T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK METRİK UZAYLAR

Güzide ŞENEL

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN
Yrd. Doç. Dr. S. KARATAŞ (2. dan.)
2013

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ESNEK METRİK UZAYLAR

Güzide ŞENEL

TOKAT
2013

Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN danışmanlığında, Güzide ŞENEL tarafından hazırlanan bu çalışma 11/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU İmza:

Üye : Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN İmza:

Üye : Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Adem EROĞLU İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN

Enstitü Müdürü

11/06/2013

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Güzide ŞENEL

ÖZET

Doktora Tezi

ESNEK METRİK UZAYLAR

Güzide ŞENEL

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN
İkinci Danışman : Yrd. Doç. Dr. S. KARATAŞ

Bu tez çalışmasında, metrik uzay teorisine, esnek kümeler yardımıyla yeni bir yaklaşım getirilmiştir. Esnek topolojik uzaylarda tanımlanamayan bazı kavramlar esnek metrik uzayda tanımlanarak yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bunun için ilk olarak, klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilmesine olanak sağlayan, Molodtsov'un esnek küme teorisi tanıtıldı. Sonra, bir esnek küme üzerinde tanımlanan esnek topoloji kavramı ve bununla ilgili temel tanım ve teormeler verildi. Daha sonra, esnek metrik uzayların topolojik analizi yapılarak esnek açık ve esnek kapalı yuvar, esnek sürekli ve esnek düzgün sürekli fonksiyonlar, esnek homeomorfizm dönüşümü tanımlandı ve aralarındaki ilişki araştırıldı.

2013, 93 sayfa

Anahtar kelimeler: Esnek küme, Esnek nokta, Esnek fonksiyon, Esnek topoloji, Esnek açık küme, Esnek kapalı küme, Esnek metrik, Esnek açık yuvar, Esnek kapalı yuvar, Esnek küre, Esnek sınırlı küme, Esnek sınırsız küme, Esnek süreklilik, Esnek düzgün süreklilik, Esnek homeomorfizm.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOFT METRIC SPACES

Güzide ŞENEL

Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN
Second Supervisor : Assist. Prof. Dr. Serkan KARATAŞ

In this thesis, a new approach to soft metric spaces theory is presented with soft sets. New conclusions are obtained by defining some new concepts that can not be defined in soft topological spaces. For this aim, first of all, Molodtsov's soft set theory providing to point out the uncertain concepts that are not described by classic logic is presented. Then, by defined soft topology on a soft set, its basic concepts and properties are given. Moreover, by making the topological analysis of soft metric space, soft open and soft close sphere, soft continuous and soft uniform continuous functions, soft homeomorphism introduced and the relationships between each others are searched.

2013, 93 pages

Key words: Soft set, Soft point, Soft function, Soft topology, Soft open set, Soft closed set, Soft metric, Soft open ball, Soft closed ball, Soft sphere, Soft bounded set, Soft unbounded set, Soft continuous function, Soft uniformly continuous function, Soft homeomorphism.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasını hazırlamamda bana destek olan, bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım, saygıdeğer hocam Doç. Dr. Naim ÇAĞMAN'a ve sayın ikinci danışmanım Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ'a, fikirlerini paylaşıp bana yol gösteren, değerli hocam Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU'na ve doktora eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu yoğun süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan, zamanımızdan çalıp mesleğimle geçirdiğim anları anlayışla karşılayan, en büyük destekçim, biricik eşime; her zaman bana güvenen ve bu günlere gelmemi sağlayan canım annem, babam ve ablalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez, 2211 kodlu TÜBİTAK Yurtiçi Doktora Burs Programı tarafından finansal olarak desteklenmiştir. TÜBİTAK'a verdiği finansal destekten dolayı teşekkür ederim.

Güzide ŞENEL
Haziran 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
U	Nesneler kümesi
E	Parametreler kümesi
$\mathcal{P}(U)$	U'nun kuvvet kümesi
f_X	$X \subseteq E$ için esnek küme
$S_E(U)$	U üzerinde E ile tanımlanan tüm esnek kümelerin kümesi
Φ	Esnek boş küme
$\tilde{E}$	Esnek evrensel küme
$f\tilde{\subseteq}g$	g, f'yi esnek kapsar
$f\tilde{\cap}g$	f ve g esnek kümelerinin esnek kesişimi
$f\tilde{\cup}g$	f ve g esnek kümelerinin esnek birleşimi
$f\tilde{\setminus}g$	f esnek fark g
$f^{\tilde{c}}$	f esnek kümesinin esnek tümleyeni
$\tilde{\mathcal{P}}(f)$	f'nin esnek kuvvet kümesi
φ_ψ	Esnek fonksiyon
e_f	Esnek nokta
$\tilde{\in}$	Esnek aitlik
$\tilde{\tau}$	Esnek topoloji
$(f_X, \tilde{\tau})$	Esnek topolojik uzay
$\tilde{\tau}^0$	Esnek ayrık olmayan topoloji
$\tilde{\tau}^1$	Esnek ayrık topoloji
$\tilde{\mathcal{B}}$	Esnek baz
$\tilde{\tau}_g$	g esnek kümesine göre alt uzay topolojisi
$\tilde{F}_g$	$\tilde{\tau}_g$ esnek alt uzayının bütün esnek kapalı alt kümeler ailesi
$\tilde{\mathcal{B}}_g$	g alt uzayının esnek bazı
$\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$	$(f_X, \tilde{d})$ esnek metrik uzayının bütün esnek açık alt kümeler ailesi
$\tilde{F}_{\tilde{d}}$	$(f_X, \tilde{d})$ esnek metrik uzayının bütün esnek kapalı alt kümeler ailesi

f°	f'nıin esnek içi
$\overline{f}$	f'nin esnek kapanışı
$\tilde{d}$	Esnek metrik
$(f_X, \tilde{d})$	Esnek metrik uzay
$\tilde{B}(e_f, \epsilon)$	e_f merkezli ϵ yarıçaplı esnek açık yuvar
$\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$	$\tilde{d}$ esnek metriği ile üretilen esnek topoloji
$\tilde{d}(e_f, g)$	e_f esnek noktasının g esnek kümesine uzaklığı
$\tilde{d}(g_1, g_2)$	g_1 esnek kümesinin g_2 esnek kümesine uzaklığı

1. GİRİŞ

Doğruluk değeri göreceli olan kavramların matematiksel olarak modellenmek istenmesi, belirsizlik içeren problemlere ilgiyi artırmıştır. Bu problemleri klasik Aristo mantığı ile modellemek her zaman kolay değildir. Çünkü klasik matematiksel yaklaşımda, bir varlık ya bir kümenin elemanıdır ya da değildir. Günlük hayatta sıkça kullanılan güzel ev, soğuk hava, mutlu insan, vb. ifadeler kişiden kişiye göre değiştiği için kesinlik içermezler.

Belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesi amacıyla her geçen gün yeni teoriler ortaya atılmaktadır. Bilinen en önemli teorilerden bazıları; bulanık kümeler (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler (Pawlak, 1982) ve esnek kümelerdir (Molodtsov, 1999).

Esnek küme teorisi, Molodtsov tarafından, belirsizlikle başa çıkmak için matematiksel bir araç olarak ortaya atılmıştır. Bu teori kullanılarak, karar verme problemleri, bilgi sistemleri, cebirsel yapılar, optimasyon teorisi ve matematiksel analiz gibi belirsizlik içeren birçok alanda çalışmalar yapılmıştır. Günümüzde de ekonomi, sosyal bilimler, mühendislik gibi pekçok alanda esnek küme teorisinin çeşitli uygulamaları çalışılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilmesine olanak sağlayan, Molodtsov'un esnek küme teorisi tanıtıldıktan sonra, bir esnek küme üzerinde tanımlanan esnek topoloji kavramı ve bununla ilgili temel tanım ve teormeler verildi. Daha sonra, esnek metrik uzayların topolojik analizi yapılarak esnek açık ve esnek kapalı yuvar, esnek sürekli ve esnek düzgün sürekli fonksiyonlar, esnek homeomorfizm dönüşümü tanımlandı ve aralarındaki ilişki araştırıldı.

1.1 Literatür Özetleri

Belirsiz tipteki problemlerin çözümü için, aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirildi. Bu teoriler arasında, en göze çarpanlardan birisi, Zadeh (1965)'in bulanık kümeler teorisidir. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanabilir. Herbir özel durumda üyelik fonksiyonu kurulduğu için son derece bireyseldir. Bu nedenle, üyelik fonksiyonu inşaasından bağımsız bir küme teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu ihtiyacı karşılamak amacıyla esnek küme teorisi, Molodtsov (1999) tarafından belirsizlikle başa çıkmak için bir matematiksel araç olarak ortaya atıldı. Esnek küme teorisi, bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorilerinin aksine reel değerli bir fonksiyon yerine bir seçim fonksiyonuyla belirsizliği ortadan kaldırmayı amaçlamaktadır. Molodtsov (1999, 2004) sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, yöneylem araştırması, Rienmann integrali, Peron integrali, olasılık teorisi, ölçüm teorisi gibi bir çok alana esnek küme teorisini başarıyla uygulamıştır.

Son zamanlarda matematiğin birçok alanında esnek küme teorisi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Maji ve ark. (2002, 2003), Pawlak (1982)'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümenin uygulamasını sundu ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Xiao ve ark. (2003) esnek küme temelli hesaplama metodu üzerine bir çalışma yaptı. Chen ve ark. (2003) esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine bir çalışma yaptı. Maji ve ark. (2004) bulanık esnek kümeler üzerinde yaptıkları çalışmadan sonra sezgisel bulanık esnek küme teorisini ortaya attılar. Mushrif ve ark. (2006), esnek küme temelli sınıflandırmalar başlıklı bir makale yayımladı. Molodtsov ve ark. (2006) tarafından, esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramlar tanıttı. Yang ve ark. (2009) aralık değerli bulanık esnek küme kavramını tanımlayarak bu yeni kümenin kesişim, birleşim ve De'morgan gibi temel küme işlemi özelliklerinin sağladığını gösterdi. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek küme kavramını tanımladı ve bazı özellikleri inceledi. Ayrıca bulanık esnek fonksiyon ve bulanık esnek homomorfizma tanımlarına yer verdi.

Esnek kümelerin cebirsel özellikleri de çalışılmaktadır. Aktaş ve Çağman (2007) esnek grupların yeni bir tanımını vererek, bazı temel özelliklerini elde etti. Sonra, Feng ve ark. (2008) esnek yarı halkayı tanımlayıp temel özelliklerini incelediler. Jun (2008) esnek BKC/BCI cebirlerini tanımladılar. Yine Jun ve ark. (2008) BCK cebirlerindeki değişmeli ideallere esnek küme teorisini uyguladılar. Daha sonra Park ve ark. (2008) esnek WS-cebirlerini incelediler. Jun ve Park (2008) BCK/BCI cebirlerindeki ideallere esnek küme teorisini uyguladılar. Sun ve ark. (2008) esnek modüller üzerine bir çalışma yaptılar. Jun ve Kim (2009) Pseudo d-cebirlerini tanımladılar. Jun ve ark. (2009) esnek küme teorisini d-cebirlerine uyguladılar. Jun ve ark. (2009) BCK-cebirlerinin esnek p-ideallerini incelediler. Jun ve Park (2009) Hilbert cebirlerinde esnek kümelerin uygulamalarını araştırdılar. Jun ve ark. (2010) bulanık esnek küme teorisini BCK/BCI-cebirlerine uyguladılar. Acar ve Tanay (2010) esnek halka kavramını tanımladılar. Zhan ve Jun (2010) bulanık kümelere dayalı olarak esnek BL-cebirlerini tanımladılar. Atagün ve Sezgin (2011) cisimlerin, halkaların ve modüllerin esnek yapıları üzerinde çalıştılar. İnan ve Öztürk (2011) bulanık esnek halka ve bulanık esnek modülü tanımladılar. Sezgin ve Atagün (2011) esnek ve normal esnek gruplar üzerine bir çalışma yaptılar. Yamak ve ark. (2011) hiper yapılar üzerine bir çalışma yaptılar. Yang (2011) bulanık esnek yarıgrup ve bulanık esnek ideal kavramlarını literatüre kazandırdı. Zhou ve ark. (2011) sezgisel bulanık esnek yarıgrupları tanımladılar.

Maji ve ark. (2001), bulanık esnek kümeleri tanımladı. Aktaş ve Çağman (2007) esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karsılaştırdı. Daha sonra Çağman ve Enginoğlu (2010), tümleyen ve fark işleminde ortaya çıkan bazı problemler nedeniyle esnek küme işlemlerini yeniden tanımladılar. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek küme kavramını tanımladı ve bazı özellikleri inceledi. Ayrıca bulanık esnek fonksiyon ve bulanık esnek homomorfizma tanımlarına yer verdi. Yang ve ark. (2007) bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yoluyla karar verme problemini analiz etti. Majumdar ve Samanta (2008) bulanık esnek kümelerde benzerlik ölçümünü ortaya attı. Kong ve ark. (2008) ile Xiao ve ark. (2009), bulanık esnek küme üzerine dayalı bazı yaklaşımları konu alan bir çalışma yaptı. Kong ve ark.(2008) ile Xiao ve ark. (2009), bulanık esnek küme üzerine dayalı bazı karar verme yaklaşımlarıyla ilgili bir çalışma yaptı. Majumdar ve Samanta (2010) genelleştirilmiş bulanık esnek küme tanımını yaptılar ve bazı özelliklerini incelediler. Bahsi geçen çalışmada kara verme probleminde ve tıbbi tanı probleminde genelleştirilmiş bulanık esnek kümelerin bir uygulamasını sundular.

Esnek küme teorisinin uygulamalarıyla ilgili; Maji ve ark. (2001, 2002) bulanık esnek küme kavramını ortaya atıp bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını geliştirdi. Yang ve ark. (2004), esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi ve indüksiyon başlıklı bir makale yayımladılar. Chen ve ark. (2005) ile Kong ve ark. (2008) Xiao ve ark. (2005) ile Pei ve Miao (2005), esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar yaptılar. Daha sonra bu kavramlar Kovkov ve ark. (2007) tarafından optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uygulandı. Aralık değerli sezgisel bulanık esnek küme kavramı Jiang ve ark. (2010) tarafından tanıtıldı ve bir karar verme problemine uygulandı. Feng ve ark. (2010) karar vermeye dayalı bulanık esnek kümeye ayarlanabilir yaklaşım tanımını verip bir uygulama sundular. Ayrıca Feng ve ark. (2010) aralık değerli bulanık esnek kümeye dayalı karar verme için seviye esnek kümelerinin kullanılmasını önerdiler ve uygulamasına yer verdiler. Roy ve Maji (2007) bir karar verme probleminde bulanık esnek kümeleri kullandı ve yeni bir yöntem önerdi.

Çağman ve Enginoğlu (2010), esnek kümeler yardımıyla esnek matrisi tanımlayıp bir optimum değer bulma probleminde karar verme algoritması geliştirdiler. Daha sonra Çağman ve ark. (2010) bulanık parametreli bulanık esnek kümeleri ve işlemlerini tanımladılar ve bu kavrama dayalı bir karar verme metodu geliştirdiler. Feng ve ark. (2010) aralık değerli bulanık esnek kümelere dayalı olarak seviye esnek kümelerinin karar vermede uygulanmasını verdiler. Kharal ve Ahmad (2011), esnek küme sınıfları üzerinde tanımlı esnek fonksiyon kavramını ortaya atıp temel özelliklerini incelediler ve esnek fonksiyonlar yardımıyla bir karar verme metodu önerdiler. Çağman ve Enginoğlu (2011), bulanık esnek küme teorisi ve uygulamaları ve FP esnek küme teorisi ve uygulamaları başlıklı iki makale yayımladılar.

Molodtsov ve ark. (2006) tarafından, esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramlar formüle edildi. Bu analiz, Kovkov ve ark. (2007) tarafından optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uygulandı.

Bulanık küme teorisinin ortaya atılmasından sonra Cahng (1968) tarafından bulanık topolojik uzaylar tanımlandı. Daha sonra Lowen (1976) bulanık topolojik uzaylar ve bulanık kompaktlık kavramını geliştirdi. Çoker (1996) sezgisel bulanık esnek topolojik uzaylara giriş adlı çalışmasıyla sezgisel topoloji kavramını ilk kez ortaya atmış oldu. Esnek kümelerin tanımlanmasından sonra Çağman ve ark. (2011) esnek topoloji kavramını tanımlayıp temel özelliklerini incelediler. Sonra Shabir ve Naz (2011) tarafından esnek topolojik yapılar üzerine bir çalışma yayımlandı. Daha sonra Aygünoğlu ve Aygün (2011) esnek topolojik uzaylar üzerine bir makale yayımladılar. Ardından Zorlutuna ve ark. (2011) ve Min (2011) esnek topolojik uzaylar üzerine temel bazı sonuçlar ortaya koymuşlardır. Ayrıca Roy ve Samanta (2011) ve Tanay ve Kandemir (2011) bulanık esnek topolojik uzaylar ve bulanık esnek kümelerin topolojik yapısı üzerine çalışmalarını yayımladılar.

Günümüzde de, esnek küme teorisi ve onun uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar hızla gelişmektedir.

1.2 Materyal ve Metot

Metrik uzaylar ilk defa Frechet (1906) tarafından doktora tezi çalışması ile tanıtılmıştır. Metrik uzayların topolojisi, fonksiyonel analizin temelini oluşturur ve reel eksen üzerinde geçerli olan sonuçları genelleştirir. Klasik analizin birçok dalını birleştirdiği için önemli bir teori olarak bilinmektedir.

Bu tez çalışmasında, metrik uzay teorisine, esnek kümeler yardımıyla yeni bir yaklaşım getirilmiştir. Esnek topolojik uzaylarda tanımlanamayan bazı kavramlar esnek metrik uzayda tanımlanarak yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasına başlarken, esnek kümeler ile ilgili Molodtsov (1999, 2004), Maji ve ark. (2001, 2002, 2003), Maji ve ark. (2004), Yang ve ark. (2004), Chen ve ark. (2005), Kong ve ark. (2008), Xiao ve ark. (2005), Pei ve Miao (2005), Mushrif ve ark. (2006), Kovkov ve ark. (2007), Yang ve ark.(2009), Aygünoğlu ve Aygün (2009), Feng ve ark. (2010), Feng ve ark. (2010), Jiang ve ark. (2010), Aktaş ve Çağman (2007), Roy ve Maji (2007), Yang ve ark. (2007), Majumdar ve Samanta (2008, 2010), Kong ve ark.(2008), Xiao ve ark. (2009), Çağman ve Enginoğlu (2010, 2011), Babitha ve Sunil (2010), Gong ve ark. (2010), Feng ve ark. (2010, 2011), Qin ve Hong (2010), Jiang ve ark. (2010), Feng ve ark. (2011) ve Kharal ve Ahmad (2011) gözden geçirildi. Daha sonra esnek topoloji ile ilgili Shabir ve Naz (2011), Aygünoğlu ve Aygün (2011), Zorlutuna ve ark. (2011), Min (2011), Roy ve Samanta (2011) ve Tanay ve Kandemir (2011) kaynakları incelenmiştir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde literatür özellikleri, meteryal ve method açıklanmıştır. İkinci bölümünde esnek küme teorisi ile ilgili temel kavramlar ve esnek işlemler üzerine yapılan teorik çalışmalar, sonraki bölümlerde verilen yeni tanımların daha iyi anlaşılması için detaylı bir şekilde verilmiştir.

Üçüncü bölümde Zorlutuna ve ark. (2011) tarafından tanımlanan esnek nokta ve esnek aitlik kavramları verilmiştir. Ayrıca, parametre kümesi ve nesne kümesi sonlu olan bir esnek kümenin esnek nokta sayısı berlirlenmiş ve esnek kümenin esnek noktalarının esnek birleşimi olarak yazılabildiği gösterilmiştir. Esnek nokta matris formunda yazılarak, bazı eşitlik ve eşitsizlikler elde edilmiştir. Klasik küme teorisinde eşitsizlik olan bazı sonuçların, esnek küme teorisinde eşitlik olarak elde edildiği gösterilmiştir. Bu sonuçlar tezin, "Esnek Metrik Uzaylar" bölümünde kullanılmıştır.

Dördüncü bölümde, bir esnek küme üzerinde tanımlanan esnek topoloji tanıtılmıştır. Esnek açık küme ve esnek kapalı kümelerin tanım ve teoremlerine yer verilerek özellikleri incelenmiştir. Sıralama bağıntısı tanımlanarak esnek topolojiler karşılaştırılmıştır. Aynı esnek küme üzerinde tanımlı iki esnek topolojik uzayın kesişimlerinin de yine aynı esnek küme üzerinde bir esnek topoloji olduğu gösterilmiştir. Fakat, iki esnek topolojik uzayın birleşimlerinin yine aynı esnek küme üzerinde bir esnek topoloji olmak zorunda olmadığı gösterilmiştir. Tanımlanmış olan esnek baz kavramının temel özellikleri incelenerek, esnek topolojik uzaylarla bazları arasındaki ilişki gösterilmiştir. Bölüm 4.3'de tanımlanmış olan esnek alt uzay topolojisi ile ilgili özellikler tanıtılmıştır. Bir esnek kümenin esnek kapanışı ve esnek içi tanımlanıp temel özellikleri araştırılmıştır. Aralarındaki ilişki teoremlerle ispatlanmıştır. Esnek alt uzay ile esnek evrensel uzay arasındaki ilişkiler teorem ve örneklerle gösterilmiştir. Ayrıca bir esnek topolojik alt uzayın, esnek alt uzayı tanımlanmıştır. Bu uzayın, diğer iki üst uzayları ile ilişkisi araştırılmıştır. Bu konu üzerine, tez içerisinden, "Soft Topological Subspaces" başlıklı bir makale hazırlanmıştır. Bölüm 4.4'de ise, tanımlanmış olan esnek için ve esnek kapanışın temel özelliklerine yer verilmiştir. 4.5.bölümde, esnek açık kümelerle tanımlanan, esnek sürekli fonksiyon, esnek kapalı kümeler yardımı ile tanımlanmıştır. Ayrıca, esnek baz ve esnek alt baz yardımıyla, esnek sürekliliğin yeni bir karaktarizasyonu verilmiştir. Bölüm 4.6'da çeşitli esnek topolojik yapılar üzerinde esnek sürekli fonksiyonların özellikleri incelenmiştir. Tanım ve değer kümeleri değiştirilerek esnek sürekli fonksiyon özelliklerinin korunup korunmadığı araştırılmıştır. Bölüm 4.7'de iki esnek topolojik uzay arasında tanımlanan esnek açık, esnek kapalı ve esnek homeomorfizm dönüşümlerinin temel özelliklerine yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, esnek nokta ve esnek aitlik kullanılarak tanımlanan esnek metrik ve esnek metrik uzayın temel özelikleri açıklanmıştır. Ayrıca, esnek metrik örnekleri verilip, esnek metrik uzayların uygulamaları sunulmuştur. Bölüm 5.2'de tanımlanan esnek açık yuvarın temel özellikleri açıklanmıştır. Esnek kapalı yuvar ve esnek küre kavramları tanımlanmıştır. Esnek açık yuvar ve esnek kapalı yuvar arasındaki ilişki teoremlerle verilmiştir. Ayrıca, esnek açık yuvarlar yardımıyla, esnek metrik uzayların esnek Hausdorff özelliği tanımlanmıştır. Tanımlanan esnek sınırlı ve esnek sınırsız kümelerle ilgili örnekler verilmiştir. Ardından, esnek metrik uzayda bir esnek kümenin çapı, bir esnek noktanın esnek kümeye uzaklığı ve iki esnek küme arasındaki uzaklığın temel özelliklerine yer verilmiştir.

Bölüm 5.3'de esnek metrik uzayların esnek topolojik analizi yapılmıştır. Tanımlanan esnek açık yuvarın, esnek metrik içinde esnek açık küme olduğu gösterilmiştir. Esnek açık kümelerin esnek birleşim ve esnek kesişiminin de esnek açık olduğu ispatlanmıştır. Buradan her esnek metrik uzayın, üzerinde tanımlı esnek metriğe göre bir esnek topolojik uzay olduğu gösterilmiştir. Esnek metrik topolojisi tanımlanarak, esnek açık yuvar ve esnek kapalı yuvarların özellikleri incelenmiştir. Esnek denk metrikler tanımlanarak, esnek denkliğin, varlıkların, esnek topolojik özellikleri koruyup, esnek metrik özellikleri korumak zorunda olmadığı gösterilmiştir. Son olarak, esnek izometri tanımlanmıştır.

5.4.1'de esnek topolojik uzayda, esnek açık kümeler yardımıyla tanımlanabilen esnek süreklilik, ilk kez esnek nokta yardımıyla, tanım ve değer kümesi esnek metrik uzaylar içinde olan esnek fonksiyonlarla tanımlanmıştır. Esnek açık ve esnek kapalı kümeler yardımıyla da esnek sürekliliğin ayrı bir karaktarizasyonu verilmiştir. Çeşitli teorem ve sonuçlarla, esnek sürekli fonksiyon özellikleri incelenmiştir.

Bölüm 5.4.2'de düzgün süreklilik kavramı tanımlanmıştır. Neden bir esnek noktada değil, bir esnek küme üzerinde esnek düzgün süreklilikten bahsedildiği detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca, tanımları benzer görünse de, esnek süreklilik ile esnek düzgün süreklilik arasındaki farklılıklar araştırılmıştır. Esnek düzgün sürekli her fonksiyonun esnek sürekli olduğu fakat tersinin genellikle doğru olmadığı örnekle gösterilmiştir. Esnek çap yarımıyla, esnek düzgün sürekliliğin yeni bir karaktarizasyonu verilmiştir. Esnek izometri, esnek birim ve esnek sabit fonksiyonun esnek düzgün sürekli olduğu gösterilmiştir.

5.4.3'de, esnek metrik uzaylar arasında, esnek homeomorfizm tanımlanarak çeşitli esnek homeomorfizm örnekleri verilmiştir. Esnek denk metriklerin, varlıkların esnek topolojik özelliklerini koruyan esnek metrikler olduğu gösterilmiştir. Esnek açık ve esnek kapalı kümeler yardımıyla, esnek homeomorfizm tanımlanarak, özellikleri teoremlerle ispatlandı.

Shabir ve Naz (2011)'ın yaptığı tanımda esnek topolojik uzay, nesne kümesi üzerine kurulmuştur. Ayrıca esnek topolojik uzay olma şartlarında, sonlu esnek kesişim ve keyfi esnek birleşimin esnek topolojiye aitliği yanı sıra, esnek evrensel kümenin de esnek topolojiye aitiği şartı vardır. Zorlutuna ve ark. (2011), aynı parametre kümesine sahip esnek kümeler için Shabir ve Naz (2011)'ın çalışmasındaki esnek topoloji tanımına paralel bir tanım yapmışlardır. Bu tez çalışmasında diğerlerinden farklı olarak esnek topoloji, bir esnek küme üzerine kurulmuştur. Ayrıca esnek nokta ile ilgili uygulamalar yapılarak, klasik küme teorisinde yer alan eşitsizliklerin, esnek nokta yardımıyla eşitliğe dönüşebileceği gösterilmiştir. Bu eşitlikler esnek metrik uzaylar içinde kullanılarak, esnek metrik uzay örneklerine yer verilmiştir. Genel topolojide sıkça kullanılan, ayrık metrik uzay ve doğal metrik uzay, esnek küme teorisi yardımıyla ilk kez tanımlanmıştır. Esnek metrik uzaylarda esnek nokta yardımıyla esnek süreklilik ve esnek düzgün süreklilik kavramları ilk kez tanımlanarak aralarındaki ilişki araştırılmış çeşitli sonuçlar elde edimiştir.

2. ESNEK KÜMELER

Bu tez çalışmasında tanımlanacak olan esnek topoloji ve esnek metrik, esnek kümeler üzerine kurulacağından, bu bölümde esnek kümeler teorisi detaylı bir şekilde verilecektir. Ayrıca esnek fonksiyon hakkında tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Bu bölüm boyunca Karataş (2012), Çağman ve Enginoğlu (2010), Maji ve ark. (2003) ve Molodtsov (1999)'un çalışmalarında yer alan tanım ve teoremler baz alınacaktır.

Çalışma boyunca U başlangıç evrenini, E parametreler kümesini ve $\mathcal{P}(U)$ da U evreninin kuvvet kümesi olarak kabul edilecektir.

2.1 Esnek Kümeler

Tanım 2.1.1. U ve E boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere

$$f : E \to \mathcal{P}(U)$$

küme değerli fonksiyonuna U ve E üzerinde bir esnek küme denir. Buna göre bir f esnek kümesini

$$f = \Big\{ \big(e, f(e)\big) : e \in E \Big\}$$

biçiminde ikililer kümesi olarak yazabiliriz (Molodtsov, 1999).

Çalışma boyunca, U evrenseli ve E parametre kümesi üzerinde tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.1.1. Bir şirketin eleman alımı için yaptığı ilanın neticesinde başvuran adayların kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olsun. Bu şirket eleman alımında, "*deneyim*", "*bilgisayar bilgisi*", "*genç yaş*" ve "*yüksek öğrenim*" parametrelerini dikkate alsın. Bu parametreleri $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere sırasıyla e_i ile isimlendirirsek, parametreler kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olur. Bu şirketin eleman alım komisyonunda, üç kişi bulunsun. Bu komisyon üyelerinin değerlendirmelerinin sırasıyla

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= \{u_2, u_4\} \\
f(e_2) &= \emptyset \\
f(e_3) &= \{u_1, u_4, u_5\} \\
f(e_4) &= \{u_3, u_5\} \\
g(e_1) &= \{u_1, u_3, u_4\} \\
g(e_2) &= \{u_1, u_3\} \\
g(e_3) &= \emptyset \\
g(e_4) &= \{u_1, u_2, u_3, u_5\} \\
h(e_1) &= \emptyset \\
h(e_2) &= \emptyset \\
h(e_3) &= \{u_2, u_3, u_4\} \\
h(e_4) &= U
\end{aligned}
$$

biçiminde olduğu kabul edilirse, bunların oluşturacağı f, g ve h esnek kümeleri sırasıyla

$$
\begin{aligned}
f &= \Big\{\big(e_1, \{u_2, u_4\}\big), \big(e_3, \{u_1, u_4, u_5\}\big)\big(e_4, \{u_3, u_5\}\big)\Big\} \\
g &= \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_3, u_4\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_3\}\big)\big(e_4, \{u_1, u_2, u_3, u_5\}\big)\Big\} \\
h &= \Big\{\big(e_3, \{u_2, u_3, u_4\}\big), \big(e_4, \{U\}\big)\Big\}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur (Çağman and Enginoğlu , 2010).

Burada olduğu gibi, bundan sonra da, görüntüsü boş küme olan elemanlar esnek küme içinde gösterilmeyecektir.

Tanım 2.1.2. Her $e \in E$ için $f(e) = \emptyset$ oluyorsa f esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.1.3. Her $e \in E$ için $f(e) = U$ oluyorsa f esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve U_E ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.1.4. $f, g \in S_E(U)$ olsun. Eğer her $e \in E$ için $f(e) \subseteq g(e)$ oluyorsa f esnek kümesine g esnek kümesinin alt esnek kümesi denir ve $f \tilde{\subseteq} g$ şeklinde gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.1.5. $f, g \in S_E(U)$ ise

$$f \tilde{\cup} g = \Big\{ f(e) \cup g(e) : e \in E \Big\}$$

esnek kümesine f ve g esnek kümelerinin esnek birleşimi denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.1.6. $f, g \in S_E(U)$ ise

$$f \tilde{\cap} g = \Big\{ f(e) \cap g(e) : e \in E \Big\}$$

esnek kümesine f ve g esnek kümelerinin esnek kesişimi denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Uyarı 2.1.1. İki esnek kümenin esnek birleşimlerinde veya esnek kesişimlerinde bu iki esnek kümede olmayan sıralı ikililer olabilir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

Örnek 2.1.2. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun.

$$\begin{aligned} f &= \Big\{ \big(e_1, \{u_1, u_2\}, \big(e_2, \{u_1\}\big) \Big\} \\ g &= \Big\{ \big(e_1, \{u_2, u_3\}, \big(e_2, \{u_3\}\big) \Big\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$f \tilde{\cup} g = \Big\{ \big(e_1, U\big), \big(e_2, \{u_1, u_3\}\big) \Big\} \text{ ve } f \tilde{\cap} g = \Big\{ \big(e_1, \{u_2\}\big) \Big\}$$

olur. Dolayısıyla $\big(e_1, U\big)$, $\big(e_1, \{u_2\}\big)$ ve $\big(e_2, \{u_1, u_3\}\big)$ ikililerinin hiçbiri f ve g esnek kümelerine ait değildir.

Tanım 2.1.7. $f, g \in S_E(U)$ olsun. Bu iki esnek kümenin esnek farkı

$$f \tilde{\setminus} g = \Big\{ f(e) \setminus g(e) : e \in E \Big\}$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 2.1.8. $f \in S_E(U)$ ise

$$f^{\tilde{c}} = \Big\{ f(e)^c : e \in E \Big\}$$

esnek kümesine f esnek kümesinin esnek tümleyeni denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Uyarı 2.1.2. Esnek kümenin esnek tümleyeni tanımında, her $e \in E$ için $f(e)^c = U \setminus f(e)$'dir. Ayrıca $(f^{\tilde{c}})^{\tilde{c}} = f$ ve $\Phi^{\tilde{c}} = U_E$ eşitlikleri sağlanmaktadır.

Örnek 2.1.3. $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ olsun. f, g ve h esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} f &= \Big\{ \big(e_1, \{u_1\}\big), \big(e_2, \{u_3\}\big) \Big\} \\ g &= \Big\{ \big(e_1, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_2, U\big), \big(e_3, \{u_3\}\big) \Big\} \\ h &= \Big\{ \big(e_3, \{u_2, u_3\}\big), \big(e_4, \{u_1, u_3\}\big) \Big\} \end{aligned}$$

Buradan $f \tilde{\subseteq} g$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} f \tilde{\cup} h &= \Big\{ \big(e_1, \{u_1\}\big), \big(e_2, \{u_3\}\big), \big(e_3, \{u_2, u_3\}\big), \big(e_4, \{u_1, u_3\}\big) \Big\}, \\ f^{\tilde{c}} &= \Big\{ \big(e_1, \{u_2, u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_3, U\big), \big(e_4, U\big) \Big\}, \\ g \tilde{\cap} h &= \{(e_3, \{u_3\})\} \\ f \tilde{\cap} h &= \Phi \\ g \tilde{\setminus} f &= \Big\{ \big(e_1, \{u_2\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_3, \{u_3\}\big) \Big\} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1.1. $f \in S_E(U)$ için,

i. $f \tilde{\cup} f = f$

ii. $f \tilde{\cup} \Phi = f$

iii. $f \tilde{\cup} U_E = U_E$

iv. $f \tilde{\cup} f^{\tilde{c}} = U_E$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 2.1.2. $f \in S_E(U)$ için,

i. $f \tilde{\cap} f = f$

ii. $f \tilde{\cap} \Phi = \Phi$

iii. $f \tilde{\cap} U_E = f$

iv. $f \tilde{\cap} f^{\tilde{c}} = \Phi$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 2.1.3. $f, g, h \in S_E(U)$ için,

i. $f \tilde{\cup} g = g \tilde{\cup} f$

ii. $(f \tilde{\cup} g) \tilde{\cup} h = f \tilde{\cup} (g \tilde{\cup} h)$

iii. $f \tilde{\cup} (g \tilde{\cap} h) = (f \tilde{\cup} g) \tilde{\cap} (f \tilde{\cup} h)$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 2.1.4. $f, g, h \in S_E(U)$ için,

i. $f \tilde{\cap} g = g \tilde{\cap} f$

ii. $(f \tilde{\cap} g) \tilde{\cap} h = f \tilde{\cap} (g \tilde{\cap} h)$

iii. $f \tilde{\cap} (g \tilde{\cup} h) = (f \tilde{\cap} g) \tilde{\cup} (f \tilde{\cap} h)$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 2.1.5. $f, g, h \in S_E(U)$ olsun. Esnek kümelerde De Morgan kuralları sağlanır.

i. $(f \tilde{\cap} g)^{\tilde{c}} = g^{\tilde{c}} \tilde{\cup} f^{\tilde{c}}$

ii. $(f\tilde{\cup}g)^{\tilde{c}} = g^{\tilde{c}}\tilde{\cap}f^{\tilde{c}}$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 2.1.6. $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq S_E(U)$ için,

i. $\left(\tilde{\bigcap}_{i\in I} f_i\right)^{\tilde{c}} = \tilde{\bigcup}_{i\in I} f_i^{\tilde{c}}$

ii. $\left(\tilde{\bigcup}_{i\in I} f_i\right)^{\tilde{c}} = \tilde{\bigcap}_{i\in I} f_i^{\tilde{c}}$

(Zorlutuna ve ark., 2011).

Tanım 2.1.9. $f \in S_E(U)$ esnek kümesinin esnek kuvvet kümesi

$$\tilde{\mathcal{P}}(f) = \{f_i \tilde{\subseteq} f : i \in I\}$$

şeklinde tanımlanır. (Çağman ve ark. 2011).

Eğer U ve E kümeleri sonlu ise, f'nin esnek kuvvet kümesinin eleman sayısı

$$|\tilde{\mathcal{P}}(f)| = 2^{\sum_{e\in E}|f(e)|}$$

olur. Burada, $|f(e)|$ ile $f(e)$ esnek kümesinin eleman sayısı gösterilmiştir.

Örnek 2.1.4. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. $f \in S_E(U)$ esnek kümesi

$$f = \big\{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\big\}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\begin{aligned}
f_1 &= \{(e_1, \{u_1\})\}, \\
f_2 &= \{(e_1, \{u_2\})\}, \\
f_3 &= \{(e_1, \{u_1, u_2\})\}, \\
f_4 &= \{(e_2, \{u_2\})\}, \\
f_5 &= \{(e_2, \{u_3\})\}, \\
f_6 &= \{(e_2, \{u_2, u_3\})\}, \\
f_7 &= \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2\})\}, \\
f_8 &= \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_3\})\}, \\
f_9 &= \{(e_1, \{u_1\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\}, \\
f_{10} &= \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_2\})\}, \\
f_{11} &= \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_3\})\}, \\
f_{12} &= \{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_2, u_3\})\}, \\
f_{13} &= \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_2\})\}, \\
f_{14} &= \{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, \{u_3\})\}, \\
f_{15} &= f, \\
f_{16} &= \Phi
\end{aligned}$$

esnek kümeleri, f esnek kümesinin bütün esnek alt kümeleridir. Böylece $|\tilde{P}(f)| = 2^4 = 16$ olur (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

2.2 Esnek Fonksiyon

Tanım 2.2.1. $S_E(U)$ ve $S_K(V)$, sırasıyla U ve V kümeleri üzerinde tanımlanmış, E ve K parametre kümelerine sahip tüm esnek kümelerin kümeleri olsun. $\varphi : U \to V$ ve $\psi : E \to K$ iki fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ fonksiyonuna esnek fonksiyon denir.

i. $X \subseteq E$ olmak üzere, her $k_j \in K$ için $f \in S_X(U)$ esnek kümesinin φ_ψ esnek fonksiyonu altındaki görüntüsü

$$\varphi_\psi(f)(k_j) = \begin{cases} \bigcup_{e_i \in \psi^{-1}(k_j)\cap X} \varphi(f(e_i)), & \psi^{-1}(k_j)\cap X \neq \emptyset \\ \emptyset, & \psi^{-1}(k_j)\cap X = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

ii. $Y \subseteq K$ olmak üzere, her $e_i \in E$ için $g \in S_Y(V)$ esnek kümesinin φ_ψ esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü

$$\varphi_\psi^{-1}(g)(e_i) = \begin{cases} \varphi^{-1}(g(\psi(e_i))), & \psi(e_i) \in Y \\ \emptyset, & \psi(e_i) \notin Y \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

(Kharal ve Ahmad, 2011).

Tanım 2.2.2. $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer φ ve ψ fonksiyonları bire bir ise φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek bire bir fonksiyon denir. Eğer φ ve ψ fonksiyonları örten ise φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek örten fonksiyon denir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.2.3. $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer φ ve ψ fonksiyonları esnek sabit ise φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek sabit fonksiyon denir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Örnek 2.2.1. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ olmak üzere $\varphi : U \to V$ ve $\psi : E \to K$ fonksiyonları

$$\begin{array}{ll} \varphi(u_1) = v_1 & \psi(e_1) = k_2 \\ \varphi(u_2) = v_4 & \psi(e_2) = k_2 \\ \varphi(u_3) = v_1 & \psi(e_3) = k_1 \\ \varphi(u_4) = v_2 & \psi(e_4) = k_3 \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca, $X = \{e_1, e_3\} \subseteq E$ ve $Y = \{k_1, k_2\} \subseteq K$ için $f \in S_X(U)$ ve $g \in S_Y(U)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f &= \Big\{\big(e_1, \{u_2\}\big), \big(e_3, \{u_1, u_4\}\big)\Big\} \in S_E(U) \\ g &= \Big\{\big(k_1, \{v_2, v_4\}\big), \big(k_2, \{v_3\}\big)\Big\} \in S_K(V) \end{aligned}$$

esnek kümeleri verilsin. $\psi^{-1}(k_1) = \{e_3\}$ ve $\psi^{-1}(k_2) = \{e_1, e_2\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f)(k_1) &= \varphi(f(e_3)) \\ &= \varphi\big(\{u_1, u_4\}\big) \\ &= \{v_1, v_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f)(k_2) &= \varphi\big(f(e_1) \cup f(e_2)\big) \\ &= \varphi\big(\{u_2\} \cup \emptyset\big) \\ &= \{v_4\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\varphi_\psi(f) = \Big\{\big(k_1, \{v_1, v_2\}\big), \big(k_2, \{v_4\}\big)\Big\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \varphi_\psi^{-1}(g)(e_1) &= \varphi^{-1}(g(\psi(e_1))) \\ &= \varphi^{-1}(g(k_2)) \\ &= \varphi^{-1}(v_3) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\psi^{-1}(g)(e_2) &= \varphi^{-1}(g(\psi(e_2))) \\ &= \varphi^{-1}(g(k_2)) \\ &= \varphi^{-1}(v_3) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\psi^{-1}(g)(e_3) &= \varphi^{-1}(g(\psi(e_3))) \\ &= \varphi^{-1}(g(k_1)) \\ &= \varphi^{-1}(\{v_2, v_4\}) \\ &= \{u_2, u_4\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\varphi_\psi^{-1}(g) = \Big\{\big(e_3, \{u_2, u_4\}\big)\Big\}$$

elde edilir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Teorem 2.2.1. $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon ve $X \subseteq E$ olsun. $f, g \in S_X(U)$ için,

i. $\varphi_\psi(\Phi) = \Phi$

ii. $\varphi_\psi(U_E) \tilde{\subseteq} \tilde{K}$ (φ_ψ esnek örten olduğunda eşitlik sağlanır.)

iii. $\varphi_\psi(f \tilde{\cup} g) = \varphi_\psi(f) \tilde{\cup} \varphi_\psi(g)$

iv. $\varphi_\psi(f \tilde{\cap} g) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi(f) \tilde{\cap} \varphi_\psi(g)$ (φ_ψ esnek bire bir olduğunda eşitlik sağlanır.)

v. Eğer $f \tilde{\subseteq} g$ ise $\varphi_\psi(f) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi(g)$

(Aygünoğlu ve Aygün, 2011).

Uyarı 2.2.1. Teorem 2.2.1 iv.'de φ_ψ esnek fonksiyonunu esnek bire bir değil ise eşitlik olmaz. Bu durum, aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 2.2.2. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $V = \{v_1, v_2\}$ nesne kümeleri, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ parametre kümeleri olsun. $\varphi : U \to V$ ve $\psi : E \to K$ fonksiyonları

$$\begin{array}{ll} \varphi(u_1) = v_1 & \psi(e_1) = k_1 \\ \varphi(u_2) = v_2 & \psi(e_2) = k_2 \\ \varphi(u_3) = v_1 & \psi(e_3) = k_3 \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. f ve g esnek kümeleri

$$\begin{aligned} f &= \Big\{ \big(e_1, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_2, \{u_2, u_3\}\big) \Big\} \\ g &= \Big\{ \big(e_2, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_3, U\big) \Big\} \end{aligned}$$

şeklinde olsun. $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek fonksiyonu için

$$\varphi_\psi(f \tilde{\cap} g) = \Big\{ \big(k_2, \{v_2\}\big) \Big\}$$

ve

$$\varphi_\psi(f) \tilde{\cap} \varphi_\psi(g) = \Big\{ \big(k_2, \{v_1, v_2\}\big) \Big\}$$

olduğundan

$$\varphi_\psi(f\tilde{\cap}g)\tilde{\subseteq}\varphi_\psi(f)\tilde{\cap}\varphi_\psi(g)$$

elde edilir.

(Zorlutuna ve ark., 2012)

Teorem 2.2.2. $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon ve $Y \subseteq K$ olsun. $f, g \in S_Y(V)$ için,

i. $\varphi_\psi^{-1}(\Phi) = \Phi$

ii. $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{K})\tilde{\subseteq}U_E$

iii. $\varphi_\psi^{-1}(f\tilde{\cup}g) = \varphi_\psi^{-1}(f)\tilde{\cup}\varphi_\psi^{-1}(g)$

iv. $\varphi_\psi^{-1}(f\tilde{\cap}g) = \varphi_\psi^{-1}(f)\tilde{\cap}\varphi_\psi^{-1}(g)$

v. Eğer $f\tilde{\subseteq}g$ ise $\varphi_\psi^{-1}(f)\tilde{\subseteq}\varphi_\psi^{-1}(g)$

(Aygünoğlu ve Aygün, 2011).

Teorem 2.2.3. $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon, $X \subseteq E$ ve $Y \subseteq K$ olsun. $f \in S_X(U)$ ve $g \in S_Y(V)$ için,

i. $f\tilde{\subseteq}\varphi_\psi^{-1}\big(\varphi_\psi(f)\big)$ (φ_ψ esnek bire bir olduğunda eşitlik sağlanır.)

ii. $\varphi_\psi\big(\varphi_\psi^{-1}(g)\big)\tilde{\subseteq}g$ (φ_ψ esnek örten olduğunda eşitlik sağlanır.)

iii. $\varphi_\psi^{-1}(g^{\tilde{c}}) = \big(\varphi_\psi^{-1}(g)\big)^{\tilde{c}}$

iv. φ_ψ esnek bire bir örten fonksiyon ise $\varphi_\psi(f^{\tilde{c}}) = \big(\varphi_\psi(f)\big)^{\tilde{c}}$

(Zorlutuna ve ark., 2011).

3. ESNEK NOKTA VE ESNEK AİTLİK

Bu bölümde Zorlutuna ve ark. (2011) tarafından tanımlanan esnek nokta ve esnek aitlik kavramları verilecektir. Daha sonra, parametre kümesi ve nesne kümesi sonlu olan bir esnek kümenin, esnek nokta sayısı hesaplanacaktır. Ayrıca, bir esnek kümenin, esnek noktalarının esnek birleşimi olarak yazılığı gösterilecektir.

3.1 Esnek Nokta ve Esnek Aitlik

Tanım 3.1.1. $f \in S_E(U)$ olsun. Bir $e \in E$ için $f(e) \neq \emptyset$ ve her $e' \in E \setminus \{e\}$ için $f(e') = \emptyset$ ise, f esnek kümesine $S_E(U)$'da bir esnek nokta denir ve e_f ile gösterilir (Zorlutuna ve ark., 2011).

Tanım 3.1.2. $g \in S_E(U)$ ve e_f, $S_E(U)$'da bir esnek nokta olsun. Her $e \in E$ için $f(e) \subseteq g(e)$ ise e_f esnek noktası g esnek kümesine esnek aittir denir ve $e_f \tilde{\in} g$ şeklinde gösterilir (Zorlutuna ve ark., 2011).

Örnek 3.1.1. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $f \in S_E(U)$ esnek kümesi

$$f = \Big\{ \big(e_1, \{u_1, u_4\}\big), \big(e_2, \{u_2, u_4\}\big), \big(e_3, \{u_1, u_2, u_3\}\big) \Big\}$$

şeklinde tanımlansın. $e = e_1$ olarak verilirse,

$$e_f = \Big\{ \big(e_1, \{u_1\}\big) \Big\}$$

esnek noktası f esnek kümesine esnek aittir ve $e_f \tilde{\in} f$ olur (Zorlutuna ve ark., 2011).

Teorem 3.1.1. E ve U sonlu olsun. $f \in S_E(U)$ ve $f(e)$ esnek kümesinin eleman sayısı $|f(e)|$ olmak üzere, f esnek kümesinin bütün esnek noktalarının sayısı

$$\sum_{e \in E} (2^{|f(e)|} - 1)$$

toplamına eşittir (Zorlutuna ve ark., 2011).

Uyarı 3.1.1. $f \in S_E(U)$ olsun. $e \in E$ için $|f(e)| > 1$ ise, e parametresi ile birden fazla esnek noktanın oluşturulabileceği açıktır. Bu durum aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 3.1.2. Örnek 3.1.1'de e_1 parametresi için

$$\begin{aligned} \left(e_{1_f}\right)_1 &= \left(e_1, \{u_1\}\right) \\ \left(e_{1_f}\right)_2 &= \left(e_1, \{u_4\}\right) \\ \left(e_{1_f}\right)_3 &= \left(e_1, \{u_1, u_4\}\right) \end{aligned}$$

şeklinde üç farklı noktadan biri esnek nokta seçilebilir. Benzer şekilde e_2 parametresi için de üç noktadan biri esnek nokta olabilir.

$$\begin{aligned} \left(e_{2_f}\right)_1 &= \left(e_2, \{u_2\}\right) \\ \left(e_{2_f}\right)_2 &= \left(e_2, \{u_4\}\right) \\ \left(e_{2_f}\right)_3 &= \left(e_2, \{u_2, u_4\}\right) \end{aligned}$$

Ayrıca, e_3 parametresi için $2^3 - 1 = 7$ tane noktadan biri esnek nokta olabilir. Bu esnek noktalar

$$\begin{aligned} \left(e_{3_f}\right)_1 &= \left(e_3, \{u_1\}\right) \\ \left(e_{3_f}\right)_2 &= \left(e_3, \{u_2\}\right) \\ \left(e_{3_f}\right)_3 &= \left(e_3, \{u_3\}\right) \\ \left(e_{3_f}\right)_4 &= \left(e_3, \{u_1, u_2\}\right) \\ \left(e_{3_f}\right)_5 &= \left(e_3, \{u_1, u_3\}\right) \\ \left(e_{3_f}\right)_6 &= \left(e_3, \{u_2, u_3\}\right) \\ \left(e_{3_f}\right)_7 &= \left(e_3, \{u_1, u_2, u_3\}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Uyarı 3.1.2. $f \in S_E(U)$ ve $e_i, e_j \in E$ olsun. Esnek nokta tanımından $e_{i_f} = e_{j_f}$ ancak ve ancak $e_i = e_j$ ve $f(e_i) = f(e_j)$'dir. $e_i \neq e_j$ için $e_{i_f} \neq e_{j_f}$ olduğu açıktır. Buna karşın $e_{i_f} \neq e_{j_f}$ olması $e_i \neq e_j$ olmasını gerektirmez. Örnek 3.1.2'de $\left(e_{1_f}\right)_1 = \left(e_1, \{u_1\}\right)$ ve $\left(e_{1_f}\right)_2 = \left(e_1, \{u_4\}\right)$ esnek noktaları e_1 parametresi ile yazılmış olmalarına karşın farklıdırlar.

Teorem 3.1.2. Bir esnek küme tüm esnek noktalarının esnek birleşimi olarak yazılabiir. (Zorlutuna ve ark., 2011).

Örnek 3.1.3. $f = \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_2, \{u_2, u_3\}\big)\Big\}$ esnek kümesi verilsin. Bu esnek kümenin tüm esnek tek nokta kümeleri

$$\begin{aligned}
\{(e_{1_f})_1\} &= \{(e_1, \{u_1\})\} \\
\{(e_{1_f})_2\} &= \{(e_1, \{u_2\})\} \\
\{(e_{1_f})_3\} &= \{(e_1, \{u_1, u_2\})\} \\
\{(e_{2_f})_1\} &= \{(e_2, \{u_2\})\} \\
\{(e_{2_f})_2\} &= \{(e_2, \{u_3\})\} \\
\{(e_{2_f})_3\} &= \{(e_2, \{u_2, u_3\})\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$f = \tilde{\bigcup}_{i=1}^{2}\Big(\tilde{\bigcup}_{k=1}^{3}\big(\{e_{i_f}\}\big)_k\Big)$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.1.3. $f, g \in S_E(U)$, $X \subseteq E$ ve $\forall f_i, f_j \in S_X(U)$ olsun. Her $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ için $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g$ ise $f \tilde{\subseteq} g$'dir (Zorlutuna ve ark., 2011).

3.2 Esnek Nokta ile İlgili Uygulamalar

Bu bölümde, esnek nokta, matris formunda yazılarak, bazı eşitlik ve eşitsizlikler elde edilmiştir. Böylece ilk kez esnek noktalara ait uygulamalar sunulmuştur. Bu sonuçlar tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacaktır.

Tanım 3.2.1. $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ ve $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ için $f \in S_E(U)$ olsun. Buradan, f aşağıdaki gibi bir matris formunda gösterilebilir.

f	$f(e_1)$	$f(e_2)$	$\cdots$	$f(e_j)$	$\cdots$	$f(e_i)$	$\cdots$
u_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1i}	$\cdots$
u_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2i}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
u_r	a_{r1}	a_{r2}	$\cdots$	a_{rj}	$\cdots$	a_{ri}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	

Burada matrisin her bir elemanı

$$a_{k\ell} = \begin{cases} 1, & u_k \in f(e_\ell) \\ 0, & u_k \notin f(e_\ell) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$e_{i_{f_i}}$, $S_E(U)$ üzerinde bir esnek nokta olsun. Benzer şekilde $e_{i_{f_i}}$'in matris formunda gösterimi aşağıdaki gibi olur.

$e_{i_{f_i}}$	$f_i(e_i)$
u_1	a_{1i}
u_2	a_{2i}
$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{mi}
$\vdots$	$\vdots$

i-nci sütun hariç diğer tüm sütunlardaki elemanlar esnek nokta tanımı gereği 0'dır. Böylece, e_f esnek noktasının matris formu tanımlanmış olur (Karataş, 2012).

Tezin bu bölümünden, 4. bölüme kadar yer alan önermelerde, Tanım 3.2.1'de tanımlanan e_f esnek noktasının matris formu kullanılacaktır.
Bu önermelerin ispatları, reel sayılar kümesinde mevcut olduğundan, burada gösterilmeyecektir.

Önerme 3.2.1. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$|a_{ki} + a_{kj}| = |a_{ki}| + |a_{kj}|$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.2.2. Önerme 3.2.1'de verilen eşitliğe esnek mutlak değer eşitliği denir.

Önerme 3.2.2. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $p \geqslant 1$ için,

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_{ki} + a_{kj}|^p} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|^p}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 3.2.3. Önerme 3.2.2'deki eşitliğe Minkowski esnek eşitliği denir.

Önerme 3.2.3. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$|a_{ki} - a_{kj}| \leqslant |a_{ki} - a_{ks}| + |a_{ks} - a_{kj}|$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 3.2.4. Önerme 3.2.3'de verilen eşitsizliğe esnek üçgen eşitsizliği denir.

4. ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde, bir esnek küme üzerinde tanımlanan esnek topolojiyle ilgili temel özelliklere yer verilecektir.

4.1 Esnek Topoloji

Tanım 4.1.1. $\Phi \neq X \subseteq E$ ve $f \in S_X(U)$ olsun. $\tilde{\tau} = \{g_i\}_{i \in I}$ ile f in bir esnek alt kümeler ailesi verilsin. Eğer $\tilde{\tau}$ ailesi aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, $\tilde{\tau}$ ya f üzerinde bir esnek topoloji veya esnek topolojik yapı; $(f, \tilde{\tau})$ ikilisine esnek topolojik uzay; $\tilde{\tau}$ nın elemanlarına $(f, \tilde{\tau})$ nın esnek açık alt kümeleri denir.

i. $\Phi, f \in \tilde{\tau}$,

ii. $\{g_i\}_{i \in I} \subseteq \tilde{\tau}$ ise $\tilde{\bigcup}_{i \in I} g_i \in \tilde{\tau}$,

iii. $\{g_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tilde{\tau}$ ise $\tilde{\bigcap}_{i=1}^{n} g_i \in \tilde{\tau}$

(Çağman ve ark, 2011).

Örnek 4.1.1. Örnek 2.1.4'de tanımlanmış f esnek kümesinin esnek alt kümeleri gözönüne alınsın. $\tilde{\tau} = \{\Phi, f, f_2, f_{11}, f_{13}\}$ esnek küme ailesi f üzerinde bir esnek topolojik yapı oluşturur.

Teorem 4.1.1. Her esnek kümenin esnek kuvvet kümesi, o esnek küme üzerinde bir esnek topolojik yapı oluşturur. Bu yapıya, f üzerinde oluşturulan ayrık veya en ince esnek topolojik yapı denir ve $\tilde{\tau}^1$ ile gösterilir. (Çağman ve ark, 2011).

Teorem 4.1.2. $(f, \{\Phi, f\})$ ikilisi f üzerinde bir esnek topolojik yapıdır
(Çağman ve ark, 2011).

Bu yapıya, f üzerinde kurulan ayrık olmayan veya en kaba topolojik yapı denir ve $\tilde{\tau}^0$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.3. f esnek kümesi üzerinde oluşturulan tüm esnek topolojilerin ailesi $\{\tilde{\tau}_i\}_{i\in I}$ ile gösterilsin. $i, j \in I$ olmak üzere,

$$(\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j) \Leftrightarrow (\forall g_i \in \tilde{\tau}_i \Rightarrow \forall g_i \in \tilde{\tau}_j)$$

ile verilen ve "$\leq$" ile gösterilen sıralama bağıntısına "daha kabalı olma bağıntısı" denir ve "$\leq$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat . i. $\forall i \in I$ için $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_i$ olduğundan $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_i$ olur. O halde yansıma özelliği sağlanır.

ii. $i, j \in I$ için $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \leq \tilde{\tau}_i$ olsun. Buradan $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \subseteq \tilde{\tau}_i$ elde edilir. $\tilde{\tau}_i = \tilde{\tau}_j$ olduğundan, ters simetri özelliği sağlanır.

iii. $i, j, k \in I$ için $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \leq \tilde{\tau}_k$ olsun. $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_j$ ve $\tilde{\tau}_j \subseteq \tilde{\tau}_k$ olduğundan $\tilde{\tau}_i \subseteq \tilde{\tau}_k$ bulunur. Buradan $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_k$ elde edildiğinden, geçişme özelliği sağlanır.

Tanım 4.1.2. f esnek kümesi üzerinde oluşturulan tüm esnek topolojilerin ailesi $\{\tilde{\tau}_i\}_{i\in I}$ ile gösterilsin. $i, j \in I$ olmak üzere,

i. Eğer $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ ise $\tilde{\tau}_j$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_i$ esnek topolojisinden daha incedir denir.

ii. Eğer $\tilde{\tau}_i < \tilde{\tau}_j$ ise, $\tilde{\tau}_j$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_i$ esnek topolojisinden kesin daha incedir denir.

iii. Eğer $\tilde{\tau}_i \leq \tilde{\tau}_j$ veya $\tilde{\tau}_j \leq \tilde{\tau}_i$ ise, $\tilde{\tau}_i$ ve $\tilde{\tau}_j$ esnek topolojilerine karşılaştırılabilir esnek topolojiler denir.

Ayrıca, bir esnek küme üzerinde kurulabilecek en basit esnek topoloji $\tilde{\tau}^0$ esnek topolojisidir. Benzer şekilde en ince esnek topoloji de $\tilde{\tau}^1$ esnek topolojisidir (Çağman ve ark, 2011).

Örnek 4.1.2. Örnek 4.1.1'de tanımlanan f üzerindeki esnek topolojiler göz önüne alınsın. $\tilde{\tau}^0 \subseteq \tilde{\tau}^1$, $\tilde{\tau}^0 \subseteq \tilde{\tau}$ ve $\tilde{\tau} \subseteq \tilde{\tau}^1$ kapsamaları açıkça görülmektedir. Buradan $\tilde{\tau}^1$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}^0$'dan daha incedir ve $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi de $\tilde{\tau}^0$'dan daha incedir.

Tanım 4.1.3. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. $g \in S_E(U)$ için $g^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}$ ise, g esnek kümesine $\tilde{\tau}$ esnek topolojisine göre esnek kapalı (yada kısaca esnek kapalı) küme denir (Çağman ve ark, 2011).

$(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayındaki tüm esnek kapalıların kümesi $\tilde{\mathcal{F}}$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.1.4. Bir esnek topolojik uzayda

i. Evrensel esnek küme, bir esnek kapalı kümedir.

ii. Esnek kapalı kümelerin esnek kesişimi de esnek kapalı kümedir.

iii. Sonlu sayıda esnek kapalı kümenin esnek birleşimi de esnek kapalı kümedir

(Çağman ve ark, 2011).

Uyarı 4.1.1. U_E esnek kapalıdır. Çünkü $U_E^{\tilde{c}} = \Phi \in \tilde{\tau}$ dır. Fakat Φ ve f esnek kümelerinin esnek kapalı kümeler olması gerekmemektedir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 4.1.3. Örnek 2.1.4'de tanımlanmış f esnek kümesi üzerinde kurulan $\tilde{\tau} = \{\Phi, f, f_2, f_{11}, f_{13}\}$ esnek topolojisi göz önüne alınsın. Burada,

$$f^{\tilde{c}} = \Big\{\big(e_1, \{u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1\}\big)\Big\} \notin \tilde{\tau}$$

ve

$$\Phi^{\tilde{c}} = U_E \notin \tilde{\tau}$$

olduğundan f ve Φ esnek kapalı küme değildir.

Teorem 4.1.5. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(f, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik ise $(f, \tilde{\tau}_1 \cap \tilde{\tau}_2)$ de bir esnek topolojik uzaydır (Çağman ve ark, 2011).

Uyarı 4.1.2. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(f, \tilde{\tau}_2)$ birer esnek topolojik uzay olmalarına rağmen $(f, \tilde{\tau}_1 \cup \tilde{\tau}_2)$'nin de bir esnek topolojik uzay olması gerekmez. Aşağıdaki örnek bu durumu göstemektedir.

Örnek 4.1.4. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f &= \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_2, \{u_2, u_3\}\big)\Big\} \\ g &= \Big\{\big(e_1, \{u_2\}\big)\Big\} \\ h &= \Big\{\big(e_1, \{u_2\}\big), \big(e_2, \{u_3\}\big)\Big\} \\ m &= \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_2, \{u_2\}\big)\Big\} \end{aligned}$$

esnek kümeleri için

$$\tilde{\tau}_1 = \Big\{\Phi, f, g, h, m\Big\}$$

f esnek kümesi üzerinde bir esnek topolojidir. Eğer

$$\begin{aligned} n &= \Big\{\big(e_1, \{u_1\}\big)\Big\} \\ p &= \Big\{\big(e_1, \{u_1\}\big), \big(e_2, \{u_2\}\big)\Big\} \\ r &= \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_2\}\big), \big(e_2, \{u_3\}\big)\Big\} \end{aligned}$$

ise

$$\tilde{\tau}_2 = \Big\{\Phi, f, n, p, r\Big\}$$

de f üzerinde bir esnek topolojidir. Fakat $(f, \tilde{\tau}_1 \cup \tilde{\tau}_2)$ bir esnek topolojik uzay değildir. Çünkü; hemen görüleceği gibi

$$g \tilde{\cup} n = \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_2\}\big)\Big\} \notin \tilde{\tau}_1 \cup \tilde{\tau}_2$$

dir.

4.2 Esnek Topolojik Uzayın Esnek Bazı

Tanım 4.2.1. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{\tau}$ olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ esnek topolojisindeki her esnek açık küme $\tilde{\mathcal{B}}$ kümesindeki bazı esnek açık kümelerin esnek birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\tilde{\mathcal{B}}$ kümesine $\tilde{\tau}$ esnek topolojisinin bir esnek bazı denir.

$(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\tilde{\mathcal{B}} = \{g_i\}_{i \in I}$ bu esnek topolojik uzayın bir esnek bazı ise, herhangi bir $h \in \tilde{\tau}$ için

$$h = \tilde{\bigcup}_{j \in J \subseteq I} g_j$$

şeklinde yazılacaktır (Çağman ve ark, 2011).

Örnek 4.2.1. Örnek 4.1.1'de tanımlanmış $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi göz önüne alınsın.

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{\Phi, f_2, f_{11}, f_{13}\}$$

kümesi $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi için bir esnek bazdır.

Örnek 4.2.2. $(f_X, \tilde{\tau}^1)$ esnek topolojik uzayı verilsin. Buradan, her $e_i \in X$ parametresi için oluşturulan tüm esnek tek nokta kümelerinin kümesi

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{(e_{i_f})\right\}_{j \in \Delta}$$

olsun. Bu durumda $\tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\tau}^1$ için bir esnek bazdır.

Teorem 4.2.1. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(f, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay olsun. $\tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri için ayrı ayrı birer esnek baz ise $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2$'dir.

İspat . Herhangi bir $g \in \tilde{\tau}_1$ verilsin. $\tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\tau}_1$ için bir esnek baz olduğundan,

$$g = \tilde{\bigcup}_{h_i \in \tilde{\mathcal{B}}} h_i$$

olarak yazılır. $\tilde{\mathcal{B}}$, aynı zamanda $\tilde{\tau}_2$ için de bir esnek baz olduğundan $g \in \tilde{\tau}_2$ olur. O halde $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$ elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\tau}_2 \subseteq \tilde{\tau}_1$ elde edileceğinden $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2$'dir.

Teorem 4.2.2. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(f, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay olsun. $\tilde{\mathcal{B}}_1$ ve $\tilde{\mathcal{B}}_2$ sırasıyla bu iki esnek topolojik uzayın iki esnek bazı ve $\tilde{\mathcal{B}}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_2$ ise $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$'dir.

İspat . $\tilde{\mathcal{B}}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_2$ olsun. Herhangi bir $g \in \tilde{\tau}_1$ için

$$g = \tilde{\bigcup}_{h_i \in \tilde{\mathcal{B}}_1} h_i$$

olarak yazılır. $\tilde{\mathcal{B}}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_2$ kapsamasından

$$g = \tilde{\bigcup}_{h_i \in \tilde{\mathcal{B}}_2} h_i$$

elde edilir. $\tilde{\mathcal{B}}_2$, $\tilde{\tau}_2$ için bir esnek baz olduğundan $g \in \tilde{\tau}_2$ olur. Dolayısıyla $\tilde{\tau}_1 \subseteq \tilde{\tau}_2$'dir.

Uyarı 4.2.1. $\tilde{\mathcal{B}}, f$ esnek kümesi üzerinde bir tek esnek topoloji üretir. Ama esnek topolojik uzayın esnek bazı tek olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

Örnek 4.2.3. Örnek 2.1.4'de tanımlanmış f esnek kümesinin esnek alt kümeleri gözönüne alınsın. $\tilde{\tau} = \{\Phi, f, f_3, f_4, f_5, f_6, f_{13}, f_{14}\}$ esnek küme ailesi f üzerinde bir esnek topolojik yapı oluşturur.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{B}}_1 &= \{\Phi, f, f_3, f_4, f_5\} \\
\tilde{\mathcal{B}}_2 &= \{\Phi, f, f_3, f_4, f_5, f_6\} \\
\tilde{\mathcal{B}}_3 &= \{\Phi, f, f_3, f_4, f_5, f_6, f_{13}\}
\end{aligned}
$$

$(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı için birer esnek baz olur.

4.3 Esnek Topolojik Alt Uzay

Bu bölümde, tanımlanmış olan esnek alt uzay topolojisi ile ilgili özellikler tanıtıldı. Bir esnek kümenin esnek kapanışı ve esnek içi tanımlandı. Temel özellikleri verilerek, aralarındaki ilişki teoremlerle ispatlandı. Esnek alt uzay ile esnek evrensel uzay arasındaki geçiş teorem ve örneklerle gösterildi. Ayrıca bir esnek topolojik alt uzayın, esnek alt uzayı tanımlandı. Bu uzayın, diğer iki üst uzayları ile ilişkisi araştırıldı.

Teorem 4.3.1. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $g \tilde{\subseteq} f$ olsun.

$$\tilde{\tau}_g = \{h \tilde{\cap} g : h \in \tilde{\tau}\}$$

kümesi g üzerinde bir esnek topoloji ve $(g, \tilde{\tau}_g)$ ikilisi de bir esnek topolojik uzaydır (Çağman ve ark, 2011).

Tanım 4.3.1. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $g \tilde{\subseteq} f$ olsun.

$$\tilde{\tau}_g = \{h \tilde{\cap} g : h \in \tilde{\tau}\}$$

kümesine g üzerinde esnek alt topoloji ve $(g, \tilde{\tau}_g)$ ikilisine de $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının esnek alt uzayı denir.

Örnek 4.3.1. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. $g \tilde{\subseteq} f$ için

$$\tilde{\tau} = \tilde{\mathcal{P}}(f) \text{ ise } \tilde{\tau}_g = \tilde{\mathcal{P}}(g)$$

ve

$$\tilde{\tau} = \{f, \Phi\} \text{ ise } \tilde{\tau}_g = \{g, \Phi\}$$

olur.

Örnek 4.3.2. Örnek 4.1.1'de tanımlanmış $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi gözönüne alınsın.

$$g = f_9 \quad \text{ve} \quad \tilde{\tau}_g = \{\Phi, f_5, f_7, f_9\}$$

için $(g, \tilde{\tau}_g)$, $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayıdır.

Tanım 4.3.2. $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı $(g, \tilde{\tau}_g)$ ve $h \tilde{\subseteq} g$ olsun. Eğer, bir $m \in \tilde{\tau}$ için $h = m \tilde{\cap} g$ oluyorsa h esnek kümesine, g esnek alt uzayında bir esnek açık alt küme denir.
Bu durumda, $\tilde{\tau}_g$ nin her elemanına $(g, \tilde{\tau}_g)$ alt uzayında esnek açıktır denir.

Teorem 4.3.2. $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı $(g, \tilde{\tau}_g)$ ve $h \tilde{\subseteq} g$ olsun. Eğer, $h \in \tilde{\tau}$ ise, $h \in \tilde{\tau}_g$ olur (Çağman ve ark, 2011).

Uyarı 4.3.1. Bu teoremin tersi genellikle doğru değildir. Yani, esnek alt uzayda esnek açık olan her esnek alt küme, esnek evrensel uzayda da esnek açık olmak zorunda değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 4.3.3. Örnek 4.3.2'de tanımlanmış $(g, \tilde{\tau}_g)$ esnek topolojisi göz önüne alınsın. $f_5 \in \tilde{\tau}_g$ olmasına rağmen $f_5 \notin \tilde{\tau}$ dır.

Esnek alt uzayda esnek açık olan esnek alt kümenin, esnek evrensel uzayda da esnek açık olma şartı aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 4.3.3. $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı $(g, \tilde{\tau}_g)$ ve $h \tilde{\subseteq} g$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. $g \in \tilde{\tau}$

ii. $\tilde{\tau}_g \tilde{\subseteq} \tilde{\tau}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: $g \in \tilde{\tau}$ olsun. $\forall h \in \tilde{\tau}_g$ alalım. Bu durumda $h = m \tilde{\cap} g$ olacak şekilde $\exists m \in \tilde{\tau}$ vardır. $g \in \tilde{\tau}$, $m \in \tilde{\tau}$ olduğundan $h \in \tilde{\tau}$ olur. O halde $\tilde{\tau}_g \tilde{\subseteq} \tilde{\tau}$ bulunur.

Teorem 4.3.4. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $h \tilde{\subseteq} g \tilde{\subseteq} f$ olmak üzere $(g, \tilde{\tau}_g)$ ve $(h, \tilde{\tau}_h)$ esnek topolojik uzayları, $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının birer esnek alt uzayları olsun. $(g, \tilde{\tau}_g)$ esnek topolojik uzayının bir esnek alt uzayı, $(h, (\tilde{\tau}_g)_h)$ olmak üzere,

$$\tilde{\tau}_h = (\tilde{\tau}_g)_h$$

olur.

İspat . (i) $\tilde{\tau}_h \subseteq (\tilde{\tau}_g)_h$ olduğunu göstermek için $\forall w \in \tilde{\tau}_h$ alalım. Bu durumda $w = w \tilde{\cap} h$ olacak şekilde $\exists w \in \tilde{\tau}$ vardır. Buradan $w \tilde{\cap} g \in \tilde{\tau}_g$ bulunur. $w \tilde{\cap} g = y$ denilirse, $(h, (\tilde{\tau}_g)_h) \subseteq (g, \tilde{\tau}_g)$ ve $y \in \tilde{\tau}_g$ olduğundan $y \tilde{\cap} h \in (\tilde{\tau}_g)_h$ olur.
$y = w \tilde{\cap} g$ olduğundan $y \tilde{\cap} h = w \tilde{\cap} g \tilde{\cap} h \in (\tilde{\tau}_g)_h$ dır.
$h \subseteq g \Leftrightarrow h = h \tilde{\cap} g$ olduğundan $y \tilde{\cap} h = w \tilde{\cap} h \in (\tilde{\tau}_g)_h$ olur. $w = w \tilde{\cap} h \in (\tilde{\tau}_g)_h$ olduğundan $w \in (\tilde{\tau}_g)_h$ bulunur. O halde, $\tilde{\tau}_h \subseteq (\tilde{\tau}_g)_h$ elde edilir.
(ii) $(\tilde{\tau}_g)_h \subseteq \tilde{\tau}_h$ olduğunu göstermek için $\forall z \in (\tilde{\tau}_g)_h$ alalım. Bu durumda $z = t \tilde{\cap} h$ olacak şekilde $\exists t \in \tilde{\tau}_g$ vardır. Buradan $t = w \tilde{\cap} g$ olacak biçimde $\exists w \in \tilde{\tau}$ elde edilir.
$z = t \tilde{\cap} h = w \tilde{\cap} g \tilde{\cap} h = w \tilde{\cap} h \in \tilde{\tau}_h$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.5. $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının boştan farklı iki esnek alt uzayı, $(g, \tilde{\tau}_g)$ ve $(h, \tilde{\tau}_h)$ olsun. $w \subseteq h \tilde{\cap} g$ olmak üzere,

$$\tilde{\tau}_w = (\tilde{\tau}_g)_w = (\tilde{\tau}_h)_w$$

olur.

İspat . $h \tilde{\cap} g \subseteq h$ olduğundan $\tilde{\tau}_w = (\tilde{\tau}_h)_w$ ve $h \tilde{\cap} g \subseteq g$ olduğundan $\tilde{\tau}_w = (\tilde{\tau}_g)_w$ olur. Buradan, $\tilde{\tau}_w = (\tilde{\tau}_g)_w = (\tilde{\tau}_h)_w$ bulunur.

Tanım 4.3.3. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $g \subseteq f$ ve $(g, \tilde{\tau}_g)$, f in bir esnek alt uzayı olsun. Bu alt uzayın bütün esnek kapalı alt kümeler ailesi $\tilde{F}_g$ ile gösterilecektir.

Uyarı 4.3.2. $h\tilde{\subseteq}g\tilde{\subseteq}f$ için $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ esnek kapalı kümesinin $(g, \tilde{\tau}_g)$ esnek alt uzayında alınan esnek tümleyeni $(h)_g^{\tilde{c}}$ ve $(f, \tilde{\tau})$ esnek uzayında alınan esnek tümleyeni $(h)_f^{\tilde{c}}$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.3.4. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $g \subseteq f$ ve $(g, \tilde{\tau}_g)$, f in bir esnek alt uzayı olsun. $h\tilde{\subseteq}g\tilde{\subseteq}f$ için eğer $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ ise $(h)_g^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}_g$ dir.

Teorem 4.3.6. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $g \subseteq f$ ve $(g, \tilde{\tau}_g)$, f in bir esnek alt uzayı olsun. $h\tilde{\subseteq}g\tilde{\subseteq}f$ için aşağıdaki önermeler denktir:

i. $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$

ii. $h = k\tilde{\cap}g$ olacak şekilde $\exists k \in \tilde{\mathcal{F}}$ vardır.

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ olsun. Bu durumda $(h)_g^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}_g$ olur. O halde $(h)_g^{\tilde{c}} = w\tilde{\cap}g$ olacak şekilde $\exists w \in \tilde{\tau}$ vardır. $h = ((h)_g^{\tilde{c}})_g^{\tilde{c}} = (w\tilde{\cap}g)_g^{\tilde{c}}$ olarak yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
(w\tilde{\cap}g)_g^{\tilde{c}} &= g\tilde{\setminus}(w\tilde{\cap}g) \\
&= g\tilde{\cap}(w\tilde{\cap}g)_f^{\tilde{c}} \\
&= g\tilde{\cap}((w)_f^{\tilde{c}}\tilde{\cup}(g)_f^{\tilde{c}}) \\
&= (g\tilde{\cap}(w)_f^{\tilde{c}})\tilde{\cup}(g\tilde{\cap}(g)_f^{\tilde{c}}) \\
&= g\tilde{\cap}(w)_f^{\tilde{c}}
\end{aligned}
$$

$w \in \tilde{\tau}$ olduğundan $(w)_f^{\tilde{c}} \in \tilde{\mathcal{F}}$ olur. $(w)_f^{\tilde{c}} = k$ denilirse $h = k\tilde{\cap}g$ olacak biçimde $k \in \tilde{\mathcal{F}}$ bulunur.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $h = k\tilde{\cap}g$ olduğundan $(h)_g^{\tilde{c}} = (k\tilde{\cap}g)_g^{\tilde{c}}$ olur.

$$
\begin{aligned}
(k\tilde{\cap}g)_g^{\tilde{c}} &= g\tilde{\setminus}(k\tilde{\cap}g) \\
&= g\tilde{\cap}(k\tilde{\cap}g)_f^{\tilde{c}} \\
&= g\tilde{\cap}((k)_f^{\tilde{c}}\tilde{\cup}(g)_f^{\tilde{c}}) \\
&= (g\tilde{\cap}(k)_f^{\tilde{c}})\tilde{\cup}(g\tilde{\cap}(g)_f^{\tilde{c}}) \\
&= g\tilde{\cap}(k)_f^{\tilde{c}}
\end{aligned}
$$

bulunur. Hipotezden $k \in \tilde{\mathcal{F}}$ olduğundan $(k)_f^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}$ olur. Buradan $(h)_g^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}_g$ ve $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ elde edilir.

Teorem 4.3.7. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $g \subseteq f$ ve $(g, \tilde{\tau}_g)$, f in bir esnek alt uzayı olsun. Eğer $h\tilde{\subseteq}g$, $h \in \tilde{\mathcal{F}}$ ise $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ olur.

İspat . $h\tilde{\subseteq}g$ olduğundan $h = h\tilde{\cap}g$ yazılabilir. $h \in \tilde{\mathcal{F}}$ olduğundan Teorem 4.3.6 gereğince $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ bulunur.

Uyarı 4.3.3. Bu teoremin tersi genellikle doğru değildir. Yani, esnek alt uzayda esnek kapalı olan her esnek alt küme, esnek evrensel uzayda da esnek kapalı olmak zorunda değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 4.3.4. Örnek 4.1.1'de tanımlanmış $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi gözönüne alınsın. Burada, $\tilde{\mathcal{F}} = \Big\{\Big\{\big(e_1, U\big), \big(e_2, U\big)\Big\}, \Big\{\big(e_1, \{u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1\}\big)\Big\}, \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_3\}\big)\Big\},$
$\Big\{\big(e_1, \{u_1, u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_2\}\big)\Big\}, \Big\{\big(e_1, \{u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_3\}\big)\Big\}\Big\}$ olur.
$g = \Big\{\big(e_1, \{u_1\}\big), \big(e_2, \{u_2, u_3\}\big)\Big\}$ olmak üzere,
$\tilde{\tau}_g = \Big\{\Phi, g, \Big\{\big(e_1, \{u_1\}\big), \big(e_2, \{u_2\}\big)\Big\}, \Big\{\big(e_2, \{u_3\}\big)\Big\}\Big\}$ ve
$\tilde{\mathcal{F}}_g = \Big\{\Big\{\big(e_1, U\big), \big(e_2, U\big)\Big\}, \Big\{\big(e_1, \{u_1, u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1\}\big)\Big\}, \Big\{\big(e_2, \{u_1, u_2\}\big)\Big\},$
$\Big\{\big(e_1, \{u_1, u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_3\}\big)\Big\}\Big\}$ dir.
Burada, $h = \Big\{\big(e_1, \{u_2, u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_3\}\big)\Big\} \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ fakat $h \notin \tilde{\mathcal{F}}$ olur.

Esnek alt uzayda esnek kapalı olan esnek kümenin, esnek evrensel uzayda da kapalı olma şartı aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 4.3.8. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $g \subseteq f$ ve $(g, \tilde{\tau}_g)$, f in bir esnek alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. $g \in \tilde{\mathcal{F}}$

ii. $\tilde{\mathcal{F}}_g\tilde{\subseteq}\tilde{\mathcal{F}}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: $g \in \tilde{\mathcal{F}}$ olsun. $h \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ alalım. Bu durumda $h = k\tilde{\cap}g$ olacak biçimde $\exists k \in \tilde{\mathcal{F}}$ vardır. Ayrıca $g \in \tilde{\mathcal{F}}$ olduğundan $h \in \tilde{\mathcal{F}}$ olur. O halde $\tilde{\mathcal{F}}_g\tilde{\subseteq}\tilde{\mathcal{F}}$ dir.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $(g, \tilde{\tau}_g)$ bir esnek topoloji olduğundan $g \in \tilde{\mathcal{F}}_g$ ve $\tilde{\mathcal{F}}_g\tilde{\subseteq}\tilde{\mathcal{F}}$ olduğundan $g \in \tilde{\mathcal{F}}$ bulunur.

Tanım 4.3.5. $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının gerçeklediği bir özellik, bu esnek uzayın tüm esnek alt uzaylarında da varsa, bu özelliğe esnek kalıtsal özellik denir.

Teorem 4.3.9. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $g\tilde{\subseteq}f$ olsun. Eğer $\tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\tau}$ esnek topolojisinin bir esnek bazı ise

$$\tilde{\mathcal{B}}_g = \{h_i\tilde{\cap}g : h_i \in \tilde{\mathcal{B}}, i \in I\}$$

kümesi $\tilde{\tau}_g$ esnek topolojisi için bir esnek bazdır (Çağman ve ark, 2011).

4.4 Esnek Kümenin Esnek İçi ve Esnek Kapanışı

Tanım 4.4.1. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $g \tilde{\subseteq} f$ olsun. g tarafından esnek kapsanan bütün esnek açık kümelerin esnek birleşimine g esnek kümesinin esnek içi denir ve g° şeklinde gösterilir. Matematiksel olarak g esnek kümesinin esnek içi

$$g^\circ = \tilde{\bigcup}_{\substack{h_i \tilde{\subseteq} g, i \in I \\ h_i \in \tilde{\tau}}} h_i$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve ark, 2011).

Uyarı 4.4.1. g esnek kümesinin esnek içi, g nin esnek olarak kapsadığı en büyük esnek açık küme olarak ifade edilir ve

$$g^\circ = \tilde{\bigcup}\{h_i : h_i \in \tilde{\tau} \text{ ve } h_i \tilde{\subseteq} g\}$$

ile gösterilir (Çağman ve ark, 2011).

Örnek 4.4.1. $(f, \tilde{\tau}^o)$ esnek topolojik uzayında herhangi bir $\Phi \neq g \tilde{\subseteq} f$ için $g^\circ = \Phi$ dir. Ayrıca, $(f, \tilde{\tau}^1)$ esnek topolojik uzayında herhangi bir $h \tilde{\subseteq} f$ için $h^\circ = h$ olur.

Örnek 4.4.2. Örnek 4.1.1'de tanımlanmış $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayında tanımlı olan esnek kümelerin, esnek içleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
f_1^\circ &= \Phi, \\
f_2^\circ &= f_2, \\
f_3^\circ &= f_2, \\
f_4^\circ &= \Phi, \\
f_5^\circ &= \Phi, \\
f_6^\circ &= \Phi, \\
f_7^\circ &= \Phi, \\
f_8^\circ &= \Phi, \\
f_9^\circ &= \Phi, \\
f_{10}^\circ &= f_2, \\
f_{11}^\circ &= f_{11}, \\
f_{12}^\circ &= f_{11}, \\
f_{13}^\circ &= f_{13}, \\
f_{14}^\circ &= f_{11}, \\
f_{15}^\circ &= f, \\
f_{16}^\circ &= \Phi
\end{aligned}$$

Teorem 4.4.1. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. $g, h \tilde{\subseteq} f$ için,

i. $g^\circ \tilde{\subseteq} g$

ii. g esnek açık küme ancak ve ancak $g = g^\circ$

iii. $f^\circ = f$

iv. $(g^\circ)^\circ = g^\circ$

v. $g \tilde{\subseteq} h$ ise $g^\circ \tilde{\subseteq} h^\circ$

vi. $(g \tilde{\cap} h)^\circ = g^\circ \tilde{\cap} h^\circ$

vii. $g^\circ \tilde{\cup} h^\circ \tilde{\subseteq} (g \tilde{\cup} h)^\circ$

(Çağman ve ark, 2011).

Uyarı 4.4.2. Teorem 4.4.1'de verilen (vii) özelliğinin tersi genellikle doğru değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 4.4.3. Örnek 4.4.2'den $f_2^\circ \tilde{\cup} f_5^\circ = f_2$ dir. $f_2 \tilde{\cup} f_5 = f_{11}$ ve $f_{11}^\circ = f_{11}$ olur.

$$(f_2 \tilde{\cup} f_5)^\circ \tilde{\not\subseteq} f_2^\circ \tilde{\cup} f_5^\circ$$

olduğundan eşitlik sağlanmaz.

Tanım 4.4.2. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $g \in S_E(U)$ olsun. g esnek kümesini esnek kapsayan bütün esnek kapalı kümelerin esnek kesişimine g esnek kümesinin esnek kapanışı denir ve $\overline{g}$ şeklinde gösterilir. Matematiksel olarak g esnek kümesinin esnek kapanışı

$$\overline{g} = \tilde{\bigcap}_{\substack{g \tilde{\subseteq} h_i, i \in I \\ h_i^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}}} h_i$$

şeklinde tanımlanır (Çağman ve ark, 2011).

Uyarı 4.4.3. g esnek kümesinin esnek kapanışı, g tarafından esnek kapsanan en dar esnek kapalı küme olarak ifade edilir ve

$$\overline{g} = \tilde{\bigcap}_{i \in I} \{h_i : h_i^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau} \text{ ve } g \tilde{\subseteq} h_i\}$$

ile gösterilir.

Örnek 4.4.4. Örnek 4.1.1'de tanımlanmış $(f, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının esnek kapalılar ailesi,
$\tilde{F} = \Big\{ \Big\{ \big(e_1, U\big), \big(e_2, U\big) \Big\}, \Big\{ \big(e_1, \{u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1\}\big) \Big\}, \Big\{ \big(e_1, \{u_1, u_3\}\big) \Big\},$
$\Big\{ \big(e_1, \{u_1, u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_2\}\big) \Big\}, \Big\{ \big(e_1, \{u_3\}\big), \big(e_2, \{u_1, u_3\}\big) \Big\} \Big\}$
şeklindedir.

Teorem 4.4.2. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. $g, h \in S_E(U)$ için,

i. $\overline{\tilde{E}} = \tilde{E}$

ii. $g \tilde{\subseteq} \overline{g}$

iii. g esnek kapalıdır ancak ve ancak $g = \overline{g}$

iv. $\overline{(\overline{g})} = \overline{g}$

v. $g\tilde{\subseteq}h$ ise $\overline{g}\tilde{\subseteq}\overline{h}$

vi. $\overline{g\tilde{\cup}h} = \overline{g}\tilde{\cup}\overline{h}$

vii. $\overline{g\tilde{\cap}h}\tilde{\subseteq}\overline{g}\tilde{\cap}\overline{h}$

(Çağman ve ark, 2011).

Teorem 4.4.3. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. $g \in S_E(U)$ için,

i. $(\overline{g})^{\tilde{c}} = (g^{\tilde{c}})^{\circ}$

ii. $(g^{\circ})^{\tilde{c}} = (\overline{g^{\tilde{c}}})$

(Çağman ve ark, 2011).

Teorem 4.4.4. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. $g, h \in S_E(U)$ için,

i. $g \in \tilde{\tau}$ ise $g\tilde{\subseteq}\overline{(g^{\circ})}$

ii. $g^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}$ ise $\overline{(g^{\circ})}\tilde{\subseteq}g$

(Çağman ve ark, 2011).

Teorem 4.4.5. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $g, h \in S_E(U)$ ise $g^{\circ}\tilde{\cup}h^{\circ}\tilde{\subseteq}(\overline{g\tilde{\cup}h})^{\circ}$'dir (Çağman ve ark, 2011).

Teorem 4.4.6. $(f, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $g, h \in S_E(U)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

i. $g \in \tilde{\tau}$ ve $h^{\circ}\tilde{\subseteq}g\tilde{\subseteq}\ h$ ise $h^{\circ} = g$

ii. $h \in \tilde{F}$ ve $g\tilde{\subseteq}h\tilde{\subseteq}\overline{g}$ ise $\overline{g} = h$

İspat . $g, h \in S_E(U)$ olsun. Buradan

i. $g \tilde{\subseteq} h$ olduğundan $g^\circ \tilde{\subseteq} h^\circ$ ve $g \in \tilde{\tau}$ olduğundan $g^\circ = g$ olur. Buradan $g \tilde{\subseteq} h^\circ$ dir. $h^\circ \tilde{\subseteq} g$ olduğundan

$$h^\circ = g$$

elde edilir.

ii. $g \subseteq h$ ve $h \in \tilde{F}$ olduğundan $\overline{g} \subseteq \overline{h} = h$ olur. $h \subseteq \overline{g}$ olduğundan

$$\overline{g} = h$$

elde edilir.

4.5 Esnek Sürekli Fonksiyonlar

Bu bölümde, esnek açık kümelerle tanımlanan, esnek sürekli fonksiyon, esnek kapalı kümeler yardımı ile tanımlandı. Çeşitli esnek topolojik yapılar üzerinde esnek sürekli fonksiyonların özellikleri incelendi. Tanım ve değer kümeleri değiştirilerek esnek sürekli fonksiyon özelliklerinin korunup korunmadığı araştırıldı.

Tanım 4.5.1. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(g, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer her $h \in \tilde{\tau}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\tau}_1$ ise φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek sürekli fonksiyon denir (Aygünoğlu ve Aygün, 2011).

Burada, $X \subseteq E$ ve $Y \subseteq K$ için $f \in S_X(U)$ ve $g \in S_Y(U)$ esnek kümeleri üzerinde sırasıyla $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri tanımlanmıştır. Tezin bundan sonraki bölümlerinde de bu tanım kullanılacaktır.

Tanım 4.5.2. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(g, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. f esnek kümesinin tüm esnek kapalı esnek alt kümelerinin kümesi $\tilde{F}_1$, g esnek kümesinin tüm esnek kapalı alt kümelerinin kümesi $\tilde{F}_2$ olmak üzere, eğer her $k \in \tilde{F}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(k) \in \tilde{F}_1$ ise φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek sürekli fonksiyon denir.

Teorem 4.5.1. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir:

i. $\forall h \in \tilde{\tau}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\tau}_1$

ii. $\forall k \in \tilde{\digamma}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(k) \in \tilde{\digamma}_1$

İspat . "$\Rightarrow$:" :

$$\begin{aligned} \forall k \in \tilde{\digamma}_2 &\Leftrightarrow (k)_g^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}_2 \\ &\Leftrightarrow \varphi_\psi^{-1}((k)_g^{\tilde{c}}) \in \tilde{\tau}_1 \\ &\Leftrightarrow (\varphi_\psi^{-1}(k))_f^{\tilde{c}} \in \tilde{\tau}_1 \\ &\Leftrightarrow \varphi_\psi^{-1}(k) \in \tilde{\digamma}_1 \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$:" :

$$\begin{aligned} \forall h \in \tilde{\tau}_2 &\Leftrightarrow (h)_g^{\tilde{c}} \in \tilde{\digamma}_2 \\ &\Leftrightarrow \varphi_\psi^{-1}((h)_g^{\tilde{c}}) \in \tilde{\digamma}_1 \\ &\Leftrightarrow (\varphi_\psi^{-1}(h))_f^{\tilde{c}} \in \tilde{\digamma}_1 \\ &\Leftrightarrow \varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\tau}_1 \end{aligned}$$

Esnek sürekliliğin yeni bir karaktarizasyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 4.5.2. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_ψ esnek süreklidir.

ii. $\forall h \tilde{\subset} f$ için $\varphi_\psi(\overline{h}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(h)}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: φ_ψ esnek sürekli olsun. $\overline{\varphi_\psi(h)} \tilde{\in} \tilde{\digamma}_2$ dir. Buradan, $\varphi_\psi^{-1}(h) \tilde{\in} \tilde{\digamma}_1$ olur. Ayrıca,

$$h \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(h)) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(\overline{\varphi_\psi(h)})$$

olduğundan ve $\overline{h}$, h yi içeren esnek kapalıların en küçüğü olduğundan,

$$\overline{h} \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(\overline{\varphi_\psi(h)})$$

ve buradan da,

$$\varphi_\psi(\overline{h}) \tilde{\subset} \varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(\overline{\varphi_\psi(h)})) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(h)}$$

elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\varphi_\psi(\overline{h}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(h)}$ ve $k \tilde{\in} \digamma_2$ olsun. Bu durumda $k = \overline{k}$ dır. $h = \varphi_\psi^{-1}(k)$ olsun.

$$\varphi_\psi(\overline{h}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(h)} = \varphi_\psi(\overline{\varphi_\psi^{-1}(k)}) \tilde{\subset} \overline{k} = k$$

elde edilir ve buradan,

$$\overline{h}, \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(\overline{h})), \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(k) = h$$

bulunur.

$h \tilde{\subseteq} \overline{h}$ olduğundan $\overline{h} = h$ dır ve böylece h, f içinde esnek kapalıdır. O halde φ_ψ esnek süreklidir.

Teorem 4.5.3. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(g, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. $\tilde{\mathcal{B}}_1$ ile $\tilde{\mathcal{S}}_1$, f esnek uzayının ve $\tilde{\mathcal{B}}_2$ ile $\tilde{\mathcal{S}}_2$ de g esnek uzayının sırasıyla esnek baz ve esnek alt bazı olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_ψ esnek süreklidir.

ii. $\forall S_2 \in \tilde{\mathcal{S}}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(S_2) \in \tilde{\tau}_1$

iii. $\forall B_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(B_2) \in \tilde{\tau}_1$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: $\tilde{\mathcal{S}}_2 \tilde{\subset} \tilde{\tau}_2$ olduğundan Tanım 4.5.1 den açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $\forall B_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ esnek kümesinin $\tilde{\mathcal{S}}_2$ esnek alt bazının elemanlarının sonlu esnek kesişimi olarak yazıldığını biliyoruz; yani $\tilde{\mu}_2 \tilde{\subset} \tilde{\mathcal{S}}_2$ sonlu olmak üzere

$$B_2 = \tilde{\bigcap}_{S_2 \in \tilde{\mu}_2} S_2$$

Hipotezden, $\forall S_2 \in \tilde{\mu}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(S_2) \in \tilde{\tau}_1$ dir. Esnek açıklar aksiyomundan

$$\tilde{\bigcap}_{S_2 \in \tilde{\mu}_2} \varphi_\psi^{-1}(S_2) = \varphi_\psi^{-1}(B_2) \in \tilde{\tau}_1$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$: $\forall h \in \tilde{\tau}_2$ alalım. $\tilde{\mu}' \tilde{\subset} \tilde{\mathcal{B}}_2$ olmak üzere

$$h = \tilde{\bigcup}_{B_2 \in \tilde{\mu}'} B_2$$

şeklinde yazılabilir. $\forall B_2 \in \tilde{\mu}'$ için hipotezden $\varphi_\psi^{-1}(B_2) \in \tilde{\tau}_1$ dir ve esnek açıklar aksiyomu gereğince,

$$\tilde{\bigcup}_{B_2 \in \tilde{\mu}'} \varphi_\psi^{-1}(B_2) = \varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\tau}_1$$

elde edilir ki, bu da φ_ψ fonksiyonunun esnek sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 4.5.4. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(g, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

i. φ_ψ esnek süreklidir.

ii. $\forall h \tilde{\subset} g$ için $\varphi_\psi^{-1}(h^\circ) \tilde{\subset} [\varphi_\psi^{-1}(h)]^\circ$

iii. $\forall h \tilde{\subset} g$ için $\varphi_\psi^{-1}(\overline{h}) \tilde{\supset} \overline{[\varphi_\psi^{-1}(h)]}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: $h^\circ \tilde{\subset} g$ esnek açık bir alt kümedir ve φ_ψ esnek sürekli olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(h^\circ) \tilde{\subset} f$ esnek açık alt kümedir. Diğer taraftan,

$$h^\circ \tilde{\subset} h \Rightarrow \varphi_\psi^{-1}(h^\circ) \tilde{\subset} \varphi_\psi^{-1}(h) \Rightarrow [\varphi_\psi^{-1}(h^\circ)]^\circ \tilde{\subset} [\varphi_\psi^{-1}(h)]^\circ$$

elde edilir ki, burada $\varphi_\psi^{-1}(h^\circ) \tilde{\subset} f$ esnek açık olduğundan

$$[\varphi_\psi^{-1}(h^\circ)]^\circ = \varphi_\psi^{-1}(h^\circ)$$

olur.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: $\forall (h)_g^{\tilde{c}} \tilde{\subset} g$ için hipotezden,

$$\varphi_\psi^{-1}((h)_g^{\tilde{c}})^\circ \tilde{\subset} [\varphi_\psi^{-1}((h)_g^{\tilde{c}})]^\circ$$

Her iki tarafın esnek tümleyeni alınırsa,

$$[\varphi_\psi^{-1}((h)_g^{\tilde{c}})^\circ]_f^{\tilde{c}} \tilde{\supset} [[\varphi_\psi^{-1}((h)_g^{\tilde{c}})]^\circ]_f^{\tilde{c}}$$

elde edilir. Buradan,

$$[\varphi_\psi^{-1}(\overline{(h)_g^{\tilde{c}}})]_f^{\tilde{c}} \tilde{\supset} \overline{[\varphi_\psi^{-1}((h)_g^{\tilde{c}})]}_f^{\tilde{c}}$$

bulunur.

$$\varphi_\psi^{-1}(\overline{h}) \tilde{\supset} \overline{[\varphi_\psi^{-1}(h)]}$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$: $\forall h \tilde{\subset} g$ esnek kapalı için $\varphi_\psi^{-1}(h) \tilde{\subset} f$ in esnek kapalı olduğu gösterilmelidir. Bunun için, hipotezden,

$$\varphi_\psi^{-1}(\overline{h}) \tilde{\supset} \overline{[\varphi_\psi^{-1}(h)]}$$

ve h ın esnek kapalılığından $h = \overline{h}$ dır. Buradan,

$$\varphi_\psi^{-1}(h) \tilde{\supset} \overline{[\varphi_\psi^{-1}(h)]}$$

Diğer yandan, esnek bir kümenin esnek kapanışı, o esnek kümenin üst kümesi olduğundan,

$$\varphi_\psi^{-1}(h) \tilde{\subset} \overline{[\varphi_\psi^{-1}(h)]}$$

dır. O halde,

$$\varphi_\psi^{-1}(h) = \overline{[\varphi_\psi^{-1}(h)]}$$

elde edilir ki, bu da $\varphi_\psi^{-1}(h) \tilde{\subset} f$ in esnek kapalı olduğunu belirtir.

4.6 Esnek Sürekli Fonksiyonlarla İlgili Bazı Uygulamalar

Bu bölümde, bazı esnek topolojik yapılar üzerinde esnek sürekli fonksiyonların özellikleri incelendi. Tanım ve değer kümeleri değiştirilerek esnek sürekli fonksiyon özelliklerinin korunup korunmadığı araştırıldı.

Örnek 4.6.1. f üzerindeki $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisi en ince esnek topoloji ve g üzerindeki $\tilde{\tau}_2$ esnek yapısı herhangi bir esnek topolojik yapı olduğuna göre her $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek fonksiyonu esnek süreklidir. Gerçekten, $\forall h \in \tilde{\tau}_2$ alındığında,

$$\varphi_\psi^{-1}(h) \tilde{\subset} f \Leftrightarrow \varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\tau}^1 = \tilde{\tau}_1$$

olur.

Örnek 4.6.2. $(f, \{\tilde{\tau}_i\}_{i\in I})$ ve $(g, \tilde{\tau}')$ iki esnek topolojik uzay olsun. Eğer, φ_ψ : $S_E(U) \to S_K(V)$ esnek fonksiyonu herbir $\tilde{\tau}_i$ ye göre esnek sürekli ise $\tilde{\bigcap}_i \tilde{\tau}_i$ ye göre de esnek süreklidir. Gerçekten, $\forall h \in \tilde{\tau}'$ için $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\tau}_i$ $(\forall i \in I)$ olduğundan,

$$\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\bigcap}_i \tilde{\tau}_i$$

dir. Böylece, φ_ψ esnek fonksiyonunun $\tilde{\bigcap}_i \tilde{\tau}_i$ ye göre de esnek sürekli olduğu görülür. (Karataş, 2012).

Örnek 4.6.3. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(g, \tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzayları için $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}^1$ ise, her $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek fonksiyonu esnek süreklidir. Gerçekten, her $h \in \tilde{\tau}_2$ için, $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{\tau}_1$ olacağından φ_ψ esnek sürekli bir fonksiyondur. Buna karşın, $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}^0$ alınırsa, her $h \in \tilde{\tau}_2$ için $\varphi_\psi^{-1}(h) = f$ ya da $\varphi_\psi^{-1}(h) = \Phi$ koşulunu sağlayan φ_ψ esnek fonksiyonları esnek sürekli olacaktır. (Karataş, 2012).

Örnek 4.6.4. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(g, \tilde{\tau}_2)$ herhangi iki esnek topolojik uzay olmak üzere $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek fonksiyonu esnek sürekli olsun. $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisi yerine daha ince olan $\tilde{\tau}_1^*$ esnek topolojisi ve $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisi yerine daha kaba olan $\tilde{\tau}_2^*$ esnek topolojisi alınırsa, φ_ψ esnek fonksiyonu yine esnek sürekli kalır. Gerçekten, $\forall h_2^* \in \tilde{\tau}_2^*$ alalım. $\tilde{\tau}_2^* \subset \tilde{\tau}_2$ olduğundan $\forall h_2^* \in \tilde{\tau}_2$ dir. φ_ψ esnek fonksiyonunun esnek sürekli ve $\tilde{\tau}_1 \subset \tilde{\tau}_1^*$ olmasından $\varphi_\psi^{-1}(h_2^*) \in \tilde{\tau}_1^*$ elde edilir ki, bu da φ_ψ esnek fonksiyonunun esnek sürekli olduğunu belirtir.

4.7 Esnek Açık, Esnek Kapalı Fonksiyonlar ve Esnek Homeomorfizm

Bu bölümde, iki esnek topolojik uzay arasında tanımlanan esnek açık, esnek kapalı ve esnek homeomorfizm dönüşümlerinin temel özelliklerine yer verildi.

Tanım 4.7.1. $(f, \tilde{\tau}_1)$ ve $(g, \tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun.

i. Her $h \in \tilde{\tau}_1$ için $\varphi_\psi(h) \in \tilde{\tau}_2$ ise, φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek açık fonksiyon denir.

ii. Her $k \in \tilde{\digamma}_1$ için $\varphi_\psi(k) \in \tilde{\digamma}_2$ ise, φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek kapalı fonksiyon denir.

(Karataş, 2012).

Örnek 4.7.1. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $\tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}^1$ ise, φ_ψ esnek fonksiyonlarının hepsi hem esnek kapalı hem de esnek açık fonksiyonlardır. Gerçekten, her $h \in \tilde{\tau}_1$ için $\varphi_\psi(h) \in \tilde{\tau}_2$ ve $\forall m \in \tilde{\mathcal{F}}_1$ için de $\varphi_\psi(m) \in \tilde{\mathcal{F}}_2$ olacaktır (Karataş, 2012).

Teorem 4.7.1. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer φ_ψ esnek açık ise her $h \in S_X(U)$ için $\varphi_\psi(h^\circ)\tilde{\subseteq}\big(\varphi_\psi(h)\big)^\circ$'dir (Karataş, 2012).

Teorem 4.7.2. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay, $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon ve $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisi için bir esnek baz olsun. φ_ψ esnek açık ise her $h \in \tilde{\mathcal{B}}$ için $\varphi_\psi(h) \in \tilde{\tau}_2$'dir (Karataş, 2012).

Tanım 4.7.2. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek birebir örten bir fonksiyon olsun. Eğer φ_ψ ve φ_ψ^{-1} esnek sürekli fonksiyonlar ise, φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek homeomorfizm denir. Bu durumda $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzaylarına esnek homeomorf uzaylar denir (Karataş, 2012).

Örnek 4.7.2. $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\mathcal{P}}(f)$ ve $\tilde{\tau}_2 = \tilde{\mathcal{P}}(g)$ olmak üzere, her $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek birebir örten fonksiyon $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzayları için esnek homeomorfizmdir.

Teorem 4.7.3. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek homeomorfizm ise φ_ψ esnek fonksiyonu esnek açık fonksiyondur (Karataş, 2012).

Teorem 4.7.4. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek homeomorfizm ise φ_ψ esnek fonksiyonu esnek kapalı fonksiyondur (Karataş, 2012).

Teorem 4.7.5. $(f,\tilde{\tau}_1)$ ve $(g,\tilde{\tau}_2)$ iki esnek topolojik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek homeomorfizm olsun. Her $h \in S_E(U)$ için, $\varphi_\psi(\overline{h}) = \overline{\varphi_\psi(h)}$ 'dır (Karataş, 2012).

5. ESNEK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, esnek nokta ve esnek aitlik kullanılarak tanımlanan esnek metrik ve esnek metrik uzayın temel özelikleri açıklandı. Esnek metrik örnekleri verilip, esnek metrik uzayların uygulamaları sunuldu. Daha sonra, tanımlanan esnek açık yuvarın, esnek metrik içinde esnek açık küme olduğu gösterildi. Buradan her esnek metrik uzayın, üzerinde tanımlı esnek metriğe göre bir esnek topolojik uzay olduğu gösterildi. Ayrıca esnek kapalı yuvar ve esnek küre kavramları tanımlandı. Tanımlanan esnek sınırlı ve esnek sınırsız kümelerle ilgili örneklere yer verildi. Ardından, esnek metrik uzayda bir esnek kümenin çapı, bir esnek noktanın esnek kümeye uzaklığı ve iki esnek küme arasındaki uzaklığın temel özellikleri açıklandı.

5.1 Esnek Metrik

Bu bölümde, esnek nokta yardımıyla, bir esnek küme üzerinde esnek metrik uzay tanımlanmıştır. Ayrıca, esnek metrik örnekleri verilip, esnek metrik uzayların bazı uygulamaları sunulmuştur.

Tanım 5.1.1. $\emptyset \neq X \subseteq E$, $f \in S_X(U)$ ve $f : X \to \mathcal{P}(U)$ birebir bir fonksiyon olsun. $f_i, f_j, f_s \in S_X(U)$ ve $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \widetilde{\in} f$ olmak üzere, f esnek küme üzerinde tanımlı bir esnek metrik,

i. $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \geq 0.$

ii. $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0 \Leftrightarrow e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}$

iii. $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}})$

iv. $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})$

özelliklerini sağlayan bir

$$\tilde{d} : f \times f \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyondur. Eğer $\tilde{d}, f$ üzerinde bir esnek metrik ise o zaman $(f, \tilde{d})$ ikilisine bir esnek metrik uzay denir.

Uyarı 5.1.1. Esnek metrik uzay aksiyomlarından (i) diğer üç aksiyomun bir sonucudur. Çünkü $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ise esnek metrik uzay aksiyomlarından (ii), (iii) ve (iv) kullanılarak her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \widetilde{\in} f$ için,

$$0 = \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{i_{f_i}}) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) + \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}) = 2\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

yani $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \geq 0$ bulunur.
Bu nedenle $\tilde{d}$ nin esnek metrik olduğu gösterilirken (i) aksiyomunun gerçeklendiği ayrıca gösterilmeyebilir.

Uyarı 5.1.2. Verilen herhangi bir f esnek kümesi (f bir elemanlı bir esnek küme olmadıkça) birden çok esnek metriğe sahip olabilir. Genellikle hangi esnek metriğin kullanıldığı açık olarak biliniyorsa "$(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayı" yerine "f esnek metrik uzayı" yazılır. Bu bölüm boyunca, aksi belirtilmedikçe f bir esnek metrik uzay belirtecektir.

Tanım 5.1.2. Herhangi bir esnek metrik uzayın elemanları $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ değerine $e_{i_{f_i}}$ ile $e_{j_{f_j}}$ esnek noktaları arasındaki esnek uzaklık denir. (Karataş, 2012)

Uyarı 5.1.3. (i) aksiyomu, bir esnek noktanın, diğer bir esnek noktaya uzaklığının negatif olamayacağını; (ii) aksiyomu bir esnek noktanın kendisine uzaklığının sıfır olduğunu; (iii) aksiyomu da $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasının $e_{j_{f_j}}$ esnek noktasına olan uzaklığı ile $e_{j_{f_j}}$ esnek noktasının $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasına olan uzaklığının aynı olduğunu ifade eder. $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \widetilde{\in} f$ gibi üç tane esnek nokta alındığı zaman bu üç esnek noktanın oluşturduğu üçgenin bir kenarının uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük olması (iv) aksiyomu ile gösterilir.

Tanım 5.1.3. (iii) aksiyomuna özel olarak esnek simetri; (iv) aksiyomuna da özel olarak esnek üçgen eşitsizliği aksiyomu denir.

Tezin bu bölümünden, Bölüm 5.2' ye kadar verilen esnek metrik uzay ile ilgili önermelerde, E ve U kümelerinin sayılabilir sonsuz elemanlı kümeler oldukları kabul edilecektir. Ayrıca, bu önermelerin ispatında Tanım 3.2.1'de yapılan tanım dikkate alınacaktır.

Önerme 5.1.1. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \widetilde{\in} f$ için,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \begin{cases} 0, & a_{ki} = a_{kj}, \\ 1, & a_{ki} \neq a_{kj} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\tilde{d}$ esnek fonksiyonu f üzerinde bir esnek metriktir.

İspat . $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \widetilde{\in} f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,
(i) $a_{ki} = a_{kj}$ ise $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0$ ve $a_{ki} \neq a_{kj}$ ise $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 1 > 0$ olduğundan sağlanır.
(ii) $a_{ki} = a_{kj}$ ise $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0$ ve tersine $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0$ ise $a_{ki} = a_{kj}$ olduğundan sağlanır.
(iii) $a_{ki} = a_{kj}$ ise $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0 = \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}})$ ve $a_{ki} \neq a_{kj}$ ise $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 1 = \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ olduğundan esnek simetri özelliği sağlanır.
(iv) $a_{ki} = a_{kj}$ olsun. (i) den $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0, \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) = 0$ ve $\tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) = 0$ olduğundan

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0 \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})$$

sağlanır. Diğer taraftan, eğer $a_{ki} \neq a_{kj}$ ise $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 1$ olur. $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) = 1$ ve $\tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) = 1$ olduğundan,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})$$

esnek üçgen eşitsizliği aksiyomu sağlanır.

Tanım 5.1.4. Önerme 5.1.1 de tanımlanan $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayına esnek ayrık veya esnek diskret metrik uzay adı verilir.

Önerme 5.1.2. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \widetilde{\in} f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\tilde{d}_{|.|}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = |a_{ki} - a_{kj}|$$

ile tanımlı $\tilde{d}_{|.|}$, f esnek kümesi üzerinde bir esnek metrik belirtir.

İspat . (i), (ii), (iii) aksiyomları açık olduğundan (iv) özelliğini göstermemiz yeterli olacaktır.

(iv) $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \widetilde{\in} f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$\tilde{d}_{|.|}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = |a_{ki} - a_{kj}| = |(a_{ki} - a_{ks}) - (a_{ks} - a_{kj})|$$

$$\leq |a_{ki} - a_{ks}| + |a_{ks} - a_{kj}|$$

$$= \tilde{d}_{|.|}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}_{|.|}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})$$

elde edilir.

Tanım 5.1.5. Önerme 5.1.2 de tanımlanan $(f, \tilde{d}_{|.|})$ esnek metrik uzayına esnek doğal (alışılmış, standart) metrik adı verilir.

Önerme 5.1.3. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \widetilde{\in} f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}|$$

esnek metriği ile f esnek kümesi bir esnek metrik uzaydır.

İspat . (i) Mutlak değer negatif olamayacağından,

$$\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}| > 0$$

olur.
(ii) $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}| = 0$
$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n, |a_{ki} - a_{kj}| = 0$
$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n, a_{ki} - a_{kj} = 0$
$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n, a_{ki} = a_{kj}$
$\Leftrightarrow e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}$
(iii) $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{kj} - a_{ki}| = \tilde{d}_1(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}})$.
(iv) $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} |(a_{ki} - a_{ks}) + (a_{ks} - a_{kj})|$
ve önerme 3.2.3'den,
$= \sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{ks}| + |a_{ks} - a_{kj}|$
$= \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}_1(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})$
elde edilir. O halde $\tilde{d}_1$ fonksiyonu f üzerinde bir esnek metriktir ve $(f, \tilde{d}_1)$ bir esnek metrik uzaydır.

Önerme 5.1.4. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \widetilde{\in} f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\tilde{d}_2(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}|^2}$$

esnek metriği ile f esnek kümesi bir esnek metrik uzaydır.

İspat . (i) Mutlak değerli ifadelerin karesi negatif olamayacağından,

$$\tilde{d}_2(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}|^2} > 0$$

(ii) $\tilde{d}_2(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}|^2} = 0$
$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n$, $|a_{ki} - a_{kj}|^2 = 0$
$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n$, $a_{ki} - a_{kj} = 0$
$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n$, $a_{ki} = a_{kj}$
$\Leftrightarrow e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}$
(iii) $\tilde{d}_2(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_{ki} - a_{kj}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_{kj} - a_{ki}|^2} = \tilde{d}_2(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}})$
(iv) Esnek üçgen eşitsizliğini göstermek için Tanım 3.2.3'de

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |e_{i_{f_i}} + e_{j_{f_j}}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |e_{i_{f_i}}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |e_{j_{f_j}}|^2}$$

$p = 2$ için verilen esnek Minkowski eşitliğini kullanalım:
$a_{ki} = a_{ki} - a_{kj}$ ve $a_{kj} = a_{kj} - a_{ks}$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{d}_2(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) \leq \tilde{d}_2(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) + \tilde{d}_2(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})$$

esnek üçgen eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiş olur. O halde $(f, \tilde{d}_2)$ bir esnek metrik uzaydır.

Önerme 5.1.5. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \widetilde{\in} f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\tilde{d}_\infty(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = mak_{k=1,2,\ldots,n}|a_{ki} - a_{kj}|$$

ile tanımlı $\tilde{d}_\infty$ esnek metriği ile f esnek kümesi bir esnek metrik uzaydır.

İspat . (i) Mutlak değer negatif olamayacağından,

$$\tilde{d}_\infty(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = mak_{k=1,2,\ldots,n}|a_{ki} - a_{kj}| > 0$$

olur.

(ii)

$$\begin{aligned}\tilde{d}_\infty(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \quad 0 &\Leftrightarrow mak|a_{ki} - a_{kj}| = 0\\ &\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n,\ a_{ki} - a_{kj} = 0\\ &\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n,\ a_{ki} - a_{kj} = 0\\ &\Leftrightarrow e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}\end{aligned}$$

(iii) $\tilde{d}_\infty(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = mak|a_{ki} - a_{kj}| = mak|a_{kj} - a_{ki}| = \tilde{d}_\infty(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}})$

(iv)

$$\begin{aligned}\tilde{d}_\infty(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = mak|a_{ki} - a_{kj}| &= mak|(a_{ki} - a_{ks}) + (a_{ks} - a_{kj})|\\ &\leq mak(|a_{ki} - a_{ks}| + |a_{ks} - a_{kj}|)\\ &\leq mak|a_{ki} - a_{ks}| + mak|a_{ks} - a_{kj}|\\ &= \tilde{d}_\infty(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}_\infty(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})\end{aligned}$$

bulunur. O halde $(f, \tilde{d}_\infty)$ bir esnek metrik uzaydır.

Tanım 5.1.6. Önerme 5.1.5 de tanımlanan $\tilde{d}_\infty$ esnek metriğine f için düzgün esnek metrik adı verilir.

Önerme 5.1.6. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \widetilde{\in} f$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$\tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \frac{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})}{1 + \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{d}_3$ fonksiyonu f üzerinde bir esnek metriktir.

İspat . $\tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ in (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağladığı açıktır. (iv) özelliğinin olduğunu göstermek için,

$$\tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) \leqslant \tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) + \tilde{d}_3(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})$$

eşitsizliğinin var olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}\tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) = \tfrac{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}})}{1+\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}})} &\leqslant \tfrac{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})+\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})}{1+\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})+\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})} \\ &= \frac{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})}{1+\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})+\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})} + \frac{\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})}{1+\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})+\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})}\end{aligned}$$

eşitsizliğinde,

$$\tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \frac{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})}{1+\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})} \geqslant \frac{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})}{1+\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})+\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})}$$

ve

$$\tilde{d}_3(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}) = \frac{\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})}{1+\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})} \geqslant \frac{\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})}{1+\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})+\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})}$$

eşitsizliklerini yerine yazarak sonuca varılır.

Önerme 5.1.7. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. Her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için

$$\tilde{d}_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \min\{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}), 1\}$$

şeklinde tanımlı $\tilde{d}_s : f \times f \to \mathbb{R}$ fonksiyonu f üzerinde bir esnek metriktir.

İspat . Bunu göstermek için, $\tilde{d}_s$'nin esnek metrik şartlarını sağladığı gösterilmelidir.

i. $d_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \geq 0$ olduğu aşikardır.

$$\begin{aligned} d_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0 &\Leftrightarrow \min\left\{d(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}), 1\right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow d(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 0 \\ &\Leftrightarrow e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ii. $d_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = d(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ ise $d_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = d_s(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}})$'dir. Eğer $d_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = 1$ ise $d_s(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}) = 1$'dir. O halde $d_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = d_s(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}})$ olur.

iii. Keyfi $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \tilde{\in} f$ verilsin. Eğer

$$\tilde{d}_s(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) = 1 \text{ ya da } \tilde{d}_s(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) = 1$$

ise

$$\tilde{d}_s(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}_s(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) \geq 1 = \tilde{d}_s(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

olur. Eğer

$$\tilde{d}_s(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) < 1 \text{ ve } \tilde{d}_s(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) < 1$$

ise

$$\tilde{d}_s(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) = \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) \text{ ve } \tilde{d}_s(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) = \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_s(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) &= \min\left\{d(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}), 1\right\} \\
&\leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \\
&\leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) \\
&= \tilde{d}_s(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}_s(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $(f, \tilde{d}_s)$ de bir esnek metrik uzaydır.

5.2 Temel Kavramlar ve Özellikleri

Bu bölümde, tanımlanan esnek açık yuvarın temel özellikleri açıklandı. Esnek kapalı yuvar ve esnek küre kavramları tanımlandı. Esnek açık yuvar ve esnek kapalı yuvar arasındaki ilişki teoremlerle verildi. Ayrıca, esnek açık yuvarlar yardımıyla, esnek metrik uzayların esnek Hausdorff özelliği tanımlandı. Daha sonra, tanımlanan esnek sınırlı ve esnek sınırsız kümelerle ilgili örnekler verildi. Ardından, esnek metrik uzayda bir esnek kümenin çapı, bir esnek noktanın esnek kümeye uzaklığı ve iki esnek küme arasındaki uzaklığın temel özellikleri açıklandı.

5.2.1 Esnek Açık ve Kapalı Yuvar

Tanım 5.2.1. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay, $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ ve $r > 0$ olsun.

$$\tilde{B}_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r) = \{e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f : \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < r\}$$

$$\tilde{B}_{\tilde{d}}[e_{i_{f_i}}, r] = \{e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f : \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq r\}$$

$$\tilde{S}_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r) = \{e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f : \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = r\}$$

esnek kümelerine sırasıyla, r yarıçaplı ve $e_{i_{f_i}}$ merkezli esnek açık yuvar, esnek kapalı yuvar ve esnek küre adı verilir.
$\tilde{B}_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ esnek kümesi genel olarak, $\tilde{d}$ esnek metriğine göre $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasına olan uzaklıkları r den kesin küçük kalan f in $e_{j_{f_j}}$ esnek noktalarının oluşturduğu, r yarıçaplı, $e_{i_{f_i}}$ merkezli esnek açık yuvarı olarak adlandırılır. Gösterimde kolaylık için $\tilde{B}_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r) = \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)$ şeklinde yazılır.
$\tilde{B}_{\tilde{d}}[e_{i_{f_i}}, r]$ esnek kümesine de $\tilde{d}$ esnek metriğine göre $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasına olan uzaklıkları r den küçük veya eşit kalan f in $e_{j_{f_j}}$ esnek noktalarının oluşturduğu, r yarıçaplı, $e_{i_{f_i}}$ merkezli esnek kapalı yuvarı adı verilir. $\tilde{B}_{\tilde{d}}[e_{i_{f_i}}, r] = \tilde{B}[e_{i_{f_i}}, r]$ şeklinde yazılabilir.
$\tilde{S}_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ esnek kümesi ise, $\tilde{d}$ esnek metriğine göre $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasına eşit ve r kadar uzaklıkta olan f in $e_{j_{f_j}}$ esnek noktalarının oluşturduğu, r yarıçaplı, $e_{i_{f_i}}$ merkezli esnek küre olarak tanımlanır. $\tilde{S}_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r) = \tilde{S}(e_{i_{f_i}}, r)$ şeklinde yazılabilir.
Ayrıca, Tanım 5.3.3'de tanımlandığı üzere, $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ olmak üzere, $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasını içeren her g esnek açık kümesine, $e_{i_{f_i}}$ nin bir esnek açık komşuluğu denir. Esnek açık komşuluğu kapsayan her esnek alt kümeye de $e_{i_{f_i}}$ nin esnek komşuluğu denir. Buna göre, $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)$ esnek açık yuvarı genel olarak, $e_{i_{f_i}}$ nin bir esnek komşuluğu olarak adlandırılabilir.
f üzerinde tanımlanan esnek metrik değiştikçe, esnek yuvarların özellikleri değişir. Bununla birlikte her esnek metrik uzay için doğru olan esnek yuvarların temel bazı özellikleri vardır. İlk olarak $r_1 < r_2$ için,

$$\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_1) \tilde{\subset} \tilde{B}[e_{i_{f_i}}, r_1] \tilde{\subset} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_2) \tilde{\subset} \tilde{B}[e_{i_{f_i}}, r_2]$$

olduğu esnek yuvar tanımından açıktır.

Aşağıda esnek yuvarların bazı temel özellikleri verilecektir:

Önerme 5.2.1. $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$ bir $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayı içinde bir esnek açık yuvar ve $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$ olsun. Eğer,

$$0 < r < r_0 - \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \Rightarrow \tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r) \tilde{\subseteq} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$$

dir.

İspat . $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$ olduğundan $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < r_0$ dır ve bu sebeple,

$$0 < r < r_0 - \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

olacak şekilde bir r seçebilebilir.
$\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r)$ esnek açık yuvarı göz önüne alındığında, $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r)$ olur.

$$\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r) \tilde{\subset} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Bunun için, $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r)$ olsun. O zaman,

$$\tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) < r$$

ve

$$\tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{i_{f_i}}) \leq \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) + \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}) < r + \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{i_{f_i}}) < r_0$$

dır ve sonuç olarak,

$$e_{s_{f_s}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.1. Bu önerme ile, herhangi bir $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$ için $e_{j_{f_j}}$ in $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_0)$ esnek açık komşuluğunu içeren bir esnek açık komşuluğunun var olduğu sonucu elde edilir.

Uyarı 5.2.1. Önerme 5.2.1'de esnek açık yuvar yerine esnek kapalı yuvar alınsaydı önerme doğru olmazdı. Örnek olarak, $u_k \notin f_A(e_\ell)$ için $a_{kl} = 0$ olacak şekilde, R içinde $\tilde{B}[0, 1]$ esnek kapalı yuvarı alınsın. $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} \tilde{B}[0, 1]$ için $e_{i_{f_i}}$ in herhangi bir esnek komşuluğu $[0, \infty]$ aralığının herhangi bir parçasını içermek zorundadır ve bu nedenle bu komşuluk $\tilde{B}[0, 1]$ in bir esnek alt kümesi olamaz.

Önerme 5.2.2. $\tilde{B}_{\tilde{d}}$ bir esnek metrik uzay içinde esnek kapalı bir yuvar olsun. O zaman $\tilde{B}_{\tilde{d}}$ esnek yuvarı dışındaki herhangi bir $e_{i_{f_i}}$ esnek noktası için $e_{i_{f_i}}$ in bir esnek komşuluğu vardır öyle ki $\tilde{B}_{\tilde{d}}$ nın bu esnek komşuluk ile bir ortak noktası yoktur. (yani $\tilde{B}_{\tilde{d}}$ ile bu esnek komşuluğunun esnek arakesiti, esnek boş kümedir.)

İspat . Esnek metrik uzay $(f, \tilde{d})$ ve $\tilde{B}_{\tilde{d}} = \tilde{B}_{\tilde{d}}[e_{j_{f_j}}, r_0]$ olsun. $e_{i_{f_i}} \notin \tilde{B}_{\tilde{d}}$ olduğundan,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) > r_0$$

dır ve bu nedenle,

$$0 < r < \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) - r_0$$

olacak şekilde bir r seçilebilir. $\tilde{B}_{\tilde{d}_2} = \tilde{B}_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ olmak üzere $\tilde{B}_{\tilde{d}_2} \cap \tilde{B}_{\tilde{d}} = \Phi$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Bunun için,

1) $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} \tilde{B}_{\tilde{d}_2}$ olsun. Esnek üçgen eşitsizliğinden,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}})$$

elde edilir. O halde,

$$\tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) \geq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) - \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) > \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) - r > r_0$$

ve buradan da,

$$e_{s_{f_s}} \tilde{\notin} \tilde{B}_{\tilde{d}}$$

bulunur.

2) $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} \tilde{B}_{\tilde{d}}$ olsun. O zaman,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) \geq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) - \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) > \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) - r_0 > r$$

ve buradan da,

$$e_{s_{f_s}} \tilde{\notin} \tilde{B}_{\tilde{d}_2}$$

bulunur.

Uyarı 5.2.2. Yukarıdaki önermede $\tilde{B}_{\tilde{d}}$ esnek kapalı yuvar yerine esnek açık yuvar alınsaydı önerme doğru olmazdı. Örnek olarak, $u_k \notin f_A(e_\ell)$ için $a_{kl} = 0$ olacak şekilde, R içinde $\tilde{B}_{\tilde{d}} = \tilde{B}_{\tilde{d}}(0,1)$ esnek açık yuvarı alınsın ve $e_{i_{f_i}} \tilde{\notin} \tilde{B}_{\tilde{d}}$ olsun. $e_{i_{f_i}}$ in herhangi bir esnek komşuluğu ile $\tilde{B}_{\tilde{d}}$, ortak esnek nokta içermek zorundadır.

Teorem 5.2.1. $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayında eğer $e_{i_{f_i}}$ ve $e_{j_{f_j}}$, f in farklı iki esnek noktası ise, $(f, \tilde{d})$ içerisinde, sırasıyla, $e_{i_{f_i}}$ ve $e_{j_{f_j}}$ yi içeren esnek ayrık iki esnek açık yuvar vardır.

İspat . $e_{i_{f_i}} \neq e_{j_{f_j}}$ olacak şekilde $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ olsun. Buna göre $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) > 0$ olur. $\epsilon = \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) > 0$ olmak üzere, merkezleri sırasıyla $e_{i_{f_i}}$ ve $e_{j_{f_j}}$ de olan $g = \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, \frac{1}{3}\epsilon)$ ve $h = \tilde{B}(e_{j_{f_j}}, \frac{1}{3}\epsilon)$ esnek açık yuvarları gözönüne alınsın. g ve h ın esnek ayrık olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Eğer, $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} g \tilde{\cap} h$ ise, $p > 0$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, p) < \frac{1}{3}\epsilon$ ve $\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, p) < \frac{1}{3}\epsilon$ dır. Buna göre, esnek üçgen eşitsizliğinden,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon$$

elde edilir ki bu, $\epsilon = \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ olmasıyla çelişir. O halde

$$g \tilde{\cap} h = \Phi$$

olmak zorundadır.

Tanım 5.2.2. Yukarıdaki teorem ile verilen özelliğe esnek metrik uzayların esnek Hausdorff özelliği denir.

5.2.2 Esnek Sınırlı ve Esnek Sınırsız Kümeler

Tanım 5.2.3. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve g, f in esnek boştan farklı bir esnek alt kümesi olsun. Eğer her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ varsa, g esnek kümesine $\tilde{d}$ esnek metriğine göre esnek sınırlıdır denir. Eğer, g esnek sınırlı değilse, g ye esnek sınırsızdır (veya esnek sınırlı değildir) denir (Karataş, 2012).

Örnek 5.2.1. $(f, \tilde{d})$ esnek ayrık bir metrik uzay ve g, f in esnek boştan farklı herhangi bir esnek alt kümesi olsun. Her $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ verildiğinde $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq 1$ olduğundan g esnek sınırlıdır.

Sonuç 5.2.2. Esnek ayrık bir metrik uzayın esnek boştan farklı her esnek alt kümesi esnek sınırlıdır.

Örnek 5.2.2. Önerme 5.1.6'da tanımlanan $\tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ esnek metriği için

$$0 \leqslant \tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leqslant 1$$

olur. O halde $\tilde{d}_3(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ esnek metriği sınırlıdır. Buradan $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ esnek metriği ne olursa olsun bir f esnek kümesi üzerinde daima esnek sınırlı bir esnek metrik elde edilebileceği sonucuna varılır.

Teorem 5.2.2. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $\Phi \neq g \tilde{\subset} f$ olsun. g esnek kümesinin esnek sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq m$ olacak şekilde bir $m > 0$ olmasıdır.

İspat . "$\Rightarrow$:" g esnek sınırlı olsun. Bu durumda, $\forall e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}) \leq m$ olacak şekilde bir $m > 0$ vardır. $e_{s_{f_s}} = e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g \tilde{\subset} f$ olarak sabitlensin. Bu durumda, $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ ve $m > 0$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq m$ olur.

"$\Leftarrow$:" Herbir $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq m$ olacak şekilde bir $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ ve bir $m > 0$ var olsun. Buna göre, keyfi $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) + \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}) \leq 2m$$

olur. O halde g esnek sınırlıdır.

Önerme 5.2.3. Bir $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayının bir g esnek alt kümesinin esnek sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $g \tilde{\subset} h$ olacak biçimde bir h esnek kapalı yuvarının var olmasıdır.

İspat . "$\Rightarrow$:" g esnek sınırlı olsun. Bu durumda, $\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq m$ olacak şekilde bir $m > 0$ vardır. Buna göre, $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} \tilde{B}_{\tilde{d}} = \tilde{B}_{\tilde{d}}[e_{i_{f_i}}, m] = \{e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f : \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq m\}$ olur. Buradan, $h = \tilde{B}_{\tilde{d}}[e_{i_{f_i}}, m]$ olarak seçilirse, $g \tilde{\subset} h$ olacak biçimde bir h esnek kapalı yuvarı elde edilir.
"$\Leftarrow$:" $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ ve $k > 0$ olsun. $g \tilde{\subseteq} \tilde{B}_{\tilde{d}} = \tilde{B}_{\tilde{d}}[e_{i_{f_i}}, m]$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \leq m$ olur.

Tanım 5.2.4. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $\Phi \neq g \tilde{\subset} f$ olsun.

$$\tilde{\delta}(g) = diam(g) = sup\{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) : e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g\}$$

sayısına g esnek kümesinin esnek çapı denir (Karataş, 2012).
Eğer g esnek sınırlı ise $\tilde{\delta}(g) < \infty$, g esnek sınırsız ise $\tilde{\delta}(g) = \infty$ olarak ifade edilir. Ayrıca, $\tilde{\delta}(\Phi) = -\infty$ olarak tanımlanır.

Örnek 5.2.3. Eleman sayısı 1 den fazla olan esnek ayrık metrik uzay, esnek sınırlıdır ve yarıçapı 1 e eşittir. Ayrıca, eleman sayısı 1 olan bir esnek alt kümenin çapı 0 olur.

Teorem 5.2.3. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $g_1, g_2 \tilde{\subseteq} f$ olsun. Eğer $g_1 \tilde{\subseteq} g_2$ ise $\tilde{\delta}(g_1) \leq \tilde{\delta}(g_2)$'dir.

İspat . $g_1 \tilde{\subseteq} g_2$ ise

$$\left\{\tilde{\delta}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) : e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g_1\right\} \tilde{\subseteq} \left\{\tilde{\delta}(e_{s_{f_s}}, e'''_{f_4}) : e_{s_{f_s}}, e'''_{f_4} \tilde{\in} g_2\right\}$$

olduğundan, supremum özelliğinden

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}(g_1) &= \sup\left\{\tilde{\delta}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) : e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g_1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\tilde{\delta}(e_{s_{f_s}}, e'''_{f_4}) : e_{s_{f_s}}, e'''_{f_4} \tilde{\in} g_2\right\} \\
&= \tilde{\delta}(g_2)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde $g_1 \tilde{\subseteq} g_2$ ise $\tilde{\delta}(g_1) \leq \tilde{\delta}(g_2)$'dir.

Tanım 5.2.5. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay, $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ ve $\Phi \neq g \tilde{\subset} f$ olsun.

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, g) = \inf\left\{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) : e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g\right\}$$

sayısına $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasının g esnek kümesine uzaklığı denir (Karataş, 2012).

Teorem 5.2.4. $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzay ve $g_1 \tilde{\subseteq} g_2 \tilde{\subseteq} f$ olsun. Bu durumda $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, g_1) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, g_2)$'dır (Karataş, 2012).

Tanım 5.2.6. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $g_1, g_2 \tilde{\subseteq} f$ olsun.

$$\tilde{d}(g_1, g_2) = \tilde{\inf}\left\{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) : e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g_1 \text{ ve } e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g_2\right\}$$

sayısına, g_1 ve g_2 esnek kümeleri arasındaki uzaklık denir (Karataş, 2012).

5.3 Esnek Metrik Uzayların Esnek Topolojik Analizi

Bu bölümde, esnek metrik uzayların esnek topolojik analizi yapıldı. Tanımlanan esnek açık yuvarın, esnek metrik içinde esnek açık küme olduğu gösterildi. Esnek açık kümelerin esnek birleşim ve esnek kesişiminin de esnek açık olduğu ispatlandı. Buradan her esnek metrik uzayın, üzerinde tanımlı esnek metriğe göre bir esnek topolojik uzay olduğu gösterildi. Esnek metrik topolojisi tanımlanarak, esnek açık yuvar ve esnek kapalı yuvarların özellikleri incelendi. Esnek denk metrikler tanımlanarak, esnek denkliğin, varlıkların, esnek topolojik özellikleri koruyup, esnek metrik özellikleri korumak zorunda olmadığı gösterildi. Son olarak, esnek izometri tanımlandı.

Tanım 5.3.1. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $g \tilde{\subseteq} f$ olsun. Her $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r) \tilde{\subseteq} g$, koşulunu sağlayan öyle bir $r > 0$ varsa, g esnek kümesine $\tilde{d}$ esnek metriğine göre esnek açık küme (yada kısaca esnek açık küme) denir (Karataş, 2012).

Tanım 5.3.2. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $g \tilde{\in} S_E(U)$ olsun. Eğer $g^{\tilde{c}}$, esnek açık bir küme ise g esnek kümesine esnek kapalı denir.

Tanım 5.3.3. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $g \tilde{\subseteq} f$ olsun. f in g esnek alt kümesini kapsayan bir esnek açık alt kümesine g nin bir esnek açık komşuluğu denir. Ayrıca, g nin bir esnek açık komşuluğunu kapsayan herhangi bir esnek kümeye g nin bir esnek komşuluğu denir. $g = \{e_{i_{f_i}}\}$ olduğunda $\{e_{i_{f_i}}\}$ esnek kümesinin esnek komşulukları yerine $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasının esnek komşulukları terimi kullanılır.

Esnek açık yuvarlar ve esnek açık kümeler arasındaki ilişkiyi belirtmek için aşağıdaki teoremlere ihtiyaç vardır:

Teorem 5.3.1. Bir esnek metrik uzayda her esnek açık yuvar bir esnek açık kümedir. (Karataş, 2012).

İspat . $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)$ de bir esnek açık yuvar olsun. $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)$ için, $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < r$ dir. $\delta = r - \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ olarak tanımlansın.

$\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, \delta)$ esnek açık yuvarı için, $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{j_{f_j}}, \delta)$ verilsin. Buradan da $\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}) < \delta$ elde edilir. Böylece

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) + \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}) < r$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 3.1.3'den $\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, \delta) \tilde{\subseteq} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)$ olur. O halde bir esnek metrik uzayda her esnek açık yuvar bir esnek açık kümedir.

Aşağıdaki teorem bir esnek metrik uzay içindeki esnek açık alt kümeleri karakterize etmek için kullanılır:

Teorem 5.3.2. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. $g \tilde{\subset} f$ esnek alt kümesinin esnek açık olması için gerek ve yeter şart herhangi sayıda esnek açık yuvarın esnek birleşimi şeklinde ifade edilmesidir.

İspat . $g \tilde{\subset} f$ bir esnek açık alt küme olsun. O zaman herbir $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r) \tilde{\subset} g$ olacak şekilde bir $r > 0$ vardır. Bu nedenle,

$$\tilde{\cup}\{\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r) : e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g\} \tilde{\subseteq} \tilde{\cup}\{\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r) : e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g\}$$

elde edilir.

$\tilde{\mathcal{B}}$, esnek açık yuvarların bir ailesi olmak üzere $g = \{B : B \tilde{\in} \tilde{\mathcal{B}}\}$ olsun. O zaman her bir $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g$ için $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} B$ olacak şekilde bir $B \tilde{\in} \tilde{\mathcal{B}}$ vardır. Fakat 5.3.1 den B bir esnek açık kümedir. Bu sebeple,

$$\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r) \tilde{\subseteq} B \tilde{\subseteq} g$$

olacak şekilde bir $r > 0$ vardır. O halde g esnek açıktır.

Teorem 5.3.3. Bir esnek metrik uzayda iki esnek açık yuvarın esnek kesişimi de esnek açık kümedir.

İspat . $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_1)$ ve $\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r_2)$ esnek açık yuvarları verilsin. Herhangi bir $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_1) \tilde{\cap} B(e_{j_{f_j}}, r_2)$ için,

$$\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}) < r_1 \text{ ve } \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}) < r_2$$

olacağından Teorem 3.1.3'den

$$r = \min\{r_1 - \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{s_{f_s}}), r_2 - \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}})\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\tilde{B}(e_{s_{f_s}}, r)\tilde{\subseteq}\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_1)\tilde{\cap}\tilde{B}(e_{j_{f_j}}, r_2)$$

elde edilir. Böylece,

$$\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_1)\tilde{\cap}B(e_{j_{f_j}}, r_2)$$

bir esnek açık kümedir. $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_1)\tilde{\cup}B(e_{j_{f_j}}, r_2)$, verilen esnek açık yuvarlardan herhangi birini esnek kapsadığından esnek açık küme olur.

Teorem 5.3.4. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. Bu durumda Aşağıdaki şartlar sağlanır:

i. Φ ve f esnek açıktır.

ii. Esnek açık kümelerin herhangi sayıda esnek birleşimi de esnek açıktır.

iii. Sonlu sayıdaki esnek açık kümelerin herhangi sayıda esnek kesişimi esnek açıktır.

İspat . i. Φ içinde hiçbir esnek nokta olmadığından, Φ içindeki her esnek nokta Φ tarafından kapsanan bir esnek açık yuvarın merkezidir. Diğer yandan, herhangi bir $e_{i_{f_i}}\tilde{\in}f$ için, merkezi f üzerinde olan her esnek açık yuvar f içinde esnek kapsanır.

ii. Esnek açık kümelerin bir ailesi g_α olsun. Ayrıca, herbir g_α, esnek açık yuvarların bir esnek birleşimidir. Bu sebeple, $\tilde{\cup}g_\alpha$ esnek açık yuvarların bir esnek birleşimidir ve sonuç olarak $\tilde{\cup}g_\alpha$ bir esnek açık kümedir.

iii. Esnek açık kümelerin sonlu bir ailesi $\{g_\alpha : 1 \leq k \leq n\}$ ve $e_{i_{f_i}}\tilde{\in}\tilde{\cap}_{k=1}^{n} g_k$ olsun. Herbir $1 \leq k \leq n$ için $e_{i_{f_i}}\tilde{\in}g_k$ dır. Herbir g_k esnek açık olduğundan $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r_k)\tilde{\subset}g_k$ olacak şekilde $r_k > 0$ vardır. $r = min\{r_k : 1 \leq k \leq n\}$ yazılırsa, herbir $1 \leq k \leq n$ için $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)\tilde{\subset}g_k$ olur, yani, $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)\tilde{\subset}\tilde{\cap}_{k=1}^{n} g_k$ dır. O halde $\tilde{\cap}_{k=1}^{n} g_k$ esnek açıktır.
Böylece, Teorem 5.3.3' de verilen esnek kesişim özelliğinin genelleştirilmiş şekli ispatlanmış olur.

Sonuç 5.3.1. Yukarıda gösterilen (i), (ii) ve (iii) aksiyomları esnek topoloji aksiyomlarıdır. O halde, her esnek metrik uzay bir esnek topolojik uzaydır.

Tanım 5.3.4. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. $\tilde{d}$ esnek metriğine göre tanımlanmış esnek açık kümelerin, f üzerinde oluşturduğu esnek topolojiye esnek metrik topolojisi denir ve $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ ile gösterilir.

$$\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \{g\tilde{\subset} f : g \neq \Phi \text{ veya } \forall e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g \text{ için } \tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r)\tilde{\subset} g \text{ olacak biçimde } \exists r > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 5.3.1. $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ esnek metrik topolojisine, $\tilde{d}$ esnek metriğinin doğurduğu esnek topoloji denir. f esnek kümesi üzerinde bir $\tilde{d}$ esnek metriği, bu esnek küme üzerinde tek bir esnek metrik topoloji doğurur.

Örnek 5.3.1. $(f, \tilde{d})$ bir esnek ayrık metrik uzay olsun. $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f, r \leq 1$ için $\tilde{B}(e_{i_{f_i}}, r) = \{e_{i_{f_i}}\}$ olur. O halde her tek elemanlı esnek küme ve f in her esnek alt kümesi esnek açık kümedir. Buradan, esnek ayrık metriğin f üzerinde $\tilde{\tau} = \tilde{\mathcal{P}}(f)$ esnek ayrık topolojiyi doğurduğu sonucu elde edilir.

Tanım 5.3.5. $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayının tüm esnek kapalı alt kümelerinin ailesi $\tilde{F}_{\tilde{d}}$ ile gösterilecektir.

Tanım 5.3.6. $(f, \tilde{d})$ bir esnek esnek metrik uzay ve $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ olsun. $\tilde{\mathcal{B}}_{e_{i_{f_i}}} = \{g_\lambda\}_{\lambda \tilde{\in} \Lambda}$ ile herbiri $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasını içeren, esnek açık kümelerin bir ailesi, yani $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ esnek metrik topolojisinin bir esnek alt kümesi gösterilsin. $e_{i_{f_i}}$ i içeren esnek boştan farklı her g esnek alt kümesi için $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g_\mu \tilde{\subseteq} g$ olacak şekilde $\{g_\lambda\}_{\lambda \tilde{\in} \Lambda}$ ailesi içinde bir g_μ esnek kümesi var ise $\{g_\lambda\}_{\lambda \tilde{\in} \Lambda}$ ailesine $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasında bir esnek komşuluk tabanı veya esnek yerel taban denir.
Gösterimde kolaylık için $g_{\lambda(e_{i_{f_i}})}$ yerine $B_{e_{i_{f_i}}}$ notasyonu kullanılacaktır.

Önerme 5.3.1. $(f, \tilde{d})$ bir esnek esnek metrik uzay ve $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ olsun. $\tilde{\mathcal{B}}_{e_{i_{f_i}}} = \{B(e_{i_{f_i}}, p) : p > 0\}$ ailesi, $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \{g\tilde{\subset} f : g\tilde{\in}\tilde{\tau}\}$ esnek metrik topoljisinde, $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasında bir esnek komşuluk tabanıdır.

İspat . $g\tilde{\in}\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ ve $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g$ olsun. Esnek açık küme tanımından, $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} B(e_{i_{f_i}}, \epsilon)\tilde{\subset} g$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. O halde $\{B(e_{i_{f_i}}, p) : p > 0\}$ ailesi $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasında bir komşuluk tabanıdır.

Tanım 5.3.7. Bir $(f, \tilde{d})$ esnek metrik uzayı verildiğinde, $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ esnek metrik topolojisinin bir

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{g_\lambda\}_{\lambda \tilde{\in} \Lambda}$$

f içindeki alt ailesi için her esnek açık küme $\tilde{\mathcal{B}}$ daki bazı esnek kümelerin bir esnek birleşimi ise yani, herbir $g \tilde{\in} \tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ için $g = \tilde{\bigcup}_{B \tilde{\in} \tilde{\mathcal{B}}'} B$ olacak şekilde bir $\tilde{\mathcal{B}}' \tilde{\subset} \tilde{\mathcal{B}}$ alt ailesi varsa $\tilde{\mathcal{B}}$ ye $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ için bir esnek taban denir.

Teorem 5.3.5. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. Esnek açık alt kümelerin bir $\tilde{\mathcal{B}}$ alt ailesinin $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ esnek metrik topolojisi için bir esnek taban olması için gerek ve yeter şart her g esnek açık kümesi ve herbir $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g$ esnek noktası için $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} B_{e_{i_{f_i}}} \tilde{\subseteq} g$ olacak şekilde bir $B_{e_{i_{f_i}}} \tilde{\in} \tilde{\mathcal{B}}$ esnek kümesinin olmasıdır.

İspat . $\tilde{\mathcal{B}}$ alt kümesi $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ için bir esnek taban olsun. Bu durumda, herbir esnek açık g kümesi $\tilde{\mathcal{B}}$ içindeki esnek kümelerin bir esnek birleşimi olur. Bu durumda herbir $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g$ için $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} B_{e_{i_{f_i}}} \tilde{\subseteq} g$ olacak şekilde bir $B_{e_{i_{f_i}}} \tilde{\in} \tilde{\mathcal{B}}$ esnek kümesi vardır.
Diğer yandan, herbir g esnek açık alt kümesi ve herbir $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} B_{e_{i_{f_i}}} \tilde{\subseteq} g$ olacak şekilde bir $B_{e_{i_{f_i}}} \tilde{\in} \tilde{\mathcal{B}}$ esnek kümesinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\tilde{\cup}\{B_{e_{i_{f_i}}} : e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g\} \tilde{\subseteq} \tilde{\cup}\{B_{e_{i_{f_i}}} : e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g\}$$

olur. Buradan g esnek kümesinin $\tilde{\mathcal{B}}$ içindeki esnek kümelerin bir esnek birleşimi olduğu elde edilir. O halde $\tilde{\mathcal{B}}$ alt ailesi $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ için bir esnek tabandır.

Sonuç 5.3.2. Herhangi bir esnek metrik uzayda esnek açık yuvarların ailesi, ürettiği esnek metrik topolojisi için bir esnek tabandır.

Önerme 5.3.2. Boştan farklı bir f esnek kümesi üzerinde iki esnek metrik $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$ olsun. Her $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ ve $r > 0$ için aşağıdaki önermeler birbirine eşittir:

i. $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$

ii. $B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, k'_{e_{i_{f_i}}}) \tilde{\subseteq} B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ ve $B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, k_{e_{i_{f_i}}}) \tilde{\subseteq} B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, r)$ olacak şekilde $\exists k_{e_{i_{f_i}}} > 0$ ve $k'_{e_{i_{f_i}}} > 0$ vardır.

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ olsun. Bu durumda, $(f, \tilde{d})$ içindeki esnek açık yuvarlar $(f, \tilde{d}')$ içinde esnek açık; ve benzer şekilde $(f, \tilde{d}')$ içindeki esnek açık yuvarlar $(f, \tilde{d})$

içinde esnek açık olurlar. Esnek açık yuvar, esnek metrik topolojisi için bir esnek tabandır ve bu nedenle $B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ için,

$$B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, k'_{e_{i_{f_i}}}) \tilde{\subseteq} B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$$

olacak şekilde bir $k'_{e_{i_{f_i}}} > 0$ vardır. Benzer şekilde $B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, r)$ için,

$$B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, k_{e_{i_{f_i}}}) \tilde{\subseteq} B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, r)$$

olacak şekilde $\exists k_{e_{i_{f_i}}} > 0$ vardır.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $g \tilde{\in} \tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ olsun. g esnek açık olduğundan herbir $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g$ için,

$$B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r_{e_{i_{f_i}}}) \tilde{\subseteq} g$$

olacak şekilde bir $r_{e_{i_{f_i}}} > 0$ vardır. Fakat (ii) önermesinden,

$$B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, k'_{e_{i_{f_i}}}) \tilde{\subseteq} B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r) \tilde{\subseteq} g$$

olacak şekilde bir $k'_{e_{i_{f_i}}} > 0$ vardır. O halde $g \tilde{\in} \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ olur. Buradan $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} \tilde{\subset} \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{\tau}_{\tilde{d}'} \tilde{\subset} \tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ bulunur. Sonuç olarak, $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ eşitliği sağlanır.

Tanım 5.3.8. Boştan farklı bir f esnek kümesi üzerinde iki esnek metrik $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$ olsun. Eğer $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$ esnek metrikleri f üzerinde aynı esnek topolojisini doğuruyorsa, bu iki esnek metriğe esnek denk metriklerdir denir.

Örnek 5.3.2. f esnek kümesi üzerinde $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}' = \min\{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}), 1\}$ esnek metrikleri verilsin. $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$ esnek denk metriklerdir. Gerçekten de,
$\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ alınırsa, $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < r$ olur. Buradan,

$$\tilde{d}'(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = \min\{\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}), 1\} \leq \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < r$$

elde edilir. Buradan, $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} \supset \tilde{\tau}'_{\tilde{d}'}$ bulunur.
Diğer taraftan, $\delta = min(r, 1)$ olsun. $\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, \delta)$ için,

$$\tilde{d}'(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta$$

ve

$$min(\tilde{d}'(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}), 1) < \delta$$

bulunur. $min(r, 1)$ için $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < r$ ise $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ elde edilir. O halde $B_{\tilde{d}'}(e_{i_{f_i}}, \delta) \tilde{\subset} B_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}}, r)$ olur. Buradan, $\tilde{\tau}'_{\tilde{d}'} \tilde{\supset} \tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ olarak bulunur. Sonuç olarak, $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}'_{\tilde{d}'}$ olduğundan $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$ esnek metrikleri esnek denktir.

Uyarı 5.3.2. Esnek denk metrikler matematik varlıkların esnek topolojik özelliklerini koruyan esnek metriklerdir. Esnek metrik özelliklerini korumak zorunda değildir.

Tanım 5.3.9. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ birer esnek metrik uzaylar ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

ise, φ_ψ ye bir esnek izometri (esnek metrik uzay izometrisi, metrik koruyan) adı verilir.
$(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzayları verildiğinde eğer φ_ψ esnek örten bir esnek izometri ise bu uzaylar izometriktir denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir.

Uyarı 5.3.3. Her esnek izometri esnek birebirdir. O halde bir esnek izometri iki esnek metrik uzay arasında, esnek noktalar arasındaki uzaklığı koruyan 1:1 bir esnek fonksiyondur. Başka bir deyişle, iki esnek uzayın izometrik olması demek, basitçe, ilk uzayın elemanı $e_{i_{f_i}}$ olmak üzere $e_{i_{f_i}}$, $\varphi_\psi(e_{i_{f_i}})$ olarak adlandırılırsa, kesin olarak ikinci uzayı elde etmek demektir. Açıkça elemanları adlandırma yolu önemli değildir. Bu nedenle esnek izometrik uzaylar özdeş olarak düşünülebilir.

5.4 Esnek Metrik Uzaylar İçinde Esnek Süreklilik, Esnek Düzgün Süreklilik ve Esnek Homeomorfizm Dönüşümü

Bu bölümde esnek fonksiyonların esnek metrik uzaylar içinde esnek sürekliliği, esnek düzgün sürekliliği ve esnek homeomorfizm dönüşümleri, esnek nokta yardımıyla tanımlanmıştır. Aralarındaki ilişkiler araştırılmış ve uygun örneklere yer verilmiştir.

5.4.1 Esnek Süreklilik

Esnek topolojik uzayda, esnek açık kümeler yardımıyla tanımlanabilen esnek süreklilik, ilk kez esnek nokta yardımıyla, tanım ve değer kümesi esnek metrik uzaylar içinde olan esnek fonksiyonlarla tanımlandı. Esnek açık ve esnek kapalı kümeler yardımıyla da esnek sürekliliğin ayrı bir karaktarizasyonu verildi. Çeşitli teorem ve sonuçlarla, esnek sürekli fonksiyon özellikleri incelendi.

Tanım 5.4.1. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ ve $\forall \epsilon > 0$ sayısına karşılık $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ ve $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta$ olduğunda $\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) < \epsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa φ_ψ esnek fonksiyonu esnek süreklidir denir.
Bu tanım geometrik olarak, $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}, \delta)$ olduğunda $\varphi_\psi(e_{j_{f_j}}) \tilde{\in} B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon)$ veya

$$\varphi_\psi(B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}, \delta)) \tilde{\subseteq} B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon)$$

anlamındadır.

Uyarı 5.4.1. Eğer φ_ψ esnek fonksiyonu yukarıdaki tanımı f esnek kümesinin her esnek noktasında gerçekliyorsa, φ_ψ esnek fonksiyonuna her noktada esnek sürekli bir fonksiyon veya kısaca esnek sürekli fonksiyon denir.

Uyarı 5.4.2. Yukarıdaki tanımdan da görülmektedir ki $\delta > 0$ sayısı hem $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasına, hem de ϵ sayısına bağlıdır.

Önerme 5.4.1. Bir $(f, \tilde{d}_1)$ esnek metrik uzayından bir $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzayı içine tanımlı bir φ_ψ esnek fonksiyonunun bir $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ esnek noktasında esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall \epsilon > 0$ için

$$B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}, \delta) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon))$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ olmasıdır.

İspat . $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek fonksiyonunun $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ esnek noktasında esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall \epsilon > 0$ için $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için $\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) < \epsilon$ olmasıdır. Buradan,

$$e_{j_{f_j}} \tilde{\in} B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}, \delta) \Rightarrow \varphi_\psi(e_{j_{f_j}}) \tilde{\in} B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon)$$

veya

$$\varphi_\psi(B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}},\delta))\tilde{\subseteq}B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}),\epsilon)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Buradan,

$$B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}},\delta)\tilde{\subseteq}\varphi_\psi^{-1}(B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}),\epsilon))$$

elde edilir.

Tanım 5.4.2. $(f,\tilde{d}_1)$ esnek metrik uzayının tüm esnek açık alt kümelerinin ailesi $\tilde{\tau}_{\tilde{d}_1}$, tüm esnek kapalı alt kümelerinin ailesi $\tilde{F}_{\tilde{d}_1}$; $(g,\tilde{d}_2)$ esnek metrik uzayının tüm esnek açık alt kümelerinin ailesi $\tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$, tüm esnek kapalı alt kümelerinin ailesi $\tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ ile gösterilecektir.

Örnek 5.4.1. Bir esnek ayrık metrik uzay üzerinde tanımlı her esnek fonksiyon esnek süreklidir. Bunu göstermek için, $(f,\tilde{d}_1)$ ve $(g,\tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ olsun. $e_{i_{f_i}}\tilde{\in}f$ alınırsa, eğer her $e_{j_{f_j}}\tilde{\in}f$ için $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}},e_{j_{f_j}}) < 1$ ise f bir esnek ayrık metrik uzay olduğundan $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}},e_{j_{f_j}}) = 0$ olmalıdır. O halde her $e_{j_{f_j}}\tilde{\in}f$ için $e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}$ olmak zorundadır. Bu, $B_{\tilde{d}_2}(e_{j_{f_j}},1) = \{e_{i_{f_i}}\}$ anlamına gelir. O halde her $e_{j_{f_j}}\tilde{\in}f$ için $\varphi_\psi(e_{j_{f_j}}) = \varphi_\psi(e_{i_{f_i}})$ olur ve buradan da

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}),\varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = 0 < \epsilon$$

elde edilir. Buna göre $\delta = 1$ almak yeterlidir. Bu da φ_ψ esnek fonksiyonunun $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasında esnek sürekli olduğunu verir. $e_{i_{f_i}}$ esnek noktası, f uzayının herhangi bir esnek noktası olduğundan φ_ψ esnek fonksiyonu, f üzerinde esnek süreklidir.

Örnek 5.4.2. Herhangi bir esnek sabit fonksiyon esnek süreklidir. Gerçekten de, $(f,\tilde{d}_1)$ ve $(g,\tilde{d}_2)$ esnek metrik uzaylar ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek sabit bir fonksiyon olsun. Bu durumda, Tanım 3.2.3' den $e_{j_{f_j}}\tilde{\in}g$ olmak üzere her $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}\tilde{\in}f$ için $\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) = \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})$ elde edilir. Bu nedenle her zaman,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}),\varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = 0$$

olur. O halde herhangi bir $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ ve $\epsilon > 0$ verildiğinde δ olarak herhangi bir pozitif sayıyı alabiliriz. Bu da φ_ψ esnek sabit fonksiyonunun esnek sürekli olduğunu gösterir.

Örnek 5.4.3. Herhangi $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzayları için $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek izometri fonksiyonu f üzerinde esnek süreklidir. Bunu göstermek için $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ alınırsa, esnek izometri özelliğinden,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

elde edilir. $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} f$ olsun. $\epsilon > 0$ için $\delta = \epsilon$ seçilsin. Bu durumda $e_{k_{f_k}} \tilde{\in} f$ olmak üzere $\tilde{d}_1(e_{s_{f_s}}, e_{k_{f_k}}) < \delta$ olduğunda,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{s_{f_s}}), \varphi_\psi(e_{k_{f_k}})) = \tilde{d}_1(e_{s_{f_s}}, e_{k_{f_k}}) < \epsilon$$

olur. O halde φ_ψ, f üzerinde esnek süreklidir.

Teorem 5.4.1. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay olsun. f in herhangi ayrık ve esnek kapalı g_1 ve h_1 esnek alt kümeleri için $g_1 \tilde{\subseteq} g_2$ ve $h_1 \tilde{\subseteq} h_2$ olacak şekilde g_2 ve h_2 ayrık ve esnek açık esnek alt kümeleri vardır.

İspat . Eğer $g_1 = \Phi$ veya $h_1 = \Phi$ ise $g_2 = \Phi$ ve $h_2 = f$ ayrık ve esnek açık alt kümeleri alınarak ispat tamamlanır. Diğer yandan,
$g_1 \neq \Phi$ ve $h_1 \neq \Phi$ olsun. $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g_1$ için $e_{i_{f_i}} \tilde{\notin} h_1$ ve h_1 esnek kapalı olduğundan $\tilde{d}(e_{i_{f_i}}, h_1) = r_{e_{i_{f_i}}} > 0$ bulunur. Benzer şekilde $e_{k_{f_k}} \tilde{\in} h_1$ için $\tilde{d}(e_{k_{f_k}}, g_1) = r_{e_{k_{f_k}}} > 0$ olur.

$$g_2 = \tilde{\cup}\{B(e_{i_{f_i}}, \frac{r_{e_{i_{f_i}}}}{3}) : e_{i_{f_i}} \tilde{\in} g_1\}$$

ve

$$h_2 = \tilde{\cup}\{B(e_{k_{f_k}}, \frac{r_{e_{k_{f_k}}}}{3}) : e_{k_{f_k}} \tilde{\in} h_1\}$$

olarak tanımlansın. Buradan, $g_1 \tilde{\subseteq} g_2$ ve $h_1 \tilde{\subseteq} h_2$ elde edilir. Ayrıca g_2 ve h_2 nin her ikisi de esnek açık yuvarların esnek birleşimi olduğundan esnek açıktır. Diğer taraftan, kabul edelim ki, $e_{s_{f_s}} \tilde{\in} g_2 \tilde{\cap} h_2$ olsun. O halde,

$$e_{s_{f_s}} \tilde{\in} B(e_{j_{f_j}}, \frac{r_{e_{j_{f_j}}}}{3}) \tilde{\cap} B(e_{j_{f_j}}, \frac{r_{e_{j_{f_j}}}}{3})$$

olacak şekilde bir $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} g_1$ ve $e_{j_{f_j}} \tilde{\in} h_1$ vardır. Buradan,

$$\tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{j_{f_j}}) \leq \tilde{d}(e_{j_{f_j}}, e_{s_{f_s}}) + \tilde{d}(e_{s_{f_s}}, e_{j_{f_j}}) < \frac{r_{e_{j_{f_j}}}}{3} + \frac{r_{e_{j_{f_j}}}}{3} \leq \frac{2}{3}\tilde{d}(g_1, h_1)$$

bulunur ki, g_1 ve h_1 esnek ayrık olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $g_2 \tilde{\cap} h_2 = \Phi$ olmak zorundadır.

Teorem 5.4.2. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. φ_ψ nin f üzerinde esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart $(g, \tilde{d}_2)$ içindeki her h esnek açık kümesi için $\varphi_\psi^{-1}(h)$ esnek kümesinin $(f, \tilde{d}_1)$ içinde esnek açık olmasıdır.

İspat . "$\Rightarrow$:" φ_ψ, f üzerinde esnek sürekli ve h, $(g, \tilde{d}_2)$ içinde esnek açık bir küme olsun. Φ ve f esnek açık olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(h) \neq \Phi$ ve $\varphi_\psi^{-1}(h) \neq f$ olmak üzere $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} \varphi_\psi^{-1}(h)$ alınsın. Bu durumda $\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) \tilde{\in} h$ olur. h esnek açık olduğundan $(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon) \tilde{\subseteq} h$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ vardır. φ_ψ, $e_{i_{f_i}}$ de esnek sürekli olduğundan,

$$B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}, \delta) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon)) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(h)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. O halde $\varphi_\psi^{-1}(e_{i_{f_i}})$ in herbir esnek noktası birer esnek iç noktadır ve bu nedenle $\varphi_\psi^{-1}(h)$, f içinde esnek açıktır.

"$\Leftarrow$:" g_Y nin her h esnek açık kümesi için $\varphi_\psi^{-1}(h)$, f içinde esnek açık olsun. O halde, hipotezden, $\varphi_\psi^{-1}(B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon))$, f içinde esnek açıktır.

$$e_{i_{f_i}} \tilde{\in} \varphi_\psi^{-1}(B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon))$$

olduğundan,

$$B_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}, \delta) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(B_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \epsilon))$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Sonuç olarak, φ_ψ, $e_{i_{f_i}}$ de esnek süreklidir ve böylece $e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ keyfi olduğundan φ_ψ, f üzerinde esnek süreklidir.

Teorem 5.4.3. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. φ_ψ nin f üzerinde esnek sürekli olması için gerek ve yeter şart $(g, \tilde{d}_2)$ içindeki her k esnek kapalı kümesi için $\varphi_\psi^{-1}(k)$ esnek kümesinin $(f, \tilde{d}_1)$ içinde esnek kapalı olmasıdır.

İspat . "$\Rightarrow$:" φ_ψ, f üzerinde esnek sürekli ve k, $(g,\tilde{d}_2)$ içinde esnek kapalı bir küme olsun. Bu durumda $g\tilde{\setminus}k$, g içinde esnek açıktır ve böylece $\varphi_\psi^{-1}(g\tilde{\setminus}k)$, f içinde esnek açıktır.

$$\varphi_\psi^{-1}(g\tilde{\setminus}k) = f\tilde{\setminus}\varphi_\psi^{-1}(k)$$

olduğundan $f\tilde{\setminus}\varphi_\psi^{-1}(k)$ esnek açıktır. O halde $\varphi_\psi^{-1}(k)$, f içinde esnek kapalıdır.
"$\Leftarrow$:" $\forall k\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ olsun. Bu durumda, $g\tilde{\setminus}\tilde{\in}\tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$ olur. Hipotezden, $k\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ için, $\varphi_\psi^{-1}(k)\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ olduğundan $f\tilde{\setminus}\varphi_\psi^{-1}(k)$, f içinde esnek açıktır. Böylece,

$$f\tilde{\setminus}\varphi_\psi^{-1}(k) = \varphi_\psi^{-1}(g\tilde{\setminus}k)$$

olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(g\tilde{\setminus}k)\tilde{\in}\tilde{\tau}_{\tilde{d}_1}$ olur. O halde φ_ψ, f üzerinde esnek süreklidir.

Teorem 5.4.4. $(f,\tilde{d}_1)$ ve $(g,\tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. $g\tilde{\subseteq}f$ için aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_ψ esnek süreklidir.

ii. $\varphi_\psi(\overline{g}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(g)}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: φ_ψ esnek sürekli olsun. $\overline{\varphi_\psi(g)}\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ dir. Buradan, $\varphi_\psi^{-1}(g)\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ olur. Ayrıca,

$$g \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(g)) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(\overline{\varphi_\psi(g)})$$

olduğundan ve $\overline{g}$, g yi içeren esnek kapalıların en küçüğü olduğundan,

$$\overline{g} \tilde{\subseteq} \varphi_\psi^{-1}(\overline{\varphi_\psi(g)})$$

ve buradan da,

$$\varphi_\psi(\overline{g}) \tilde{\subset} \varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(\overline{\varphi_\psi(g)})) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(g)}$$

elde edilir.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\varphi_\psi(\overline{g}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(g)}$ ve $k\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ olsun. Bu durumda $k = \overline{k}$ dır. $g = \varphi_\psi^{-1}(k)$ olsun.

$$\varphi_\psi(\overline{g}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(g)} = \varphi_\psi(\overline{\varphi_\psi^{-1}(k)}) \tilde{\subset} \overline{k} = k$$

elde edilir ve buradan,

$$\overline{g}, \tilde{\subseteq} \varphi_{\psi}^{-1}(\varphi_{\psi}(\overline{g})), \tilde{\subseteq} \varphi_{\psi}^{-1}(k) = g$$

bulunur.

$g\tilde{\subseteq}\,\overline{g}$ olduğundan $\overline{g} = g$ dır ve böylece g, f içinde esnek kapalıdır. O halde φ_{ψ} esnek süreklidir.

Teorem 5.4.5. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_{\psi} : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. $h\tilde{\subseteq}g$ olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_{ψ} esnek süreklidir.

ii. $\overline{\varphi_{\psi}^{-1}(h)}\,\tilde{\subset}\,\varphi_{\psi}^{-1}(\overline{h})$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: φ_{ψ} esnek sürekli olsun. $h\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ olduğundan $\varphi_{\psi}^{-1}(\overline{h})\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ olur. $h\,\tilde{\subset}\,\overline{h}$ olduğundan $\varphi_{\psi}^{-1}(h)\tilde{\subset}\varphi_{\psi}^{-1}(\overline{h})$ bulunur. $\overline{\varphi_{\psi}^{-1}(h)}$, $\varphi_{\psi}^{-1}(h)$ esnek kümesini içeren en dar esnek kapalı küme olduğundan,

$$\overline{\varphi_{\psi}^{-1}(h)}\tilde{\subset}\varphi_{\psi}^{-1}(\overline{h})$$

elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $h\tilde{\subseteq}g$ için $\overline{\varphi_{\psi}^{-1}(h)}\tilde{\subset}\varphi_{\psi}^{-1}(\overline{h})$ ve $\forall k\tilde{\in}\tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ alınsın. Bu durumda, $\overline{k} = k$ ve buradan da,

$$\overline{\varphi_{\psi}^{-1}(k)}\tilde{\subset}\varphi_{\psi}^{-1}(\overline{k}) = \varphi_{\psi}^{-1}(k)$$

bulunur ve böylece,

$$\overline{\varphi_{\psi}^{-1}(k)} = \varphi_{\psi}^{-1}(k)$$

elde edilir. O halde φ_{ψ}, esnek süreklidir.

Sonuç 5.4.1. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_{\psi} : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_{ψ} esnek süreklidir.

ii. $\forall h\tilde{\subseteq}g$ için $\overline{\varphi_{\psi}^{-1}(h)}\,\tilde{\subset}\,\varphi_{\psi}^{-1}(\overline{h})$

iii. $\forall g \tilde{\subseteq} f$ için $\varphi_\psi(\overline{g}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(g)}$

5.4.2 Esnek Düzgün Süreklilik

Bu bölümde esnek düzgün süreklilik tanımlanarak, esnek süreklilik ile ilişkisi araştırıldı. Esnek düzgün sürekli her fonksiyonun esnek sürekli olduğu fakat tersinin genellikle doğru olmadığı örnekle gösterildi. Esnek çap yardımıyla, esnek düzgün sürekliliğin yeni bir karaktarizasyonu verildi. Ayrıca, esnek izometri, esnek birim ve esnek sabit fonksiyonun esnek düzgün sürekli olduğu gösterildi.

Tanım 5.4.3. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $\forall \epsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için

$$\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta \Rightarrow \tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) < \epsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa φ_ψ esnek fonksiyonu esnek düzgün süreklidir denir.

Esnek süreklilik ile esnek düzgün süreklilik tanımları birbirine benzer görünse de, aralarında önemli farklılıklar vardır.Aşağıda bu farklılıklar araştırılmıştır:

Uyarı 5.4.3. $\forall e_{i_{f_i}}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ öyle ki,

$$\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta$$

koşulunu sağlayan $\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) < \epsilon$$

ise φ_ψ ye f üzerinde esnek süreklidir denir. Farklılık, δ sayısının hesaplanmasında ortaya çıkmaktadır:

Esnek süreklilik tanımda δ sayısı $e_{i_{f_i}}$ den sonra hesaplanmaktadır ve bu nedenle δ, hem ϵ, hem de $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasına bağlı olabilir. Esnek düzgün süreklilikte ise, δ sayısı $e_{i_{f_i}}$ den önce hesaplanmaktadır ve bu nedenle seçilen δ sayısı her $e_{i_{f_i}}$ için düzgün süreklilik koşulunu sağlamak zorundadır. Yani her $e_{i_{f_i}}$ için aynı δ

sayısı alınabilir ve bu nedenle δ, ϵ sayısına bağlıdır fakat $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasından bağımsızdır.
Bu sebeple bir esnek küme üzerinde esnek düzgün sürklilikten bahsedilebilir ve asla bir esnek noktada esnek düzgün süreklilikten bahsedilemez.

Uyarı 5.4.4. Esnek düzgün sürekli her fonksiyon esnek süreklidir fakat tersi genellikle doğru değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 5.4.4. f ve g üzerinde Önerme 5.1.2'de verilen esnek metrik uzaylar tanımlansın.

$$\varphi_\psi : (f, \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = |a_{ki} - a_{kj}|) \;\; \rightarrow \;\; (g_Y, \tilde{d}_2(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = |a_{ki} - a_{kj}|)$$

ile verilen $\varphi_\psi(a_{ki}) = a_{ki}^2$ kuralına sahip esnek fonksiyon esnek süreklidir fakat esnek düzgün sürekli değildir.
Esnek sürekli olduğunu göstermek için, $\epsilon > 0$ ve $\forall e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ için $\delta > 0$ verildiğinde $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ alınsın. $||a_{ki}| - |a_{kj}|| \leq |a_{ki} - a_{kj}| < \delta$ olur. Buradan, $-(|a_{ki}| - |a_{kj}|) < \delta$ ve $|a_{kj}| < \delta + |a_{ki}|$ olur.

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) &= |a_{ki}^2 - a_{kj}^2|) \\
&= |a_{ki}^2 - a_{ki}a_{kj} + a_{ki}a_{kj} - a_{kj}^2| \\
&= |a_{ki}(a_{ki} - a_{kj}) + a_{kj}(a_{ki} - a_{kj})| \\
&\leqslant |a_{ki}||a_{ki} - a_{kj}| + |a_{kj}||a_{ki} - a_{kj}|
\end{aligned}$$

$|a_{kj}| = c_0$ olmak üzere $\delta \leq min\{\frac{\epsilon}{2|a_{ki}|}, \frac{\epsilon}{2c_0}\}$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}
|a_{ki}||a_{ki} - a_{kj}| + |a_{kj}||a_{ki} - a_{kj}| &< |a_{ki}||a_{ki} - a_{kj}| + c_0|a_{ki} - a_{kj}| \\
&< |a_{ki}|\frac{\epsilon}{2|a_{ki}|} + c_0\frac{\epsilon}{2c_0} = \epsilon
\end{aligned}$$

O halde φ_ψ esnek süreklidir.
Esnek düzgün sürekli olmadığını göstermek için, esnek düzgün sürekli olduğunu kabul edelim. $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ için $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için,

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) &= |a_{ki}^2 - (a_{ki} + a_{kj})^2|) \\
&= |a_{ki}^2 - (a_{ki}^2 + 2a_{ki}a_{kj} + a_{kj}^2)| \\
&= |a_{ki}^2 - a_{ki}^2 - 2a_{ki}a_{kj} - a_{kj}^2| \\
&= |-1||2a_{ki}a_{kj}|
\end{aligned}$$

olur. φ_ψ esnek düzgün sürekli olduğundan,

$$|-1||2a_{ki}a_{kj}| < \epsilon$$

kalır. Buradan,

$$2|a_{ki}||a_{kj}| < \epsilon$$

ve

$$|a_{kj}| < \frac{\epsilon}{2|a_{ki}|} = \delta$$

olur. δ, hem ϵ, hem de a_{ki} ye bağlı olduğundan φ_ψ esnek düzgün sürekli olamaz.

Tanım 5.4.4. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $\forall e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ olsun. $\forall e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için $\sup \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$ sayısına $e_{i_{f_i}}$ esnek noktasının $\tilde{d}$ esnek metriğinde esnek çapı denir ve $\delta_{\tilde{d}}(e_{i_{f_i}})$ ile gösterilir.

Teorem 5.4.6. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ iki esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_ψ esnek düzgün süreklidir.

ii. $\epsilon > 0$ için $\exists \mu > 0$ vardır öyle ki, $\delta_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}) \leq \mu$ koşulunu sağlayan $\forall e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ için $\delta_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}})) \leq \epsilon$ olur.

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: φ_ψ esnek düzgün sürekli olsun. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \mu > 0$ için $\delta_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}) < \mu$ koşulunu sağlayan $\forall e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ için $\delta_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}) \leq \mu$ olduğundan $\forall e_{k_{f_k}} \tilde{\in} f$ için,

$$sup\, \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{k_{f_k}}) \leq \mu$$

olur. φ_ψ esnek düzgün sürekli olduğundan, $\forall e_{i_{f_i}}, e_{k_{f_k}} \tilde{\in} f$ için,

$$\delta_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{k_{f_k}})) \leq \epsilon$$

kalır. $\forall e_{j_{f_j}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} \varphi_\psi(e_{i_{f_i}})$ için,

$$d_2(e_{j_{f_j}}, e_{j_{f_j}}) \leq \epsilon$$

olur. Buradan,

$$sup\, \tilde{d}_2(e_{j_{f_j}}, e_{j_{f_j}}) \leq \mu$$

elde edilir. Bu da esnek çap tanımı olduğundan,

$$\delta_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}})) \leq \epsilon$$

elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\forall e_{i_{f_i}}, e_{k_{f_k}} \tilde{\in} f$ için, $\delta_{\tilde{d}_1}(e_{i_{f_i}}) < \mu$ olduğundan,

$$sup\, \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{k_{f_k}}) \leq \mu$$

olur. (ii) önermesinden,

$$\delta_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{k_{f_k}})) \leq \epsilon$$

kalır. O halde,

$$sup\, \tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{k_{f_k}})) \leq \epsilon$$

olur. Buradan,

$$\delta_{\tilde{d}_2}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{k_{f_k}})) \leq \epsilon$$

elde edilir. O halde φ_ψ esnek düzgün süreklidir.

Önerme 5.4.2. Herhangi $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzayları için $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek izometri fonksiyonu f üzerinde esnek düzgün süreklidir.

İspat . φ_ψ bir esnek izometri olduğundan $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

özelliğine sahiptir. $\forall \epsilon > 0$ için $\delta = 0$ olmak üzere $e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için $\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \epsilon$ olduğunda,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \epsilon$$

olduğundan, φ_ψ esnek düzgün süreklidir.

Tanım 5.4.5. $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. $\forall e_{i_{f_i}} \tilde{\in} f$ için,

$$\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) = e_{i_{f_i}}$$

oluyorsa, φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek birim fonksiyon denir. Özel olarak i_f ile gösterilir.

Önerme 5.4.3. Bir esnek metrik uzay üzerinde tanımlı esnek birim fonksiyon, esnek düzgün süreklidir.

İspat . $(f, \tilde{d})$ bir esnek metrik uzay ve φ_ψ bir esnek birim fonksiyon olsun. φ_ψ nin tanımından $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için,

$$\tilde{d}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

olur. O halde, $\epsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \epsilon$ seçilerek,

$$\tilde{d}(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = \tilde{d}(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) < \delta$$

sağlandığından φ_ψ esnek düzgün süreklidir.

Önerme 5.4.4. Herhangi bir esnek sabit fonksiyon esnek düzgün süreklidir.

İspat . $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzaylar ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek sabit fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ ve $e_f \tilde{\in} g$ için

$$\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) = \varphi_\psi(e_{j_{f_j}}) = e_f$$

olur. Bu nedenle daima,

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) = 0$$

dır. O halde $\epsilon > 0$ verildiğinde $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için δ herhangi bir pozitif sayı olarak seçilebileceğinden φ_ψ esnek düzgün süreklidir.

5.4.3 Esnek Homeomorfizm Dönüşümü

Bir esnek metrik uzaydan bir başka esnek metrik uzaya tanımlı esnek sürekli bir esnek fonksiyon verildiğinde, eğer varsa esnek ters fonksiyonun sürekliliğini araştırma ihtiyacı doğmaktadır. Bu da esnek homeomorfizm dönüşümünün tanımlanmasına yardımcı olmaktadır.

Bu bölümde, esnek metrik uzaylar arasında, esnek homeomorfizm tanımlanarak çeşitli esnek homeomorfizm örnekleri verildi. Esnek denk metriklerin, varlıkların esnek topolojik özelliklerini koruyan esnek metrikler olduğu gösterildi. Esnek açık ve esnek kapalı kümeler yardımıyla, esnek homeomorfizm tanımlanarak, özellikleri teoremlerle ispatlandı.

Tanım 5.4.6. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzaylar ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. Eğer φ_ψ esnek birebir, esnek örten ve esnek sürekli ise ve g üzerinde esnek sürekli bir ters fonksiyona sahipse, φ_ψ ye bir esnek homeomorfizm denir.

Tanım 5.4.7. Eğer $(f, \tilde{d}_1)$ esnek metrik uzayından $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzayı üzerine en az bir esnek homeomorfizm varsa, f ile g esnek homeomorfiktir ya da esnek homeomorftur denir. Bu durumda g ye f in esnek homeomorf görüntüsü denir. Burada esnek üzerine, esnek örten yani $\varphi_\psi(f) = g$ anlamında kullanılmıştır.

Uyarı 5.4.5. Esnek homeomorfizmler uzayların esnek topolojik özelliklerini koruduklarından esnek topolojik dönüşüm de denilmektedir.

Teorem 5.4.7. Herbir esnek örten olan esnek izometri bir esnek homeomorfizmdir.

İspat . φ_ψ, $(f, \tilde{d}_1)$ esnek metrik uzayından $(g, \tilde{d}_2)$ esnek metrik uzayı üzerine esnek örten bir esnek izometri olsun. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f$ için $\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) = \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})$ olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) = \varphi_\psi(e_{j_{f_j}}) \ &\Rightarrow \ \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) \\
&= \ \tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{j_{f_j}})) \\
&= \ \tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{i_{f_i}})) \\
&= \ 0
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$e_{i_{f_i}} = e_{j_{f_j}}$$

elde edilir. φ_ψ esnek birebir ve esnek örten olduğundan, φ_ψ^{-1} tanımlıdır.
$\forall e_{i_{g_i}}, e_{j_{g_j}} \tilde{\in} g$ için,

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_1(\varphi_\psi^{-1}(e_{i_{g_i}}), \varphi_\psi^{-1}(e_{j_{g_j}}) \ &= \ \tilde{d}_2(\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(e_{i_{g_i}})), \varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(e_{j_{g_j}}))) \\
&= \ \tilde{d}_2(e_{i_{g_i}}, e_{j_{g_j}})
\end{aligned}$$

olduğundan φ_ψ^{-1} bir esnek izometridir. Örnek 5.4.3'den her esnek izometri, esnek sürekli olduğundan φ_ψ ve φ_ψ^{-1} esnek süreklidir. O halde Tanım 5.4.6' dan φ_ψ bir esnek homeomorfizmdir.

Uyarı 5.4.6. Her esnek homeomorfizm bir esnek izometri olmak zorunda değildir. Aşağıda buna ait bir örnek verilmiştir:

Örnek 5.4.5. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ birer esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ bir esnek fonksiyon olsun. $\forall e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}} \tilde{\in} f,\ e_{i_{g_i}} \tilde{\in} g$ için

$$\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) = \frac{a_{k_i}}{1 + |a_{k_i}|}$$

şeklinde tanımlansın.
$\forall \ell \tilde{\in} \mathbb{N}$ için $u_k \tilde{\in} f_A(e_\ell)$ olsun.

$$\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}) = \frac{a_{k_i}}{1 + |a_{k_i|}} = \frac{a_{k_i}}{1 + a_{k_i}} = a'_{k_i}$$

olur. Bu eşitlik a_{k_i} ye göre çözülürse,

$$\begin{aligned}
\tfrac{a_{k_i}}{1+a_{k_i}} &= a'_{k_i} \\
&\Rightarrow a_{k_i} = a'_{k_i} + a_{k_i} a'_{k_i} \\
&\Rightarrow a_{k_i} - a_{k_i} a'_{k_i} = a'_{k_i} \\
&\Rightarrow a_{k_i} = \tfrac{a'_{k_i}}{1 - a'_{k_i}}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\varphi_\psi^{-1}(e_{i_{f_i}}) = \frac{a_{k_i}}{1 - a_{k_i}}$$

olduğundan φ_ψ^{-1} esnek süreklidir. Hem φ_ψ, hem de φ_ψ^{-1} esnek sürekli olduğundan φ_ψ bir esnek homeomorfizmdir.
Diğer yandan, $u_k \tilde{\in} f_A(e_i)$ ve $u_k \notin f_A(e_j)$ olsun. Bu durumda, $a_{k_i} = 1$ ve $a_{k_j} = 0$ olur.

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{i_{f_i}})) = |\frac{a_{k_i}}{1 + |a_{k_i|}} - \frac{a_{k_j}}{1 + |a_{k_j|}}| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

olur. Ayrıca,

$$\tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}}) = |a_{k_i} - a_{k_j}| = |1| = 1$$

bulunur.

$$\tilde{d}_2(\varphi_\psi(e_{i_{f_i}}), \varphi_\psi(e_{i_{f_i}})) \neq \tilde{d}_1(e_{i_{f_i}}, e_{j_{f_j}})$$

olduğundan φ_ψ bir esnek izometri değildir.

Önerme 5.4.5. f esnek kümesi üzerinde tanımlanan iki esnek metrik $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$ ve bunların ürettikleri esnek topolojiler sırasıyla, $\tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ ve $\tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ olsun. i_f ile esnek birim fonksiyon gösterilmek üzere, aşağıdaki önermeler denktir:

i. i_f bir esnek homeomorfizmdir.

ii. $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: i_f bir esnek homeomorfizm olsun. Esnek homeomorfizmler uzaylarınesnek topolojik özelliklerini koruduğundan $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ olur.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\tilde{\tau}_{\tilde{d}} = \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ olsun. Esnek birim fonksiyon esnek birebir ve esnek örten olduğundan tersi tanımlıdır.
$\forall h \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$ için,

$$i_f^{-1}(h) = h \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}'} = \tilde{\tau}_{\tilde{d}}$$

olduğundan i_f esnek süreklidir.
Diğer yandan, $\forall g \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}}$ için,

$$(i_f^{-1})^{-1}(g) = i_f(g) = g \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}'}$$

olduğundan i_f^{-1} esnek süreklidir. O halde i_f bir esnek homeomorfizmdir.

Sonuç 5.4.2. $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$, f esnek kümesi üzerinde iki esnek metrik olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. i_f bir esnek homeomorfizmdir.

ii. $\tilde{d}$ ve $\tilde{d}'$ esnek denk metriklerdir.

Sonuç 5.4.3. Sonuç 5.4.2'den, esnek denk metriklerin matematik varlıkların esnek topolojik özelliklerini koruyan esnek metrikler olduğu görülür.

Teorem 5.4.8. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ birer esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek birebir ve esnek örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_ψ bir esnek homeomorfizmdir.

ii. $\forall k \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ için $\varphi_\psi(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$

iii. $\forall h \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ için $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: φ_ψ bir esnek homeomorfizm olsun. Bu durumda φ_ψ^{-1} esnek sürekli olduğundan $\forall k \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ için $(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ olur. φ_ψ esnek birebir olduğundan,

$$(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(k) = \varphi_\psi(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$$

elde edilir.
Diğer gerektirmeler de, benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 5.4.9. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ birer esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek birebir ve esnek örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_ψ bir esnek homeomorfizmdir.

ii. $\forall g \tilde{\subseteq} f$ için $\varphi_\psi(\overline{g}) = \overline{\varphi_\psi(g)}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: φ_ψ bir esnek homeomorfizm olsun. φ_ψ esnek sürekli olduğundan, Teorem 5.4.4'den,

$$\varphi_\psi(\overline{g}) \tilde{\subset} \overline{\varphi_\psi(g)}$$

sağlanır. Ayrıca $\forall g \tilde{\subseteq} f$ için $\overline{g} \tilde{\subseteq} f$ esnek kapalıdır. φ_ψ bir esnek homeomorfizm olduğundan φ_ψ esnek kapalıdır. Buradan,

$$\varphi_\psi(\overline{g}) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$$

olur. Diğer yandan, $g \tilde{\subseteq} \overline{g}$ olduğundan, $\varphi_\psi(g) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi(\overline{g})$ bulunur. $\overline{\varphi_\psi(g)}$, $\varphi_\psi(g)$ yi içeren esnek kapalı kümelerin en darı olduğundan,

$$\overline{\varphi_\psi(g)} \tilde{\subseteq} \varphi_\psi(g) \tilde{\subseteq} \varphi_\psi(\overline{g})$$

bulunur. O halde,

$$\varphi_\psi(\overline{g}) = \overline{\varphi_\psi(g)}$$

elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\forall g \tilde{\subseteq} f$ için $\varphi_\psi(\overline{g}) = \overline{\varphi_\psi(g)}$ ve $k \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ olsun. Bu durumda Teorem 5.5.2'den φ_ψ esnek süreklidir. $\forall k \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ için $k = \overline{k}$ olduğundan,

$$\varphi_\psi(k) = \varphi_\psi(\overline{k}) = \overline{\varphi_\psi(k)}$$

ve buradan,

$$\varphi_\psi(k) = \overline{\varphi_\psi(k)}$$

elde edilir. O halde $\varphi_\psi(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ olmalıdır.

$\forall k \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ için $\varphi_\psi(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ olduğundan φ_ψ esnek kapalıdır. O halde φ_ψ^{-1} esnek süreklidir. O halde φ_ψ bir esnek homeomorfizmdir.

Teorem 5.4.10. $(f, \tilde{d}_1)$ ve $(g, \tilde{d}_2)$ birer esnek metrik uzay ve $\varphi_\psi : S_E(U) \to S_K(V)$ esnek birebir ve esnek örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i. φ_ψ bir esnek homeomorfizmdir.

ii. $\forall h \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_1} \;\; \Leftrightarrow \;\; \varphi_\psi(h) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$

iii. $\forall k \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1} \;\; \Leftrightarrow \;\; \varphi_\psi(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$

İspat . $(i) \Rightarrow (ii)$: φ_ψ bir esnek homeomorfizm olsun. Bu durumda φ_ψ ve φ_ψ^{-1} esnek süreklidir. $\forall h \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_1}$ için,

$$(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(h) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$$

olur. $(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(h) = \varphi_\psi(h)$ olduğundan,

$$\varphi_\psi(h) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$$

elde edilir.

Diğer yandan, $\varphi_\psi(h) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$ olsun. φ_ψ esnek sürekli olduğundan,

$$(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(h) = \varphi_\psi(k) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_1}$$

olur. esnek birebir olduğundan,

$$(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(h) = h$$

eşitliği vardır. Buradan,

$$h \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_1}$$

elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $\forall k \in \tilde{F}_{\tilde{d}_1}$ için $f\tilde{\setminus}k \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_1}$ olur. (ii) den,

$$\varphi_\psi(f\tilde{\setminus}k) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$$

bulunur. Buradan,

$$g\tilde{\setminus}\varphi_\psi(f\tilde{\setminus}k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$$

olur. φ_ψ esnek örten olduğundan,

$$g\tilde{\setminus}\varphi_\psi(f\tilde{\setminus}k) = \varphi_\psi(f)\tilde{\setminus}\varphi_\psi(f\tilde{\setminus}k) = \varphi_\psi(k)$$

olarak bulunur. Buradan da,

$$\varphi_\psi(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$$

elde edilir.

Diğer yandan, $\varphi_\psi(k) \in \tilde{F}_{\tilde{d}_2}$ olsun. Bu durumda,

$$g\tilde{\setminus}\varphi_\psi(k) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$$

olur. φ_ψ esnek örten olduğundan,

$$g\tilde{\setminus}\varphi_\psi(k) = \varphi_\psi(f)\tilde{\setminus}\varphi_\psi(k) = \varphi_\psi(f\tilde{\setminus}k)$$

elde edilir. O halde,

$$\varphi_\psi(f\tilde{\setminus}k) \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_2}$$

bulunur. (ii) den,

$$f\tilde{\setminus}k \in \tilde{\tau}_{\tilde{d}_1}$$

ve buradan da,

$$k \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{d}_1}$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$: (iii) önermesi sağlansın. $\forall k \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{d}_1}$ için (iii) den,

$$\varphi_\psi(k) \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{d}_2}$$

olur. $(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(k) = k$ ve $k \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{d}_1}$ olduğundan, φ_ψ esnek süreklidir.
Diğer yandan, (iii) önermesinden, $\forall k \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{d}_1}$ için $\varphi_\psi(k) \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{d}_2}$ sağlanır. Buradan,

$$\varphi_\psi(k) = (\varphi_\psi^{-1})^{-1}(k) \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{d}_2}$$

bulunur. Esnek kapalıların ters görüntüsü esnek kapalı olduğundan, φ_ψ^{-1} esnek süreklidir. O halde, φ_ψ bir esnek homeomorfizmdir.

6. SONUÇ

Bu çalışma, Çağman ve Enginoğlu (2010) tarafından tanımlanan esnek küme işlemlerine dayalı olarak yapılmıştır. Esnek topoloji, f esnek kümesi üzerine kurulmuş ve esnek topolojik uzay, f esnek kümesinin $\tilde{\tau}$ esnek topolojisine aitliği esas alınarak tanımlanmıştır. Esnek baz tanımlamış ve aynı esnek küme üzerinde aynı esnek baza sahip iki esnek topolojinin birbirine eşit iki esnek topoloji olduğu gösterilmiştir. Esnek alt uzay tanımlanmış ve esnek topolojik uzayın esnek bazı yardımıyla alt uzayın esnek bazı incelenmiştir. Esnek alt uzay ile evrensel esnek uzay arasındaki ilişki sunulmuştur. Esnek kümenin esnek içi ve esnek kapanışı tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Esnek sürekli fonksiyon, esnek açık fonksiyon ve esnek kapalı fonksiyon tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Esnek sürekli fonsiyon yardımıyla esnek homeomorfizm tanımlanmış ve esnek homeomorf uzaylar arasında esnek kümelerin esnek kapanışlarının yada esnek içlerinin esnek homeomorfizm altındaki görüntüleri incelenmiştir.

Son olarak, esnek nokta yardımıyla esnek metrik uzay tanımlanmış ve esnek metriğe dayalı üretilen esnek açık kümelerin bir esnek topolojik uzay olduğu gösterilmiştir. Esnek metrik uzayda bir esnek kümenin çapı, bir esnek noktanının esnek kümeye olan uzaklığı ve iki esnek kümenin birbirine uzaklığı tanımlanmış ve bazı özellikleri incelemiştir. Esnek topolojik uzayda, esnek açık kümeler yardımıyla tanımlanabilen esnek süreklilik, ilk kez esnek nokta yardımıyla, tanım ve değer kümesi esnek metrik uzaylar içinde olan esnek fonksiyonlarla tanımlanmıştır. Esnek açık yuvar ve esnek kapalı yuvarlar yardımıyla da esnek süreklilik tanımlanıp, aralarındaki ilişkiler sunulmuştur.

Esnek topolojik uzaylarda tanımlanamayan, esnek düzgün süreklilik kavramı tanımlanmıştır. Neden bir esnek noktada değil, bir esnek küme üzerinde esnek düzgün süreklilikten bahsedilebileceği detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca, tanımları benzer görünse de, esnek süreklilik ile esnek düzgün süreklilik arasındaki farklılıklar gösterilmiştir. Esnek düzgün sürekli fonksiyon örnekleri verilerek çeşitli esnek fonksiyonlarla arasındaki ilişki sunulmuştur. Esnek metrik uzaylar arasında, esnek homeomorfizm tanımlanarak çeşitli esnek homeomorfizm örnekleri verilmiştir. Esnek topolojik özelliklerin esnek homeomorfizmler altında korunduğu örneklerle gösterilmiştir.

Bu çalışmada incelenen esnek metrik uzaylar haricinde, esnek metrik uzaylar içinde esnek yakınsaklık ve esnek tamlık, esnek normlu vektör uzaylar, esnek Banach sabit nokta teoremi, esnek bağlantılılık ve esnek kompakt uzaylar gibi temel metrik özelliklerin incelenebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F. ve Tanay, B., 2010. Soft sets and soft rings. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K. ve Shabir, M., 2009. On some new operations in soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 57, 1547-1553.

Aktaş, H. ve Çağman, N., 2007. Soft sets and soft groups. Information Sciences, 177(1), 2726-2735.

Aslım, G., 2011. Genel Topoloji. Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları Yayın No:109, İzmir.

Atanassov, K., 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Syst. 64(2):87-96.

Atagün, A. O. ve Sezgin, A., 2011. Soft substructures of rings, fields and modules. Computers and Mathematics with Applications, 61, 592-601.

Aygünoğlu, A. ve Aygün, H., 2011. Some notes on soft topological spaces. Neural Computation and Application 521-011-0722-3.

Babitha, K. V. ve Sunil, J. J., 2010. Soft set relations and functions. Computers and Mathematics with Applications, 60, 1840-1849.

Başkan, T., and Bizim, O., and Cangül, I.N., 2006. Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim ve Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara.

Bayramov, S., ve Gündüz, Ç., 2004. Genel Topoloji. Çağlayan Kitabevi, İstanbul.

Bülbül, A., 2011. Genel Topoloji. Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Chang, C.L., 1968. Fuzzy Topological Spaces. J. Math. Anal Appl. 24:182-190.

Chen, D., Tsang, E.C.C. ve Yeung, D.S., 2003. Some notes on the parameterization reduction of soft sets. International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 3,1442-1445.

Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S. ve Wang, X., 2005. The parameterization reduction of soft sets and its applications. Computers and Mathematics with Applications, 49(1), 757-763.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010. Soft matrix theory and its decision making. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3308-3314.

Çağman, N. ve Enginoğlu, S., 2010. Soft set theory and uni-int decision making. European Journal of Operational Research, 207, 848-855.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., 2010. Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1(1), 21-35.

Çağman, N., Enginoğlu, S. ve Çıtak, F., 2011. Fuzzy soft set theory and its applications. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8(3), 137-147.

Çağman, N., Çıtak, F. ve Enginoğlu, S., 2011. FP-soft set theory and its applications. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2(2), 219-226.

Çağman, N., Karataş, S. ve Enginoğlu, S., 2011. Soft Topology. Computers and Mathematics with Applications, 62, 351-358.

Çoker, D., 1996. An introdction to intuitionistic fuzzy topological spaces. Fuzzy Sets and Systems 88 (1997) 81-89.

Dönmez, A., 2000. Metrik ve Topolojik Uzaylar. Beta Yayıncılık, İstanbul.

Feng, F., Jun, Y. B. ve Zhao, X., 2008. Soft semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56(10), 2621-2628.

Feng, F., Jun, Y. B., Liu, X. ve Li, L., 2010. An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234, 10-20.

Feng, F., Li, Y. ve Leoreanu-Fotea, V., 2010. Application of level soft sets in decision making based on interval-valued fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 60, 1756-1767.

Feng, F., Liu, X. Leoreanu-Fotea, V. ve Jun, Y. B., 2011. Soft sets and soft rough sets. Information Sciences, 181, 1125-1137.

Frechet, M., 1906. Soft metric spaces. DSc Mathematics, University of Bordeaux, Ph. D. Thesis.

Gong, K., Xiao, Z. ve Zhang, X., 2010. The bijective soft set with its operations. Computers and Mathematics with Applications, 60, 2270-2278.

Hacısalihoglu, H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoglu, A., 2009. Matematik Terimleri Sözlüğü. Türk Dil Kurumu Yayınları, İstanbul.

İnan, E. ve Öztürk, M. A., 2011. Fuzzy soft rings and fuzzy soft ideals. Neural Computing and Applications,

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Liu, H. ve Tang, J., 2010. Interval valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties. Computers and Mathematics with Applications, 60, 906-918.

Jiang, Y., Tang, Y., Chen, Q., Wang, J. ve Tang, S., 2010. Extending soft sets with description logics. Computers and Mathematics with Applications, 59, 2087-2096.

Jun, Y. B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 56(1), 1408-1413.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Park, C. H., 2008. Soft set theory applied to commutative ideals in BCK-algebras. Journal of Applied Mathematics and Informatics, 26(3-4), 707-720.

Jun, Y. B. ve Park, C. H., 2008. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. Information Sciences, 178(1) 2466-2475.

Jun, Y. B. ve Kim, H. S., 2009. Pseudo d-algebras. Information Sciences, 179, 1751-1759.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Park, C. H., 2009. Soft set theory applied to ideals in d-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 57, 367-378.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Zhan, J., 2009. Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 58, 2060-2068.

Jun, Y. B. ve Park, C. H., 2009. Applications of soft sets in Hilbert algebras. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6(2), 75-86.

Jun, Y. B., Lee, K. J. ve Park, C. H., 2010. Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI- algebras. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3180-3192.

Karaçay, T., 2009. Genel Topoloji. Kuban Matbaacılık Yayıncılık, Ankara.

Karataş, S., 2012 Esnek Topolojik Yapılar. Gaziosmanpaşa Üni. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, Tokat.

Kharal, A., and Ahmad, B., 2011. Mapping on Soft Classes, New Mathematics and Natural Computation Vol. 7, No.3 471-481.

Kılıç, S.A., and Erdem, M., 2002. Genel Topoloji. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayınları No:190, Bursa.

Kılıç, S.A., and Erdem, M., 1999. Metrik Uzaylar ve Topoloji. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayınları No:146, Bursa.

Klir, G. J. ve Folger, T. A., 1988. Fuzzy sets, uncertainty and information. State University, New York.

Koçak, M., 2011. Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmaları. Kampüs Yayıncılık, Kütahya.

Kong, Z., Gao, L., Wang, L. ve Li, S., 2008. The normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algoritm. Computers and Mathematics with Applications, 56(1), 3029-3037.

Kong, Z., Gao, L. ve Wang, L., 2009. Comment on A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 223, 540-542.

Kovkov, D. V., Kolbanov, V. M. ve Molodtsov, D. A., 2007. Soft Sets Theory-Based Optimization. Journal of Computer and Systems Sciences International, 46(6), 872-880.

Lipschutz, S., 1965. Schaum's Outlines General Topology. McGraw-Hill Companies, New York.

Lowen, R., 1976. Fuzzy Topological Sapces and Fuzzy Compactness. J. Math. Anal Appl. 56:621-633.

Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy, A.R., 2001. Fuzzy soft sets. Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3), 589-602.

Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas, R., 2002. An application of soft sets in a decision making problem. Computers and Mathematics with Applications, 44(1), 1077-1083.

Maji, P. K., Biswas, R. ve Roy, A.R., 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45(1), 555-562.

Maji, P.K., Roy, A.R. ve Biswas, R., 2004. On Intuitionistic Fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math, 12(3) 669-683.

Majumdar, P. ve Samanta, S. K., 2008. Similarity measure of soft sets. New Mathematics and Natural Computation, 4(1), 1-12.

Majumdar, P. ve Samanta, S. K., 2010. Generalised fuzzy soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 59, 1425-1432.

Majumdar, P. ve Samanta, S. K., 2010. On soft mappings. Computers and Mathematics with Applications, 60, 2666-2672.

Min, W. K., 2011. A Note on Soft Topological Spaces. Comput. Math. Appl. 62(2011) 3524-3528.

Ming, L.Y., ve Kang, L.M., 1997. Fuzzy Topology. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Molodtsov, D., 1999. Soft set theory-first results. Computers and Mathematics with Applications, 37(1), 19-31.

Molodtsov, D., 2004. The Theory of Soft Sets (in Russian). URSS Publishers, Moscow.

Molodtsov, D. A., Leonov V. Yu. ve Kovkov D. V., 2006. Soft Sets Technique and Its Application. Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1(1), 8-39.

Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim ve Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları, Ankara.

Mushrif, M.M., Sengupta, S. ve Ray, A.K., 2006. Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. Lecture Notes In Computer Science, 3851 246-254.

Nesin, A., 2011. Analiz IV. Nesin Yayıncılık A.Ş., İstanbul.

Özdamar, E., ve Görgülü, A., ve Alp, M., 1999. Genel Topoloji. Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa.

Palaniappan, N., 2002. Fuzzy Topology. Alpha Science International Ltd., Pangbourne England.

Park, C.H., Jun, Y.B. ve Öztürk, M.A., 2008. Soft WS-algebras. Commun. Korean Math. Soc, 23(3), 313-324.

Pawlak, Z., 1982. Rough sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1), 341-356.

Pei, D. ve Miao, D., 2005. From Soft Sets to Information Systems. In: Proceedings of Granular Computing (Eds: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B.Zhang) IEEE, 2, 617-621.

Pitts, C.G.C., 1972. Introduction to Metric Spaces. Oliver and Boyd.

Qin, K. ve Hong, Z., 2010. On soft equality. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234, 1347-1355.

Rahimov, A., 2006. Topolojik Uzaylar. Seçkin yayıncılık San. Tic. A.Ş., Ankara.

Ram, B., 2005. Metric Spaces. Vinayak Publications.

Roy, A.R. ve Maji, P.K., 2007. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 203(1), 412-418.

Roy, S., and Samanta, T.K., 2011. A Note on Fuzzy Soft Topological Spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2011.

Searcóid, M.Ó., 2007. Metric Spaces. Springer-Verlag London Limited, USA.

Sezgin Sezer, A., 2012. Esnek Birleşimsel Yarıgruplar. Gaziosmanpaşa Üni. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, Tokat.

Sezgin, A. ve Atagün, A. O., 2011. Soft groups and normalistic soft groups. Computers and Mathematics with Applications, 62, 685-698.

Shabir, M., and Naz, M., 2011. On Soft Topological Spaces. Comput. Math. Appl. 61(2011) 1786-1799.

Shirali, S., Vasudeva, H.L., 2006. Metric Spaces. Springer.

Soykan, Y., 2012. Metrik Uzaylar ve Topolojisi. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim ve Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara.

Soykan, Y., 2012. Metrik Uzaylar ve Topolojisi Çözümlü Alıştırmaları. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim ve Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara.

Sun, Q-M., Zhang, Z-L. ve Liu, J., 2008. Soft Sets and Soft Modules. (In Guoyin Wang, Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse, Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu Yao Eds.): Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT, Proceedings, Springer, 403-409.

Tanay, B. ve Kandemir, M. B., 2011. Topological Structure of Fuzzy Soft Sets. Computers and Mathematics with Applications, 61, 2952-2957.

Tyagi, B.K, 2010. Metric Spaces. Cambridge University Press, India Pvt. Ltd.

Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B. ve Ye, S., 2005. Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets. In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed: J. Chen), IEEE, 2, 1104-1106.

Xiao, Z., Gong, K. ve Zou, Y., 2009. A Combined Forecasting Approach Based on Fuzzy Soft Sets. Computers and Mathematics with Applications, 228, 326-333.

Xiao, Z., Gong, K., Xia, S. ve Zou, Y., 2010. Exclusive disjunctive soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 59, 2128-2137.

Xu, W., Ma, J., Wang, S. ve Hao, G., 2010. Vague Soft Sets and Their Properties. Computers and Mathematics with Applications, 59, 787-794.

Yamak, S., Kazancı, O. ve Davvaz, B., 2011. Soft Hyperstructure. Computers and Mathematics with Applications, 62, 797-803.

Yang, H., Qu, C., Li ve N-C., 2004. The Induction and Decision Analysis of Clinical Diagnosis Based on Rough Sets and Soft Sets. (Fangzhi Gaoxiao Jichukexue Xuebao Ed.), September, 17(3), 208-212.

Yang, X., Yu, D.,Yang, J. ve Wu, C., 2007. Generalization of Soft Set Theory From Crisp to Fuzzy Case. In Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, Advances in Soft Computing 40, Springer, 345-355.

Yang, X., Lin, T. Y., Yang, J., Li, Y. ve Yu, D., 2009. Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. Computers and Mathematics with Applications, 58, 521-527.

Yang, C., 2011. Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals. Computers and Mathematics with Applications, 61, 255-261.

Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji. Gazi Litabevi Tic. Ltd. Şti., Ankara.

Yüksel, Ş., 2008. Genel Topoloji. Eğitim Akademi Yayınları, Konya.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets. Inform. and Control, 8(1), 338-353.

Zhan, J. ve Jun, Y. B., 2010. Soft BL-algebras based on fuzzy sets. Computers and Mathematics with Applications, 59, 2037-2046.

Zou, Y. ve Xiao, Z., 2008. Data analysis approaches of soft sets under incomplete information. Knowledge-Based Systems, 21(1), 941-945.

Zhou, J., Li, Y., Yin ve Y., 2011. Intuitionistic fuzzy soft semigroups. Mathematica Aeterna, 1(3), 173-183.

Zorlutuna, I., and Akdağ, M., and Min, W.K., and Atmaca, S., 2011. Remarks on Soft Topological Spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3 (2) (2011), 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Güzide ŞENEL

Doğum Tarihi : 17.05.1985 Antalya

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 0 530 040 60 64

E-posta : guzidesenel@gmail.com

Eğitim:

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Doktora	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2013
Yüksek Lisans	Ege Üniversitesi	2009
Lisans	Ankara Üniversitesi	2007
Lise	Antalya H.M.M. Bileydi Anadolu Lisesi	2003