T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM KRİTERLERİ

Lütfi ÇORAKLIK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Ercan TUNÇ
2015

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM KRİTERLERİ

Lütfi ÇORAKLIK

TOKAT
2015

Doç. Dr. Ercan TUNÇ danışmanlığında, Lütfi ÇORAKLIK tarafından hazırlanan bu çalışma 16/03/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN İmza:

Üye: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU İmza:

Üye: Doç. Dr. Ercan TUNÇ İmza:

Üye : Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Prof. Dr. Mehmet Ali SAKİN

Enstitü Müdürü

26/03/2015

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Lütfi ÇORAKLIK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN
DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
SALINIM KRİTERLERİ

Lütfi ÇORAKLIK

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ercan TUNÇ

Bu tez çalışmasında, ilk olarak ikinci basamaktan çeşitli yapıdaki lineer ve yarı lineer diferensiyel denklemlerin salınımlılık kriterleriyle ilgili temel tanım ve literatürde elde edilen bazı sonuçlar üzerinde duruldu. Daha sonra, ikinci basamaktan lineer olmayan bir diferensiyel denklem sınıfı göz önüne alınarak bu denklemin salınımlılığı için yeni sonuçlar verildi. Son olarak elde edilen sonuçları örneklerle açıklamak için bazı uygulamalar yapıldı.

2015, 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: Salınım, İkinci mertebeden, Lineer olmayan diferensiyel denklemler, Riccati-tipi dönüşüm, İntegral ortalama metodu.

ABSTRACT

Ms Thesis

OSCILLATION CRITERIA FOR NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Lütfi ÇORAKLIK

Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ercan TUNÇ

In this thesis, firstly the basic definitions of linear and half linear second order differential equations of various structures and some oscillation results in literature are emphasized. Then, a class of second order nonlinear differential equations has considered and new results for oscillation of this equation are established. Finally, some applications are given to illustrate the results.

2015, 41 pages

Keywords: Oscillation, Second order, Nonlinear differential equations, Riccati-type transformation, Integral averaging method.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yapmamda bana destek olan, bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanım, kıymetli hocam Doç. Dr. Ercan TUNÇ'a ve değerli arkadaşım Arş. Gör. Orhan ÖZDEMİR'e, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan eşime ve aileme çok teşekkür ederim.

Lütfi ÇORAKLIK

Mart 2015

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemlerin fen, sosyal ve mühendislik gibi birçok alanda uygulaması bulunmaktadır. Bilimin çeşitli dallarındaki bir çok olayın matematiksel modellemesi genelde bir diferansiyel denklem veya diferansiyel denklem sistemi biçiminde ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin ve bu çözümlerin özelliklerinin bilinmesi önem arz etmektedir. Ancak bazı özel yapıdaki denklemler haricinde, genelde diferensiyel denklemlerin açık çözümleri elde edilememektedir. Bu durum, araştırmacıları denklemi çözmeden, direkt denklemden hareketle çözümlerin davranışlarını araştırmaya yöneltmiştir. Bu yaklaşım diferensiyel denklemlerde nitel (kalitatif) teori olarak bilinmektedir. Kalitatif teorinin kararlılık, sınırlılık ve asimptotik davranış gibi konuları yanı sıra, diferansiyel denklemlerin salınımlılığı da bu teori içinde önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel denklemlerin salınımlılığı 1836'da Sturm'un çalışmasında ele alınan

$$x''(t) + a(t)\, x(t) = 0, \quad a(t) \in C[t_0, \infty), \quad t_0 > 0, \tag{1.1}$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel denkleminin çözümlerinin sıfırlarıyla ilgili iyi bilinen sonuçlara dayanmaktadır. Sturm'un klasik teoriminin sonucu olarak;

$$a(t) \geq a_0 > 0$$

şartı altında (1.1) denklemi salınımlı,

$$a(t) \leq 0$$

şartı altında (1.1) denklemi salınımsızdır. Sturm'un bu çalışmasından sonra diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ve salınımsızlığı konusu bir çok araştırmacı tarafından yoğun bir şekilde araştırılmış ve araştırılmaya devam edilmektedir. Bu sonuçların bazıları refereanslarda verilen makale ve bu makalelerde söz edilen çalışmalarda ele alınmıştır.

Belirtelim ki (1.1) denklemi için salınım sonuçları literatürde değişik yöntemlerle araştırılmıştır. Bu yöntemlerden en etkin olanlardan biri de integral ortalama tekniğidir.

Bu teknik yardımıyla (1.1) denklemi için elde edilen salınım sonuçlarından hareketle, daha genel lineer, yarı lineer ve lineer olmayan denklemlere de bu metod uygulanarak yeni salınım sonuçları elde edilmiştir. Literatürdeki bu çalışmaların motivasyonuyla bu tezde, özel durumlarda lineer ve yarı lineer denklemleri de içeren ikinci mertebeden lineer olmayan

$$\left(r(t)\psi(x(t))\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{1.2}$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı üzerinde durulacaktır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde çeşitli yapıdaki ikinci mertebeden diferensiyel denklemlere ilişkin yeri geldiğince kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

2.1. Temel Tanımlar

$F \in ([t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ve $t \geq t_0 \geq 0$ olmak üzere

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0 \tag{2.1}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Tanım 2.1.1. $t \in [t_x, \infty) \subset [t_0, \infty)$ olmak üzere $[t_x, \infty)$ aralığı üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve (2.1) denklemini sağlayan bir $x(t)$ fonksiyonuna (2.1) denkleminin çözümü denir. Burada $t_x \geq t_0 \geq 0$ sayısı $x(t)$ özel çözümüne bağlı bir değerdir.

Tanım 2.1.2. $x(t)$, $[t_0, \infty)$ aralığında verilen bir diferansiyel denklemin bir çözümü olsun. Eğer, en az bir $t \in [t_0, \infty)$ için $x(t) \neq 0$ oluyorsa bu çözüme aşikar olmayan çözüm denir.

Tanım 2.1.3. $x(t)$, $[t_0, \infty)$ aralığında verilen bir diferansiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer $t \geq t_0$ için $x(t)$ çözümü keyfi büyüklükte sıfırlara sahipse, yani herhangi bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ için $x(t_2) = 0$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ varsa bu $x(t)$ çözümüne salınımlıdır denir.

Tanım 2.1.4. $x(t)$ aşikar olmayan çözümü, salınımlı değilse salınımsızdır. Yani bu çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında yalnız sonlu sayıda sıfıra sahipse salınımsızdır. Diğer bir deyişle her $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)$ sayısı varsa o halde bu çözüme salınımsızdır denir.

Tanım 2.1.5. Eğer bir diferansiyel denklemin bütün çözümleri salınımlı ise bu denkleme salınımlıdır denir.

Örnek 2.1.6.

$$x''(t) + 9x(t) = 0$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin lineer bağımsız çözümleri $x_1 = \cos 3t$ ve $x_2 = \sin 3t$ olup bu çözümler salınımlı olduğundan verilen denklem salınımlıdır.

Örnek 2.1.7.

$$x''(t) - 9x(t) = 0$$

diferensiyel denklemi verilsin. Verilen denklemin lineer bağımsız çözümleri $x_1 = e^{3t}$ ve $x_2 = e^{-3t}$ ve bu çözümlerin her ikisi de salınımsız olduğundan verilen denklem salınımsızdır.

Bu tez çalışmasında ikinci basamaktan lineer olmayan

$$\left(r(t)\psi(x(t))\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.2}$$

diferensiyel denklem sınıfı için salınımlılık kriterleri verilecektir. (2.2) diferensiyel denkleminin özel durumları birçok araştırmacı tarafından araştırılmış ve araştırıl- maya devam edilmektedir. Bu özel durumlardan ikinci mertebeden

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{2.3}$$

diferensiyel denkleminin salınımlılık davranışı $q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $t_0 \geq 0$ olmak üzere ilk defa Sturm [32] tarafından incelenmiş, daha sonra bir çok araştırmacı tarafından farklı yöntemlerle araştırılmıştır. Burada çok sayıda araştırma arasından kendi araştırma mıza ve diğer araştırmalara ışık tutan önemli sonuçlar üzerinde durulacaktır.

2.2. $x''(t) + q(t)\,x(t) = 0$ Denkleminin Salınımlılığı

Teorem 2.2.8. *$q(t) \geq 0$ ve $q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ olmak üzere*

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} q(s)\,ds = \infty$$

ise (2.3) *denklemi salınımlıdır [11].*

Daha sonra Wintner [42] çalışmasında, $q(t)$ üzerindeki non-negatiflik şartını kaldırarak (2.3) denklemi için Fite'nin sonucunun yine geçerli olduğunu göstermiştir.

Teorem 2.2.9. *$q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ olmak üzere*

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} q(s)\,ds = \infty \tag{2.4}$$

ise (2.3) *denklemi salınımlıdır [42].*

Ayrıca, Wintner aynı çalışmasında (2.4) şartından daha güçlü olan aşağıdaki salınım kriterini vermiştir.

Teorem 2.2.10. *$q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ olmak üzere*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} q(u)\,du ds = \infty \tag{2.5}$$

şartı sağlanıyorsa (2.3) *denklemi salınımlıdır [42].*

Örnek 2.2.11. $t \geq 0$ olmak üzere

$$x''(t) + (1 + 2sint)x(t) = 0$$

diferensiyel denklemi Teorem 2.2.10'a göre salınımlıdır ancak Teorem 2.2.8 bu örneğe uygulanamaz.

Daha sonra Wintner'in (2.5) şartının önemli bir genişlemesi, $n > 2$ bir tamsayı olmak üzere $(t - s)^{n-1}$ şeklindeki ağırlık fonksiyonu yardımıyla, Kamenev [18] tarafından aşağıdaki teoremde verildi.

Teorem 2.2.12. *$q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $n > 2$ bir tamsayı olmak üzere*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} q(s)\, ds = \infty \tag{2.6}$$

şartı altında (2.3) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır [18].*

Kamenev'in düşüncesinden hareketle Yan [51], (2.3) denklemi için, (2.6) şartından farklı bir salınım sonucunu aşağıdaki teoremde verdi.

Teorem 2.2.13. *$n > 2$ bir tamsayı olmak üzere*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} q(s)\, ds < \infty,$$

ve $\Omega(t)$, $[t_0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $T \geq t_0$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{T}^{t} (t-s)^{n-1} q(s)\, ds \geq \Omega(t)$$

şartları sağlansın. Ayrıca $\Omega_+(t) = \max\{\Omega(t), 0\}$ olmak üzere, eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \Omega_+^2(s)\, ds = \infty$$

ise, bu takdirde (2.3) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır [51].*

Aslında Teorem 2.2.13, Yan [51] çalışmasında (2.3) denkleminden daha genel bir denklem için, daha genel bir formda verilmiştir. Fakat (2.3) denklemi Yan'ın denkleminin özel bir durumu olduğundan, Teorem 2.2.13, Yan [51]'daki sonucun özel bir durumudur.

1989 yılında, Philos [27] çalışmasında, Kamenev'in $(t-s)^{n-1}$ ağırlık fonksiyonu yerine, ağırlık fonksiyonları olarak daha geniş bir fonksiyonlar ailesini kullanarak Kamenev [18] ve Yan [51]'ın sonuçlarını genişletti ve Yan [51]'ın yukarıdaki teoremini de iyileştirdi. Philos [27] çalışmasındaki bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.14. *$H : D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\} \to \mathbb{R}$ sürekli, $t \geq t_0$ için $H(t,t) = 0$, $t > s \geq t_0$ için $H(t,s) > 0$ ve $H(t,s)$'nin D 'de ikinci değişkene göre sürekli ve pozitif* *olmayan kısmi türevleri var olan bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $h : D \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, her $(t,s) \in D$ için*

$$-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$$

koşulu sağlansın. Bu takdirde, eğer

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left\{ H(t,s)\,q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s) \right\} ds = \infty$$

ise (2.3) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır [27].*

Teorem 2.2.15. *H ve h fonksiyonları Teorem 2.2.14'teki şartları sağlasın. Ayrıca*

$$0 < \inf_{s \ge t_0} \left[\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right] \le \infty$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} h^2(t,s)\,ds < \infty$$

olsun. $\Omega_+(T) = \max\{\Omega(T), 0\}$ *olmak üzere, eğer*

$$\int_{t_0}^{\infty} \Omega_+^2(T)\,dT = \infty$$

ve her $T \ge t_0$ *için*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[H(t,s)\,q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s) \right] ds \ge \Omega(T)$$

şartları sağlanacak şekilde $[t_0, \infty)$ *üzerinde sürekli bir* $\Omega(T)$ *fonksiyonu varsa* (2.3) *denklemi salınımlıdır [27].*

Teorem 2.2.16. *H ve h fonksiyonları Teorem 2.2.14'teki gibi olsun. Ayrıca*

$$0 < \inf_{s \ge t_0} \left[\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right] \le \infty$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\,q(s)\,ds<\infty$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\Omega_+(T)=\max\{\Omega(T),0\}$ *olmak üzere, eğer*

$$\int_{t_0}^{\infty}\Omega_+^2(T)\,dT=\infty$$

ve her $T\geq t_0$ *için*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[H(t,s)\,q(s)-\frac{1}{4}h^2(t,s)\right]ds\geq\Omega(T)$$

olacak şekilde $[t_0,\infty)$ *üzerinde sürekli bir* $\Omega(T)$ *fonksiyonu varsa* (2.3) *denklemi salınımlıdır [27].*

İntegral ortalama tekniği ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin yanı sıra, ikinci mertebeden yarı-lineer diferensiyel denklemlerin salınımlılığını araştırmada da önemli bir metoddur. Şimdi de bu metod yardımıyla yarı-lineer denklemler için literatürde elde edilen bazı önemli salınım sonuçları üzerinde durulacaktır.

2.3. $\left[r(t)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]'+q(t)\left|x(t)\right|^{\alpha-1}x(t)=0$ Denkleminin Salınımlılığı

$r\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $q\in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ ve $\alpha>0$ bir sabit olmak üzere

$$\left[r(t)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right]'+q(t)\left|x(t)\right|^{\alpha-1}x(t)=0 \tag{2.7}$$

diferensiyel denkleminin salınımlılığı için J.V. Manojlovic aşağıdaki yeter şartları elde etmiştir.

Teorem 2.3.17. *Kabul edelim ki* $H : D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\} \to R$ *fonksiyonu,* $t \geq t_0$ *için* $H(t,t) = 0$*,* $(t,s) \in D$ *için* $H(t,s) > 0$ *olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ve*

$$h(t,s) = -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}$$

D üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[q(s) H(t,s) - \frac{r(s) h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} H^{\alpha}(t,s)} \right] ds = \infty$$

şartı sağlanıyorsa (2.7) *denklemi salınımlıdır [25].*

Teorem 2.3.18. *Kabul edelim ki* $H : D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\} \to R$ *fonksiyonu,* $t \geq t_0$ *için* $H(t,t) = 0$*,* $(t,s) \in D$ *için* $H(t,s) > 0$ *olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ve*

$$h(t,s) = -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}$$

D üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left[\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right] \leq \infty$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} r(s) \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)} ds < \infty$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\varphi_+(s) = \max\{\varphi(s), 0\}$ *olmak üzere her* $T \geq t_0$ *için*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[q(s) H(t,s) - \frac{r(s) h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} H^{\alpha}(t,s)} \right] ds \geq \varphi(T)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\varphi_+^{(\alpha/\alpha+1)}(s)}{r^{1/\alpha}(s)} = \infty$$

olacak şekilde $[t_0, \infty)$ *üzerinde sürekli bir* φ *fonksiyonu varsa* (2.7) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır [25].*

Teorem 2.3.19. *Kabul edelim ki* $H : D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\} \to R$ *fonksiyonu,* $t \geq t_0$ *için* $H(t,t) = 0$, $(t,s) \in D$ *için* $H(t,s) > 0$ *olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ve*

$$h(t,s) = -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}$$

D üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$0 < \inf_{s \geq t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right] \leq \infty$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}|q(s)|\,H(t,s)\,ds < \infty$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\varphi_+(s) = \max\{\varphi(s), 0\}$ *olmak üzere her* $T \geq t_0$ *için*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[q(s)\,H(t,s) - \frac{r(s)\,h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)}\right]ds \geq \varphi(T)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi_+^{(\alpha/\alpha+1)}(s)}{r^{1/\alpha}(s)} = \infty$$

olacak şekilde $[t_0,\infty)$ *üzerinde sürekli bir* φ *fonksiyonu varsa* (2.7) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır [25].*

2001'de Q.R.Wang (2.7) denklemini tekrar göz önüne aldı ve Philos'un $H(t,s)$ ağırlık fonksiyonu yerine, D_0 üzerinde ikinci değişkene göre kismi türevlere sahip olma şartını gerektirmeyen $H(t,s)k(s)$ fonksiyonunu seçerek (2.7) denklemi için aşağıdaki yeni salınım sonuçlarını verdi.

Teorem 2.3.20. $D_0 = \{(t,s) : t > s \geq t_0\}$ *ve* $D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\}$ *olsun. Ayrıca* $H \in C(D;\mathbb{R})$, $h \in C(D_0;\mathbb{R})$, $k, \rho \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$ *fonksiyonları da*

(i) $t \geq t_0$ *için* $H(t,t) = 0$, *ve* D_0 *üzerinde* $H(t,s) > 0$;

(ii) $H(t,s)$ *fonksiyonunun* D_0 *üzerinde ikinci değişkene göre sürekli ve pozitif olmayan kısmi türevleri var;*

(iii) Her $(t,s)\in D_0$ *için*

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(H(t,s)\,k(s)\right)-H(t,s)\,k(s)\,\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}=h(t,s)$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)\,k(s)\,\rho(s)\,q(s)-\frac{\rho(s)\,r(s)\,|h(t,s)|^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}\left(H(t,s)\,k(s)\right)^{\alpha}}\right]ds=\infty$$

ise (2.7) *denklemi salınımlıdır [39].*

Teorem 2.3.21. *H h, k ve ρ fonksiyonları Teorem 2.3.20'deki gibi tanımlansın. Ayrıca,*

$$0<\inf_{s\geq t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right]\leq\infty$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\frac{\rho(s)\,r(s)}{\left(H(t,s)\,k(s)\right)^{\alpha}}\,|h(t,s)|^{\alpha+1}\,ds<\infty$$

şartları sağlansın. Bu taktirde $A_+(s)=\max\{A(s),0\}$ *olmak üzere*

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{\left(A_+(s)\right)^{(\alpha+1)/\alpha}}{\left(k(s)\,\rho(s)\,r(s)\right)^{1/\alpha}}ds=\infty$$

ve her $T\geq t_0$ *için*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[H(t,s)\,k(s)\,\rho(s)\,q(s)-\frac{\rho(s)\,r(s)\,|h(t,s)|^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}\left(H(t,s)\,k(s)\right)^{\alpha}}\right]ds\geq A(T)$$

şartları sağlanacak şekilde $A\in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *fonksiyonu varsa* (2.7) *denklemi salınımlıdır [39].*

Teorem 2.3.22. *H h, k ve ρ fonksiyonları Teorem 2.3.20'deki gibi tanımlansın. Ayrıca*

$$0<\inf_{s\geq t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right]\leq\infty$$

ve

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\, k(s)\, \rho(s)\, q(s)\, ds < \infty$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$ *olmak üzere*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{(A_+(s))^{(\alpha+1)/\alpha}}{(k(s)\, \rho(s)\, r(s))^{1/\alpha}} ds = \infty$$

ve her $T \geq t_0$ *için*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[H(t,s)\, k(s)\, \rho(s)\, q(s) - \frac{\rho(s)\, r(s)\, |h(t,s)|^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (H(t,s)\, k(s))^{\alpha}} \right] ds \geq A(T)$$

şartı sağlanacak şekilde $A \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *fonksiyonu varsa* (2.7) *denklemi salınımlıdır [39].*

2.4. $\left[r(t)\,|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t)\right]' + p(t)\,|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t) + q(t)\,|x(t)|^{\alpha-1} x(t) = 0$ Denkleminin Salınımlılığı

$r \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, $p, q \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ ve $\alpha > 0$ bir sabit olmak üzere

$$\left[r(t)\,|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t)\right]' + p(t)\,|x'(t)|^{\alpha-1} x'(t) + q(t)\,|x(t)|^{\alpha-1} x(t) = 0 \qquad (2.8)$$

denkleminin salınımlılığı için Li ve ark. [23] aşağıdaki yeter şartları elde etmiştir.

Teorem 2.4.23. $D = \{(t,s) : -\infty < s \leq t < \infty\}$ *olmak üzere* $H \in C(D,\mathbb{R})$ *fonksiyonu*

i) $t \geq t_0$ *için* $H(t,t) = 0$, $t > s$ *için* $H(t,s) > 0$,

ii) $H(t,s)$ *fonksiyonu* D *üzerinde ikinci değişkene göre* $\partial H/\partial s$ *kısmi türevlerine sahip ve* h, D *üzerinde negatif olmayan ve süreklli bir fonksiyon olmak üzere*

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)\,q(s)-\frac{r(s)\left|h(t,s)+\frac{p(s)}{r(s)}\sqrt{H(t,s)}\right|^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{(\alpha-1)/2}(t,s)}\right]ds=\infty$$

şartı sağlanıyorsa (2.8) *denklemi salınımlıdır [23].*

Teorem 2.4.24. $D=\{(t,s):-\infty<s\le t<\infty\}$ *olmak üzere* $H\in C(D,\mathbb{R})$ *fonksiyonu*

i) $t\ge t_0$ *için* $H(t,t)=0$, $t>s$ *için* $H(t,s)>0$,

ii) $H(t,s)$ *fonksiyonu* D *üzerinde ikinci değişkene göre* $\partial H/\partial s$ *kısmi türevlerine sahip ve* h, D *üzerinde negatif olmayan ve süreklli bir fonksiyon olmak üzere*

$$\frac{\partial H}{\partial s}=-h(t,s)\sqrt{H(t,s)}$$

şartlarını sağlasın. Ayrıca

$$0<\inf_{s\ge t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right]\le\infty$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{r(s)\left|h(t,s)+\frac{p(s)}{r(s)}\sqrt{H(t,s)}\right|^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{(\alpha-1)/2}(t,s)}\right]ds<\infty$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\phi_+(t)=\max\{\phi(t),0\}$ *olmak üzere her* $T\ge t_0$ *için*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[H(t,s)\,q(s)-\frac{r(s)\left|h(t,s)+\frac{p(s)}{r(s)}\sqrt{H(t,s)}\right|^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{(\alpha-1)/2}(t,s)}\right]ds\ge\phi(T)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\phi_+^{(\alpha+1)/\alpha}(s)}{r^{1/\alpha}(s)}ds=\infty$$

şartları sağlanacak şekilde bir $\phi\in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *fonksiyonu varsa* (2.8) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır [23].*

Teorem 2.4.25. $D=\{(t,s):-\infty<s\leq t<\infty\}$ *olmak üzere* $H\in C(D,\mathbb{R})$ *fonksiyonu*

i) $t\geq t_0$ *için* $H(t,t)=0$, $t>s$ *için* $H(t,s)>0$,

ii) $H(t,s)$ *fonksiyonu* D *üzerinde ikinci değişkene göre* $\partial H/\partial s$ *kısmi türevlerine sahip ve* h, D *üzerinde negatif olmayan ve süreklli bir fonksiyon olmak üzere*

$$\frac{\partial H}{\partial s}=-h\left(t,s\right)\sqrt{H(t,s)}$$

şartlarını sağlasın. Ayrıca

$$0<\inf_{s\geq t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H\left(t,s\right)}{H\left(t,t_0\right)}\right]\leq\infty$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H\left(t,t_0\right)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)q(s)ds<\infty$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\phi_+\left(t\right)=\max\left\{\phi\left(t\right),0\right\}$ *olmak üzere her* $T\geq t_0$ *için*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H\left(t,T\right)}\int_{T}^{t}\left[H\left(t,s\right)q\left(s\right)-\frac{r\left(s\right)\left|h\left(t,s\right)+\frac{p(s)}{r(s)}\sqrt{H(t,s)}\right|^{\alpha+1}}{\left(\alpha+1\right)^{\alpha+1}H^{(\alpha-1)/2}(t,s)}\right]ds\geq\phi\left(T\right)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\phi_+^{(\alpha+1)/\alpha}\left(s\right)}{r^{1/\alpha}(s)}ds=\infty$$

şartları sağlanacak şekilde bir $\phi\in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *fonksiyonu varsa* (2.8) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır [23].*

3. İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde $t_0 \geq 0$, $\alpha > 0$ bir sabit, $r \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$, $\psi(x) \in C(R;R)$ ve $f:[t_0,\infty) \times R \times R \to R$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(r(t)\psi(x(t))\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + f(t,x(t),x'(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{3.1}$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı üzerinde durulacaktır. Ayrıca

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)} = \infty \tag{3.2}$$

ya da

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)} < \infty \tag{3.3}$$

şartlarının sağlandiği kabul edilecektir.

Tanım 3.1. Her $t \in [t_0,t_1)$, $t_1 > t_0$ için (3.1) denklemini sağlayan bir $x:[t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna (3.1) denkleminin bir çözümü denir.

Bu tez çalışmasında (3.1) denkleminin herhangi bir $t_x \geq t_0$ için $sup\{|x(t)| : t \geq t_x\} \neq 0$ özelliğine sahip ve $[t_x,\infty)$ aralığında var olan çözümleri üzerinde durulacaktır. Eğer her $t \geq t_0$ için $x(t)$ çözümü keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse bu $x(t)$ çözümüne salınımlıdır denir. Yani, herhangi bir $t_1 \in [t_0,\infty)$ için $x(t_2) = 0$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ sayısı mevcutsa bu $x(t)$ çözümüne salınımlıdır denir. Aksi takdirde salınımlı olmayan çözüm adını alır. Yani her $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in [t_0,\infty)$ sayısı mevcutsa o halde bu $x(t)$ çözümüne salınımsızdır denir. Eğer (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise (3.1) denklemine salınımlıdır denir.

Teorem 3.2. *Kabul edelim ki* (3.2) *şartı sağlansın ve* L_1 *ve* L_2 *reel sayılar olmak üzere*

$$0 < L_1 \leq \psi(x) \leq L_2 \tag{3.4}$$

olsun. Ayrıca kabul edelim ki $\rho'(t) \geq 0$ *olacak şekilde* $\rho \in C^1([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *ve* $q \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *pozitif fonksiyonları var ve bu durumda her* $t \in [t_0,\infty)$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$x' \in \mathbb{R}$ *için*

$$\frac{f(t,x,x')}{|x|^{\alpha-1}x} \geq q(t) \tag{3.5}$$

ve $\varphi(t) = \left(\int\limits_{t_0}^{t} r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\,ds\right)^{-1}$ *olmak üzere*

$$\limsup_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \left(\rho(s)\,q(s) - \frac{L_2^2}{L_1}\rho'(s)\,\varphi^{\alpha}(s)\right) ds = \infty \tag{3.6}$$

şartları sağlansın. Bu takdirde (3.1) denklemi salınımlıdır.

İspat . Kabul edelim ki $x(t)$, $[t_0,\infty)$ üzerinde (3.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu takdirde her $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ sayısı vardır. Genelliği bozmaksızın $t_1 \geq t_0$ olmak üzere her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. $x(t) < 0$ olduğunda da benzer şekilde ispat verilebilir. (3.1) denklemi ve (3.5) şartından her $t \geq t_1$ için

$$\left(r(t)\,\psi(x(t))\,|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)' = -f(t,x(t),x'(t)) \leq -q(t)\,x^{\alpha}(t) < 0 \tag{3.7}$$

olduğu görülür. Bu yüzden de, $r(t)\,\psi(x(t))\,|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)$, $[t_1,\infty)$ üzerinde azalandır ve hep aynı işareti alır. Şimdi iddia ediyoruz ki, $t \geq t_1$ için

$$x'(t) > 0 \tag{3.8}$$

dir. Aksine kabul edelim, yani $x'(t_2) \leq 0$ olacak şekilde bir $t_2 \in [t_1,\infty)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$r(t_2)\,\psi(x(t_2))\,|x'(t_2)|^{\alpha-1}x'(t_2) \leq 0$$

yazılabilir. $[t_1,\infty)$ aralığında $r(t)\,\psi(x(t))\,|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)$ azalan olduğundan, bir $t_3 \geq t_2$ sayısı vardır öyle ki $t \in [t_3,\infty)$ için

$$r(t)\,\psi(x(t))\,|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t) \leq r(t_3)\,\psi(x(t_3))\,|x'(t_3)|^{\alpha-1}x'(t_3) := c < 0$$

kalır. Buradan da,

$$x'(t) \leq -(-c)^{1/\alpha}\frac{1}{r^{1/\alpha}(t)\psi^{1/\alpha}(x(t))} \leq -(-c)^{1/\alpha}\frac{1}{L_2^{1/\alpha}r^{1/\alpha}(t)} \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.9) ifadesinin t_3'ten t'ye kadar integrali alınır ve (3.2) şartı kullanılırsa $t \longrightarrow \infty$ için

$$x(t) \leq x(t_3) - (-\frac{c}{L_2})^{1/\alpha}\int_{t_3}^{t}\frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)} \longrightarrow -\infty$$

elde edilir ve bu da her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ olmasıyla çelişir. O halde (3.8) doğrudur. (3.7) ve (3.8)'den her $t \geq t_1$ için

$$\left(r\left(t\right)\psi\left(x\left(t\right)\right)\left(x'\left(t\right)\right)^{\alpha}\right)' \leq -q\left(t\right)x^{\alpha}\left(t\right) < 0 \tag{3.10}$$

sonucuna varılır. Şimdi her $t \geq t_1$ için

$$\omega\left(t\right) = \rho\left(t\right)\frac{r\left(t\right)\psi\left(x\left(t\right)\right)\left(x'\left(t\right)\right)^{\alpha}}{x^{\alpha}\left(t\right)} \tag{3.11}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (3.8)'den $\omega(t) > 0$ olduğu açıktır. (3.11)'in diferansiyeli alınır ve (3.10) kullanılırsa, her $t \geq t_1$ için,

$$\begin{aligned}
w'(t) &= \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t) \\
&+ \rho(t)\left[\frac{\left(r(t)\psi(x(t))\left(x'(t)\right)^{\alpha}\right)'x^{\alpha}(t) - \alpha r(t)\psi(x(t))\left(x'(t)\right)^{\alpha}x^{\alpha-1}(t)x'(t)}{x^{2\alpha}(t)}\right] \\
&\leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t) - \rho(t)q(t) - \alpha\rho(t)\frac{r(t)\psi(x(t))\left(x'(t)\right)^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}(t)} \\
&= -\rho(t)q(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t) - \alpha w(t)\frac{x'(t)}{x(t)}
\end{aligned}$$

$$\leq \; -\rho(t)q(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t) \tag{3.12}$$

$$= \; -\rho(t)q(t) + \rho'(t)r(t)\psi(x(t))\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\alpha}$$

$$\leq \; -\rho(t)q(t) + L_2 r(t)\rho'(t)\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\alpha}. \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.10) ifadesinden

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t} x'(s)ds \\ &= x(t_1) + \int_{t_1}^{t} r^{-1/\alpha}(s)\psi^{-1/\alpha}(x(s))\left(r(s)\psi(x(s))\left(x'(s)\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} ds \\ &\geq \left(r(t)\psi(x(t))\left(x'(t)\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \int_{t_1}^{t} r^{-1/\alpha}(s)\psi^{-1/\alpha}(x(s))ds \\ &\geq \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/\alpha} r^{1/\alpha}(t)x'(t)\int_{t_1}^{t} r^{-1/\alpha}(s)ds, \end{aligned}$$

olur ve buradan da her $t \geq t_1$ için

$$\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\alpha} \leq \frac{L_2\varphi^{\alpha}(t)}{L_1 r(t)} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) ifadesini (3.13) eşitsizliğinde kullanırsak her $t \geq t_1$ için

$$\omega'(t) \leq -\rho(t)q(t) + \frac{L_2^2}{L_1}\rho'(t)\varphi^{\alpha}(t) \tag{3.15}$$

olduğu görülür. (3.15)'in integrali alınırsa,

$$\int_{t_1}^{t}\left(\rho(s)q(s) - \frac{L_2^2}{L_1}\rho'(s)\varphi^{\alpha}(s)\right)ds \leq -\omega(t) + \omega(t_1) \leq \omega(t_1) \tag{3.16}$$

elde edilir. Burada her iki tarafın lim sup'u alınırsa (3.6) ile çelişkiye düşülür. Bu çelişki (3.1) denkleminin salınımlı olduğunu gösterir.

Teorem 3.3. *Kabul edelim ki* (3.3) *ve* (3.4) *şartları sağlansın. Ayrıca* $\rho(t)$ *ve* $q(t)$ *fonksiyonları da* (3.5) *ve* (3.6) *şartlarını sağlayacak şekilde Teorem* 3.2*'deki gibi tanımlansın. Bu taktirde* $\chi(t) = \int_t^\infty r^{-1/\alpha}(s)ds$ *olmak üzere, eğer*

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r(z)} \int_{t_0}^{z} q(s)\chi^\alpha(s)ds \right)^{1/\alpha} dz = \infty \tag{3.17}$$

şartı sağlanıyorsa (3.1) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $x(t)$, (3.1) denkleminin $[t_0, \infty)$ aralığında salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu taktirde her $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ sayısı vardır. Genelliği bozmaksızın $t_1 \geq t_0$ olmak üzere her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ kabul edebiliriz. $x(t) < 0$ olduğunda da ispat benzer şekilde verilebilir. $w(t)$ fonksiyonu (3.11) 'de olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda $x'(t)$'nin işareti için iki olası durum vardır. $x'(t) > 0$ durumu için, ispat Teorem 3.2'deki ile benzerdir e bu durum için detaylar göz ardı edilmiştir. Şimdi kabul edelim ki $x'(t) < 0$ ifadesi ilgili aralık üzerinde belli bir yerden sonra negatif olsun. Bu taktirde, $t \in [t_2, \infty)$ için $x'(t) < 0$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ sayısı vardır. (3.1) ve (3.5)'ten her $t \geq t_2$ için

$$\left(r(t)\psi(x(t))\left(-x'(t)\right)^\alpha\right)' = f(t, x(t), x'(t)) \geq q(t)x^\alpha(t) > 0. \tag{3.18}$$

elde edilir. Bu yüzdende $r(t)\psi(x(t))\left(-x'(t)\right)^\alpha$ ifadesi $[t_2, \infty)$ üzerinde artandır ve dolayısıyla $s \geq t \geq t_2$ için

$$r(s)\psi(x(s))\left(-x'(s)\right)^\alpha \geq r(t)\psi(x(t))\left(-x'(t)\right)^\alpha$$

yazılabilir. Son eşitsizlikten, her $s \geq t \geq t_2$ için

$$-x'(s) \geq \frac{1}{L_2^{1/\alpha}} r^{-1/\alpha}(s) r^{1/\alpha}(t) \psi^{1/\alpha}(x(t))\left(-x'(t)\right) \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) eşitsizliği, $t \geq t_2$ den $u \geq t$ ye kadar integrallenirse ve $u \to \infty$ için limite geçilirse, $\beta := \frac{1}{L_2^{1/\alpha}} r^{1/\alpha}(t_2)\psi^{1/\alpha}(x(t_2))\left(-x'(t_2)\right) > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
x(t) &\geq \frac{1}{L_2^{1/\alpha}}\left(\int_t^{\infty} r^{-1/\alpha}(s)ds\right) r^{1/\alpha}(t)\psi^{1/\alpha}(x(t))\left(-x'(t)\right) \\
&= \frac{1}{L_2^{1/\alpha}}\chi(t) r^{1/\alpha}(t)\psi^{1/\alpha}(x(t))\left(-x'(t)\right) \\
&\geq \frac{1}{L_2^{1/\alpha}}\chi(t) r^{1/\alpha}(t_2)\psi^{1/\alpha}(x(t_2))\left(-x'(t_2)\right) := \beta\chi(t) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden, (3.18) ve (3.20) 'den, $t \geq t_2$ için

$$\left(r(t)\psi(x(t))\left(-x'(t)\right)^{\alpha}\right)' \geq q(t)x^{\alpha}(t) > \beta^{\alpha}q(t)\chi^{\alpha}(t) \qquad (3.21)$$

sonucuna varılır. (3.21) ifadesi t_2'den t'ye kadar integrallenirse

$$r(t)\psi(x(t))\left(-x'(t)\right)^{\alpha} \geq r(t_2)\psi(x(t_2))\left(-x'(t_2)\right)^{\alpha} + \beta^{\alpha}\int_{t_2}^{t} q(s)\chi^{\alpha}(s)ds$$

eşitsizliği ve buradan da $t \geq t_2$ için

$$-x'(t) \geq \frac{1}{L_2^{1/\alpha}}\left(\frac{1}{r(t)}\beta^{\alpha}\int_{t_2}^{t} q(s)\chi^{\alpha}(s)ds\right)^{1/\alpha}$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizliği t_2'den t'ye integrallersek

$$x(t) \leq x(t_2) - \frac{\beta}{L_2^{1/\alpha}}\int_{t_2}^{t}\left(\frac{1}{r(z)}\int_{t_2}^{z} q(s)\chi^{\alpha}(s)ds\right)^{1/\alpha} dz$$

sonucuna varılır. Burada $t \to \infty$ için limite geçilir ve (3.17) şartı kullanılırsa

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$$

olduğu görülür ve bu da her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ olduğu kabulu ile çelişir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4. *Kabul edelim ki* (3.2), (3.4) *ve* (3.5) *şartları sağlansın.* $H : D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\} \to R$ *sürekli bir fonksiyon,* $t \geq t_0$ *için* $H(t,t) = 0$, $t > s \geq t_0$ *için* $H(t,s) > 0$ *ve* $H(t,s)$*' nin* D *üzerinde ikinci değişkene göre sürekli kismi türevleri var olsun. Ayrıca kabul edelim ki* $t \geq s \geq t_0$ *için*

$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}H(t,s) + \frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \leq 0 \tag{3.22}$$

ve herhangi bir $t \in [t_0, \infty)$ *için*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_1)} \int_{t_1}^{t} \rho(s)q(s)H(t,s)ds = \infty \tag{3.23}$$

şartlarını sağlayan pozitif bir $\rho \in C^1([t_0,\infty); R)$ *fonksiyonu var olsun. Bu taktirde* (3.1) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.*

İspat . Teorem 3.2' nin ispatında olduğu gibi genelliği bozmaksızın kabul edelim ki (3.1) denkleminin $t_1 \geq t_0$ için, $[t_1, \infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü var olsun. (3.11) ile tanımlanan $w(t)$ fonksiyonu ve Teorem 3.2' nin ispatında izlenen yol kullanılarak (3.12) eşitsizliğine varılır. (3.12) eşitsizliği $H(t,s)$ ile çarpılır ve t_1'den t'ye kadar integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t} \rho(s)q(s)H(t,s)ds &\leq -\int_{t_1}^{t} H(t,s)w'(s)ds + \int_{t_1}^{t} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}w(s)H(t,s)ds \\ &\leq H(t,t_1)w(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left[\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}H(t,s)\right] w(s)ds \end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.22) eşitsizliği (3.24)'te kullanılırsa,

$$\frac{1}{H(t,t_1)} \int_{t_1}^{t} \rho(s)q(s)H(t,s)ds \leq w(t_1) < \infty, \tag{3.25}$$

sonucuna varılır ve bu da (3.23) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5. *Kabul edelimki (3.3), (3.4) ve (3.5) şartları sağlansın, ρ ve H fonksiyonları da (3.22) ve (3.23) şartlarını sağlayacak şekilde Teorem 3.4' deki gibi tanımlansın. Ayrıca kabul edelim ki (3.17) şartı sağlansın. Bu taktirde (3.1) denklemi salınımlıdır.*

İspat . Teoremin ispatı Teorem 3.3'ün ispatı ile benzerdir ve bu yüzden detaylar ilgili okuyucuya bırakılmıştır.

Lemma 3.6. *Kabul edelim ki (3.2), (3.4) ve (3.5) şartları sağlansın. Ayrıca kabul edelim ki $r'(t) \geq 0$, her $x \in \mathbb{R}$ için $\psi'(x) \geq 0$ ve $x(t)$, $[t_0, \infty)$ aralığının herhangi bir yerinden itibaren (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu taktirde $t \geq T_x$ için*

$$x'(t) > 0,\ x''(t) < 0 \text{ ve } \Big(r(t)\psi(x(t))\,|x'(t)|^{\alpha-1}\,x'(t)\Big)' < 0 \tag{3.26}$$

olacak şekilde bir $T_x \geq t_0$ vardır.

İspat . $x(t)$, (3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olduğundan her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ sayısı vardır. Teorem 3.2' deki ispat yolu izlenirse, $t \geq t_1$ için (3.7) ve (3.8) eşitsizliklerinin sağlandığı, ve dolayısıyla $r(t)\psi(x(t))\,(x'(t))^{\alpha}$ ifadesinin $[t_1, \infty)$ üzerinde azalan olduğu görülür. Şimdi $t \geq t_1$ için

$$x''(t) < 0 \tag{3.27}$$

olduğunu gösterelim. (3.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} 0 > \left(r(t)\psi(x(t))\,(x'(t))^{\alpha}\right)' &= r'(t)\psi(x(t))\,(x'(t))^{\alpha} + r(t)\psi'(x(t))\,(x'(t))^{\alpha+1} \\ &+ \alpha r(t)\psi(x(t))\,(x'(t))^{\alpha-1}\,x''(t) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da (3.27)' nin sağlandiği açıkça görülmektedir. Dolayısıyla (3.26)'daki durumlar geçerlidir ve bu da lemmanın ispatını tamamlar.

Teorem 3.7. *Kabul edelim ki* (3.2) *ve* (3.3) *şartları sağlansın,* $r'(t) \geq 0$, *ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $\psi'(x) \geq 0$ *olsun. Ayrıca kabul edelim ki* $\rho'(t) \geq 0$, (3.5) *ve*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\rho(s)q(s) - L_2 r(s)\rho'(s)\left(\frac{2}{s}\right)^{\alpha}\right] ds = \infty \tag{3.28}$$

şartları sağlanacak şekilde $\rho \in C^1([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *ve* $q \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$ *fonksiyonları var olsun. Bu takdirde* (3.1) *denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.*

İspat . $x(t)$, (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Bu taktirde her $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ sayısı vardır. Genelliği bozmaksızın, $t_1 \geq t_0$ için $[t_1,\infty)$ üzerinde $x(t) > 0$ kabul edebiliriz. $w(t)$ fonksiyonu Teorem 3.2' deki gibi tanımlansın. Teorem 3.2' nin ispatında izlenen yol takip edilirde (3.13) eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan Lemma 3.6' dan dolayı $[t_1,\infty)$ üzerinde $x'(t)$ pozitif ve azalandır. Bu yüzden, $t_2 \geq 2t_1$ olacak şekilde seçersek $t \in [t_2,\infty)$ için

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} x'(s)ds \geq \int_{t_1}^{t} x'(s)ds \geq (t-t_1)x'(t) \geq \frac{t}{2}x'(t),$$

olduğu görülür ve buradan da $t \geq t_2$ için

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq \frac{2}{t} \tag{3.29}$$

olur. (3.29) ifadesi (3.13) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$w'(t) \leq -\rho(t)q(t) + L_2 r(t)\rho'(t)\left(\frac{2}{t}\right)^{\alpha} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) ifadesini t_2' den t' ye kadar integrallersek

$$\int_{t_2}^{t} \left[\rho(s)q(s) - L_2 r(s)\rho'(s)\left(\frac{2}{s}\right)^{\alpha}\right] ds \leq -w(t) + w(t_2) \leq w(t_2) < \infty$$

sonucuna varılır ki bu ifade (3.28) ile çelişir. O halde ispat tamamlanır.

Teorem 3.8. *Kabul edelim ki* (3.3) *ve* (3.4) *şartları sağlansın.* $r'(t) \geq 0$ *ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $\psi'(x) \geq 0$ *olsun.* $\rho(t)$ *ve* $q(t)$ *fonksiyonları da* (3.5) *ve* (3.28) *şartlarını sağlayacak şekilde Teorem* 3.7*' deki gibi tanımlansın. Ayrıca kabul edelim ki* (3.17) *şartı da sağlansın. Bu taktirde* (3.1) *denklemi salınımlıdır.*

İspat . Teoremin ispatı Teorem 3.3' ün ispatı ile benzerdir ve bu yüzden detaylar göz ardı edilmiştir.

Örnek 3.9. $r(t) = t^{\alpha}$, $\psi(x(t)) = 2 + \frac{2-e^{-x(t)}}{1+e^{-x(t)}}$, $q(t) = t^2 + \frac{1}{t}$ ve $\alpha > 0$ bir sabit olmak üzere $t \in [1, \infty)$ için,

$$\left(t^{\alpha}\left(2 + \frac{2-e^{-x(t)}}{1+e^{-x(t)}}\right)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + \left(t^2 + \frac{1}{t}\right)|x(t)|^{\alpha-1}x(t)\left(1 + (x'(t))^2\right) = 0, \tag{3.31}$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Kolayca görülebilir ki her $x \in (-\infty, \infty)$ için $1 \leq \psi(x) \leq 4$ ve $\psi'(x) \geq 0$ dır.

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)} = \int_{1}^{\infty} \frac{ds}{s} = \infty,$$

olduğundan (3.2) şartı sağlanır. $\rho(t) = t$ alırsak,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\rho(s)q(s) - L_2 r(s)\rho'(s)\left(\frac{2}{s}\right)^{\alpha}\right] ds = \limsup_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \left[s^3 + 1 - 2^{\alpha+2}\right] ds = \infty,$$

elde edilir ve dolayısıyla (3.28) sağlanır.Bu yüzden de Teorem 3.7 den dolayı (3.31) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Örnek 3.10. $\alpha = 2$ ve q da $q(t) \geq 1$ olacak şekilde herhangi bir sürekli fonksiyon olmak üzere $t \geq 1$ için

$$\left(\frac{1}{t^2}\frac{2+x^2(t)}{1+x^2(t)}\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)'+q(t)\left|x(t)\right|^{\alpha-1}x(t)\left(1+x^2(t)+(x'(t))^2\right)=0, \tag{3.32}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Her $x\in(-\infty,\infty)$ için $1\leq\psi(x)\leq 2$ olduğu açıktır. Bu yüzden de

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)}=\int_{1}^{\infty}sds=\infty$$

ve

$$\varphi(t)=\left(\int_{t_0}^{t}r^{-1/\alpha}(s)ds\right)^{-1}=\left(\int_{1}^{t}sds\right)^{-1}=\frac{2}{t^2-1}.$$

dir. $\rho(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+t$ için

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left(\rho(s)q(s)-\frac{L_2^2}{L_1}\rho'(s)\varphi^{\alpha}(s)\right)ds\\
=\;&\limsup_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\left((\frac{s^3}{3}-s^2+s)q(s)-\frac{16}{(s+1)^2}\right)ds\\
\geq\;&\limsup_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\left((\frac{s^3}{3}-s^2+s)q(s)-4)\right)ds=\infty.
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 3.2' nin bütün şartları sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.2' den dolayı (3.32) denklemi salınımlıdır.

Örnek 3.11. $t\geq 1$ için

$$\left(t^5\left(4+\frac{3^{x(t)}-3^{-x(t)}}{3^{x(t)}+3^{-x(t)}}\right)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)'+t^{19/2}\left|x(t)\right|^{\alpha-1}x(t)\left(1+\frac{1}{1+(x'(t))^2}\right)=0, \tag{3.33}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Kolayca gösterilebilir ki her $x \in (-\infty, \infty)$ için $L_1 = 3$, $L_2 = 5$ ve $\psi'(x) \geq 0$'dır. $\alpha = 1/2$ alalım. Bu takdirde,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)} = \int_{1}^{\infty} \frac{ds}{s^{10}} < \infty$$

elde edilir ve dolayısıyla (3.3) sağlanır. Teorem 3.8' in uygulanabilmesi için (3.17) ve (3.28) sağlanmalıdır. Bunun için $\rho(t) = \sqrt{t}$ alırsak

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\rho(s)q(s) - L_2 r(s)\rho'(s)\left(\frac{2}{s}\right)^{\alpha}\right] ds = \limsup_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \left[s^{10} - \frac{5\sqrt{2}}{2}s^4\right] ds = \infty,$$

elde edilir ve (3.28) sağlanır. Ayrıca,

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r(z)} \int_{t_0}^{z} q(s)\chi^{\alpha}(s)ds\right)^{1/\alpha} dz = \int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{z^5} \int_{1}^{z} \frac{s^5}{3} ds\right)^2 dz = \int_{1}^{\infty} \left(\frac{z^6 - 1}{18z^5}\right)^2 dz = \infty,$$

olduğundan (3.17) şartı sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.8' den dolayı (3.33) denklemi salınımlıdır.

Örnek 3.12. $t \geq 1$ için

$$\left(\frac{1}{t^2}(7 - 4\cos x)\,|x'(t)|\,x'(t)\right)' + (t^5 + 11)\,|x(t)|\,x(t)\left(1 + \frac{1}{1 + 3x^2(t) + 7\,(x'(t))^2}\right) = 0, \tag{3.34}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Her $x \in (-\infty, \infty)$ için $3 \leq \psi(x) \leq 11$ olduğu açıktır. Bu yüzden de

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r^{1/\alpha}(s)} = \int_{1}^{\infty} s ds = \infty$$

ve

$$\varphi(t) = \left(\int_{t_0}^{t} r^{-1/\alpha}(s)ds\right)^{-1} = \left(\int_{1}^{t} s ds\right)^{-1} = \frac{2}{t^2 - 1}$$

dir. $\rho(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+t+7$ için

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\left(\rho(s)q(s)-\frac{L_2^2}{L_1}\rho'(s)\varphi^{\alpha}(s)\right)ds \\
=\ &\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{1}^{t}\left((\frac{s^3}{3}-s^2+s+7)(s^5+11)-\frac{16}{(s+1)^2}\right)ds \\
\geq\ &\limsup_{t\to\infty}\int\limits_{1}^{t}\left((\frac{s^3}{3}-s^2+s+7)(s^5+11)-\frac{121}{9})\right)ds=\infty.
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 3.2' nin bütün şartları sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.2' den dolayı (3.34) denklemi salınımlıdır.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında,

$$\left(r(t)\psi(x(t))\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + f(t,x(t),x'(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{4.1}$$

denklemi göz önüne alınarak, Riccati-tipi dönüşüm ve integral ortalama metodu kullanılarak (4.1) denklemi için salınım sonuçları verildi. Denklemdeki katsayı fonksiyonlarına yeni şartlar yüklenerek bu tezde elde edilen sonuçlardan farklı yeni salınım sonuçları elde edilebilir. Ayrıca literatürdeki diğer yöntemler kullanılarak bu tipten denklemler için farklı salınım sonuçları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Abdullah, H. K., 2004. A note on the oscillation of second order differential equations. Czechoslovak Mathematical Journal, 54, 949-954.

[2] Agarwal, R. P., Grace, S. R., O'Regan D., 2002. Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[3] Agarwal, R. P., Bohner, M., Li W.-T., 2004. Nonoscillation and Oscillation Theory for Functional Differential Equations, Pure And Applied Mathematics, A Dekker Series of Monographs and Textbooks, New York.

[4] Agarwal, R. P., O'Regan D., Saker, S. H., 2004. Oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay dynamic equations. J. Math. Anal. Appl., 300, 203-217.

[5] Candan, T., 2003. Oscillation behavior of higher order functional differential equations with distrubed deviating arguments. Ph. D. Thesis. Iowa State University, Ames, Iowa.

[6] Chen, D. X., 2012. Nonlinear oscillation of a class of second-order dynamic equations on time scales. Appl. Math. Sci., 6, 2957-2962.

[7] Chen, D., 2012. Oscillation properties for second-order half-linear dynamic equations on time scales. J. Math. Research, 4, 90-96.

[8] Çakmak, D., 2004. Integral averaging technique for the interval oscillation criteria of certain second-order nonlinear differential equations. J. Math. Anal. Appl., 300, 408-425.

[9] Elabbasy, E. M., Hassan, T. S., Saker, S. H., 2005. Oscillation of second-order nonlinear differential equations with a damping term. Electron. J. Differential Equat., 1-13.

[10] Elabbasy, E. M., Zaghrout, A. A. S., Elshebany, H. M., 2008. Oscillation criteria for second order half-linear differential equations with damping term. Dif. Equ. Control Processes, 4, 1-18.

[11] Fite, W. B., 1918. Concerning the zeros of the solutions of certain differential equation. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 19, No. 4, 341-352.

[12] Grace, S. R., 1990. Oscillation critria for second order differential equations with damping. Journal of the Australian Mathematical Society, 49, 43-54.

[13] Grace, S. R., 1992. Oscillation theorems for nonlinear differential equations of second order. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 171, 220-241.

[14] Grace, S. R., Bohner, M., Agarwal, R. P., 2009. On the oscillation of second-order half-linear dynamic equations. J. Difference Equ. Appl., 15, 451-460.

[15] Grace, S. R., Agarwal, R. P., Kaymakçalan, B., Sae-jie, W., 2009. On the oscillation of certain second order nonlinear dynamic equations. Math. Comput. Modelling, 50, 273-286.

[16] Han, Z., Sun, S., Zhang, C., Li, T., July 6-9, 2010. Oscillation criteria of second-order nonlinear delay deynamic equations on time scales. Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation, pp.5762-5766, Jinan, China.

[17] Hartman, P., 1952. On nonoscillatory linear differential equations of second order. American Journal of Mathematics, 74, 389-400.

[18] Kamenev, I. V., 1978. An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order. Matematicheskie Zametki, 23, 249-251.

[19] Kirane, M., Rogovchenko, Y. V., 2000. Oscillation results for a damped differential equation with nonmonotonous nonlinearity. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 250, 118-138.

[20] Kusano, T., Naito, Y., 1997. Oscillation and nonoscillation criteria for second order quasilinear differential equations. Acta Math. Hungar., 76, 81-99.

[21] Li, H. J., 1995. Oscillation criteria for second order linear differential equations. J. Math. Anal. Appl., 194, 217-234.

[22] Li, W.-T., Zhong, C. K., 2002. Integral averages and interval oscillation of second-order nonlinear differential equations. Math. Nachr., 246-247, 156-169.

[23] Li, W.-T., Zhong, C. K., Fan, X. L., 2003. Oscilation criteria for second order half-linear ordinary differential equations with damping. Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 33, No. 3, 927-951.

[24] Luo, J., Debnath, L., 2002. Osillation criteria for second-order quasilinear functional differential equations. Comput. Math. Appl., 44, 731-739.

[25] Manojlović, J. V., 1999. Oscillation criteria for second-order half-linear differential equations. Mathematical and Computer Modelling, 30, 109-119.

[26] Mohammed, W. W. E., 2006. Oscillation of certain types of second order differential equations. M. Sc. Thesis, Mansoura University, Mansoura, Egypt.

[27] Philos, Ch. G., 1989. Oscillation theorems for linear differential equations of second order. Archiv der Mathematik, Vol. 53, 482-492.

[28] Rogovchenko, S. P., Rogovchenko, Y. V., 2003. Oscillation theorems for differential equations with a nonlinear damping term. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 279, 121-134.

[29] Rogovchenko, Y. V., 2000. Oscillation theorems for second-order equations with damping. Nonlinear Analysis, 41, 1005-1028.

[30] Rogovchenko, Yu. V., Tuncay, F., 2007. Interval oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with damping. Dyn. Syst. Appl., 16, 337-343.

[31] Rogovchenko, Yu. V., Tuncay, F., 2008. Oscillation criteria for second-order nonlinear differential equations with damping. Nonlinear Analysis, 69, 208-221.

[32] Sturm, B., 1836. Sur les équations différentielles linéaires du second ordré. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1, 106-186.

[33] Sun, Y. G., 2004. New Kamenev-type oscillation criteria for second-order nonlinear differential equations with damping, J. Math. Anal. Appl., 291, 341-351.

[34] Swanson, C. A., 1968. Comprasion and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Acedemic Press, New York.

[35] Tunç, E., Avcı, H., 2012. New oscillation theorems for a class of second-order damped nonlinear differential equations. Ukrainian Math. J., 63, pp.1441-1457. (Published in Ukrainskyi Matematychnyi Zhurnal, 2011, 63, pp.1263-1278).

[36] Tunç, E., Avcı, H., 2013. Interval oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with nonlinear damping,. Miskolc Mathematical Notes, 14, 307-321.

[37] Tunç, E., Kaymaz, A., 2012. New oscillation results for forced second order differential equations with mixed nonlinearities. Applied Mathematics, 3, 147-153.

[38] Tunç, E., Eroğlu, A., 2013. Oscillation results for second order half linear nonhomogeneous differential equations with damping. Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 15, No. 2, 255-263.

[39] Wang, Q.-R., 2001. Oscillation and asymptotics for second-order half linear differential equations. Applied Mathematics and Computation, 122, 253-266.

[40] Wang, Q.-R., 2004. Oscillation criteria for nonlinear second order damped differential equations. Acta Mathematica Hungarica, 102, 117-139.

[41] Wang, X., Song, G., 2011. Oscillation criteria for second order nonlinear damped differential equations. Intenational Journal of Information and Systems Sciences, Vol. 7, No. 1, 73-82.

[42] Wintner, A., 1949. A criterion of oscillatory stability. Quarterly of Applied Mathematics, 7, 115-117.

[43] Wong, J. S. W., 1968. On second order nonlinear oscillation. Funkcialaj Ekvacioj, 11, 207-234.

[44] Wong, J. S. W., 1969. Oscillation and nonoscillation of solutions of second order linear differential equations with integrable coefficents. Transactions of the American Mathematical Society, 144, 197-215.

[45] Wong, J. S. W., 1986. An oscillation criterion for second order nonlinear differential equations. Proceedings of the American Mathematical Society, 98, 109-112.

[46] Wong, J. S. W., 1992. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with integrable coefficents. Proceedings of the American Mathematical Society, 115, 389-395.

[47] Wong, J. S. W., 1993. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations involving integral averages. Canadian Journal of Mathematics, 45, 1094-1103.

[48] Wong, J. S. W., 1999. Oscillation criteria for a forced second-order linear differential equation. J. Math. Anal. Appl., 231, 235-240.

[49] Wong, J. S. W., 2001. On Kamenev type oscillation theorems for second order differential equations with damping. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 258, 244-257.

[50] Yan, J., 1984. A note on an oscillation criterion for an equation with damped term. Proceedings of the American Mathematical Society, 90, 277-280.

[51] Yan, J., 1986. Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping. Proceedings of the American Mathematical Society, 98, 276-282.

[52] Yang, Q., Cheng, S. S., 2003. Oscillation of second order half linear differential equations with damping. Georgian Mathematical Journal, 4, 785-797.

[53] Yang, X., 2002. Oscillation results for second-order half-linear differential equations. Mathematical and Computer Modelling, 36, 503-507.

[54] Yeh, C. C., 1982. Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations with damped term. Proceedings of the American Mathematical Society, 84, 397-402.

[55] Yu, Y. H., 1991. Leighton type oscillation criterion and Sturm type comparison theorem. Mathematische Nachrichten, 153, 137-143.

[56] Zheng, Z., 2002. Note on Wong's paper. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 274, 466-473.

[57] Zheng, Z., 2006. Oscillation criteria for nonlinear second order differential equations with damping. Acta Math. Hungar., 110, 241-252.

[58] Zheng, Z., Cheng, S. S., 2007. Variational oscillation criteria for nonlinear nonhomogeneous differential equations. Appl. Math. E-Notes, 7, 247-256.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Lütfi ÇORAKLIK

Doğum Tarihi : 19.09.1986

Doğum Yeri : Tokat-Turhal

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 0 546 276 88 45

E-posta : lutfi.coraklik@iskur.gov.tr

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2015
Lisans	Gaziosmanpaşa Üniversitesi	2009
Lise	Turhal Cumhuriyet Lisesi	2003