere yer verildi. Daha sonra parametre kümesi grup olan bir esnek küme yardımıyla kesişimsel esnek grup yapısı tanımlandı. Bu yeni yapının cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde incelendi. Kesişimsel esnek altgrup, abelyan esnek alt küme, kesişimsel esnek normal altgrup, α-kapsam kümesi, e-kümesi, esnek coset, bir esnek kümenin görüntüsü ve ters görüntüsü gibi yeni kavramlar tanımlandı. Bir kesişimsel esnek grubun α-kapsam kümesinin ve e-kümesinin bir altgrup olduğu gösterildi. Bir kesişimsel esnek grubun e-kümesi ve kalan sınıfları arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca bir kesişimsel esnek grubun görüntüsünün ve ters görüntüsünün yine bir kesişimsel esnek grup olduğu gösterildi. Daha sonra parametre kümesi halka olan bir esnek küme yardımıyla kesişimsel esnek halka yapısı tanımlandı. Bu yeni yapının cebirsel özellikleri incelendi. Bu tanıma bağlı olarak kesişimsel esnek ideal, kesişimsel esnek alt halka ve parametre kümesi halka olan iki esnek kümenin toplamı, farkı, çarpımı, bir esnek kümenin negatifi gibi kavramlar tanımlandı. Son olarak parametre kümesi grup olan bir bulanık esnek küme yardımıyla kesişimsel bulanık esnek grup ve parametre kümesi halka olan bir bulanık esnek küme yardımıyla kesişimsel bulanık esnek halka yapıları tanımlandı ve cebirsel özellikleri incelendi.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, bulanık kümeler, esnek kümeler ve bulanık esnek kümeler hakkında tezin diğer bölümlerinde kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verildi.

2.1 Bulanık Kümeler

Tanım 2.1.1. U herhangi bir küme olsun. $\mu : U \to [0,1]$ fonksiyonuna U da bir bulanık küme denir. O halde, bir μ bulanık kümesi

$$\mu = \{(x, \mu(x)) : x \in U\}$$

biçiminde temsil edilebilir (Zadeh, 1965).

U üzerinde tanımlanan bütün bulanık kümelerin kümesi $F(U)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2. $\mu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için $\mu(x) = 0$ ise μ bulanık kümesine boş küme denir ve $\mu = \emptyset$ ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.3. $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için $\mu(x) = \nu(x)$ ise μ ve ν bulanık kümelerine eşit bulanık kümeler denir ve $\mu = \nu$ ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.4. $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise μ bulanık kümesine ν'nün bulanık alt kümesi denir ve $\mu \subseteq \nu$ ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.5. $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ve en az bir $x \in U$ için $\mu(x) < \nu(x)$ ise μ bulanık kümesine ν'nün öz alt kümesi denir ve $\mu \subset \nu$ ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.6. $\mu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ şeklinde tanımlanan bulanık kümeye μ'nün tümleyeni denir ve μ^c ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.7. $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için

$$(\mu \cup \nu)(x) = max\{\mu(x), \nu(x)\}$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümeye μ ve ν bulanık kümelerinin birleşimi denir ve $\mu \cup \nu$ ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.8. $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için

$$(\mu \cap \nu)(x) = min\{\mu(x), \nu(x)\}$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümeye μ ve ν bulanık kümelerinin kesişimi denir ve $\mu \cap \nu$ ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.9. $\mu, \nu \in F(U)$ olsun. Her $x \in U$ için

$$(\mu - \nu)(x) = min\{\mu(x), \nu^c(x)\}$$

şeklinde tanımlanan bulanık kümeye μ ve ν bulanık kümelerinin farkı denir ve $\mu - \nu$ ile gösterilir (Klir ve Folger, 1988).

Önerme 2.1.1. $\mu, \nu, \lambda \in F(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\mu \cap \mu = \mu$
2. $\mu \cup \mu = \mu$
3. $\mu \cap \varnothing = \varnothing$
4. $\mu \cup \varnothing = \varnothing$
5. $\mu \cap \nu = \nu \cap \mu$
6. $\mu \cup \nu = \nu \cup \mu$
7. $(\mu \cap \nu) \cap \lambda = \mu \cap (\nu \cap \lambda)$
8. $(\mu \cup \nu) \cup \lambda = \mu \cup (\nu \cup \lambda)$
9. $\mu \cap (\nu \cup \lambda) = (\mu \cap \nu) \cup (\mu \cap \lambda)$
10. $\mu \cup (\nu \cap \lambda) = (\mu \cup \nu) \cap (\mu \cup \lambda)$
11. $(\mu^c)^c = \mu$

12. $(\mu \cap \nu)^c = \mu^c \cup \nu^c$

13. $(\mu \cup \nu)^c = \mu^c \cap \nu^c$

(Klir ve Folger, 1988).

Tanım 2.1.10. G bir grup ve μ, G de bir bulanık küme olsun. Her $x, y \in G$ için

1. $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$

2. $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

ise μ ye bulanık grup denir (Rosenfeld, 1971).

Tanım 2.1.11. R bir halka ve μ, R de bir bulanık küme olsun. Her $x, y \in R$ için

1. $\mu(x - y) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$

2. $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$

ise μ ye bulanık halka denir (Liu, 1982).

2.2 Esnek Kümeler

Bundan böyle, U herhangi bir küme, E parametreler kümesi, $A, B, C \subseteq E$ ve $P(U)$, U nun kuvvet kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.1. Her $x \notin A$ için $f_A(x) = \emptyset$ olacak şekilde $f_A : E \to P(U)$ fonksiyonuna U üzerinde bir esnek küme denir. O halde, bir f_A esnek kümesi

$$f_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$$

biçiminde temsil edilebilir (Molodtsov, 1999).

Burada, her $x \in E$ için $f_A(x)$ değerine f_A esnek kümesinin x-yaklaşımı denir.

Uyarı 2.2.1. E parametreler kümesinin bir A alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler f_A, g_A, h_A vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin A, B, C vb. farklı alt kümeleri ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler f_A, f_B, f_C vb. şeklinde gösterilecektir.

Bundan böyle, parametre kümesi E olan U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.2. $f_A \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_A(x) = \emptyset$ ise f_A esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ_A ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.3. $f_A \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in A$ için $f_A(x) = U$ ise f_A esnek kümesine A-evrensel esnek küme denir ve $f_{\tilde{A}}$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.4. $f_A \in S_E(U)$ olsun. $A = E$ ve her $x \in E$ için $f_A(x) = U$ ise f_A esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $f_{\tilde{E}}$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.5. $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ ise f_A esnek kümesine f_B'nin esnek alt kümesi denir ve $f_A \tilde{\subseteq} f_B$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Not 2.2.1. Bu tanım Maji ve ark. (2003) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir: $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun.

1. $A \subseteq B$
2. Her $x \in A$ için $f_A(x)$ ve $f_B(x)$ özdeş yaklaşımlar

ise f_A esnek kümesine f_B'nin esnek alt kümesi denir ve $f_A \tilde{\subseteq} f_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6. $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ ve en az bir $x \in E$ için $f_A(x) \neq f_B(x)$ ise f_A esnek kümesine f_B'nin esnek öz alt kümesi denir ve $f_A \tilde{\subset} f_B$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.7. $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_A(x) = f_B(x)$ ise f_A ve f_B esnek kümelerine esnek eşit kümeler denir ve $f_A = f_B$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.8. $f_A \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için x-yaklaşımı $f_A^c(x) = U \setminus f_A(x)$ şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A'nın tümleyeni denir ve $f_A^{\tilde{c}}$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.2.9. $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için x-yaklaşımı

$$f_{A\tilde{\cup}B}(x) = f_A(x) \cup f_B(x)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin esnek birleşimi denir ve $f_A\tilde{\cup}f_B$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.10. $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için x-yaklaşımı

$$f_{A\tilde{\cap}B}(x) = f_A(x) \cap f_B(x)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin esnek kesişimi denir ve $f_A\tilde{\cap}f_B$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Not 2.2.2. Bu tanım Maji ve ark. (2003) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir: $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in A \cap B$ için x-yaklaşımı $f_{A\tilde{\cap}B}(x) = f_A(x)$ veya $f_B(x)$(her ikisi de özdeş yaklaşım) şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin esnek kesişimi denir ve $f_A\tilde{\cap}f_B$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.1. $f_A \in S_E(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $(f_A^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = f_A$
2. $\Phi_A^{\tilde{c}} = f_{\tilde{E}}$
3. $f_A\tilde{\cup}f_A = f_A$
4. $f_A\tilde{\cap}f_A = f_A$
5. $f_A\tilde{\cup}\Phi_A = f_A$

6. $f_A \widetilde{\cap} \Phi_A = \Phi_A$
7. $f_A \widetilde{\cup} f_{\tilde{E}} = f_{\tilde{E}}$
8. $f_A \widetilde{\cap} f_{\tilde{E}} = f_A$
9. $f_A \widetilde{\cup} f_A^{\tilde{c}} = f_{\tilde{E}}$
10. $f_A \widetilde{\cap} f_A^{\tilde{c}} = \Phi_A$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010)

Önerme 2.2.2. $f_A, f_B, f_C \in S_E(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $f_A \widetilde{\cup} f_B = f_B \widetilde{\cup} f_A$
2. $f_A \widetilde{\cap} f_B = f_B \widetilde{\cap} f_A$
3. $(f_A \widetilde{\cup} f_B)^{\tilde{c}} = f_A^{\tilde{c}} \widetilde{\cap} f_B^{\tilde{c}}$
4. $(f_A \widetilde{\cap} f_B)^{\tilde{c}} = f_A^{\tilde{c}} \widetilde{\cup} f_B^{\tilde{c}}$
5. $(f_A \widetilde{\cup} f_B) \widetilde{\cup} f_C = f_A \widetilde{\cup} (f_B \widetilde{\cup} f_C)$
6. $(f_A \widetilde{\cap} f_B) \widetilde{\cap} f_C = f_A \widetilde{\cap} (f_B \widetilde{\cap} f_C)$
7. $f_A \widetilde{\cup} (f_B \widetilde{\cap} f_C) = (f_A \widetilde{\cup} f_B) \widetilde{\cap} (f_A \widetilde{\cup} f_C)$
8. $f_A \widetilde{\cap} (f_B \widetilde{\cup} f_C) = (f_A \widetilde{\cap} f_B) \widetilde{\cup} (f_A \widetilde{\cap} f_C)$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010)

Tanım 2.2.11. $f_A, f_B \in S_{E\times E}(U)$ olsun. Her $(x, y) \in E \times E$ için (x, y)-yaklaşımı

$$f_{A\wedge B}(x, y) = f_A(x) \cap f_B(y)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin esnek $\wedge$-çarpımı denir ve $f_A \wedge f_B$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Tanım 2.2.12. $f_A, f_B \in S_{E\times E}(U)$ olsun. Her $(x, y) \in E \times E$ için (x, y)-yaklaşımı

$$f_{A\vee B}(x, y) = f_A(x) \cup f_B(y)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin esnek $\vee$-çarpımı denir ve $f_A \vee f_B$ ile gösterilir (Maji ve ark., 2003).

Önerme 2.2.3. $f_A, f_B, f_C \in S_{E\times E}(U)$ olsun.

1. $(f_A \wedge f_B) \wedge f_C = f_A \wedge (f_B \wedge f_C)$
2. $(f_A \vee f_B) \vee f_C = f_A \vee (f_B \vee f_C)$

(Maji ve ark., 2003)

2.3 Bulanık Esnek Kümeler

U herhangi bir küme ve E parametreler kümesi olsun. $A, B, C \subseteq E$ ve $F(U)$, U üzerinde tanımlanan bütün bulanık kümelerin kümesi olsun.

Tanım 2.3.1. Her $x \notin A$ için $\gamma_A(x) = \emptyset$ olacak şekilde $\gamma_A : E \to F(U)$ fonksiyonuna U üzerinde bir bulanık esnek küme denir. O halde, bir γ_A bulanık esnek kümesi

$$\gamma_A = \{(x, \gamma_A(x)) : x \in E\}$$

biçiminde temsil edilebilir (Maji ve ark., 2001).

Burada, her $x \in E$ için $\gamma_A(x)$ değerine γ_A bulanık esnek kümesinin x-yaklaşımı denir.

Uyarı 2.3.1. E parametreler kümesinin bir A alt kümesi ile birden fazla bulanık esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bulanık esnek kümeler γ_A, β_A, δ_A vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin A, B, C vb. farklı alt kümeleri ile birden fazla bulanık esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda bulanık esnek kümeler γ_A, γ_B, γ_C vb. şeklinde gösterilecektir.

Bundan böyle, parametre kümesi E olan U üzerindeki tüm bulanık esnek kümelerin kümesi $FS_E(U)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.2. $\gamma_A \in FS_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $\gamma_A(x) = \emptyset$ ise γ_A bulanık esnek kümesine boş bulanık esnek küme denir ve γ_Φ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.3. $\gamma_A \in FS_E(U)$ olsun. Her $x \in A$ için $\gamma_A(x) = U$ ise γ_A bulanık esnek kümesine A-evrensel bulanık esnek küme denir ve $\gamma_{\tilde{A}}$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.4. $\gamma_A \in FS_E(U)$ olsun. $A = E$ ve her $x \in E$ için $\gamma_A(x) = U$ ise γ_A bulanık esnek kümesine evrensel bulanık esnek küme denir ve $\gamma_{\tilde{E}}$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.5. $\gamma_A, \gamma_B \in FS_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $\gamma_A(x) \subseteq \gamma_B(x)$ ise γ_A bulanık esnek kümesine γ_B'nin bulanık esnek alt kümesi denir ve $\gamma_A \tilde{\subseteq} \gamma_B$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.6. $\gamma_A, \gamma_B \in FS_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $\gamma_A(x) = \gamma_B(x)$ ise γ_A ve γ_B bulanık esnek kümelerine eşit bulanık esnek kümeler denir ve $\gamma_A = \gamma_B$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.7. $\gamma_A \in FS_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için x-yaklaşımı $\gamma_{A^{\tilde{c}}}(x) = \gamma_A^c(x)$ şeklinde tanımlanan bulanık esnek kümeye γ_A'nın tümleyeni denir ve $\gamma_A^{\tilde{c}}$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.8. $\gamma_A, \gamma_B \in FS_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için x-yaklaşımı

$$\gamma_{A \tilde{\cup} B}(x) = \gamma_A(x) \cup \gamma_B(x)$$

şeklinde tanımlanan bulanık esnek kümeye γ_A ve γ_B'nin bulanık esnek birleşimi denir ve $\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_B$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 2.3.9. $\gamma_A, \gamma_B \in FS_E(U)$ olsun. Her $x \in E$ için x-yaklaşımı

$$\gamma_{A \tilde{\cap} B}(x) = \gamma_A(x) \cap \gamma_B(x)$$

şeklinde tanımlanan bulanık esnek kümeye γ_A ve γ_B'nin bulanık esnek kesişimi denir ve $\gamma_A \tilde{\cap} \gamma_B$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Önerme 2.3.1. $\gamma_A \in FS_E(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\gamma_A \tilde{\subseteq} \gamma_{\tilde{E}}$
2. $\gamma_\Phi \tilde{\subseteq} \gamma_A$
3. $(\gamma_A^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = \gamma_A$
4. $\gamma_\Phi^{\tilde{c}} = \gamma_{\tilde{E}}$

(Çağman ve ark., 2011).

Önerme 2.3.2. $\gamma_A \in FS_E(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_A = \gamma_A$
2. $\gamma_A \tilde{\cap} \gamma_A = \gamma_A$
3. $\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_\Phi = \gamma_A$
4. $\gamma_A \tilde{\cap} \gamma_\Phi = \gamma_\Phi$
5. $\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_{\tilde{E}} = \gamma_{\tilde{E}}$
6. $\gamma_A \tilde{\cap} \gamma_{\tilde{E}} = \gamma_A$

(Çağman ve ark., 2011).

Önerme 2.3.3. $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C \in FS_E(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_B = \gamma_B \tilde{\cup} \gamma_A$
2. $\gamma_A \tilde{\cap} \gamma_B = \gamma_B \tilde{\cap} \gamma_A$
3. $(\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_B) \tilde{\cup} \gamma_C = \gamma_A \tilde{\cup} (\gamma_B \tilde{\cup} \gamma_C)$
4. $(\gamma_A \tilde{\cap} \gamma_B) \tilde{\cap} \gamma_C = \gamma_A \tilde{\cap} (\gamma_B \tilde{\cap} \gamma_C)$
5. $(\gamma_A \tilde{\cup} \gamma_B)^{\tilde{c}} = \gamma_A^{\tilde{c}} \tilde{\cap} \gamma_B^{\tilde{c}}$

6. $(\gamma_A \widetilde{\cap} \gamma_B)^{\tilde{c}} = \gamma_A^{\tilde{c}} \widetilde{\cup} \gamma_B^{\tilde{c}}$

7. $\gamma_A \widetilde{\cup} (\gamma_B \widetilde{\cap} \gamma_C) = (\gamma_A \widetilde{\cup} \gamma_B) \widetilde{\cap} (\gamma_A \widetilde{\cup} \gamma_C)$

8. $\gamma_A \widetilde{\cap} (\gamma_B \widetilde{\cup} \gamma_C) = (\gamma_A \widetilde{\cap} \gamma_B) \widetilde{\cup} (\gamma_A \widetilde{\cap} \gamma_C)$

(Çağman ve ark., 2011).

3. KESİŞİMSEL ESNEK GRUPLAR VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, Rosenfeld (1971) tarafından tanımlanan bulanık grup teoriden esinlenerek kesişimsel esnek grup, kesişimsel esnek altgrup, kesişimsel esnek normal altgrup, α-kapsam kümesi, e-kümesi, esnek koset, bir esnek kümenin görüntüsü ve ters görüntüsü gibi kavramlar tanımlandı ve çeşitli cebirsel özellikleri incelendi.

3.1 Kesişimsel Esnek Gruplar

Bu alt bölümde, kümelerde arakesit ve kapsama bağıntısı yardımıyla tanımlanan aynı zamanda küme teori, esnek küme teori ve grup teori arasında bir köprü görevi gören kesişimsel esnek grup yapısı tanımlanarak bu yeni kavram yardımıyla kesişimsel esnek altgrup, kesişimsel esnek normal altgrup kavramları tanımlandı ve bazı temel özellikleri incelendi.

Tanım 3.1.1. G bir grup ve $f_G \in S_E(U)$ olsun. Her $x, y \in G$ için $f_G(xy) \supseteq f_G(x) \cap f_G(y)$ ise f_G ye U üzerinde kesişimsel esnek grupoid denir.

Tanım 3.1.2. f_G, U üzerinde kesişimsel esnek grupoid olsun. Her $x \in G$ için $f_G(x^{-1}) = f_G(x)$ ise f_G ye U üzerinde kesişimsel esnek grup denir.

Bu çalışma boyunca, kesişimsel esnek grup yerine KE-grup ifadesi kullanılacaktır.

Örnek 3.1.1. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}$ evrensel küme ve $G = S_3$ (simetrik grup) parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. $\sigma \in S_3$ ün mertebesi $o(\sigma)$ olmak üzere U üzerindeki f_G esnek kümesi,

$$f_G(\sigma) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{Z} | -k \leq x \leq k\}, & o(\sigma) = k \neq 1 \\ \mathbb{Z}, & o(\sigma) = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} f_G = \ & \{(e, \mathbb{Z}), ((12), \{-2, -1, 0, 1, 2\}), ((13), \{-2, -1, 0, 1, 2\}), ((23), \{-2, -1, 0, 1, 2\}), \\ & ((123), \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}), ((132), \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\})\}. \end{aligned}$$

f_G nin KE-grup olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.1.1. f_G, U üzerinde KE-grup olsun. Her $x \in G$ için $f_G(e) \supseteq f_G(x)$ dir.

İspat . f_G, U üzerinde KE-grup olduğundan her $x \in G$ için

$$\begin{aligned} f_G(e) &= f_G(xx^{-1}) \\ &\supseteq f_G(x) \cap f_G(x^{-1}) \\ &= f_G(x) \cap f_G(x) \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. G bir grup ve $f_G \in S_E(U)$ olsun. f_G'nin U üzerinde KE-grup olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in G$ için $f_G(xy^{-1}) \supseteq f_G(x) \cap f_G(y)$ olmasıdır.

İspat . Kabul edelim ki f_G, U üzerinde KE-grup olsun. Her $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} f_G(xy^{-1}) &\supseteq f_G(x) \cap f_G(y^{-1}) \\ &= f_G(x) \cap f_G(y) \end{aligned}$$

dir. Karşıt olarak, her $x, y \in G$ için $f_G(xy^{-1}) \supseteq f_G(x) \cap f_G(y)$ olsun. İlk olarak, $x = e$ alınarak

$$f_G(y^{-1}) \supseteq f_G(y)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f_G(y) &= f_G((y^{-1})^{-1}) \\ &\supseteq f_G(y^{-1}) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f_G(y) = f_G(y^{-1})$$

eşitliği elde edilir. İkinci olarak,

$$\begin{aligned} f_G(xy) &= f_G(x(y^{-1})^{-1}) \\ &\supseteq f_G(x) \cap f_G(y^{-1}) \\ &= f_G(x) \cap f_G(y) \end{aligned}$$

dir. Böylece, f_G, U üzerinde KE-gruptur.

Teorem 3.1.3. f_G, U üzerinde KE-grup ve $x \in G$ olsun. Her $y \in G$ için $f_G(xy) \supseteq f_G(y)$ olması için gerek ve yeter şart $f_G(x) = f_G(e)$ olmasıdır.

İspat . Her $y \in G$ için $f_G(xy) \supseteq f_G(y)$ olsun. $y = e$ alınarak

$$f_G(x) \supseteq f_G(e)$$

elde edilir. Teorem 3.1.1 den dolayı

$$f_G(e) \supseteq f_G(x)$$

olduğu bilinmektedir. Buradan, $f_G(x) = f_G(e)$ elde edilir.

Karşıt olarak $f_G(x) = f_G(e)$ olsun. Her $y \in G$ için

$$\begin{aligned} f_G(xy) &\supseteq f_G(x) \cap f_G(y) \\ &= f_G(e) \cap f_G(y) \\ &= f_G(y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4. f_G ve f_H, U üzerinde KE-grup olsun. $f_G \wedge f_H$, U üzerinde KE-gruptur.

İspat . $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G \times H$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{G\wedge H}((x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}) &= f_{G\wedge H}(x_1 {x_2}^{-1}, y_1 {y_2}^{-1}) \\ &= f_G(x_1 {x_2}^{-1}) \cap f_H(y_1 {y_2}^{-1}) \\ &\supseteq (f_G(x_1) \cap f_G(x_2)) \cap (f_H(y_1) \cap f_H(y_2)) \\ &= (f_G(x_1) \cap f_H(y_1)) \cap (f_G(x_2) \cap f_H(y_2)) \\ &= f_{G\wedge H}(x_1, y_1) \cap f_{G\wedge H}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Böylece $f_G \wedge f_H$, U üzerinde KE-gruptur.

Uyarı 3.1.1. $f_G \vee f_H$, U üzerinde her zaman KE-grup değidir.

Örnek 3.1.2. Kabul edelim ki $U = S_3$ evrensel küme olsun. $G = \mathbb{Z}_6$ ve $H = \{1, -1, i, -i\}$ parametre kümesinin alt kümeleri olsun. f_G KE-grubu

$$\begin{aligned}
f_G(0) &= S_3 \\
f_G(1) &= \{(12), (13), (132)\} \\
f_G(2) &= \{(12), (13), (23), (123), (132)\} \\
f_G(3) &= \{(1), (12), (13), (132)\} \\
f_G(4) &= \{(12), (13), (23), (132), (123)\} \\
f_G(5) &= \{(12), (13), (132)\}
\end{aligned}$$

ve f_H KE-grubu

$$\begin{aligned}
f_H(1) &= S_3 \\
f_H(-1) &= \{(12), (23), (123), (132)\} \\
f_H(i) &= \{(12), (23), (132)\} \\
f_H(-i) &= \{(12), (23), (132)\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $f_{G\vee H}((2,i)(3,1)) \not\supseteq f_{G\vee H}(2,i) \cap f_{G\vee H}(3,1)$ olduğu açıktır. Böylece $f_G \vee f_H$, U üzerinde KE-grup değildir.

Tanım 3.1.3. f_G ve f_H, U üzerinde iki KE-grup olsun. Her $(x, y) \in G \times H$ için $f_{G\times H}(x, y) = f_G(x) \times f_H(y)$ ile tanımlanan $f_{G\times H}$ KE-grubuna f_G ve f_H nin KE-grup çarpımı denir ve $f_G \times f_H = f_{G\times H}$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.5. Eğer f_G ve f_H, U üzerinde KE-grup ise $f_G \times f_H$, $U \times U$ üzerinde KE-gruptur.

İspat . Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G \times H$ için

$$\begin{aligned}
f_{G\times H}((x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}) &= f_{G\times H}(x_1x_2^{-1}, y_1y_2^{-1}) \\
&= f_G(x_1x_2^{-1}) \times f_H(y_1y_2^{-1}) \\
&\supseteq (f_G(x_1) \cap f_G(x_2)) \times (f_H(y_1) \cap f_H(y_2)) \\
&= (f_G(x_1) \times f_H(y_1)) \cap (f_G(x_2) \times f_H(y_2)) \\
&= f_{G\times H}(x_1, y_1) \cap f_{G\times H}(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

Böylece, $f_G \times f_H = f_{G\times H}$, $U \times U$ üzerinde KE-gruptur.

Teorem 3.1.6. Eğer f_G ve h_G, U üzerinde KE-grup ise $f_G \widetilde{\cap} h_G$, U üzerinde KE-gruptur.

İspat . $x, y \in G$ olsun.

$$\begin{aligned}
(f_G \widetilde{\cap} h_G)(xy^{-1}) &= f_G(xy^{-1}) \cap h_G(xy^{-1}) \\
&\supseteq (f_G(x) \cap f_G(y)) \cap (h_G(x) \cap h_G(y)) \\
&= (f_G(x) \cap h_G(x)) \cap (f_G(y) \cap h_G(y)) \\
&= (f_G \widetilde{\cap} h_G)(x) \cap (f_G \widetilde{\cap} h_G)(y),
\end{aligned}$$

Bundan dolayı $f_G \widetilde{\cap} h_G$, U üzerinde KE-gruptur.

Uyarı 3.1.2. $f_G \widetilde{\cup} h_G$, U üzerinde her zaman KE-grup değidir.

Örnek 3.1.3. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}$ evrensel küme ve $G = \mathbb{Z}_6$ parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. f_G KE-grubu

$$\begin{aligned}
f_G(0) &= \mathbb{Z} \\
f_G(1) &= \{0, 1, 4\} \\
f_G(2) &= \{0, 1, 4, 11\} \\
f_G(3) &= \{0, 1, 4, 12, 13\} \\
f_G(4) &= \{0, 1, 4, 11\} \\
f_G(5) &= \{0, 1, 4\}
\end{aligned}$$

ve h_G KE-grubu

$$\begin{aligned}
h_G(0) &= \mathbb{Z} \\
h_G(1) &= \{6, 7\} \\
h_G(2) &= \{6, 7, 10, 13\} \\
h_G(3) &= \{6, 7, 8, 9\} \\
h_G(4) &= \{6, 7, 10, 13\} \\
h_G(5) &= \{6, 7\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $(f_G \widetilde{\cup} h_G)(2 + 3) \not\supseteq (f_G \widetilde{\cup} h_G)(2) \cap (f_G \widetilde{\cup} h_G)(3)$ olduğu açıktır. Böylece $f_G \widetilde{\cup} h_G$, U üzerinde KE-grup değildir.

Tanım 3.1.4. H, G grubunun bir altgrubu olsun. f_G, U üzerinde bir KE-grup ve f_H, f_G nin boştan farklı esnek alt kümesi olsun. Eğer f_H, U üzerinde bir KE-grup ise f_H ye U üzerinde f_G nin KE-altgrubu denir ve $f_H \widetilde{\leq} f_G$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.4. Örnek 3.1.2 de verilen f_G KE-grubunu ele alalım. $H = \{0, 2, 4\}$ parametre kümesinin alt kümesi olsun. f_H esnek kümesi

$$\begin{aligned} f_H(0) &= S_3 \\ f_H(2) &= \{(123), (132)\} \\ f_H(4) &= \{(123), (132)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. f_H, f_G nin KE-altgrubudur.

Teorem 3.1.7. f_G, U üzerinde KE-grup olsun. f_H ve f_N de f_G nin KE-altgrupları olsun. $f_H \widetilde{\cap} f_N$, U üzerinde f_G nin KE-altgrubudur.

İspat . $x, y \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{H\widetilde{\cap}N}(xy^{-1}) &= f_H(xy^{-1}) \cap f_N(xy^{-1}) \\ &\supseteq (f_H(x) \cap f_H(y)) \cap (f_N(x) \cap f_N(y)) \\ &= (f_H(x) \cap f_N(x)) \cap (f_H(y) \cap f_N(y)) \\ &= f_{H\widetilde{\cap}N}(x) \cap f_{H\widetilde{\cap}N}(y). \end{aligned}$$

Böylece $f_H \widetilde{\cap} f_N$, U üzerinde f_G nin KE-altgrubudur.

Uyarı 3.1.3. $f_H \widetilde{\cup} f_N$, U üzerinde her zaman f_G nin KE-altgrubu değildir.

Örnek 3.1.5. Örnek 3.1.2 de verilen f_G KE-grubunu ve Örnek 3.1.4 verilen f_G nin f_H KE-altgrubunu ele alalım. $N = \{0, 3\}$ olsun. f_G nin f_N KE-altgrubu

$$\begin{aligned} f_N(0) &= S_3 \\ f_N(3) &= \{(12), (13), (132)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $f_{H\widetilde{\cup}N}(2+3) \not\supseteq f_{H\widetilde{\cup}N}(2) \cap f_{H\widetilde{\cup}N}(3)$ dir. $f_H \widetilde{\cup} f_N$, U üzerinde f_G nin KE-altgrubu değildir.

Tanım 3.1.5. G bir grup, $f_G \in S_E(U)$ (KE-grup olması gerekli değil) ve f_N, f_G nin boştan farklı bir esnek alt kümesi olsun. Her $x, y \in G$ için $f_N(xy) = f_N(yx)$ ise f_N ye U üzerinde f_G nin abelyan esnek alt kümesi denir.

Teorem 3.1.8. G bir grup, $f_G \in S_E(U)$ ve f_N, f_G nin boştan farklı bir esnek alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine dentir:

1. Her $x, y \in G$ için $f_N(xy) = f_N(yx)$

2. Her $x, y \in G$ için $f_N(xyx^{-1}) = f_N(y)$

3. Her $x, y \in G$ için $f_N(xyx^{-1}) \supseteq f_N(y)$

4. Her $x, y \in G$ için $f_N(xyx^{-1}) \subseteq f_N(y)$

İspat . $x, y \in G$ olsun. Buradan,
1. $\Rightarrow$ 2. $f_N(xyx^{-1}) = f_N(x^{-1}xy) = f_N(y)$.
2. $\Rightarrow$ 3. Açıktır.
3. $\Rightarrow$ 4. $f_N(xyx^{-1}) \subseteq f_N(x^{-1}xyx^{-1}(x^{-1})^{-1}) = f_N(y)$.
4. $\Rightarrow$ 1. $f_N(xy) = f_N(xyxx^{-1}) \subseteq f_N(yx) = f_N(yxyy^{-1}) \subseteq f_N(xy)$.
Böylece, $f_N(xy) = f_N(yx)$.

Tanım 3.1.6. f_G, U üzerinde KE-grup ve f_N, f_G nin bir KE-altgrubu olsun. f_N, f_G nin abelyan esnek kümesi ise f_N ye U üzerinde f_G nin KE-normal altgrubu denir ve $f_N \widetilde{\triangleleft} f_G$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.6. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}^-$ evrensel küme olsun. $G = S_3$, simetrik grup, ve $N = A_3$, alterne grup, parametre kümesinin alt kümeleri olsun. f_G esnek kümesi

$$\begin{aligned}
f_G(1) &= \mathbb{Z}^- \\
f_G(12) &= \{-3, -5, -6, -11\} \\
f_G(13) &= \{-2, -3, -5, -6, -12\} \\
f_G(23) &= \{-3, -5, -6, -7, -9\} \\
f_G(123) &= \{-1, -3, -5, -6, -8, -10\} \\
f_G(132) &= \{-1, -3, -5, -6, -8, -10\}
\end{aligned}$$

ve f_N esnek kümesi

$$\begin{aligned}
f_N(1) &= \mathbb{Z}^- \\
f_N(123) &= \{-1, -3, -5\} \\
f_N(132) &= \{-1, -3, -5\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. f_N, U üzerinde f_G nin bir KE-normal altgrubudur.

Teorem 3.1.9. f_G, U üzerinde KE-grup ve f_N, f_G nin KE-altgrubu olsun. Eğer G, bir abelyan grup ise f_N, U üzerinde f_G nin KE-normal altgrubudur.

Örnek 3.1.7. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}^* = \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ evrensel küme olsun. $G = \mathbb{Z}_6$ ve $N = \{0, 2, 4\}$ parametre kümesinin alt kümeleri olsun. U üzerindeki f_G esnek kümesi

$$f_G(x) = \{y \in \mathbb{Z}^* : xy \equiv 0(mod\ 6)\} \text{ ve } f_G(0) = \mathbb{Z}^*$$

ve U üzerindeki f_N esnek kümesi

$$f_N(x) = \{9k : k \in \mathbb{Z}^+\} \text{ ve } f_N(0) = \mathbb{Z}^*$$

şeklinde tanımlansın. G abelyan grup olduğundan f_N, f_G nin KE-normal altgrubudur.

3.2 Kesişimsel Esnek Grubun Grup Teoriye Uygulamaları

Bu alt bölümde, α-kapsam kümesi, e-kümesi, esnek koset, bir esnek kümenin görüntüsü ve ters görüntüsü gibi kavramlar tanımlandı. Bir kesişimsel esnek grubun α-kapsam kümesinin ve e-kümesinin bir altgrup olduğu gösterildi. Bir kesişimsel esnek grubun e-kümesi ve esnek koseti arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca bir kesişimsel esnek grubun görüntüsünün ve ters görüntüsünün yine bir kesişimsel esnek grup olduğu gösterildi.

Tanım 3.2.1. $f_A \in S_E(U)$ ve $\alpha \subseteq U$ olsun.

$$f_A^\alpha = \{x \in A : f_A(x) \supseteq \alpha\}$$

ile tanımlanan kümeye f_A nın α-kapsam kümesi denir.

Tanım 3.2.2. $f_A \in S_E(U)$ olsun.

$$suppf_A = \{x \in A : f_A(x) \neq \emptyset\}$$

ile tanımlanan kümeye f_A nın destek kümesi denir.

Teorem 3.2.1. I indis kümesi ve $\{f_{A_i} : i \in I\}$, U üzerinde tanımlanan esnek kümelerin bir ailesi olsun. Herhangi bir $\alpha \subseteq U$ için

1. $\bigcup_{i\in I}(f_{A_i}^{\alpha}) \subseteq (\widetilde{\bigcup}_{i\in I} f_{A_i})^{\alpha}$,

2. $\bigcap_{i\in I}(f_{A_i}^{\alpha}) = (\widetilde{\bigcap}_{i\in I} f_{A_i})^{\alpha}$.

İspat . 1.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i\in I}(f_{A_i}^{\alpha}) &\Rightarrow \exists i \in I \text{ için } x \in f_{A_i}^{\alpha} \\ &\Rightarrow \exists i \in I \text{ için } f_{A_i}(x) \supseteq \alpha \\ &\Rightarrow \bigcup_{i\in I} f_{A_i}(x) \supseteq \alpha \\ &\Rightarrow x \in (\widetilde{\bigcup}_{i\in I} f_{A_i})^{\alpha}. \end{aligned}$$

O halde $\bigcup_{i\in I}(f_{A_i}^{\alpha}) \subseteq (\widetilde{\bigcup}_{i\in I} f_{A_i})^{\alpha}$ olduğu görülür.

2.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in I}(f_{A_i}^{\alpha}) &\Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } x \in f_{A_i}^{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \text{ için } f_{A_i}(x) \supseteq \alpha \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} f_{A_i}(x) \supseteq \alpha \\ &\Leftrightarrow x \in (\widetilde{\bigcap}_{i\in I} f_{A_i})^{\alpha}. \end{aligned}$$

O halde $\bigcap_{i\in I}(f_{A_i}^{\alpha}) = (\widetilde{\bigcap}_{i\in I} f_{A_i})^{\alpha}$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.2. f_G, U üzerinde KE-grup ve $\alpha \subseteq U$ olsun. f_G^{α} boştan farklı olmak üzere f_G^{α}, G nin altgrubudur.

İspat . $x, y \in f_G^{\alpha}$ olsun. O halde $f_G(x) \supseteq \alpha$ ve $f_G(y) \supseteq \alpha$ dır.

$$\begin{aligned} f_G(xy^{-1}) &\supseteq f_G(x) \cap f_G(y^{-1}) \\ &= f_G(x) \cap f_G(y) \\ &\supseteq \alpha. \end{aligned}$$

Böylece $xy^{-1} \in f_G^{\alpha}$ dır ve f_G^{α}, G nin altgrubudur.

Tanım 3.2.3. f_G, U üzerinde KE-grup olsun.

$$G_{f_G} = \{x \in G : f_G(x) = f_G(e)\}$$

ile tanımlanan kümeye f_G nin e-kümesi denir.

Teorem 3.2.3. f_G, U üzerinde KE-grup olsun. G_{f_G}, G nin altgrubudur.

İspat . $x, y \in G_{f_G}$ olsun. O halde $f_G(x) = f_G(e)$ ve $f_G(y) = f_G(e)$ dır.

$$\begin{aligned} f_G(xy^{-1}) &\supseteq f_G(x) \cap f_G(y^{-1}) \\ &= f_G(x) \cap f_G(y) \\ &= f_G(e) \cap f_G(e) \\ &= f_G(e). \end{aligned}$$

$f_G(e) \supseteq f_G(xy^{-1})$ olduğundan $f_G(xy^{-1}) = f_G(e)$ dir. Bundan dolayı $xy^{-1} \in G_{f_G}$ ve G_{f_G}, G nin altgrubudur.

Tanım 3.2.4. f_G, U üzerinde KE-grup ve $a \in G$ olsun. Her $x \in G$ için x-yaklaşımı

$$(af_G)(x) = f_G(a^{-1}x)$$

şeklinde tanımlanan af_G esnek kümesine f_G nin esnek sol koseti denir.

Teorem 3.2.4. f_G, U üzerinde KE-grup olsun. $a, b \in G$ olmak üzere

$$af_G = bf_G \Leftrightarrow aG_{f_G} = bG_{f_G}$$

İspat . Kabul edelim ki $af_G = bf_G$ olsun. Her $x \in G$ için $af_G(x) = bf_G(x)$ olması $f_G(a^{-1}x) = f_G(b^{-1}x)$ olduğunu gösterir. $x = b$ alınarak

$$f_G(a^{-1}b) = f_G(b^{-1}b) = f_G(e)$$

elde edilir, böylece $a^{-1}b \in G_{f_G}$ ve bundan dolayı $aG_{f_G} = bG_{f_G}$ dir. Karşıt olarak, $aG_{f_G} = bG_{f_G}$ olsun. Buradan, $a^{-1}x \in G_{f_G}$ ve $b^{-1}x \in G_{f_G}$ dir.

$$\begin{aligned} f_G(a^{-1}x) &= f_G(a^{-1}bb^{-1}x) \\ &\supseteq f_G(a^{-1}b) \cap f_G(b^{-1}x) \\ &= f_G(e) \cap f_G(b^{-1}x) \\ &= f_G(b^{-1}x) \end{aligned}$$

Benzer olarak, her $x \in G$ için $f_G(b^{-1}x) \supseteq f_G(a^{-1}x)$ olur. Bundan dolayı, her $x \in G$ için $f_G(b^{-1}x) = f_G(a^{-1}x)$ dır. Böylece $af_G = bf_G$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.5. f_G, U üzerinde KE-grup ve f_N, f_G nin KE-normal altgrubu olsun. $a, b \in N$ olmak üzere $af_G = bf_G$ ise $f_N(a) = f_N(b)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki $af_G = bf_G$ olsun. Teorem 3.2.4 den $a^{-1}b \in G_{f_G}$ ve $b^{-1}a \in G_{f_G}$ olduğu bilinmektedir. Teorem 3.1.8 den ve f_N, f_G nin KE-normal altgrubu olduğundan

$$\begin{aligned} f_N(a) &= f_N(b^{-1}ab) \\ &\supseteq f_N(b^{-1}a) \cap f_N(b) \\ &= f_N(e) \cap f_N(b) \\ &= f_N(b). \end{aligned}$$

Benzer olarak $f_N(b) \supseteq f_N(a)$ olduğu görülür. Bundan dolayı $f_N(a) = f_N(b)$ dır.

Tanım 3.2.5. φ, A dan B ye bir fonksiyon ve $f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Her $y \in B$ için

$$\varphi(f_A)(y) = \begin{cases} \cup\{f_A(x) : x \in A, \varphi(x) = y\}, & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ ise} \\ \emptyset, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve her $x \in A$ için $\varphi^{-1}(f_B)(x) = f_B(\varphi(x))$ olacak şekilde $\varphi(f_A)$ ve $\varphi^{-1}(f_B)$ esnek kümelerine sırasıyla U üzerinde f_A nın φ altında esnek görüntüsü ve esnek ters görüntüsü denir.

Örnek 3.2.1. Kabul edelim ki $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ evrensel küme olsun. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{a, b, c, 3, 4, 5\}$ parametre kümesinin alt kümeleri olsun. f_A ve f_B esnek kümeleri

$$f_A = \{(1, \emptyset), (2, \{x_3, x_4, x_7\}), (3, \{x_1\}), (4, \{x_1, x_2, x_3\}), (5, \{x_6\})\}$$

$$f_B = \{(a, \{x_5\}), (b, \emptyset), (c, \emptyset), (3, \{x_1, x_2, x_4, x_6\}), (4, \{x_7\}), (5, \{x_2, x_3, x_7\})\}$$

şeklinde tanımlansın. $\varphi : A \to B$ fonksiyon ve

$$\varphi(1) = b, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = a, \varphi(4) = 4, \varphi(5) = a$$

olsun. Buradan,

$$\varphi(f_A) = \{(a, \{x_1, x_6\}), (b, \emptyset), (c, \emptyset), (3, \{x_3, x_4, x_7\}), (4, \{x_1, x_2, x_3\}), (5, \emptyset)\}$$

$$\varphi^{-1}(f_B) = \{(1, \emptyset), (2, \{x_1, x_2, x_4, x_6\}), (3, \{x_5\}), (4, \{x_7\}), (5, \{x_5\})\}$$

olur.

Teorem 3.2.6. φ, A dan B ye bir fonksiyon ve I, boştan farklı indis kümesi olsun. Her $i \in I$ için $A_i \subseteq A$ ve $f_{A_i} \in S_E(U)$ olmak üzere

$$\varphi(\widetilde{\cup}_{i\in I} f_{A_i}) = \widetilde{\cup}_{i\in I}\varphi(f_{A_i})$$

İspat .

$$\begin{aligned}
\varphi(\widetilde{\cup}_{i\in I} f_{A_i})(y) &= \cup\{(\cup_{i\in I} f_{A_i})(x) : x \in A_i, \varphi(x) = y\} \\
&= \cup\{\cup_{i\in I} f_{A_i}(x) : x \in A_i, \varphi(x) = y\} \\
&= \cup_{i\in I}\{\cup\{f_{A_i}(x) : x \in A_i, \varphi(x) = y\}\} \\
&= \widetilde{\cup}_{i\in I}\varphi(f_{A_i})(y).
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.7. φ, A dan B ye bir fonksiyon ve $A_1, A_2 \subseteq A$, $f_{A_1}, f_{A_2} \in S_E(U)$ olsun. Buradan,

$$f_{A_1}\widetilde{\subseteq} f_{A_2} \Rightarrow \varphi(f_{A_1})\widetilde{\subseteq}\varphi(f_{A_2})$$

İspat . Kabul edelim ki $f_{A_1}\widetilde{\subseteq} f_{A_2}$ olsun. Her $y \in B$ için

$$\begin{aligned}
\varphi(f_{A_1})(y) &= \cup\{f_{A_1}(x) : x \in A_1, \varphi(x) = y\} \\
&\subseteq \cup\{f_{A_2}(x) : x \in A_2, \varphi(x) = y\} \\
&= \varphi(f_{A_2})(y)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.2.8. φ, A dan B ye bir fonksiyon ve J, boştan farklı indis kümesi olsun. Her $j \in J$ için $B_j \subseteq B$ ve $f_{B_j} \in S_E(U)$ olmak üzere

1. $\varphi^{-1}(\widetilde{\cup}_{j\in J} f_{B_j}) = \widetilde{\cup}_{j\in J}\varphi^{-1}(f_{B_j})$
2. $\varphi^{-1}(\widetilde{\cap}_{j\in J} f_{B_j}) = \widetilde{\cap}_{j\in J}\varphi^{-1}(f_{B_j})$

İspat . Her $x \in A$ için

1. $\varphi^{-1}(\widetilde{\cup}_{j\in J} f_{B_j})(x) = \cup_{j\in J} f_{B_j}(\varphi(x)) = \widetilde{\cup}_{j\in J}\varphi^{-1}(f_{B_j})(x)$
2. $\varphi^{-1}(\widetilde{\cap}_{j\in J} f_{B_j})(x) = \cap_{j\in J} f_{B_j}(\varphi(x)) = \widetilde{\cap}_{j\in J}\varphi^{-1}(f_{B_j})(x)$

Teorem 3.2.9. φ, A dan B ye bir fonksiyon olsun. Her $f_A \in S_E(U)$ için

$$\varphi^{-1}(\varphi(f_A))\widetilde{\supseteq} f_A$$

Ayrıca φ, birebir fonksiyon ise $\varphi^{-1}(\varphi(f_A)) = f_A$ olur.

İspat . Her $x \in A$ için

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\varphi(f_A))(x) &= \varphi(f_A)(\varphi(x)) \\
&= \cup\{f_A(x') : x' \in A, \varphi(x') = \varphi(x)\} \\
&\supseteq f_A(x)
\end{aligned}$$

Böylece $\varphi^{-1}(\varphi(f_A))\widetilde{\supseteq} f_A$ olur. φ, birebir ise $\varphi^{-1}(\varphi(f_A)) = f_A$ olduğu açıktır.

Teorem 3.2.10. f_G, U üzerinde KE-grup ve φ, G den H ye bir homomorfizma olsun. $\varphi(f_G)$, U üzerinde KE-gruptur.

İspat .

$$\begin{aligned}
(\varphi(f_G))(uv) &= \cup\{f_G(z) : z \in G, \varphi(z) = uv\} \\
&\supseteq \cup\{f_G(xy) : x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\
&\supseteq \cup\{f_G(x) \cap f_G(y) : x, y \in G, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\
&= (\cup\{f_G(x) : x \in G, \varphi(x) = u\}) \cap (\cup\{f_G(y) : y \in G, \varphi(y) = v\}) \\
&= (\varphi(f_G))(u) \cap (\varphi(f_G))(v)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi(f_G))(u^{-1}) &= \cup\{f_G(z) : z \in H, \varphi(z) = u^{-1}\} \\
&= \cup\{f_G(z^{-1}) : z \in H, \varphi(z^{-1}) = u\} \\
&= (\varphi(f_G))(u).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\varphi(f_G)$, U üzerinde bir KE-gruptur.

Teorem 3.2.11. f_H, U üzerinde KE-grup ve φ, G den H ye bir homomorfizma olsun. $\varphi^{-1}(f_H)$, U üzerinde KE-gruptur.

İspat . $x, y \in G$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(f_H)(xy) &= f_H(\varphi(xy)) \\
&= f_H(\varphi(x)\varphi(y)) \\
&\supseteq f_H(\varphi(x)) \cap f_H(\varphi(y)) \\
&= \varphi^{-1}(f_H)(x) \cap \varphi^{-1}(f_H)(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(f_H)(x^{-1}) &= f_H(\varphi(x^{-1})) \\ &= f_H((\varphi(x))^{-1}) \\ &= f_H(\varphi(x)) \\ &= \varphi^{-1}(f_H)(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\varphi^{-1}(f_H)$, U üzerinde KE-gruptur.

4. KESİŞİMSEL ESNEK HALKALAR VE UYGULAMALARI

Bu bölümde, Liu (1982) tarafından tanımlanan bulanık halka teoriden esinlenerek kesişimsel esnek halka, kesişimsel esnek ideal, kesişimsel esnek alt halka, parametre kümesi halka olan iki esnek kümenin toplamı, farkı, çarpımı, bir esnek kümenin negatifi gibi kavramlar tanımlandı ve bazı cebirsel özellikleri incelendi.

4.1 Kesişimsel Esnek Halkalar

Bu alt bölümde, kümelerde arakesit ve kapsama bağıntısı yardımıyla tanımlanan aynı zamanda küme teori, esnek küme teori ve halka teori arasında bir köprü görevi gören kesişimsel esnek halka yapısına yer verildi. Bu yeni kavram yardımıyla kesişimsel esnek ideal, kesişimsel esnek alt halka kavramları tanımlandı ve bazı temel özellikleri incelendi.

Tanım 4.1.1. Boştan farklı bir R kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $'+'$ ve $'.'$ olsun. $f_R \in S_E(U)$ olsun. $(f_R, +)$, U üzerinde bir KE-grup ve $(f_R, .)$, U üzerinde bir KE-grupoid ise f_R ye U üzerinde kesişimsel esnek halka denir.

Bu çalışma boyunca, kesişimsel esnek halka yerine KE-halka ifadesi kullanılacaktır.

Örnek 4.1.1. Kabul edelim ki $U = S_3$ evrensel küme ve

$R = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_3 \right\}$, $\mathbb{Z}_3$ terimli $2{\times}2$ matrislerin kümesi, parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. f_R esnek kümesi

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = S_3$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(12),(13),(23)\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(12),(13),(23)\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(12),(23),(123)\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(12),(23),(123)\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(1),(12),(23)\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(1),(12),(23)\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(12),(23),(132)\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(12),(23),(132)\}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece f_R, U üzerinde KE-halkadır.

Teorem 4.1.1. *R bir halka ve $f_R \in S_E(U)$ olsun. f_R nin U üzerinde KE-halka olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in R$ için*

1. $f_R(x-y) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y)$

2. $f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y)$

olmasıdır.

İspat . Kabul edelim ki f_R, U üzerinde KE-halka olsun. O halde

$$f_R(x+y) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \text{ ve } f_R(-x) = f_R(x)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} f_R(x-y) &\supseteq f_R(x) \cap f_R(-y) \\ &= f_R(x) \cap f_R(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte, f_R, U üzerinde bir KE-grupoid olduğundan

$$f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y)$$

dir. Karşıt olarak, kabul edelim ki her $x, y \in R$ için

$$f_R(x-y) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \text{ ve } f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y)$$

olsun. $x = 0_R$ alınarak

$$\begin{aligned} f_R(0_R - y) &= f_R(-y) \\ &\supseteq f_R(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $y \in R$ için

$$\begin{aligned} f_R(y) &= f_R(-(-y)) \\ &\supseteq f_R(-y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $x \in R$ için

$$f_R(-x) = f_R(x)$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f_R(x+y) &= f_R(x-(-y)) \\ &\supseteq f_R(x) \cap f_R(-y) \\ &= f_R(x) \cap f_R(y) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı f_R, U üzerinde KE-halkadır.

Tanım 4.1.2. f_R, U üzerinde KE-halka olsun. Her $x, y \in R$ için $f_R(xy) \supseteq f_R(y)$ise f_R ye U üzerinde KE-sol ideal ve her $x, y \in R$ için $f_R(xy) \supseteq f_R(x)$ ise f_R ye U üzerinde KE-sağ ideal denir.

f_R, U üzerinde hem KE-sol ideal hem de KE-sağ ideal ise f_R ye U üzerinde KE-ideal denir.

Örnek 4.1.2. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}^+$ evrensel küme ve $R = \mathbb{Z}_6$ parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. f_R esnek kümesi

$$\begin{aligned} f_R(0) &= \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \\ f_R(1) &= \{6n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \\ f_R(2) &= \{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \\ f_R(3) &= \{3n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \\ f_R(4) &= \{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \\ f_R(5) &= \{6n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. f_R, U üzerinde bir KE-idealdir.

Teorem 4.1.2. R bir halka ve $f_R \in S_E(U)$ olsun. f_R nin U üzerinde KE-ideal olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in R$ için

1. $f_R(x - y) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y)$
2. $f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cup f_R(y)$

olmasıdır.

İspat . Kabul edelim ki f_R, U üzerinde KE-ideal olsun. O halde

$$f_R(x - y) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y)$$

dir. Ayrıca

$$f_R(xy) \supseteq f_R(x) \text{ ve } f_R(xy) \supseteq f_R(y)$$

olduğundan $f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cup f_R(y)$ dir. Karşıt olarak, kabul edelim ki her $x, y \in R$ için

$$f_R(x-y) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \text{ ve } f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} f_R(xy) &\supseteq f_R(x) \cup f_R(y) \\ &\supseteq f_R(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(xy) &\supseteq f_R(x) \cup f_R(y) \\ &\supseteq f_R(y) \end{aligned}$$

olduğundan

$$f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cap f_R(y)$$

olur. Buradan f_R, U üzerinde KE-idealdir.

Teorem 4.1.3. f_R, U üzerinde KE-halka/ideal ise her $x \in R$ için $f_R(0_R) \supseteq f_R(x)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki f_R, U üzerinde KE-halka/ideal olsun. Her $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} f_R(0_R) &= f_R(x-x) \\ &\supseteq f_R(x) \cap f_R(x) \\ &= f_R(x) \end{aligned}$$

Teorem 4.1.4. R birimli bir halka olsun. f_R, U üzerinde KE-ideal ise her $x \in R$ için $f_R(x) \supseteq f_R(1_R)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki f_R, U üzerinde KE-ideal olsun. Her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} f_R(x) &= f_R(x1_R) \\ &\supseteq f_R(1_R) \end{aligned}$$

Teorem 4.1.5. R bir bölme halkası ve $f_R \in S_E(U)$ olsun. f_R nin U üzerinde KE-ideal olması için gerek ve yeter şart her $0_R \neq x \in R$ için $f_R(x) = f_R(1_R) \subseteq f_R(0_R)$ olmasıdır.

İspat . Kabul edelim ki f_R, U üzerinde KE-ideal olsun. Her $x \in R$ için $f_R(0_R) \supseteq f_R(x)$ olduğundan özel olarak $f_R(0_R) \supseteq f_R(1_R)$ dır. $0_R \neq x \in R$ olsun, buradan

$$\begin{aligned} f_R(x) &= f_R(x1_R) \\ &\supseteq f_R(1_R) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(1_R) &= f_R(x^{-1}x) \\ &\supseteq f_R(x) \end{aligned}$$

Böylece $f_R(x) = f_R(1_R) \subseteq f_R(0_R)$ olduğu görülür. Karşıt olarak,

1. $x, y \in R$ olsun. $x - y \neq 0_R$ ise

$$\begin{aligned} f_R(x-y) &= f_R(1_R) \\ &= f_R(x) \\ &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \end{aligned}$$

   ve $x - y = 0_R$ ise

$$\begin{aligned} f_R(x-y) &= f_R(0_R) \\ &\supseteq f_R(x) \\ &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \end{aligned}$$

2. $x, y \in R$ olsun. $x \neq 0_R$ ve $y = 0_R$ ise

$$\begin{aligned} f_R(xy) &= f_R(0_R) \\ &\supseteq f_R(1_R) \\ &= f_R(x) \end{aligned}$$

   ve

$$\begin{aligned} f_R(xy) &= f_R(0_R) \\ &= f_R(y) \end{aligned}$$

   Böylece, $f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cup f_R(y)$ dir.

   $x \neq 0_R$ ve $y \neq 0_R$ ise ya $xy \neq 0_R$ ya da $xy = 0_R$ dır.

   $xy \neq 0_R$ ise

$$\begin{aligned} f_R(xy) &= f_R(1_R) \\ &= f_R(x) \end{aligned}$$

   ve

$$\begin{aligned} f_R(xy) &= f_R(1_R) \\ &= f_R(y) \end{aligned}$$

dir.

$xy = 0_R$ ise

$$\begin{aligned} f_R(xy) &= f_R(0_R) \\ &\supseteq f_R(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(xy) &= f_R(0_R) \\ &\supseteq f_R(y) \end{aligned}$$

dir. Buradan $f_R(xy) \supseteq f_R(x) \cup f_R(y)$ olduğu görülür.

Böylece f_R, U üzerinde KE-idealdir.

Uyarı 4.1.1. Teorem 4.1.5 ile bir bölme halkasında KE-sol(sağ) idealin bir KE-ideal olduğu görülür.

Teorem 4.1.6. f_R, U üzerinde KE-halka/ideal olsun. Her $x, y \in R$ için $f_R(x-y) = f_R(0_R)$ ise $f_R(x) = f_R(y)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki her $x, y \in R$ için $f_R(x-y) = f_R(0_R)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} f_R(x) &= f_R(x-y+y) \\ &\supseteq f_R(x-y) \cap f_R(y) \\ &= f_R(0_R) \cap f_R(y) \\ &= f_R(y) \end{aligned}$$

Benzer olarak, $f_R(x-y) = f_R(-(y-x)) = f_R(y-x) = f_R(0_R)$ olduğunu kullanarak $f_R(y) \supseteq f_R(x)$ elde edilir.

Teorem 4.1.7. Her $x \in R$ için f_R altında görüntüleri kapsamaya göre sıralı olacak şekilde f_R, U üzerinde KE-halka/ideal olsun. $x, y \in R$ için $f_R(y) \supset f_R(x)$ ise $f_R(x-y) = f_R(x) = f_R(y-x)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki $x, y \in R$ için $f_R(y) \supset f_R(x)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f_R(x-y) &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \\ &= f_R(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(x) &= f_R(x-y+y) \\ &\supseteq f_R(x-y) \cap f_R(y). \end{aligned}$$

$x, y \in R$ için

$$f_R(y) \supset f_R(x) \text{ ve } f_R(x) \supseteq f_R(x-y) \cap f_R(y)$$

olduğundan $f_R(x-y) \subseteq f_R(x)$ dir. Böylece $f_R(x-y) = f_R(x) = f_R(y-x)$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.8. f_R, U üzerinde KE-halka/ideal ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olmak üzere $Imf_R = \{\emptyset, \alpha\}$ olsun. g_R ve h_R, U üzerinde KE-ideal olmak üzere $f_R = g_R \widetilde{\cup} h_R$ ise ya $g_R \widetilde{\subseteq} h_R$ ya da $h_R \widetilde{\subseteq} g_R$ dir.

İspat . Çelişki bulma yardımıyla ispatı yapmak için, kabul edelim ki $x, y \in R$ için $g_R(x) \supset h_R(x)$ ve $h_R(y) \supset g_R(y)$ olsun.
$f_R = h_R \widetilde{\cup} g_R$ olduğundan dolayı

$$f_R(x) = g_R(x) \supset h_R(x) \supseteq \emptyset$$

ve

$$f_R(y) = h_R(y) \supset g_R(y) \supseteq \emptyset$$

$Imf_R = \{\emptyset, \alpha\}$ olduğundan

$$f_R(x) = \alpha = f_R(y) = g_R(x) = h_R(y) = f_R(x-y)$$

Yukarıdaki eşitliklerden

$$g_R(y) \subset \alpha = g_R(x) \text{ ve } h_R(x) \subset \alpha = h_R(y)$$

olduğu görülür. Teorem 4.1.7 ile

$$g_R(x-y) = g_R(y) \text{ ve } h_R(x-y) = h_R(x)$$

dir. $f_R(x-y) = g_R(y) \cup h_R(x) \subset \alpha$ olacak şekilde bir çelişki elde edilir.

Teorem 4.1.9. f_R ve f_H, U üzerinde iki KE-halka olsun. $f_R \wedge f_H$, U üzerinde KE-halkadır.

İspat . $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times H$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{R\wedge H}((x_1,y_1)-(x_2,y_2)) &= f_{R\wedge H}(x_1-x_2,y_1-y_2) \\ &= f_R(x_1-x_2)\cap f_H(y_1-y_2) \\ &\supseteq (f_R(x_1)\cap f_R(x_2))\cap(f_H(y_1)\cap f_H(y_2)) \\ &= (f_R(x_1)\cap f_H(y_1))\cap(f_R(x_2)\cap f_H(y_2)) \\ &= f_{R\wedge H}(x_1,y_1)\cap f_{R\wedge H}(x_2,y_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{R\wedge H}((x_1,y_1)(x_2,y_2)) &= f_{R\wedge H}(x_1x_2,y_1y_2) \\ &= f_R(x_1x_2)\cap f_H(y_1y_2) \\ &\supseteq (f_R(x_1)\cap f_R(x_2))\cap(f_H(y_1)\cap f_H(y_2)) \\ &= (f_R(x_1)\cap f_H(y_1))\cap(f_R(x_2)\cap f_H(y_2)) \\ &= f_{R\wedge H}(x_1,y_1)\cap f_{R\wedge H}(x_2,y_2) \end{aligned}$$

Bundan dolayı, $f_R \wedge f_H$, U üzerinde KE-halkadır.

Uyarı 4.1.2. $f_R \vee f_H$, U üzerinde her zaman KE-halka değildir.

Örnek 4.1.3. Kabul edelim ki $U = S_3$ evrensel küme olsun. $R = \mathbb{Z}_6$ ve

$H = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, $\mathbb{Z}_2$ terimli 2×2 matrislerin kümesi, parametre kümesinin alt kümeleri olsun. $U = S_3$ üzerinde f_R KE-halkası

$$\begin{aligned} f_R(0) &= S_3 \\ f_R(1) &= \{(1),(12),(132)\} \\ f_R(2) &= \{(12),(13)\} \\ f_R(3) &= \{(12),(23)\} \\ f_R(4) &= \{(12),(13)\} \\ f_R(5) &= \{(1),(12),(132)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $U = S_3$ üzerinde f_H KE-halkası

$$
\begin{aligned}
f_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= S_3 \\
f_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{(1),(12),(132)\} \\
f_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \{(1),(13),(132)\} \\
f_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{(1),(123),(132)\}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlansın.

$$
f_{R\vee H}((3,\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) - (2,\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})) \not\supseteq f_{R\vee H}(3,\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \cap f_{R\vee H}(2,\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})
$$

olduğu açıktır. Bundan dolayı $f_R \vee f_H$, U üzerinde KE-halka değildir.

Teorem 4.1.10. f_R ve f_H, U üzerinde iki KE-ideal olsun. $f_R \wedge f_H$, U üzerinde KE-idealdir.

İspat . Teorem 4.1.9 da f_R ve f_H, U üzerinde KE-halka iken $f_R \wedge f_H$ da U üzerinde KE-halka olduğu gösterildi. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times H$ olsun. Buradan,

$$
\begin{aligned}
f_{R\wedge H}((x_1,y_1)(x_2,y_2)) &= f_{R\wedge H}(x_1x_2, y_1y_2) \\
&= f_R(x_1x_2) \cap f_H(y_1y_2) \\
&\supseteq f_R(x_1) \cap f_H(y_1) \\
&= f_{R\wedge H}(x_1, y_1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f_{R\wedge H}((x_1,y_1)(x_2,y_2)) &= f_{R\wedge H}(x_1x_2, y_1y_2) \\
&= f_R(x_1x_2) \cap f_H(y_1y_2) \\
&\supseteq f_R(x_2) \cap f_H(y_2) \\
&= f_{R\wedge H}(x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

Bundan dolayı, $f_R \wedge f_H$, U üzerinde KE-idealdir.

Uyarı 4.1.3. $f_R \vee f_H$, U üzerinde her zaman KE-ideal değildir.

Örnek 4.1.4. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}^+$ evrensel küme olsun. $R = \mathbb{Z}_4$ ve

$H = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, $\mathbb{Z}_2$ terimli 2×2 matrisler, parametre kümesinin alt kümeleri olsun. $U = \mathbb{Z}^+$ üzerinde f_R KE-halkası

$$\begin{aligned} f_R(0) &= \mathbb{Z}^+ \\ f_R(1) &= \{2, 7, 11, 12, 15\} \\ f_R(2) &= \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 12, 15, 17, 19\} \\ f_R(3) &= \{2, 7, 11, 12, 15\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $U = \mathbb{Z}^+$ üzerinde f_H KE-halkası

$$\begin{aligned} f_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \mathbb{Z}^+ \\ f_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{2, 5, 9\} \\ f_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \{1, 2, 3, 5, 8, 9, 18\} \\ f_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 16, 18, 20, 21\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

$$f_{R \vee H}((3, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) - (2, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})) \not\supseteq f_{R \vee H}(3, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \cap f_{R \vee H}(2, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$$

olduğu açıktır. O halde $f_R \vee f_H$, U üzerinde KE-ideal değildir.

Teorem 4.1.11. f_R ve g_R, U üzerinde iki KE-halka olsun. $f_R\widetilde{\cap}g_R$ de U üzerinde KE-halkadır.

İspat . $x, y \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}(f_R\widetilde{\cap}g_R)(x-y) &= f_R(x-y) \cap g_R(x-y)\\ &\supseteq (f_R(x) \cap f_R(y)) \cap (g_R(x) \cap g_R(y))\\ &= (f_R(x) \cap g_R(x)) \cap (f_R(y) \cap g_R(y))\\ &= (f_R\widetilde{\cap}g_R)(x) \cap (f_R\widetilde{\cap}g_R)(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f_R\widetilde{\cap}g_R)(xy) &= f_R(xy) \cap g_R(xy)\\ &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \cap g_R(x) \cap g_R(y)\\ &= f_R(x) \cap g_R(x) \cap f_R(y) \cap g_R(y)\\ &= (f_R\widetilde{\cap}g_R)(x) \cap (f_R\widetilde{\cap}g_R)(y)\end{aligned}$$

Böylece $f_R\widetilde{\cap}g_R$, U üzerinde KE-halkadır.

Teorem 4.1.12. f_R ve g_R, U üzerinde KE-ideal olsun. $f_R\widetilde{\cap}g_R$ de U üzerinde KE-idealdir.

İspat . Teorem 4.1.11 de $f_R\widetilde{\cap}g_R$ nin U üzerinde KE-halka olduğu gösterildi. $x, y \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}(f_R\widetilde{\cap}g_R)(xy) &= f_R(xy) \cap g_R(xy)\\ &\supseteq f_R(x) \cap g_R(x)\\ &= (f_R\widetilde{\cap}g_R)(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f_R\widetilde{\cap}g_R)(xy) &= f_R(xy) \cap g_R(xy)\\ &\supseteq f_R(y) \cap g_R(y)\\ &= (f_R\widetilde{\cap}g_R)(y)\end{aligned}$$

Böylece $f_R\widetilde{\cap}g_R$, U üzerinde KE-idealdir.

Tanım 4.1.3. R bir halka ve H, R nin alt halkası olsun. f_R, U üzerinde KE-halka ve f_H, f_R nin boştan faklı esnek alt kümesi olsun. f_H, U üzerinde KE-halka ise f_H ya U üzerinde f_R nin KE-alt halkası denir.

Örnek 4.1.5. Kabul edelim ki $U = S_3$ evrensel küme olsun. $R = \mathbb{Z}_6$ ve $H = \{0, 2, 4\}$ parametre kümesinin alt kümeleri olsun.

$U = S_3$ üzerindeki f_R KE-halkası

$$\begin{aligned} f_R(0) &= S_3 \\ f_R(1) &= \{(1),(12),(123),(132)\} \\ f_R(2) &= \{(12),(13),(123)\} \\ f_R(3) &= \{(12),(23),(123)\} \\ f_R(4) &= \{(12),(13),(123)\} \\ f_R(5) &= \{(1),(12),(123),(132)\} \end{aligned}$$

ve $U = S_3$ üzerindeki f_H esnek kümesi

$$\begin{aligned} f_H(0) &= \{(1),(12),(13),(132)\} \\ f_H(2) &= \{(12),(13)\} \\ f_H(4) &= \{(12),(13)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkca görüldüğü gibi f_H, f_R nin KE-alt halkasıdır.

Teorem 4.1.13. f_R, U üzerinde KE-halka olsun. f_H ve f_N, U üzerinde f_R nin KE-alt halkası olsun. $f_H \widetilde{\cap} f_N$ de U üzerinde f_R nin KE-alt halkasıdır.

İspat . $x, y \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{H\widetilde{\cap}N}(x-y) &= f_H(x-y) \cap f_N(x-y) \\ &\supseteq (f_H(x) \cap f_H(y)) \cap (f_N(x) \cap f_N(y)) \\ &= (f_H(x) \cap f_N(x)) \cap (f_H(y) \cap f_N(y)) \\ &= f_{H\widetilde{\cap}N}(x) \cap f_{H\widetilde{\cap}N}(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{H\widetilde{\cap}N}(xy) &= f_H(xy) \cap f_N(xy) \\ &\supseteq (f_H(x) \cap f_H(y)) \cap (f_N(x) \cap f_N(y)) \\ &= (f_H(x) \cap f_N(x)) \cap (f_H(y) \cap f_N(y)) \\ &= f_{H\widetilde{\cap}N}(x) \cap f_{H\widetilde{\cap}N}(y) \end{aligned}$$

Böylece $f_H \widetilde{\cap} f_N$, U üzerinde f_R nin KE-alt halkasıdır.

Uyarı 4.1.4. $f_H \widetilde{\cup} f_N$, U üzerinde her zaman f_R nin KE-alt halkası değildir.

Örnek 4.1.6. Örnek 4.1.5 de ki f_R KE-halkasını ve f_R nin f_H KE-alt halkasını düşünelim. $N = \{0, 3\}$ parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. f_R nin f_N KE-alt halkası

$$\begin{aligned} f_N(0) &= \{(1),(12),(123)\} \\ f_N(3) &= \{(12),(123)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $f_{H\widetilde{\cup}N}(3-2) \not\supseteq f_{H\widetilde{\cup}N}(3) \cap f_{H\widetilde{\cup}N}(2)$ olduğu açıktır. Böylece $f_H \widetilde{\cup} f_N$, U üzerinde f_R nin KE-alt halkası değildir.

4.2 Kesişimsel Esnek Halkanın Halka Teoriye Uygulamaları

Bu alt bölümde, parametre kümesi halka olan iki esnek kümenin toplamı, farkı, çarpımı, bir esnek kümenin negatifi gibi kavramlar tanımlandı. Ayrıca bir kesişimsel esnek halkanın merkezi tanımlanıp alt halka ve ideal olduğu gösterildi. Bu yeni yapıların bazı cebirsel özellikleri incelendi. Daha sonra bir kesişimsel esnek halkanın görüntüsünün ve ters görüntüsünün kesişimsel esnek halka ve kesişimsel esnek ideal olduğu gösterildi.

Tanım 4.2.1. R bir halka ve $f_R, g_R \in S_E(U)$ olsun. Her $x \in R$ için $f_R \mp g_R$, $-f_R$ ve $f_R g_R \in S_E(U)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(f_R \mp g_R)(x) = \cup\{f_R(y) \cap g_R(z) \mid y, z \in R, y \mp z = x\}$$

$$(-f_R)(x) = f_R(-x)$$

$$(f_R g_R)(x) = \begin{cases} \cup\{f_R(y) \cap g_R(z) \mid y, z \in R, yz = x\}, & x = yz \text{ olacak şekilde } y, z \in R \text{ varsa} \\ \emptyset, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$f_R + g_R, f_R - g_R, f_R g_R$ ye sırasıyla f_R ve g_R nin toplamı, farkı ve çarpımı, ayrıca $-f_R$ ye de f_R nin negatifi denir.

Teorem 4.2.1. R bir halka ve $f_R, g_R, h_R \in S_E(U)$ olsun.

$$f_R(g_R + h_R) \subseteq (f_R g_R) + (f_R h_R)$$

dir.

İspat . Kabul edelim ki $uv = w$ olacak şekilde $w \in R$ ve $u, v \in R$ olsun. Buradan,

$$f_R(g_R + h_R)(w) = \cup\{f_R(u) \cap (g_R + h_R)(v) \mid u, v \in R, uv = w\}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_R(u) \cap (g_R + h_R)(v) &= f_R(u) \cap \{\cup\{g_R(y) \cap h_R(z) \mid y, z \in R, y + z = v\} \\
&= \cup\{(f_R(u) \cap g_R(y)) \cap (f_R(u) \cap h_R(z)) \mid y, z \in R, y + z = v\} \\
&= \cup\{(f_R(u) \cap g_R(y)) \cap (f_R(u) \cap h_R(z)) \mid y, z \in R, uy + uz = uv\} \\
&\subseteq \cup\{(f_R g_R)(uy) \cap (f_R h_R)(uz) \mid y, z \in R, uy + uz = uv\} \\
&= (f_R g_R + f_R h_R)(w)
\end{aligned}$$

Böylece her $w \in R$ için

$$f_R(g_R + h_R)(w) \subseteq (f_R g_R + f_R h_R)(w)$$

O halde

$$f_R(g_R + h_R) \subseteq (f_R g_R) + (f_R h_R)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.2. f_R, U üzerinde KE-sağ ideal ve g_R, U üzerinde KE-sol ideal olsun. $f_R g_R \widetilde{\subseteq} f_R \widetilde{\cap} g_R$ dir.

İspat . $(f_R g_R)(x) = \emptyset$ ise

$$f_R g_R \widetilde{\subseteq} f_R \widetilde{\cap} g_R$$

olduğu açıktır.

Kabul edelim ki $(f_R g_R)(x) \neq \emptyset$ ve $(f_R g_R)(x) = \cup\{f_R(y) \cap g_R(z) \mid y, z \in R, x = yz\}$ olsun. f_R, U üzerinde KE-sağ ideal ve g_R, U üzerinde KE-sol ideal olduğundan

$$f_R(x) = f_R(yz) \supseteq f_R(y) \text{ ve } g_R(x) = g_R(yz) \supseteq g_R(z)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(f_R g_R)(x) &= \cup\{f_R(y) \cap g_R(z) \mid y, z \in R, x = yz\} \\
&\subseteq f_R(x) \cap g_R(x) \\
&= (f_R \widetilde{\cap} g_R)(x)
\end{aligned}$$

Böylece $f_R g_R \widetilde{\subseteq} f_R \widetilde{\cap} g_R$ olduğu görülür.

Tanım 4.2.2. f_R, U üzerinde KE-halka olsun.

$$C_{f_R} = \{x \in R : f_R(x) = f_R(0_R)\}$$

ile tanımlanan kümeye f_R nin merkezi denir.

Teorem 4.2.3. f_R, U üzerinde KE-halka olsun. C_{f_R}, R nin alt halkasıdır.

İspat . $0_R \in cf_R \subseteq R$ olduğu açıktır. $x, y \in C_{f_R}$ olsun. $f_R(x) = f_R(y) = f_R(0_R)$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_R(x-y) &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \\ &= f_R(0_R) \cap f_R(0_R) \\ &= f_R(0_R) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(xy) &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \\ &= f_R(0_R) \cap f_R(0_R) \\ &= f_R(0_R) \end{aligned}$$

olduğundan $x - y, xy \in C_{f_R}$ dir. Böylece C_{f_R}, R nin alt halkasıdır.

Teorem 4.2.4. f_R, U üzerinde KE-ideal olsun. C_{f_R}, R nin idealidir.

İspat . Teorem 4.2.3 de gösterilen şartlar altında C_{f_R} nin R nin alt halkası olduğu bilinmektedir. $x \in C_{f_R}$ ve $r \in R$ olsun. Buradan, $f_R(x) = f_R(0_R)$ dır.

$$\begin{aligned} f_R(xr) &\supseteq f_R(x) \\ &= f_R(0_R) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(rx) &\supseteq f_R(x) \\ &= f_R(0_R) \end{aligned}$$

Böylece, $xr, rx \in cf_R$ olur. O halde C_{f_R}, R nin idealidir.

Teorem 4.2.5. f_R, U üzerinde KE-halka ve $\alpha \subseteq U$ olsun. f_R^{α} boştan farklı olmak üzere f_R^{α}, R nin alt halkasıdır.

İspat . $f_R^\alpha \neq \emptyset$ olduğu açıktır. $x, y \in f_R^\alpha$ olsun. $f_R(x) \supseteq \alpha$ ve $f_R(y) \supseteq \alpha$ dir.

$$\begin{aligned} f_R(x-y) &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \\ &\supseteq \alpha \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(xy) &\supseteq f_R(x) \cap f_R(y) \\ &\supseteq \alpha \end{aligned}$$

Buradan $x - y, xy \in f_R^\alpha$ olur. Böylece f_R^α, R nin alt halkasıdır.

Teorem 4.2.6. f_R, U üzerinde KE-ideal ve $\alpha \subseteq U$ olsun. f_R^α boştan farklı olmak üzere f_R^α, R nin idealidir.

İspat . Teorem 4.2.5 de gösterilen şartlar altında f_R^α nın R nin alt halkası olduğu bilinmektedir. $x \in f_R^\alpha$ ve $r \in R$ olsun. Buradan, $f_R(x) \supseteq \alpha$ dır.

$$\begin{aligned} f_R(xr) &\supseteq f_R(x) \\ &\supseteq \alpha \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_R(rx) &\supseteq f_R(x) \\ &\supseteq \alpha \end{aligned}$$

Böylece $xr, rx \in f_R^\alpha$ olur. O halde f_R^α, R nin bir idealidir.

Teorem 4.2.7. f_R, U üzerinde KE-halka ve φ, R den H ye tanımlanan bir örten homomorfizma olsun. $\varphi(f_R)$, U üzerinde KE-halkadır.

İspat . φ, R den H ye tanımlanan bir örten homomorfizma olduğundan her $u, v \in H$ için $u = \varphi(x)$ ve $v = \varphi(y)$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} (\varphi(f_R))(u-v) &= \cup\{f_R(z) : z \in R, \varphi(z) = u - v\} \\ &= \cup\{f_R(x-y) : x, y \in R, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\ &\supseteq \cup\{f_R(x) \cap f_R(y) : x, y \in R, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\ &= (\cup\{f_R(x) : x \in R, \varphi(x) = u\}) \cap (\cup\{\varphi_R(y) : y \in R, \varphi(y) = v\}) \\ &= (\varphi(f_R))(u) \cap (\varphi(f_R))(v) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}((\varphi(f_R))(uv) &= \cup\{f_R(z) : z \in R, \varphi(z) = uv\} \\ &= \cup\{f_R(xy) : x, y \in R, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\ &\supseteq \cup\{f_R(x) \cap f_R(y) : x, y \in R, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\ &= (\cup\{f_R(x) : x \in R, \varphi(x) = u\}) \cap (\cup\{\varphi_R(y) : y \in R, \varphi(y) = v\}) \\ &= (\varphi(f_R))(u) \cap (\varphi(f_R))(v)\end{aligned}$$

Böylece $\varphi(f_R)$, U üzerinde KE-halkadır.

Teorem 4.2.8. f_R, U üzerinde KE-ideal ve φ, R den H ye tanımlanan bir örten homomorfizma olsun. $\varphi(f_R)$, U üzerinde KE-idealdir.

İspat . Teorem 4.2.7 de gösterilen şartlar altında $\varphi(f_R)$ nin U üzerinde KE-halka olduğu bilinmektedir. Kabul edelim ki $u, v \in H$ olacak şekilde bazı $x, y \in R$ için $u = \varphi(x)$ ve $v = \varphi(y)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}((\varphi(f_R))(uv) &= \cup\{f_R(z) : z \in R, \varphi(z) = uv\} \\ &= \cup\{f_R(xy) : x, y \in R, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\ &\supseteq \cup\{f_R(x) : x \in R, \varphi(x) = u\} \\ &= (\varphi(f_R))(u)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}((\varphi(f_R))(uv) &= \cup\{f_R(z) : z \in R, \varphi(z) = uv\} \\ &= \cup\{f_R(xy) : x, y \in R, \varphi(x) = u, \varphi(y) = v\} \\ &\supseteq \cup\{f_R(y) : y \in R, \varphi(y) = v\} \\ &= (\varphi(f_R))(v)\end{aligned}$$

Böylece $\varphi(f_R)$, U üzerinde KE-idealdir.

Teorem 4.2.9. f_H, U üzerinde KE-halka ve φ, R den H ye tanımlanan bir homomorfizma olsun. $\varphi^{-1}(f_H)$, U üzerinde KE-halkadır.

İspat . $x, y \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(f_H)(x - y) &= f_H(\varphi(x - y)) \\ &= f_H(\varphi(x) - \varphi(y)) \\ &\supseteq f_H(\varphi(x)) \cap f_H(\varphi(y)) \\ &= \varphi^{-1}(f_H)(x) \cap \varphi^{-1}(f_H)(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(f_H)(xy) &= f_H(\varphi(xy)) \\
&= f_H(\varphi(x)\varphi(y)) \\
&\supseteq f_H(\varphi(x)) \cap f_H(\varphi(y)) \\
&= \varphi^{-1}(f_H)(x) \cap \varphi^{-1}(f_H)(y)
\end{aligned}$$

Böylece $\varphi^{-1}(f_H)$ U üzerinde KE-halkadır.

Teorem 4.2.10. f_H, U üzerinde KE-ideal ve φ, R den H ye tanımlanan bir homomorfizma olsun. $\varphi^{-1}(f_H)$, U üzerinde KE-idealdir.

İspat . Teorem 4.2.9 de gösterilen şartlar altında $\varphi^{-1}(f_H)$ nin U üzerinde KE-halka olduğu bilinmektedir. Buradan, her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(f_H)(xy) &= f_H(\varphi(xy)) \\
&\supseteq f_H(\varphi(x)) \\
&= \varphi^{-1}(f_H)(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(f_H)(xy) &= f_H(\varphi(xy)) \\
&\supseteq f_H(\varphi(y)) \\
&= \varphi^{-1}(f_H)(y)
\end{aligned}$$

Böylece, $\varphi^{-1}(f_H)$, U üzerinde KE-idealdir.

5. KESİŞİMSEL BULANIK ESNEK GRUPLAR VE HALKALAR

Bu bölümde kesişimsel bulanık esnek grup ve kesişimsel bulanık esnek halka tanımları yapıldı. Bu yapıların çeşitli cebirsel özellikleri incelendi.

5.1 Kesişimsel Bulanık Esnek Gruplar

Bu alt bölümde, bulanık kümelerde arakesit ve kapsama bağıntısı yardımıyla tanımlanan aynı zamanda bulanık küme teori, esnek küme teori ve grup teori arasında bir köprü görevi gören kesişimsel bulanık esnek grup yapısına yer verildi. Bu yeni kavram yardımıyla kesişimsel bulanık esnek altgrup, kesişimsel bulanık esnek normal altgrup kavramları tanımlanarak ve bazı temel özellikleri incelendi.

Tanım 5.1.1. G bir grup ve $\gamma_G \in FS_E(U)$ olsun. Her $x, y \in G$ için $\gamma_G(xy) \supseteq \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y)$ ise γ_G ye U üzerinde kesişimsel bulanık esnek grupoid denir.

Tanım 5.1.2. γ_G ye U üzerinde kesişimsel bulanık esnek grupoid olsun. Her $x \in G$ için $\gamma_G(x^{-1}) = \gamma_G(x)$ ise γ_G ye U üzerinde kesişimsel bulanık esnek grup denir.

Bu çalışma boyunca, kesişimsel bulanık esnek grup yerine KBE-grup ifadesi kullanılacaktır.

Örnek 5.1.1. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}_6$ evrensel küme ve $G = \{1, -1, i, -i\}$ parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. U üzerindeki γ_G bulanık esnek kümesi,

$$\begin{aligned} \gamma_G(1) &= \{0.9/0, 0.3/2, 0.5/3, 0.9/5\} \\ \gamma_G(-1) &= \{0.8/0, 0.3/2, 0.7/5\} \\ \gamma_G(i) &= \{0.3/0, 0.3/2, 0.5/5\} \\ \gamma_G(-i) &= \{0.3/0, 0.3/2, 0.5/5\}. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. γ_G nin KBE-grup olduğu kolayca görülür.

Teorem 5.1.1. γ_G, U üzerinde KBE-grup olsun. Her $x \in G$ için $\gamma_G(e) \supseteq \gamma_G(x)$ dir.

İspat . γ_G, U üzerinde KBE-grup olduğundan her $x \in G$ için

$$\begin{aligned}\gamma_G(e) &= \gamma_G(xx^{-1})\\ &\supseteq \gamma_G(x) \cap \gamma_G(x^{-1})\\ &= \gamma_G(x) \cap \gamma_G(x)\\ &= \gamma_G(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2. $\gamma_G \in FS_E(U)$ olsun. γ_G nin U üzerinde KBE-grup olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in G$ için $\gamma_G(xy^{-1}) \supseteq \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y)$ olmasıdır.

İspat . Kabul edelim ki γ_G, U üzerinde KBE-grup olsun. Her $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}\gamma_G(xy^{-1}) &\supseteq \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y^{-1})\\ &= \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y)\end{aligned}$$

dir. Karşıt olarak, her $x, y \in G$ için $\gamma_G(xy^{-1}) \supseteq \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y)$ olsun. İlk olarak, $x = e$ alınarak

$$\gamma_G(y^{-1}) \supseteq \gamma_G(y)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\gamma_G(y) &= \gamma_G((y^{-1})^{-1})\\ &\supseteq \gamma_G(y^{-1})\end{aligned}$$

olur. Böylece $\gamma_G(y) = \gamma_G(y^{-1})$ eşitliği elde edilir. İkinci olarak,

$$\begin{aligned}\gamma_G(xy) &= \gamma_G(x(y^{-1})^{-1})\\ &\supseteq \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y^{-1})\\ &= \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y)\end{aligned}$$

dir. Böylece, γ_G, U üzerinde KBE-gruptur.

Teorem 5.1.3. γ_G, U üzerinde KBE-grup ve $x \in G$ olsun. Her $y \in G$ için $\gamma_G(xy) \supseteq \gamma_G(y)$ olması için gerek ve yeter şart $\gamma_G(x) = \gamma_G(e)$ olmasıdır.

İspat . Her $y \in G$ için $\gamma_G(xy) \supseteq \gamma_G(y)$ olsun. $y = e$ alınarak $\gamma_G(x) \supseteq \gamma_G(e)$ elde edilir. Teorem 5.1.1 den dolayı $\gamma_G(e) \supseteq \gamma_G(x)$ olduğu bilinmektedir. Buradan, $\gamma_G(x) = \gamma_G(e)$ elde edilir.

Karşıt olarak $\gamma_G(x) = \gamma_G(e)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}\gamma_G(xy) &\supseteq \gamma_G(x) \cap \gamma_G(y)\\ &= \gamma_G(e) \cap \gamma_G(y)\\ &= \gamma_G(y)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.4. γ_G ve γ_H U üzerinde KBE-grup olsun. $\gamma_G \wedge \gamma_H$ da U üzerinde KBE-gruptur.

İspat . $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G \times H$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}\gamma_{G\wedge H}((x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}) &= \gamma_{G\wedge H}(x_1{x_2}^{-1}, y_1{y_2}^{-1})\\ &= \gamma_G(x_1{x_2}^{-1}) \cap \gamma_H(y_1{y_2}^{-1})\\ &\supseteq (\gamma_G(x_1) \cap \gamma_G(x_2)) \cap (\gamma_H(y_1) \cap f_H(y_2))\\ &= (\gamma_G(x_1) \cap \gamma_H(y_1)) \cap (\gamma_G(x_2) \cap \gamma_H(y_2))\\ &= \gamma_{G\wedge H}(x_1, y_1) \cap \gamma_{G\wedge H}(x_2, y_2)\end{aligned}$$

Böylece, $\gamma_G \wedge \gamma_H$, U üzerinde KBE-gruptur.

Uyarı 5.1.1. $\gamma_G \vee \gamma_H$, U üzerinde her zaman KBE-grup değidir.

Örnek 5.1.2. Kabul edelim ki $U = S_3$ evrensel küme olsun. $G = \mathbb{Z}_4$ ve $H = \{1, -1, i, -i\}$ parametre kümesinin alt kümeleri olsun. γ_G KBE-grubu

$$\begin{aligned}\gamma_G(0) &= S_3\\ \gamma_G(1) &= \{0.8/(12), 0.5/(13), 0.3/(123)\}\\ \gamma_G(2) &= \{0.7/(1), 0.7/(13), 0.5/(123), 0.2/(132)\}\\ \gamma_G(3) &= \{0.8/(12), 0.5/(13), 0.3/(123)\}\end{aligned}$$

ve γ_H KBE-grubu

$$\begin{aligned}\gamma_H(1) &= S_3\\ \gamma_H(-1) &= \{0.7/(12), 1/(13), 0.9/(123), 0.1/(132)\}\\ \gamma_H(i) &= \{0.3/(12), 0.9/(13), 0.6/(123)\}\\ \gamma_H(-i) &= \{0.3/(12), 0.9/(13), 0.6/(123)\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $\gamma_{G\vee H}((2, -i)(1, 1)) \not\supseteq \gamma_{G\vee H}(2, -i) \cap \gamma_{G\vee H}(1, 1)$ olduğu açıktır. Böylece, $\gamma_G \vee \gamma_H$, U üzerinde KBE-grup değildir.

Tanım 5.1.3. γ_G ve γ_H U üzerinde iki KBE-grup olsun. Her $(x,y) \in G \times H$ için $\gamma_{G\times H}(x,y) = \gamma_G(x) \times \gamma_H(y)$ olmak üzere γ_G ve γ_H nın KBE-grup çarpımı denir ve $\gamma_G \times \gamma_H = \gamma_{G\times H}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.1.5. Eğer γ_G ve γ_H, U üzerinde KBE-grup ise $\gamma_G \times \gamma_H$ da $U \times U$ üzerinde KBE-gruptur.

İspat . Her $(x,y) \in G \times H$ için $\gamma_{G\times H}(x,y) = \gamma_G(x) \times \gamma_H(y)$ olmak üzere $\gamma_G \times \gamma_H = \gamma_{G\times H}$ olsun. Her $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G \times H$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{G\times H}((x_1,y_1)(x_2,y_2)^{-1}) &= \gamma_{G\times H}(x_1x_2^{-1}, y_1y_2^{-1}) \\
&= \gamma_G(x_1x_2^{-1}) \times \gamma_H(y_1y_2^{-1}) \\
&\supseteq (\gamma_G(x_1) \cap \gamma_G(x_2)) \times (\gamma_H(y_1) \cap \gamma_H(y_2)) \\
&= (\gamma_G(x_1) \times \gamma_H(y_1)) \cap (\gamma_G(x_2) \times \gamma_H(y_2)) \\
&= \gamma_{G\times H}(x_1,y_1) \cap \gamma_{G\times H}(x_2,y_2)
\end{aligned}$$

Böylece, $\gamma_G \times \gamma_H = \gamma_{G\times H}$, $U \times U$ üzerinde KBE-gruptur.

Teorem 5.1.6. Eğer γ_G ve δ_G, U üzerinde KBE-grup ise $\gamma_G \widetilde{\cap} \delta_G$ de U üzerinde KBE-gruptur.

İspat . $x, y \in G$ olsun.

$$\begin{aligned}
(\gamma_G \widetilde{\cap} \delta_G)(xy^{-1}) &= \gamma_G(xy^{-1}) \cap \delta_G(xy^{-1}) \\
&\supseteq (\gamma_G(x) \cap \gamma_G(y)) \cap (\delta_G(x) \cap \delta_G(y)) \\
&= (\gamma_G(x) \cap \delta_G(x)) \cap (\gamma_G(y) \cap \delta_G(y)) \\
&= (\gamma_G \widetilde{\cap} h_G)(x) \cap (\gamma_G \widetilde{\cap} \delta_G)(y),
\end{aligned}$$

Bundan dolayı, $\gamma_G \widetilde{\cap} \delta_G$, U üzerinde KBE-gruptur.

Uyarı 5.1.2. $\gamma_G \widetilde{\cup} \delta_G$, U üzerinde her zaman KBE-grup değidir.

Örnek 5.1.3. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}_8$ evrensel küme ve $G = V_4$, Klein'nin dörtlü grubu, parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. γ_G KBE-grup

$$\begin{aligned}
\gamma_G(1) &= \mathbb{Z}_8 \\
\gamma_G((12)(34)) &= \{0.8/0, 0.5/2, 0.6/3, 0.9/6, 0.2/7\} \\
\gamma_G((13)(24)) &= \{0.7/1, 0.5/2, 0.2/3, 0.1/5\} \\
\gamma_G((14)(23)) &= \{0.9/2, 0.6/3, 0.9/4\}
\end{aligned}$$

ve δ_G KBE-grup

$$\begin{aligned}
\delta_G(1) &= \mathbb{Z}_8 \\
\delta_G((12)(34)) &= \{0.4/1, 1/2, 0.7/3\} \\
\delta_G((13)(24)) &= \{0.6/2, 0.3/5, 0.9/6\} \\
\delta_G((14)(23)) &= \{0.5/0, 0.6/2, 0.1/7\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

$$(\gamma_G \widetilde{\cup} \delta_G)((12)(34)(13)(24)) \not\supseteq (\gamma_G \widetilde{\cup} \delta_G)((12)(34)) \cap (\gamma_G \widetilde{\cup} \delta_G)((13)(24))$$

olduğu açıktır. Böylece, $\gamma_G \widetilde{\cup} \delta_G$, U üzerinde KBE-grup değildir.

Tanım 5.1.4. H, G grubunun bir altgrubu olsun. γ_G, U üzerinde bir KBE-grup ve γ_H, γ_G nin boştan farklı bulanık esnek alt kümesi olsun. Eğer γ_H, U üzerinde bir KBE-grup ise γ_H ya U üzerinde γ_G nin KBE-altgrubu denir ve $\gamma_H \widetilde{\leq} \gamma_G$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.4. Örnek 5.1.2 de verilen γ_G KBE-grubunu ele alalım. $H = \{0, 2\}$ parametre kümesinin alt kümesi olsun. γ_H bulanık esnek kümesi

$$\begin{aligned}
\gamma_H(0) &= S_3 \\
\gamma_H(2) &= \{0.5/(13), 0.1/(132)\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. γ_H, γ_G nin KBE-altgrubudur.

Teorem 5.1.7. γ_G, U üzerinde KBE-grup olsun. γ_H ve γ_N, γ_G nin KBE-altgrubu olsun. $\gamma_H \widetilde{\cap} \gamma_N$, U üzerinde γ_G nin KBE-altgrubudur.

İspat . $x, y \in G$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma_{H \widetilde{\cap} N}(xy^{-1}) &= \gamma_H(xy^{-1}) \cap \gamma_N(xy^{-1}) \\
&\supseteq (\gamma_H(x) \cap \gamma_H(y)) \cap (\gamma_N(x) \cap \gamma_N(y)) \\
&= (\gamma_H(x) \cap \gamma_N(x)) \cap (\gamma_H(y) \cap \gamma_N(y)) \\
&= \gamma_{H \widetilde{\cap} N}(x) \cap \gamma_{H \widetilde{\cap} N}(y).
\end{aligned}$$

Böylece, $\gamma_H \widetilde{\cap} \gamma_N$, U üzerinde γ_G nin KBE-altgrubudur.

Uyarı 5.1.3. $\gamma_H \widetilde{\cup} \gamma_N$, U üzerinde her zaman γ_G nin KBE-altgrubu değildir.

Örnek 5.1.5. Kabul edelim ki $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ evrensel küme ve $G = \mathbb{Z}_6$ parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. $H = \{0, 2, 4\}$ ve $N = \{0, 3\}$, G nin alt kümeleri olsun. γ_G KBE-grubu

$$\begin{aligned}
\gamma_G(0) &= U \\
\gamma_G(1) &= \{0.3/u_2, 0.5/u_6\} \\
\gamma_G(2) &= \{0.9/u_1, 0.4/u_2, 0.3/u_3, 0.7/u_6\} \\
\gamma_G(3) &= \{0.4/u_2, 0.6/u_4, 0.1/u_5, 0.5/u_6, 0.9/u_7, 1/u_8\} \\
\gamma_G(4) &= \{0.9/u_1, 0.4/u_2, 0.3/u_3, 0.7/u_6\} \\
\gamma_G(5) &= \{0.3/u_2, 0.5/u_6\}
\end{aligned}$$

ve γ_G nin γ_H KBE-altgrubu

$$\begin{aligned}
\gamma_H(0) &= U \\
\gamma_H(2) &= \{0.2/u_2, 0.1/u_3\} \\
\gamma_H(4) &= \{0.2/u_2, 0.1/u_3\}
\end{aligned}$$

ve γ_G nin γ_N KBE-altgrubu

$$\begin{aligned}
\gamma_N(0) &= U \\
\gamma_N(3) &= \{0.4/u_4, 0.1/u_5, 0.3/u_6, 0.8/u_7\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $\gamma_{H\widetilde{\cup}N}(2+3) \not\supseteq \gamma_{H\widetilde{\cup}N}(2) \cap \gamma_{H\widetilde{\cup}N}(3)$ olduğu açıktır. $\gamma_H \widetilde{\cup} \gamma_N$, U üzerinde γ_G nin KBE-altgrubu değildir.

Tanım 5.1.5. G bir grup, $\gamma_G \in FS_E(U)$ (KBE-grup olması gerekli değil) ve γ_N, γ_G nin boştan farklı bir bulanık esnek alt kümesi olsun. Her $x, y \in G$ için $\gamma_N(xy) = \gamma_N(yx)$ ise γ_N ye U üzerinde γ_G nin abelyan bulanık esnek alt kümesi denir.

Teorem 5.1.8. $\gamma_G \in FS_E(U)$ ve γ_N, γ_G nin boştan farklı bir bulanık esnek alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine dentir:

1. Her $x, y \in G$ için $\gamma_N(xy) = \gamma_N(yx)$,

2. Her $x, y \in G$ için $\gamma_N(xyx^{-1}) = \gamma_N(y)$,

3. Her $x, y \in G$ için $\gamma_N(xyx^{-1}) \supseteq \gamma_N(y)$,

4. Her $x, y \in G$ için $\gamma_N(xyx^{-1}) \subseteq \gamma_N(y)$.

İspat . $x, y \in G$ olsun. Buradan,
1. $\Rightarrow$ 2. $\gamma_N(xyx^{-1}) = \gamma_N(x^{-1}xy) = \gamma_N(y)$.
2. $\Rightarrow$ 3. Açıktır.
3. $\Rightarrow$ 4. $\gamma_N(xyx^{-1}) \subseteq \gamma_N(x^{-1}xyx^{-1}(x^{-1})^{-1}) = \gamma_N(y)$.
4. $\Rightarrow$ 1. $\gamma_N(xy) = \gamma_N(xyxx^{-1}) \subseteq \gamma_N(yx) = \gamma_N(yxyy^{-1}) \subseteq \gamma_N(xy)$. Böylece, $\gamma_N(xy) = \gamma_N(yx)$.

Tanım 5.1.6. γ_G, U üzerinde KBE-grup ve γ_N, γ_G nin bir KBE-altgrubu olsun. γ_N, γ_G nin abelyan bulanık esnek kümesi ise γ_N ye U üzerinde γ_G nin KBE-normal altgrubu denir. $\gamma_N \widetilde{\lhd} \gamma_G$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.6. Kabul edelim ki $U = S_3$ evrensel küme olsun. $G = S_3$, simetrik grup, ve $N = A_3$, alterne grup, parametre kümesinin alt kümeleri olsun. γ_G KBE-grubu

$$\begin{aligned}
\gamma_G(1) &= S_3 \\
\gamma_G(12) &= \{0.5/(12), 0.3/(132)\} \\
\gamma_G(13) &= \{0.1/(13), 0.8/(123), 0.3/(132)\} \\
\gamma_G(23) &= \{1/(1), 0.3/(132)\} \\
\gamma_G(123) &= \{0.6/(23), 0.3/(132)\} \\
\gamma_G(132) &= \{0.6/(23), 0.3/(132)\}
\end{aligned}$$

ve γ_G nin γ_N KBE-altgrubu

$$\begin{aligned}
\gamma_N(1) &= S_3 \\
\gamma_N(123) &= \{0.5/(23), 0.1/(132)\} \\
\gamma_N(132) &= \{0.5/(23), 0.1/(132)\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. γ_N, U üzerinde γ_G nin bir KBE-normal altgrubudur.

Sonuç 5.1.1. γ_G, U üzerinde KBE-grup ve γ_N, γ_G nin KBE-altgrubu olsun. Eğer G, bir abelyan grup ise γ_N, U üzerinde γ_G nin KBE-normal altgrubudur.

5.2 Kesişimsel Bulanık Esnek Halkalar

Bu alt bölümde, bulanık kümelerde arakesit ve kapsama bağıntısı yardımıyla tanımlanan aynı zamanda bulanık küme teori, esnek küme teori ve halka teori arasında bir köprü görevi gören kesişimsel bulanık esnek halka yapısına yer verildi. Bu yeni kavram yardımıyla kesişimsel bulanık esnek ideal, kesişimsel bulanık esnek alt halka kavramları tanımlanarak ve bazı temel özellikleri incelendi.

Tanım 5.2.1. Boştan farklı bir R kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $'+'$ ve $'.'$ olsun. $\gamma_R \in FS_E(U)$ olsun. $(\gamma_R, +)$, U üzerinde bir KBE-grup ve $(\gamma_R, .)$, U üzerinde bir KBE-grupoid ise γ_R ye U üzerinde kesişimsel bulanık esnek halka denir.

Bu çalışma boyunca, kesişimsel bulanık esnek halka yerine KBE-halka ifadesi kullanılacaktır.

Örnek 5.2.1. Kabul edelim ki $U = S_3$, simetrik grup, evrensel küme ve $R = \mathbb{Z}_6$ parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. γ_R bulanık esnek kümesi

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_R(0) & = & S_3 \\
\gamma_R(1) & = & \{0.8/(12), 0.1/(23), 0.5/(123)\} \\
\gamma_R(2) & = & \{0.9/(12), 0.1/(13), 0.3/(23), 0.7/(123)\} \\
\gamma_R(3) & = & \{0.8/(12), 0.5/(123)\} \\
\gamma_R(4) & = & \{0.9/(12), 0.1/(13), 0.3/(23), 0.7/(123)\} \\
\gamma_R(5) & = & \{(0.8/(12), 0.1/(23), 0.5/(123)\}
\end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece γ_R, U üzerinde KBE-halkadır.

Teorem 5.2.1. R bir halka ve $\gamma_R \in FS_E(U)$ olsun. γ_R nin U üzerinde KBE-halka olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in R$ için

1. $\gamma_R(x - y) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)$

2. $\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)$

olmasıdır.

İspat . Kabul edelim ki γ_R, U üzerinde KBE-halka olsun. O halde

$$\gamma_R(x+y) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y) \text{ ve } \gamma_R(-x) = \gamma_R(x)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma_R(x-y) &\supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(-y) \\ &= \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte, γ_R, U üzerinde bir KBE-grupoid olduğundan

$$\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)$$

dir.

Karşıt olarak, kabul edelim ki her $x, y \in R$ için

$$\gamma_R(x-y) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y) \text{ ve } \gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)$$

olsun. $x = 0_R$ alınarak

$$\begin{aligned} \gamma_R(0_R - y) &= \gamma_R(-y) \\ &\supseteq \gamma_R(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Her $y \in R$ için

$$\begin{aligned} \gamma_R(y) &= \gamma_R(-(-y)) \\ &\supseteq \gamma_R(-y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $x \in R$ için $\gamma_R(-x) = \gamma_R(x)$ dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \gamma_R(x+y) &= \gamma_R(x-(-y)) \\ &\supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(-y) \\ &= \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı γ_R, U üzerinde KBE-halkadır.

Tanım 5.2.2. γ_R, U üzerinde KBE-halka olsun. Her $x, y \in R$ için $\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(y)$ ise γ_R ye U üzerinde KBE-sol ideal ve her $x, y \in R$ için $\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x)$ ise γ_R ye U üzerinde KBE-sağ ideal denir.

γ_R, U üzerinde hem KBE-sol ideal hem de KBE-sağ ideal ise γ_R ye U üzerinde KBE-ideal denir.

Örnek 5.2.2. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}$ evrensel küme ve $R = \mathbb{Z}_4$ parametre kümesinin bir alt kümesi olsun. γ_R esnek kümesi

$$\begin{aligned} \gamma_R(0) &= \mathbb{Z} \\ \gamma_R(1) &= \{1/0, 0.2/8, 0.5/11\} \\ \gamma_R(2) &= \{0.7/-7, 0.3/-1, 1/0, 0.3/8, 0.9/11\} \\ \gamma_R(3) &= \{1/0, 0.2/8, 0.5/11\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. γ_R, U üzerinde bir KBE-idealdir.

Teorem 5.2.2. R bir halka ve $\gamma_R \in FS_E(U)$ olsun. γ_R nin U üzerinde KBE-ideal olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in R$ için

1. $\gamma_R(x-y) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)$
2. $\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cup \gamma_R(y)$

olmasıdır.

İspat . Kabul edelim ki γ_R, U üzerinde KBE-ideal olsun. O halde

$$\gamma_R(x-y) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)$$

dir. Ayrıca

$$\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \text{ ve } \gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(y)$$

olduğundan

$$\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cup \gamma_R(y)$$

dir.

Karşıt olarak, kabul edelim ki her $x, y \in R$ için

$$\gamma_R(x-y) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y) \text{ ve } \gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cup \gamma_R(y)$$

olsun. Böylece,

$$\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cup \gamma_R(y) \supseteq \gamma_R(x)$$

ve

$$\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cup \gamma_R(y) \supseteq \gamma_R(y)$$

olduğundan

$$\gamma_R(xy) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)$$

olur. Buradan γ_R, U üzerinde KBE-idealdir.

Teorem 5.2.3. γ_R, U üzerinde KBE-halka/ideal ise her $x \in R$ için $\gamma_R(0_R) \supseteq \gamma_R(x)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki γ_R, U üzerinde KBE-halka/ideal olsun. Her $x \in R$ için,

$$\begin{aligned} \gamma_R(0_R) &= \gamma_R(x-x) \\ &\supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(x) \\ &= \gamma_R(x) \end{aligned}$$

Teorem 5.2.4. R birimli bir halka olsun. γ_R, U üzerinde KBE-ideal ise her $x \in R$ için $\gamma_R(x) \supseteq \gamma_R(1_R)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki γ_R, U üzerinde KBE-ideal olsun. Her $x \in R$ için

$$\begin{aligned} \gamma_R(x) &= \gamma_R(x1_R) \\ &\supseteq \gamma_R(1_R) \end{aligned}$$

Teorem 5.2.5. γ_R, U üzerinde KBE-halka/ideal olsun. Her $x, y \in R$ için $\gamma_R(x-y) = \gamma_R(0_R)$ ise $\gamma_R(x) = \gamma_R(y)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki her $x, y \in R$ için $\gamma_R(x-y) = \gamma_R(0_R)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma_R(x) &= \gamma_R(x-y+y) \\ &\supseteq \gamma_R(x-y) \cap \gamma_R(y) \\ &= \gamma_R(0_R) \cap \gamma_R(y) \\ &= \gamma_R(y) \end{aligned}$$

Benzer olarak, $\gamma_R(x-y) = \gamma_R(-(y-x)) = \gamma_R(y-x) = \gamma_R(0_R)$ olduğu kullanılarak $\gamma_R(y) \supseteq \gamma_R(x)$ elde edilir.

Teorem 5.2.6. Her $x \in R$ için γ_R altında görüntüleri kapsamaya göre sıralı olacak şekilde γ_R, U üzerinde KBE-halka/ideal olsun. $x, y \in R$ için $\gamma_R(y) \supset \gamma_R(x)$ ise $\gamma_R(x-y) = \gamma_R(x) = \gamma_R(y-x)$ dir.

İspat . Kabul edelim ki $x, y \in R$ için $\gamma_R(y) \supset \gamma_R(x)$ olsun. Buradan,

$$\gamma_R(x-y) \supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y) = \gamma_R(x)$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_R(x) &= \gamma_R(x-y+y) \\ &\supseteq \gamma_R(x-y) \cap \gamma_R(y). \end{aligned}$$

$x, y \in R$ için

$$\gamma_R(y) \supset \gamma_R(x) \text{ ve } \gamma_R(x) \supseteq \gamma_R(x-y) \cap \gamma_R(y)$$

olduğundan $\gamma_R(x-y) \subseteq \gamma_R(x)$ dir. Böylece $\gamma_R(x-y) = \gamma_R(x) = \gamma_R(y-x)$ olduğu görülür.

Teorem 5.2.7. γ_R ve γ_H, U üzerinde iki KBE-halka olsun. $\gamma_R \wedge \gamma_H$, U üzerinde KBE-halkadır.

İspat . $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times H$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \gamma_{R\wedge H}((x_1, y_1) - (x_2, y_2)) &= \gamma_{R\wedge H}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ &= \gamma_R(x_1 - x_2) \cap \gamma_H(y_1 - y_2) \\ &\supseteq (\gamma_R(x_1) \cap \gamma_R(x_2)) \cap (\gamma_H(y_1) \cap \gamma_H(y_2)) \\ &= (\gamma_R(x_1) \cap \gamma_H(y_1)) \cap (\gamma_R(x_2) \cap \gamma_H(y_2)) \\ &= \gamma_{R\wedge H}(x_1, y_1) \cap \gamma_{R\wedge H}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_{R\wedge H}((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= \gamma_{R\wedge H}(x_1 x_2, y_1 y_2) \\ &= \gamma_R(x_1 x_2) \cap \gamma_H(y_1 y_2) \\ &\supseteq (\gamma_R(x_1) \cap \gamma_R(x_2)) \cap (\gamma_H(y_1) \cap \gamma_H(y_2)) \\ &= (\gamma_R(x_1) \cap \gamma_H(y_1)) \cap (\gamma_R(x_2) \cap \gamma_H(y_2)) \\ &= \gamma_{R\wedge H}(x_1, y_1) \cap \gamma_{R\wedge H}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Bundan dolayı, $\gamma_R \wedge \gamma_H$, U üzerinde KBE-halkadır.

Uyarı 5.2.1. $\gamma_R \vee \gamma_H$, U üzerinde her zaman KBE-halka değildir.

Örnek 5.2.3. Kabul edelim ki $U = S_3$ evrensel küme olsun. $R = \mathbb{Z}_4$ ve

$H = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, $\mathbb{Z}_2$ terimli 2×2 matrislerin kümesi, parametre kümesinin alt kümeleri olsun. $U = S_3$ üzerinde γ_R KBE-halkası

$$\begin{aligned}
\gamma_R(0) &= S_3 \\
\gamma_R(1) &= \{0.3/(1), 0.1/(123)\} \\
\gamma_R(2) &= \{0.9/(1), 0.7/(13), 0.4/(123)\} \\
\gamma_R(3) &= \{0.3/(1), 0.1/(123)\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $U = S_3$ üzerinde γ_H KBE-halkası

$$\begin{aligned}
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= S_3 \\
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{0.5/(1), 1/(12), 0.7/(132)\} \\
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \{0.5/(1), 0.8/(13), 0.7/(123), 0.4/(132)\} \\
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{0.9/(1), 0.4/(132)\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\gamma_{R\vee H}((2, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) - (1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})) \not\supseteq \gamma_{R\vee H}(2, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) \cap \gamma_{R\vee H}(1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$$

olduğu açıktır. Bundan dolayı $\gamma_R \vee \gamma_H$, U üzerinde KBE-halka değildir.

Teorem 5.2.8. γ_R ve γ_H, U üzerinde iki KBE-ideal olsun. $\gamma_R \wedge \gamma_H$, U üzerinde KBE-idealdir.

İspat . Teorem 5.2.7 de γ_R ve γ_H, U üzerinde KBE-halka iken $\gamma_R \wedge \gamma_H$ de U üzerinde KBE-halka olduğu gösterildi. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times H$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
\gamma_{R\wedge H}((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= \gamma_{R\wedge H}(x_1x_2, y_1y_2) \\
&= \gamma_R(x_1x_2) \cap \gamma_H(y_1y_2) \\
&\supseteq \gamma_R(x_1) \cap \gamma_H(y_1) \\
&= \gamma_{R\wedge H}(x_1, y_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_{R\wedge H}((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= \gamma_{R\wedge H}(x_1x_2, y_1y_2) \\
&= \gamma_R(x_1x_2) \cap \gamma_H(y_1y_2) \\
&\supseteq \gamma_R(x_2) \cap \gamma_H(y_2) \\
&= \gamma_{R\wedge H}(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

Bundan dolayı, $\gamma_R \wedge \gamma_H$, U üzerinde KBE-idealdir.

Uyarı 5.2.2. $\gamma_R \vee \gamma_H$, U üzerinde her zaman KBE-ideal değildir.

Örnek 5.2.4. Kabul edelim ki $U = \mathbb{Z}_9$ evrensel küme olsun. $R = \mathbb{Z}_4$ ve

$H = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, $\mathbb{Z}_2$ terimli 2×2 matrisler, parametre kümesinin alt kümeleri olsun. $U = \mathbb{Z}_9$ üzerinde γ_R KBE-ideali

$$\begin{aligned}
\gamma_R(0) &= \mathbb{Z}_9 \\
\gamma_R(1) &= \{0.7/2, 0.4/7\} \\
\gamma_R(2) &= \{0.1/1, 0.8/2, 0.9/5, 0.4/7\} \\
\gamma_R(3) &= \{0.7/2, 0.4/7\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $U = \mathbb{Z}_9$ üzerinde γ_H KBE-ideali

$$\begin{aligned}
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \mathbb{Z}_9 \\
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{0.6/3, 0.8/5, 0.3/6\} \\
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \{0.6/3, 0.8/5, 0.3/6\} \\
\gamma_H\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \{0.1/0, 0.7/3, 0.8/5, 0.8/6\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\gamma_{R\vee H}((1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) - (0, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})) \not\supseteq \gamma_{R\vee H}(1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) \cap \gamma_{R\vee H}(0, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$$

olduğu açıktır. O halde $\gamma_R \vee \gamma_H$, U üzerinde KBE-ideal değildir.

Teorem 5.2.9. γ_R ve δ_R, U üzerinde iki KBE-halka olsun. $\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R$ de U üzerinde KBE-halkadır.

İspat . $x, y \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
(\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(x-y) &= \gamma_R(x-y) \cap \delta_R(x-y) \\
&\supseteq (\gamma_R(x) \cap \gamma_R(y)) \cap (\delta_R(x) \cap \delta_R(y)) \\
&= (\gamma_R(x) \cap \delta_R(x)) \cap (\gamma_R(y) \cap \delta_R(y)) \\
&= (\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(x) \cap (\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(xy) &= \gamma_R(xy) \cap \delta_R(xy) \\
&\supseteq \gamma_R(x) \cap \gamma_R(y) \cap \delta_R(x) \cap \delta_R(y) \\
&= \gamma_R(x) \cap \delta_R(x) \cap \gamma_R(y) \cap \delta_R(y) \\
&= (\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(x) \cap (\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(y)
\end{aligned}$$

Böylece $\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R$, U üzerinde KBE-halkadır.

Teorem 5.2.10. γ_R ve δ_R, U üzerinde KBE-ideal olsun. $\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R$ de U üzerinde KBE-idealdir.

İspat . Teorem 5.2.9 de $\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R$ nin U üzerinde KBE-halka olduğu gösterildi.
$x, y \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}(\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(xy) &= \gamma_R(xy) \cap \delta_R(xy) \\ &\supseteq \gamma_R(x) \cap \delta_R(x) \\ &= (\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(x)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(xy) &= \gamma_R(xy) \cap \delta_R(xy) \\ &\supseteq \gamma_R(y) \cap \delta_R(y) \\ &= (\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R)(y)\end{aligned}$$

Böylece $\gamma_R \widetilde{\cap} \delta_R$, U üzerinde KBE-idealdir.

Tanım 5.2.3. R bir halka ve H, R nin alt halkası olsun. γ_R, U üzerinde KBE-halka ve γ_H, γ_R nin boştan faklı esnek alt kümesi olsun. γ_H, U üzerinde KBE-halka ise γ_H ye U üzerinde γ_R nin KBE-alt halkası denir.

Örnek 5.2.5. Örnek 5.2.1 de verilen γ_R KBE-halkasını ele alalım. $H = \{0, 3\}$ parametre kümesinin alt kümesi olsun. $U = S_3$ üzerindeki γ_H bulanık esnek kümesi

$$\begin{aligned}\gamma_H(0) &= \{0.4/(1), 0.1/(12), 0.9/(13), 1/(132)\} \\ \gamma_H(3) &= \{0.5/(12)\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkca görüldüğü gibi γ_H, γ_R nin KBE-alt halkasıdır.

Teorem 5.2.11. γ_R, U üzerinde KBE-halka olsun. γ_H ve γ_N, U üzerinde γ_R nin KBE-alt halkası olsun. $\gamma_H \widetilde{\cap} \gamma_N$ de U üzerinde γ_R nin KBE-alt halkasıdır.

İspat . $x, y \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
\gamma_{H\widetilde{\cap}N}(x-y) &= \gamma_H(x-y) \cap \gamma_N(x-y) \\
&\supseteq (\gamma_H(x) \cap \gamma_H(y)) \cap (\gamma_N(x) \cap \gamma_N(y)) \\
&= (\gamma_H(x) \cap \gamma_N(x)) \cap (\gamma_H(y) \cap \gamma_N(y)) \\
&= \gamma_{H\widetilde{\cap}N}(x) \cap \gamma_{H\widetilde{\cap}N}(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_{H\widetilde{\cap}N}(xy) &= \gamma_H(xy) \cap \gamma_N(xy) \\
&\supseteq (\gamma_H(x) \cap \gamma_H(y)) \cap (\gamma_N(x) \cap \gamma_N(y)) \\
&= (\gamma_H(x) \cap \gamma_N(x)) \cap (\gamma_H(y) \cap \gamma_N(y)) \\
&= \gamma_{H\widetilde{\cap}N}(x) \cap \gamma_{H\widetilde{\cap}N}(y)
\end{aligned}$$

Böylece $\gamma_H \widetilde{\cap} \gamma_N$, U üzerinde γ_R nin KBE-alt halkasıdır.

Uyarı 5.2.3. $\gamma_H \widetilde{\cup} \gamma_N$, U üzerinde her zaman γ_R nin KBE-alt halkası değildir.

Örnek 5.2.6. Örnek 5.2.1 de verilen γ_R KBE-halkasını ele alalım. $H = \{0, 2, 4\}$ ve $N = \{0, 3\}$ parametre kümesinin alt kümeleri olsun. γ_R nin γ_H KBE-alt halkası

$$\begin{aligned}
\gamma_H(0) &= \{0.5/(1), 0.9/(12), 0.5/(123), 0.6/(132)\} \\
\gamma_H(2) &= \{0.7/(12), 0.1/(23)\} \\
\gamma_H(4) &= \{0.7/(12), 0.1/(23)\}
\end{aligned}$$

ve γ_R nin γ_N KBE-alt halkası

$$\begin{aligned}
\gamma_N(0) &= \{0.1/(1), 0.5/(12)\} \\
\gamma_N(3) &= \{0.7/(12)\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\gamma_{H\widetilde{\cup}N}(4-3) \not\supseteq \gamma_{H\widetilde{\cup}N}(4) \cap \gamma_{H\widetilde{\cup}N}(3)$$

olduğu açıktır. Böylece $\gamma_H \widetilde{\cup} \gamma_N$, U üzerinde γ_R nin KBE-alt halkası değildir.

6. SONUÇ

Esnek kümelerin cebirsel özellikleri ilk olarak Aktaş ve Çağman (2007) tarafından "Esnek kümeler ve esnek gruplar" isimli çalışmada ele alındı. Jun (2008) esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını ortaya atarak, onların bazı temel özeliklerini türetti. Jun ve Park (2008) esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini tartıştı. Park ve ark. (2008), esnek WS-cebirleri üzerine bir çalışma yaptı. Feng ve ark. (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkalar çalışmasını sundu ve ilgili bazı özeliklerini inceledi. Sun ve ark. (2008) esnek modüllerin tanımını verdi. Ayrıca modülleri ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak bazı temel özelikleri inşa etti. Acar ve ark. (2010) esnek küme ve esnek halkalar çalışmasını yayımladı. Zhan ve Jun (2010) bulanık kümelere dayalı esnek BL-cebirleri çalışmasını yayımladılar. İnan ve Öztürk (2011) bulanık esnek halkalar ve bulanık esnek idealler üzerine bir çalışma yaptılar. Bulanık esnek yarı gruplar ve bulanık esnek idealler Yang (2011) tarafından çalışıldı. Zhou ve ark. (2011) sezgisel bulanık esnek yarı grupları çalıştılar. Normalistik esnek grup ve normalistik esnek grup homomorfizmini konu alan çalışma Sezgin ve Atagün (2011) tarafından ele alındı. Ayrıca halka, cisim ve modüllerin esnek alt yapıları da Atagün ve Sezgin (2011) tarafından çalışıldı. Yamak ve ark. (2011) esnek hiper grupları, Feng ve ark. (2011) esnek kümeler ve esnek yaklaşımlı kümeleri, Çağman ve ark. (2011) esnek topolojiyi, Tanay ve Kandemir (2011) ise bulanık esnek kümelerin topolojiksel yapısını çalıştılar.

Bu çalışmada ise daha önce Aktaş ve Çağman (2007) tarafından tanımlanan esnek grup yapısından farklı olarak parametre kümesi grup olan bir esnek küme yardımıyla kesişimsel esnek grup yapısı tanımlandı. Bu yeni yapının cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde incelendi. Kesişimsel esnek altgrup, abelyan esnek alt küme, kesişimsel esnek normal altgrup, α-kapsam kümesi, e-kümesi, kesişimsel esnek grubun kalan sınıfları, bir esnek kümenin görüntüsü ve ters görüntüsü gibi yeni kavramlar tanımlandı. Bir kesişimsel esnek grubun α-kapsam kümesinin ve e-kümesinin bir altgrup olduğu gösterildi. Bir kesişimsel esnek grubun e-kümesi ve kalan sınıfları arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca bir kesişimsel esnek grubun görüntüsünün ve ters görüntüsünün yine bir kesişimsel esnek grup olduğu gösterildi. Daha sonra parametre kümesi halka olan bir esnek küme yardımıyla konularak kesişimsel esnek halka yapısı tanımlandı. Bu yeni yapının cebirsel özellikleri incelendi. Bu tanıma bağlı olarak kesişimsel esnek ideal, kesişimsel esnek alt halka ve parametre kümesi halka olan iki esnek kümenin toplamı, farkı, çarpımı, bir esnek kümenin negatifi gibi kavramlar tanımlandı. Son olarak parametre kümesi grup olan bir bulanık esnek küme yardımıyla kesişimsel bulanık esnek grup ve parametre kümesi halka olan bir bulanık esnek küme yardımıyla kesişimsel bulanık esnek halka yapıları tanımlandı ve cebirsel özellikleri incelendi.

Bu tez çalışmasında ele alınan konu bir çok yönde geliştirilebilir. Kesişimsel esnek halka tanımı yardımıyla kesişimsel esnek asal ideal ve kesişimsel esnek maksimal ideal tanımları yapılabilir. Bu yapıların çeşitli cebirsel özellikleri incelenerek aralarındaki ilişkiler araştırılabilir. Kesişimsel esnek modül, kesişimsel esnek cisim tanımları yapılarak çeşitli cebirsel özellikleri incelenebilir. Ayrıca kesişimsel bulanık esnek grup ve kesişimsel bulanık esnek halka yardımıyla sezgisel kesişimsel bulanık esnek grup ve sezgisel kesişimsel bulanık esnek halka yapıları tanımlanarak cebirsel özellikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F. ve Tanay, B., 2010. Soft sets and soft rings. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. ve Shabir, M., 2009. On some new operations in soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 57, 1547-1553.

Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007. Soft sets and soft groups. Information Sciences, 177(1), 2726-2735.

Aygünoğlu, A. ve Aygün, H., 2009. Introduction to fuzzy soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 58, 1279-1286.

Atagün, A. O. ve Sezgin, A., 2011. Soft substructures of rings, fields and modules. Computers and Mathematics with Applications, 61, 592-601.

Babitha, K. V. ve Sunil, J. J., 2010. Soft set relations and functions. Computers and Mathematics with Applications, 60, 1840-1849.

Chen, D., Tsang, E.C.C. ve Yeung, D.S., 2003. Some notes on the parameterization reduction of soft sets. International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 3, 1442-1445.

Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S. ve Wang, X., 2005. The parameterization reduction of soft sets and its applications. Computers and Mathematics with Applications, 49(1), 757-763.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010. Soft matrix theory and its decision making. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3308-3314.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010. Soft set theory and uni-int decision making. European Journal of Operational Research, 207, 848-855.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., 2010. Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1(1), 21-35.

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F., 2011. Fuzzy soft set theory and its applications. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8(3), 137-147.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., 2011. FP-soft set theory and its applications. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2(2), 219-226.

Çağman, N., Karataş, S. ve Enginoğlu, S., 2011. Soft topology. Computers and Mathematics with Applications, 62, 351-358.

Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X., 2008. Soft semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56(10), 2621-2628.

Feng, F., Jun, Y. B., Liu, X. ve Li, L., 2010. An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234, 10-20.

Feng, F., Li, Y. ve Leoreanu-Fotea, V., 2010. Application of level soft sets in decision making based on interval-valued fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 60, 1756-1767.

Feng, F., Liu, X. Leoreanu-Fotea, V. ve Jun, Y. B., 2011. Soft sets and soft rough sets. Information Sciences, 181, 1125-1137.

Fraleigh, J. B., 1994. A First Course in Abstract Algebra. Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Gong, K., Xiao, Z. ve Zhang, X., 2010. The bijective soft set with its operations. Computers and Mathematics with Applications, 60, 2270-2278.

Hungerford, T. W., 1974. Algebra. Springer, New York.

İnan, E. ve Öztürk, M. A., 2011. Fuzzy soft rings and fuzzy soft ideals. Neural Computing and Applications,

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Liu, H. ve Tang, J., 2010. Interval valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties. Computers and Mathematics with Applications, 60, 906-918.

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. ve Tang, S., 2010. Extending soft sets with description logics. Computers and Mathematics with Applications, 59, 2087-2096.

Jun, Y. B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 56(1), 1408-1413.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Park, C. H., 2008. Soft set theory applied to commutative ideals in BCK-algebras. Journal of Applied Mathematics and Informatics, 26(3-4), 707-720.

Jun, Y. B. ve Park, C. H., 2008. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. Information Sciences, 178(1) 2466-2475.

Jun, Y. B. ve Kim, H. S., 2009. Pseudo d-algebras. Information Sciences, 179, 1751-1759.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Park, C. H., 2009. Soft set theory applied to ideals in d-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 57, 367-378.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Zhan, J., 2009. Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 58, 2060-2068.

Jun, Y. B. ve Park, C. H., 2009. Applications of soft sets in Hilbert algebras. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6(2), 75-86.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Park, C. H., 2010. Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3180-3192.

Klir, G. J. ve Folger, T. A., 1988. Fuzzy sets, uncertainty and information. State University, New York.

Kong, Z., Gao, L., Wang, L. ve Li, S., 2008. The normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algoritm. Computers and Mathematics with Applications, 56(1), 3029-3037.

Kong, Z., Gao, L. ve Wang, L., 2009. Comment on "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems". Journal of Computational and Applied Mathematics, 223, 540-542.

Kovkov, D. V., Kolbanov, V. M. ve Molodtsov, D. A., 2007. Soft Sets Theory-Based Optimization. Journal of Computer and Systems Sciences International, 46(6), 872-880.

Liu, W., 1982. Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. Fuzzy Sets and Systems, 8, 133-139.

Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy, A.R., 2001. Fuzzy soft sets. Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3), 589-602.

Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas, R., 2002. An application of soft sets in a decision making problem. Computers and Mathematics with Applications, 44(1), 1077-1083.

Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A.R., 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45(1), 555-562.

Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas, R., 2004. On Intuitionistic Fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math, 12(3) 669-683.

Majumdar, P. ve Samanta, S. K., 2008. Similarity measure of soft sets. New Mathematics and Natural Computation, 4(1), 1-12.

Majumdar, P. ve Samanta, S. K., 2010. Generalised fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 59, 1425-1432.

Majumdar, P. ve Samanta, S. K., 2010. On soft mappings. Computers and Mathematics with Applications, 60, 2666-2672.

Molodtsov, D., 1999. Soft set theory-first results. Computers and Mathematics with Applications, 37(1), 19-31.

Molodtsov, D., 2004. The Theory of Soft Sets (in Russian). URSS Publishers, Moscow.

Molodtsov, D. A., Leonov V. Yu. ve Kovkov D. V., 2006. Soft Sets Technique and Its Application. Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1(1), 8-39.

Mordeson, J. N. ve Malik, D. S., 1998. Fuzzy Commutative Algebra. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London.

Mordeson, J. N., Bhutani, K. R. ve Rosenfeld, A., 2005. Fuzzy Group Theory. Springer, New York.

Mushrif, M.M., Sengupta, S. ve Ray, A.K., 2006. Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. Lecture Notes In Computer Science, 3851 246-254.

Nanda, S., 1986. Fuzzy fields and fuzzy linear spaces. Fuzzy Sets and Systems, 19, 89-94.

Park, C.H., Jun, Y.B. ve Öztürk, M.A., 2008. Soft WS-algebras. Commun. Korean Math. Soc, 23(3), 313-324.

Pawlak, Z., 1982. Rough sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1), 341-356.

Pei, D. ve Miao, D., 2005. From Soft Sets to Information Systems. In: Proceedings of Granular Computing (Eds: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B.Zhang) IEEE, 2, 617-621.

Qin, K. ve Hong, Z., 2010. On soft equality. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234, 1347-1355.

Rosenfeld, A., 1971. Fuzzy groups. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35, 512-517.

Roy, A.R. ve Maji, P.K., 2007. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 203(1), 412-418.

Sezgin, A. ve Atagün, A. O., 2011. Soft groups and normalistic soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 62, 685-698.

Sun, Q-M., Zhang, Z-L. ve Liu, J., 2008. Soft Sets and Soft Modules. (In Guoyin Wang, Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse, Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu Yao Eds.): Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT, Proceedings, Springer, 403-409.

Tanay, B. ve Kandemir, M. B., 2011. Topological structure of fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 61, 2952-2957.

Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B. ve Yang, X., 2003. Research on synthetically evaluating method for business competitive capacity based on soft set. Statistical Research, 52-54.

Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. ve Ye, S., 2005. Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J. Chen), IEEE, 2, 1104-1106.

Xiao, Z., Gong, K. ve Zou, Y., 2009. A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 228, 326-333.

Xiao, Z., Gong, K., Xia, S. ve Zou, Y., 2010. Exclusive disjunctive soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 59, 2128-2137.

Xu, W., Ma, J., Wang, S. ve Hao, G., 2010. Vague soft sets and their properties. Computers and Mathematics with Applications, 59, 787-794.

Yamak, S., Kazancı, O. ve Davvaz, B., 2011. Soft hyperstructure. Computers and Mathematics with Applications, 62, 797-803.

Yang, H., Qu, C., Li ve N-C., 2004. The induction and decision analysis of clinical diagnosis based on rough sets and soft sets. (Fangzhi Gaoxiao Jichukexue Xuebao Ed.), September, 17(3), 208-212.

Yang, X., Yu, D.,Yang, J. ve Wu, C., 2007. Generalization of Soft Set Theory From Crisp to Fuzzy Case. In Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, Advances in Soft Computing 40, Springer, 345-355.

Yang, X., Lin, T. Y., Yang, J., Li, Y. ve Yu, D., 2009. Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. Computers and Mathematics with Applications, 58, 521-527.

Yang, C., 2011. Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals. Computers and Mathematics with Applications, 61, 255-261.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. Inform. and Control, 8(1), 338-353.

Zhan, J. ve Jun, Y. B., 2010. Soft BL-algebras based on fuzzy sets. Computers and Mathematics with Applications, 59, 2037-2046.

Zou, Y. ve Xiao, Z., 2008. Data analysis approaches of soft sets under incomplete information. Knowledge-Based Systems, 21(1), 941-945.

Zhou, J., Li, Y., Yin ve Y., 2011. Intuitionistic fuzzy soft semigroups. Mathematica Aeterna, 1(3), 173-183.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Filiz ÇITAK

Doğum Tarihi : 13.08.1980 Sivas

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 0 356 2521616

E-posta : filiz.citak@gop.edu.tr

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	**Mezuniyet Tarihi**
Doktora	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2011
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2006
Lisans	Selçuk Üniversitesi	2002
Lise	Cumhuriyet Süper Lisesi	1998