$C(\alpha)-$MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

ÜMİT YILDIRIM

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

PROF. DR. MEHMET ATÇEKEN

Mayıs - 2016

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

$C(\alpha)-$MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

ÜMİT YILDIRIM

TOKAT
Mayıs - 2016

Bu tez çalışması;

Gaziosmanpaşa Üniversitesi tarafından 2015 – 57 nolu proje ile desteklenmiştir.

Ümit YILDIRIM tarafından hazırlanan "$C(\alpha)$ – Manifoldların Geometrisi Üzerine " adlı tez çalışmasının savunma sınavı 5 Mayıs 2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / ~~Oy Çokluğu~~ İle Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALI nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN	....
Üye Prof. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT Niğde Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Ercan TUNÇ Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Osman ÖZDEMİR Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Süleyman DİRİK Amasya Üniversitesi	....

Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ONAY

....

Prof. Dr. Mehmet Ali SAKİN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

20/05/2016

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Ümit YILDIRIM

5 Mayıs 2016

ÖZET

DOKTORA TEZİ

$C(\alpha)-$MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

ÜMİT YILDIRIM

GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MEHMET ATÇEKEN)

Bu tez çalışmasında, hemen hemen kontak metrik manifoldların bir alt sınıfı ve co-Keahler, Kenmotsu, Sasakian manifoldların genel hali olan hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldların bazı eğrilik özelikleri çalışılmıştır. Bu tez dört bölüm ve bu bölümlerin alt kısımlarından oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş ve literatür özetine ayrılmıştır. İkinci bölümde temel topolojik kavramlar verilerek manifoldlar tanıtılmış sonrasında ise hemen hemen kontak metrik manifoldlar ve bir alt sınıfı olan hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldlar için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca bir hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldunun Ricci tensörü, Ricci operatörü, skaler eğrilik fonksiyonu gibi bazı temel formülleri oluşturulmuştur. Bölüm sonunda 5-boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifold örneği inşa edilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölüm tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörünün birbirleri üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiş ve elde edilen sonuçlara göre hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldları kategorize edilmiştir. Bölüm sonunda verdiğimiz teoremlerin bazılarını sağlayan 5-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldu örneği verilmiştir. Dördüncü bölümde ise hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldların lokal $\phi-$simetrik, lokal simetrik, $\eta-$paralel ve quasi-konformal flat olması durumları incelenmiştir. Bölüm sonunda özel bir hemen hemen $C(\alpha)-$manifold örneği inşa edilmiştir.

2016, 86 + IV Sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Hemen hemen $C(\alpha)-$manifold, Einstein manifold, Projektif eğrilik tensörü, Concircular eğrilik tensörü, Quasi – konformal eğrilik tensörü.

ABSTRACT

DOCTORATE THESİS

ON GEOMETRY OF $C(\alpha)-$MANIFOLDS

ÜMİT YILDIRIM

GAZIOSMANPASA UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

(SUPERVISOR:) PROF. DR. MEHMET ATÇEKEN

In this thesis, some curvature properties of almost $C(\alpha)-$manifolds have been studied which is a sub-class of almost contact metric manifolds and general case of co-Keahler, Kenmotsu and Sasakian manifolds. This thesis consist of four sections which and contain sub-sections. The first sections is devoted to introduction and review of the literature. In the second part, basic topological concepts have been given and manifolds have been introduced. After that, necessary definitions and theorems for almost contact metric manifolds and a sub class almost $C(\alpha)-$manifolds have been given. In addition, some basic formulas such as Ricci tensor, Ricci operator, scalar curvature function of an almost $C(\alpha)-$manifolds have been introduced. At the end of section, an example of an almost contact metric manifold has been built. The third and fourth part is the original parts of this thesis. In the third section, we have studied Riemann curvature tensor, projective curvature tensor, concircular curvature tensor, Ricci tensor and quasi-conformal curvature tensor act to each other almost $C(\alpha)-$manifold have been categorized according to the results obtained. At the end of section, $5-$dimensional an almost $C(\alpha)-$manifold examples which providing the given theorems has given. In the fourth part, case of local $\phi-$symmetric, local symmetric, $\eta-$parallel and quasi-conformal flat of an almost $C(\alpha)-$manifold has been investigated. In the end, we construced an example which is an almost $C(\alpha)-$manifold.

have been investigated being cases local $\phi-$symmetric, local symmetric, $\eta-$parallel and quasi-conformal flat of an almost $C(\alpha)-$manifold

2016, 86 + IV Page

KEYWORDS: Almost $C(\alpha)-$manifold, Einstein manifold, Projective curvature tensor, Concircular curvature tensor, Quasi – conformal curvature tensor.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında benden bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen, beni her konuda yüreklendiren tez danışmanım sayın hocam Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca okul hayatıma yön veren, bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi babam Yaşar YILDIRIM'a, dualarını eksik etmeyen annem Sadiye YILDIRIM'a desteklerini esirgemeyip yanımda olan eşime ve aileme teşekkür çok teşekkür ederim.

Bu tez çalışması Gaziosmanpaşa Üniversitesi Bilimsel Araştırma Birimi tarafından 2015-57 nolu proje olarak desteklenmiştir. Desteğinden dolayı Gaziosmanpaşa Üniversitesine teşekkür ederim.

ÜMİT YILDIRIM

5 Mayıs 2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. Giriş

Bilinen geçmişten günümüze kadar olan dönemde bilim ve teknolojinin içerisinde geometri biliminin yeri daima korunmuştur. İnsanoğlunun zaman içerisinde oluşan ihtiyaçlarına göre geometri çeşitli dallara ayrılmış ve çalışmalar daha özgün yürütülmüştür. Bu alanlardan birisi diferansiyel hesaplamanın geometriye tatbik edildiği diferansiyel geometridir.

Bir çok bilim dalında uygulama bulmasından dolayı diferansiyel geometri modern matematiğin en popüler çalışma alanlarından biridir. Diferansiyel geometrinin başlangıcı Gauss'un yüzeylerin eğrilikleri üzerine çalışmalarına dayanır. Gauss'un bu çalışmaları Riemann manifoldu kavramına ön ayak olmuştur. En genel tanımı ile manifoldlar yerel olarak $\mathbb{R}^n$ öklidyen uzayına benzeyen nokta kümeleridir. Bir manifold sonlu sayıda koordinat komşuluklarından oluşur ve her bir koordinat komşuluğu $\mathbb{R}^n$ uzayının bir açık kümesine homeomorfiktir. Koordinat komşulukları, manifold için yerel koordinat sistemleri tanımlamaya olanak verir.

Manifoldlar üzerinde tanımlanan en temel kavram tanjant vektör kavramıdır. Tanjant vektör kavramı bir çok şekilde tanımlanmakla birlikte, geometrik olarak en uygun metot manifold üzerinde eğri kavramını kullanarak tanımlamaktır. Manifold üzerinde bir eğri, $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığından M manifolduna bir diferensiyellenebilir dönüşüm olarak tanımlanır. Manifold üzerinde bir p noktasından geçen iki eğrinin bu noktadaki birinci türevleri aynı ise bu iki eğriye denktir denir. Diğer bir kavram vektör alanı kavramıdır. Vektör alanı, manifoldun her bir noktasına bir tanjant vektörü karşılık getiren bir diferensiyellenebilir dönüşüm olarak tanımlanabilir.

Diferansiyel geometri türevin tanımlı olduğu Riemann manifoldlarının özelikleri ile çok yakından ilgilenir. Başka bir deyişle bu manifoldlar üzerindeki metrik kavramlarla uğraşır. Diğer taraftan bu manifoldların eğrilikleri, eğriler için burulmalar ve yüzeyler için değişik eğrilikler araştırılan konulardan başlıcalarıdır.

Bir Riemann manifoldunda, Riemann eğrilik tensörü R ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere eğer $R(X,Y)R = 0$ ize bu durumda manifolda semi-simetriktir denir. Benzer şekilde, Ricci tensörü S, projektif eğrilik tensörü P, concircular eğrilik tensörü $\tilde{Z}$ ve quasi-konformal eğrilik tensörü $\widehat{C}$ olmak üzere, $R(X,Y)S = 0$ ise manifolda Ricci semi-simetrik, $R(X,Y)P = 0$ ise projektif semi-simetrik, $R(X,Y)\tilde{Z} = 0$ ise concircular semi-simetrik ve $R(X,Y)\tilde{C} = 0$ ise quasi-konformal semi-simetriktir denir.

Simetrik Riemann manifoldlar ile ilgili çalışmalar E. Cartan ile başlamıştır (Cartan, 1926). Sonraki dönemlerde pek çok yazar, çeşitli manifoldların simetriklik durumlarını incelemişlerdir (Boeckx ve ark., 1999; Chaki, 1988; Deszcz, 1989; De ve ark., 2003; Patterson, 1952; Szabo, 1982; Szabo, 1983; Szabo, 1984; Takahashi, 1977).

Bu bilgiler ışığında, (ϕ, ξ, η, g) kontak yapısıyla verilen $(2n+1)-$boyutlu hemen hemen kontak metrik manifoldu $M(\phi, \xi, \eta, g)$ ve manifoldun Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$R(X,Y,Z,W)=R(X,Y,\phi Z,\phi W)+\alpha\{-g(X,Z)g(Y,W)+g(X,W)g(Y,Z)$$
$$+g(X,\phi Z)g(Y,\phi W)-g(X,\phi W)g(Y,\phi Z)\}$$

şartını sağlıyorsa M ye bir hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldu denir. Bir hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldu, co-Keahler, Sasakian ve Kenmotsu manifoldlarının genel halidir. Yani manifold, özel olarak $\alpha=0$ ise co-Keahler, $\alpha=1$ ise Sasakian ve $\alpha=-1$ ise Kenmotsu manifoldu adını alır (Janssens ve Vanhecke, 1981). Bu manifoldlarla ilgili pek çok çalışma yapılmış olmasına karşın $C(\alpha)-$manifoldlarla ilgili çalışmalar oldukça sınırlı sayıdadır.

Yukarıdaki çalışmalar doğrultusunda orijinal bu tez çalışmasında, hemen hemen kontak metrik manifoldların bir alt sınıfı ve co-Keahler, Sasakian ve Kenmotsu manifoldların genel durumu olan hemen hemen $C(\alpha)-$manifoldlarının eğrilik özelikleri geometrik olarak incelenmiştir.

2. Temel Tanım ve Kavramlar

Temel kavramlar için ayırdığımız bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda topolojik kavramlara, ikinci kısımda manifoldların inşasında kullanılan kavramlara yer verilmiş olup son kısımda hemen hemen kontak metrik manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilerek hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldlar tanıtılmıştır.

2.1 Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. X bir küme ve τ da X in kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer

(i) $X, \emptyset \in \tau$,

(ii) τ da alınan sonlu sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir.
Yani, $\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ (I sonlu bir indis kümesi) için $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$ dır.

(iii) τ da alınan sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ya aittir.
Yani, $\forall \{A_i\}_{i \in J} \subset \tau$ (J sonlu bir indis kümesi) için $\bigcap\limits_{i \in J} A_i \in \tau$ dır.

aksiyomları sağlanırsa, τ ya X üzerinde bir *topoloji* denir. τ topolojisi ile donatılmış X kümesine veya (X, τ) ikilisine *topolojik uzay* denir (Aslım, 1988).
τ nun her elemanına, X üzerinde τ tarafından tanımlanan topolojiye göre bir *açık küme* denir. X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye τ tarafından tanımlanan topolojiye göre *kapalı küme* denir.

Tanım 2.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay ve X in bazı açık altkümelerinin sınıfı B olsun. X in her açık altkümesi B nin elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyor ise, B ye X uzayının bir *bazı* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A = \{G^{'} = A \cap G : G \in \tau\}$$

kümeler sınıfı A üzerinde bir topolojik yapıdır. A üzerinde τ tarafından üretilen τ_A topolojisine, X uzayının indirgenen (relatif, bünyesel) topolojisi denir. Bu durumda, (A, τ_A) topolojik uzayına (X, τ) uzayının *alt uzayı* denir.

Tanım 2.1.4. X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için

(i) $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

aksiyomları sağlanıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir *metrik* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.5. Bir (X, d) metrik uzayı ile bir $x \in X$ ve bir $r > 0$ sayısını göz önüne alalım.

$$B(x, y) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

kümesine x merkezli ve r *yarıçaplı yuvar* denir.

X bir cümle d de bu cümle üzerinde bir metrik ise, d metriği bu cümle üzerinde bir tek topoloji üretir. Böylece bir metrik uzay üzerinde bir topoloji tanımlamak her zaman mümkündür (Aslım, 1988).

Örnek 2.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere $\mathbb{R}^n$ ile

$$\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

cümlesini gösterelim. Burada her biri x_i reel sayısına $x \in \mathbb{R}^n$ *noktasının i. koordinatı* adı verilir.

Şimdi $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Kolayca görülebilir ki, bu fonksiyon $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metrik tanımlar. Böylece $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrik uzay

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

açık yuvarıyla üretilen topolojiye sahiptir. Bu örnek bize $\mathbb{R}^n$ uzayının topolojik uzay olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.6. X bir topolojik uzay, $x \in X$ olsun. x noktasını içeren bir U altkümesinin her N üst kümesine x noktasının bir *komşuluğu* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.7. (X, τ) ve $(X^{'}, \tau^{'})$ herhangi iki topolojik uzay, $f : X \to X^{'}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $X^{'}$ uzayında $f(x_0)$ ın her $N^{'}$ komşuluğu için $f(N) \subset N^{'}$ olacak şekilde, X uzayında x_0 ın bir N komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında τ ve $\tau^{'}$ ya göre sürekli, $\tau - \tau^{'}$ sürekli veya kısaca *sürekli* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.8. (X, τ) ve $(X^{'}, \tau^{'})$ topolojik uzaylar arasındaki f fonksiyonu $1-1$ ve örten, sürekli ve f^{-1} tersi de sürekli ise, f fonksiyonuna bir *homeomorfizma* (topolojik dönüşüm) denir. Bu halde (X, τ) ve $(X^{'}, \tau^{'})$ uzaylarına homeomorfiktirler (topolojik olarak denktirler) denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.9. X topolojik uzayının her faklı x, y noktası için $N \cap M = \emptyset$ olacak şelkilde x noktasının bir N komşuluğu ve y noktasının bir M komşuluğu varsa, X topolojik uzayına *Hausdorff uzayı* (Kısaca H-uzayı) denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.10. (X, τ) bir topolojik uzayının açık altkümelerinin sınıfı g olsun. Eğer

$$X = \bigcup_{G \in g} G$$

ise g sınıfına (X, τ) uzayının bir açık örtüsü denir. Eğer g nin bir altkümesi X uzayını örterse, bu altkümeye (X, τ) nın bir *açık alt örtüsü* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.11. (X, τ) topolojik uzayının her g açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına *kompakt uzay* denir.

X topolojik uzayının her x noktası X uzayında kompakt olan bir komşuluğa sahip ise, X uzayına *yerel kompakt uzay* denir.

Kompakt bir uzay yerel kompakt uzaydır. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 2.1.12. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. (A, τ_A) uzayı kompakt ise, A kümesine X uzayının *kompakt altkümesi* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.13. (X, τ) topolojik uzayı boş olmayan ayrık açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, (X, τ) uzayına *bağlantılıdır* aksi halde *bağlantısızdır* denir (Aslım, 1988).

Tanım 2.1.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve (X, τ) topolojik uzayının açık örtüleri sırasıyla $U = \{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ve $V = \{v_\beta\}_{\beta \in J}$ olsun. Eğer V nin her bir açık kümesi U nun bir açık kümesi içinde bulunuyorsa V ye U nun *inceltilmişidir* denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff ve her açık örtüsünün bir lokal sonlu incelmesi varsa bu topolojik uzaya *parakompakttır* denir (Aslım, 1988).

2.2 Manifoldlar

Bu kısımda, ilk olarak koordinat komşuluğu kavramı verildikten sonra topolojik manifold tanımı verilecektir. Daha sonra manifold üzerinde diferensiyellenebilir atlas tanımlandıktan sonra r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold kavramı verilerek bir manifold üzerindeki diferensiyellenebilir yapı tanımlanacak, manifold üzerinde tensör, diferensiyel form, Lie braketi, kovaryant türev, vektör alanı, türev dönüşümü ve benzeri bir çok kavram tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1. X bir Hausdorff uzayı olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık cümlesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

homeomorfizmine X de tanımlanan *$n-$ boyutlu koordinat sistemi* veya *harita*, U açık cümlesine de, *φ haritasının koordinat komşuluğu* veya *koordinat bölgesi* denir. Bu harita (U, φ) şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).
Eğer, $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

dir. Buradaki $x_1, ..., x_n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.2.2. M boştan farklı bir cümle olmak üzere M nin her noktasının E^n e veya E^n in bir U açık altcümlesine homeomorf olan bir koordinat komşuluğu varsa, M ye *$n-$boyutlu topolojik manifold* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.3. f, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k. mertebeden kısmi türevleri var ve $k \leq r$ olmak üzere, sürekli ise f fonksiyonu *r. mertebeden diferensiyellenebilir* denir ve bu $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Eğer her $r \in Z^+$ için $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ise f fonksiyonuna *diferensiyellenebilir* denir ve bu $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.4. X bir Hausdorff uzayı ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinat ailesine X üzerinde C^k*sınıfından bir atlas* denir. Burada A, α indislerinin kümesidir.

(i) Lokal haritaların U_α bölgesi X i örter, yani $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ dır.

(ii) $\alpha \neq \beta$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olacak biçimde

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri C^k-sınıfındadır (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.5. M bir $n-$ boyutlu topolojik manifold ve $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ de M nin bir atlası olsun. $r \geq 1$ olmak üzere, eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye C^r sınıfındadır denir.
$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in A$ için

$$\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfındandır.
Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıfından ise S ye M üzerinde bir C^r sınıfından *diferensiyellenebilir yapı* denir.
M, $n-$ boyutlu bir topolojik manifold ve M nin S atlası C^r sınıfından olsun. O zaman M ye $n-$ boyutlu *diferensiyellenebilir manifold* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.6. M ve N birer manifold ve $\varphi : M \longrightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümünün tersi var ve tersi de diferensiyellenebilir ise φ dönüşümüne bir *diffeomorfizma* adı verilir. M ve N manifoldları verildiğinde M den N ye bir diffeomorfizma var ise M ve N manifoldlarına *diffeomorfiktirler* denir (Hacısalihoğlu, 1980).
Manifoldlar üzerindeki önemli kavramlarından biri de tanjant vektör kavramıdır. Manifold esas olarak bir topolojik uzaydır. Bu topolojik uzay üzerinde diferensiyel yapı tanımlayarak diferensiyel teknikleri kullanılabilir.

Ayrıca, tanjant vektör kavramı da manifold üzerinde vektör uzayı yapısı taşıyarak cebirsel teknikleri kullanmaya olanak sağlamaktadır. Tanjant vektör için birbirine denk olan bir çok tanım literatürde mevcuttur. Ancak, biz bunlardan yöne göre türev özelliklerini gözönüne alarak manifoldun bir p noktasındaki tanjant vektörünü aşağıdaki biçimde tanımlayabiliriz.

Tanım 2.2.7. M bir topolojik manifold ve $p \in M$ olsun. M nin p noktasının bir komşuluğu U olmak üzere

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \xrightarrow{dif-bilir} \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümlede her $f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

(i) Lineerlik

$$V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_p(g),$$

(ii) Leibniz

$$V_p(f.g) = V_p(f).g(p) + f(p)V_p(g)$$

özelliklerini sağlayan V_p fonksiyonuna M nin p noktasındaki *tanjant vektörü* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_M(p)$ ile gösterelim. Buna göre

$$T_M(p) = \{V_p \mid V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow[leibniz]{lineer} \mathbb{R}\}$$

dir. İç işlem

$$\begin{aligned} \oplus \ : \ & T_M(p) \times T_M(p) \to T_M(p) \\ & (V_p, W_p) \to V_p \oplus W_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$(V_p + W_p)[f] = V_p[f] + W_p[f]$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(T_M(p), \oplus)$ ikilisi bir abel grup olur. Bu cümlede dış işlem de

$$\begin{aligned} \odot \ : \ & \mathbb{R} \times T_M(p) \to T_M(p) \\ & (\lambda, V_p) \to \lambda \odot V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$(\lambda \odot V_p)\,[f] = \lambda V_p\,[f]$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemlerle birlikte $T_M(p)$, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya M nin *p-noktasındaki tanjant uzayı* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.8. $f : E^n \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyon ve $\overrightarrow{V}_p \in T_{E^n}(p)$ olsun. Bu durumda $\overrightarrow{V}_p = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{V}_p\,[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1)), ..., f(P_n + t(Q_n - P_n)))_{t=0}$$

reel sayısına f *nin* $\overrightarrow{V}_p$ *vektörü yönündeki türevi* denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.9. Reel sayılar cismi üzerinde r tane vektör uzayı $V_1, V_2, V_3, ..., V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times V_3, ..., V_r \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq r$ olmak üzere $u_i,\ v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$f(u_1, ..., u_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, ..., v_r) = af(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, ..., v_r) + bf(v_1, ..., v_{i-1}, u_i, ..., v_r)$$

şartını sağlıyorsa f ye $r-$*lineer fonksiyon* denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.10. M bir $n-$ boyutlu manifold diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(p)$ olsun. $T_M(p)$ nin dual uzayına M nin p noktasındaki *kotanjant uzayı* denir. M nin p noktasındaki kotanjant uzayı $T_M^\star(p)$ ile gösterilir. Buna göre

$$T_M^\star(p) = \{\omega \mid \omega : T_M(p) \xrightarrow{lineer} \mathbb{R}\}$$

dir. $T_M^\star(p)$ uzayının her bir elemanına da M nin p noktasındaki *kotanjant vektörü* denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.11. Reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve V nin duali uzayı V^* olmak üzere

$$L(V^r,\ V^{s^*};\ \mathbb{R}) = \{f \mid f : V^r \times V^{s^*} \xrightarrow{(r+s)-linner} \mathbb{R}\ \}$$

uzayında iç ve dış işlemler sırasıyla

$$(f \oplus g)(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s) = f(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s) + g(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s) = \lambda f(\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_s)$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu uzaya *r. mertebeden kovaryant* ve *s. mertebeden kontravaryant tensör uzayı* denir. Bu uzayın elemanlarına da $(r, s)-$*tipinde bir tensör* denir (Boothby, 1986).

Manifoldlar üzerindeki tanjant vektör kavramından faydalanarak vektör alanı tanımlanabilir. M bir manifold ve $T_M(p)$ manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasına $T_M(p)$ uzayında bir tanjant vektörü karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı dediğimiz gibi aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

Tanım 2.2.12. M diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. Her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü

(i) $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$

(ii) $X(f\ g) = X(f)g + fX(g)$

özelliklerini sağlıyorsa X e M üzerinde bir *vektör alanı* denir (Boothby, 1986). M üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Buna göre bir manifold üzerinde bir vektör alanı, manifoldun her bir noktasına bir tanjant uzayı karşılık getirir.

Tanım 2.2.13. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere

(i) 2-lineer, yani her $a, b \in \mathbb{R}$ için $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

(ii) anti-simetrik yani her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

(iii) her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$$

özellikleri sağlanıyorsa $[\ ,]$ ye $M-$üzerinde bir *Lie operatörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Örnek 2.2.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} [\ ,] \ : \ & \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ & (X, Y) \to [X, Y] \end{aligned}$$

dönüşümünü her $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[X, Y] f = X(Y(f)) - X(Y(f)) \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanıyor. $[\ ,]$, $\chi(M)$ üzerinde bir Lie operatörüdür. Burada $X(f)$, f fonksiyonunun X vektör alanına göre yöne göre türevidir.

M bir diferensiyellenebilir manifold, her $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere $f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ fonksiyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için Lie operatörü

(i) $[X, Y](f + g) = [X, Y](f) + [X, Y](g)$

(ii) $[X, Y](\lambda f) = \lambda[X, Y]f$

(iii) $[X, Y](fg) = g[X, Y](f) + f[X, Y](g)$

özelliklerini sağlar (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.2.1. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ ve $f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için*

$$[fX, gY] = (fg)[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X \tag{2.2.2}$$

dir.

Tanım 2.2.14. M ve N diferensiyellenebilir manifoldları arasında bir $f : M \to N$ dönüşümünün türev dönüşümü

$$df : \chi(M) \to \chi(N)$$

biçiminde gösterilir. Bu dönüşüm her $p \in M$ noktasında

$$(f_*)_p = df_p : T_M(p) \to T_N(f(p))$$

lineer dönüşümünü verir ve buna da f nin p *noktasındaki türev dönüşümü* denir (Hacısalihoğlu, 1980).
$(x^1, ..., x^m)$ ve $(y^1, ..., y^m)$ sırasıyla M ve N üzerindeki lokal koordinat sistemleri olsunlar. $i = 1, 2..., m,\ \ j = 1, ..., n$ olmak üzere f dönüşümü için

$$f^j = y^j \circ f \text{ ve } f_i^j = \frac{\partial f^j}{\partial x_i}$$

yazılabilir. Böylece

$$df(\frac{\partial}{\partial x_i}) = f_i^j \frac{\partial}{\partial y_i}$$

elde edilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Teorem 2.2.2. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda $f_\star$ türev dönüşümü lineerdir ve M de seçilen eğriden bağımsızdır (Hacısalihoğlu, 1980).*

Manifoldların önemli çeşitlerinden olan Riemann manifoldları, manifoldun her noktasında tanjant uzayı üzerinde bir iç-çarpım metriği tanımlar. Bu kısımda Riemann metriği, Riemann konneksiyonu ve Riemann manifoldlarının eğrilikleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.15. M bir diferensiyellenebilir manifold M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların cümlesi de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $a,\ b \in \mathbb{R}$ için

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü

(i) simetrik, yani

$$g(X, Y) = g(Y, X),$$

(ii) pozitif tanımlılık,

$$X \neq 0 \quad \text{için} \quad g(X,X) \geqslant 0, \quad \text{ve} \quad g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0,$$

(iii) bilineerlik,

$$g(aX + bY, Z) = ag(X,Z) + bg(Y,Z)$$

şartlarını sağlıyorsa g ye M üzerinde bir *Riemann metriği* veya $(2,0)$ *mertebeli metrik tensör* ve (M,g) ikilisine de bir *Riemann manifoldu* adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.16. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla \ : \ & \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M) \\ & (X,Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

(i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir *afin konneksiyon* ve ∇_X'e de X e göre *kovaryant türev operatörü* denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.17. M, n-boyutlu bir manifold ve M üzerinde ki konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T \ : \ & \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ & (X,Y) \rightarrow T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun *torsiyon tensörü* denir. Kolayca görülebilir ki torsiyon tensörü anti simetriktir.

Tanım 2.2.18. (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon olsun. O zaman her $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü

(i) $\nabla_X Y - \nabla_X Y = [X, Y]$ (konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği),

(ii) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$(konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *Riemann konneksiyonu* (sıfır torsiyonlu konneksiyon) veya *Levi-Civita konneksiyonu* denir (Hacısalihoğlu, 1983).
(M, g), n-boyutlu Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad -g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

ile tanımlanan ifadeye *Kozsul formülü* adı verilir (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.19. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $X \in \chi(M)$ için L_X, keyfi (r, s)-tipinde tensör alanını yine (r, s)-tipinde tensör alanına götürür ve X vektör alanına göre *Lie türev operatörü* olarak adlandırılır. $Y \in \chi(M)$ için

$$L_X Y = [X, Y]$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $f \in C(M, \mathbb{R})$ için $L_X f = X(f)$ dir. Her $Y, Z \in \chi(M)$ için g-Riemann metrik tensörünün $X-$vektör alanına göre Lie- türevi de

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= L_X g(Y, Z) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad +g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, \nabla_Z X) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $L_X g = 0$ ise X vektör alanına *Killing vektör alanı* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.20. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel r-*forma* bir diferensiyel (r+1)-*form* karşılık getiren diferensiyel operatöre *dış türev operatörü* denir ve d ile gösterilir.

Eğer ω bir $r-$form ise, $X_0, X_1, ..., X_r \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, ..., X_r) &= \frac{1}{r+1}\{\sum_{i=1}^{r}(-1)^i X_i(\omega(X_0, ..., X_{i-1}, X_i, ..., X_r) \\ &+\frac{1}{r+1}\sum_{i,j=0}^{r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, ..., X_{i-1}, X_i, ..., X_r)\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $1-form$ ve $2-form$ için d operatörü $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$2d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \tag{2.2.4}$$

ve

$$\begin{aligned} 3d\Phi(X, Y, Z) &= X(\Phi(Y, Z)) + Y(\Phi(Z, X)) + Z(\Phi(X, Y)) \\ &-\Phi([X, Y], Z) - \Phi([Y, Z], X) - \Phi([Z, X], Y) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.21. (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R \ &: \ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ &(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

ile tanımlan R fonksiyonu M üzerinde bir $(3, 1)-$ tipinde tensör alanıdır. Bu tensör M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır.
Ayrıca her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için $K(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ şeklinde tanımlı K tensörüne *Riemann-Christoffel eğrilik tensörü* adı verilir. Riemann eğrilik tensörü sıfır olan manifolda flat manifold denir. Yani $R = 0$ ise manifolda flattır denir. Örneğin E^n-flat bir manifolddur. (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki konneksiyon ∇ olmak üzere $\nabla R = 0$ ise M-ye *lokal simetrik manifold* denir. Burada her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R,

(i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,

(iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (I. Bianchi özdeşliği),

(iv) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

özelliklerine sahiptir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.22. (M, g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ in bir bazı olsun.

$$\begin{aligned} Q \ &: \ \chi(M) \to \chi(M) \\ & X \to Q(X) = QX = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i)e_i \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

ile tanımlanan Q operatörüne M nin *Ricci operatörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.23. (M, g), $n-$ boyutlu bir Riemann manifoldu ve R, M Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ cümlesi $\chi(M)$ nin ortonormal vektör alanları olmak üzere her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} S \ &: \ \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \\ & (X, Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(Y, e_i)e_i, X) \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

şeklinde tanımlı $(2, 0)-$ tipindeki tensöre M nin *Ricci tensörü* adı verilir. Kolayca görülebilir ki Ricci tensörü simetriktir. Ayrıca M nin Ricci operatörü Q ise

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlıdır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.24. (M, g), n- boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.2.10}$$

değerine M nin *skaler eğrilik fonksiyonu* adı verilir (O'Neill, 1983).
Ayrıca skaler eğrilik, Ricci eğrilik tensörünün izi olarak da tanımlanabilir.

Diğer taraftan bir (M, g)-Riemann manifoldunun X doğrultusundaki Ricci eğriliği

$$k(X) = \frac{S(X, X)}{g(X, X)} \tag{2.2.11}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.25. (M, g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \tag{2.2.12}$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu varsa, yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye *Einstein manifoldu* adı verilir. Burada (2.2.11) de $X = Y = e_i$, $1 \leq i \leq n$, ortonormal bazı seçilirse $\lambda = \frac{\rho}{n}$ olduğu görülür (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.26. (M, g), $n-$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer S Ricci tensörü olmak üzere her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y) \tag{2.2.13}$$

eşitliği sağlanıyor ise M ye $\eta-$*Einstein manifoldu* adı verilir. Burada a ve b, M üzerinde fonksiyonlar ve η-da 1-formdur (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.27. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_M(p)$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $X, Y \in \Pi$ tanjant vektörleri için

$$g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \neq 0$$

olmak üzere

$$K(X \wedge Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \tag{2.2.14}$$

ile tanımlı $K(X \wedge Y)$ ye Π düzleminin *kesit eğriliği* denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir. Buradan kolayca görülebilir ki kesit eğriliği $T_M(p)$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π den seçilen bazlardan bağımsızdır (Yano ve Kon, 1984).

Her $p \in M$ ve $X_p, Y_p \in T_M(p)$ için $K(X_p, Y_p)$ sabit ise M ye *c-sabit kesit eğrilikli uzay* veya *reel uzay form* denir. n-boyutlu bir M uzay formu $M^n(c)$ ile gösterilir. Bu halde M Riemann manifoldu reel bir uzay form ve c-sabit kesit eğrilikli ise M nin Riemann eğrilik tensörü, her $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$g(R(X, Y)Z, W) = c\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \tag{2.2.15}$$

şeklindedir. Burada eğer;
$c = 0$ ise $M(c) \cong E^n$ Öklid uzayı,
$c = \frac{1}{r^2}$ ise $M(c) \cong S^n(r)$ küresi,
$c = -\frac{1}{r^2}$ ise $M(c) \cong H^n(r)$ hiperbolik uzaydir.
Burada, sabit eğrilikli bir Riemann manifoldunun eğriliği pozitif ise eliptik, negatif ise

hiperbolik ve sıfır ise düzlemsel (flat) veya lokal Öklidyen manifold adını alır. Böylece flat manifoldlar Riemann eğrilik tensörü sıfır olan manifoldlardır.

2.3 Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlar

Bu kısımda öncelikle hemen hemen kontak metrik manifoldlar tanımlanacaktır. Daha sonra hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldlar tanıtılarak sonraki bölümlerde kullanılmak üzere bazı temel sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 2.3.1. M, $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. ϕ, M üzerinde $(1,1)$-tipinden bir tensör alanı, ξ, bir vektör alanı, η, M üzerinde diferensiyel 1-form olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için (ϕ, ξ, η) üçlüsü;

$$\phi : \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$$

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow{dif.bilir} C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{ve} \quad \phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{2.3.1}$$

koşullarını sağlıyor ise bu üçlüye bir *hemen hemen kontak yapı* (hemen hemen co-kompleks yapı), (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüne de bir *hemen hemen kontak manifold* (hemen hemen co-kompleks manifold) adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.2. $(2n+1)$-boyutlu M hemen hemen kontak manifoldu üzerinde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.3.2}$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.3.3}$$

koşullarını sağlayan bir g metriği var ise (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir *hemen hemen kontak metrik yapı*, (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisine de bir *hemen hemen kontak metrik manifold* (hemen hemen co-Hermitian manifold) adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.3.3. $(2n+1)$-boyutlu M hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır (Blair, 1976).

Sonuç 2.3.1. $(2n+1)$-boyutlu M hemen hemen kontak metrik manifoldu verilmiş olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)$$

dir. Bu eşitlik de bize ϕ nin g metriğine göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.1. $(2n+1)$*-boyutlu bir hemen hemen kontak manifoldu verilmiş olsun.* M *üzerinde bir* η*-kontak yapısı verildiğinde,* $\forall X,Y \in \chi(M)$ *için*

$$\phi : \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$$

$$g(X, \phi Y) = \Phi(X,Y)$$

olacak şekilde bir (ϕ, ξ, η, g) *hemen hemen kontak metrik yapısı vardır.*

Tanım 2.3.4. $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı verilmiş olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y) = g(X, \phi Y)$$

biçiminde tanımlı Φ dönüşümüne, (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısının *temel 2-formu* denir. Burada $\eta \Lambda \Phi^n \neq 0$ dir (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Tanım 2.3.5. M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde $(1,1)$-tipinden tensör alanı ϕ olsun. O zaman $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$N_\phi(X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y] \tag{2.3.4}$$

şeklinde tanımlı N_ϕ tensör alanına *Nijenhuis torsiyon tensörü* adı verilir. Burada $[X,Y]$ Lie parantez operatörüdür (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Burada $[\phi, \phi] = 0$ ise hemen hemen kontak yapı *integrallenebilirdir* denir. Eğer $[\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ ise hemen hemen kontak yapı *normaldir* denir. Ayrıca integrallenebilir bir hemen hemen kontak yapıya *kontak yapı* denir (Janssens ve Vanhecke, 1981).

İntegrallenebilir bir hemen hemen co-Keahler manifolduna co-Keahler manifoldu denir. Ayrıca bir normal hemen hemen Sasakian manifolduna Sasakian manifoldu, normal hemen hemen Kenmotsu manifolduna da Kenmotsu manifoldu adı verilir (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Şimdi co-Keahler, Sasakian ve Kenmotsu manifoldlarını karakterize eden bazı teorem ve sonuçlar verilecektir.

Teorem 2.3.2. *(M, g, ϕ, ξ, η) beşlisi bir hemen hemen kontak metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için*

(i) *M nin bir co-Keahler manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\nabla\phi = 0$ olmasıdır.*

(ii) *M nin bir Sasakian manifoldu olması için gerek ve yeter şart,*

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

olmasıdır.

(iii) *M nin bir Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter şart,*

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

olmasıdır (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Teorem 2.3.3. *ξ bir Killing vektör alanı olmak üzere co-Keahler ve Sasakian manifoldlarında, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için*

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 0$$

iken, Kenmotsu manifoldunda

$$g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi) = 0$$

dır (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Teorem 2.3.4. *M manifoldu üzerinde Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için*

(i) M co-Keahler manifoldu ise

$$R(X, Y, Z, W) = R(X, Y, \phi Z, \phi W),$$

(ii) M Sasakian manifoldu ise

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, \phi Z, \phi W) - g(X, Z)g(Y, W) + g(X, W)g(Y, Z) \\ &+ g(X, \phi Z)g(Y, \phi W) - g(X, \phi W)g(Y, \phi Z), \end{aligned}$$

(iii) M Kenmotsu manifoldu ise

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, \phi Z, \phi W) + g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z) \\ &- g(X, \phi Z)g(Y, \phi W) + g(X, \phi W)g(Y, \phi Z) \end{aligned}$$

dir (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Tanım 2.3.6. M hemen hemen kontak metrik manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ ve $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, \phi Z, \phi W) + \alpha\{-g(X, Z)g(Y, W) + g(X, W)g(Y, Z) \\ &+ g(X, \phi Z)g(Y, \phi W) - g(X, \phi W)g(Y, \phi Z)\} \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

şartını sağlıyorsa bu durumda M ye bir *hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu* denir (Janssens ve Vanhecke, 1981). Ayrıca c-sabit kesit eğrilikli bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= (\frac{c + 3\alpha}{4})\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\ &+ (\frac{c - \alpha}{4})\{g(X, \phi Z)\phi Y - g(Y, \phi Z)\phi X + 2g(X, \phi Y)\phi Z \\ &+ \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\xi \\ &- g(Y, Z)\eta(X)\xi\} \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

ile verilir.

Bir normal hemen hemen $C(\alpha)$-manifolduna $C(\alpha)$-manifoldu denir (Janssens ve Vanhecke, 1981). Örneğin, co-Keahler manifoldu $C(0)$, Sasakian manifoldu $C(1)$ ve Kenmotsu manifoldu $C(-1)$ manifoldlardır.

Teorem 2.3.5. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için*

(i) M hemen hemen kontak metrik manifoldunun α-Sasakian manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha\{g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\} \tag{2.3.7}$$

olmasıdır.

(ii) M, bir α-Sasakian manifoldu ve ξ bir Killing vektör alanı olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi X$$

şeklindedir.

(iii) Bir α-Sasakian manifoldu bir $C(\alpha^2)$-manifoldudur (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Teorem 2.3.6. *M bir hemen hemen kontak metrik manifoldu olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için*

(i) M nin α-Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha\{g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)\phi X\} \tag{2.3.8}$$

olmasıdır.

(ii) Bir α-Kenmotsu manifoldu bir $C(-\alpha^2)$-manifoldudur (Janssens ve Vanhecke, 1981).

Tanım 2.3.7. M, $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere, *quasi-konformal eğrilik tensörü* $\widetilde{C}$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(X,Y)Z &= aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX \\ &- g(X,Z)QY] - \frac{r}{2n+1}[\frac{a}{2n} + 2b][g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada a ve b birer sabit, Q Ricci operatörü, S Ricci tensörü ve r ise manifoldun skaler eğriliğidir. Eğer $\widetilde{C} = 0$ ise, o zaman manifolda *quasi-konformal flat* denir.
Quasi-konformal eğrilik tensörü kavramı Yano ve Sawaki tarafından gösterilmiştir (Yano ve Sawaki, 1968).
Diğer yandan bu denklem $a = 1$ ve $b = -\frac{1}{2n-1}$ seçildiğinde

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \frac{1}{2n-1}\big[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &+ g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY\big] \\ &- \frac{r}{2n(2n-1)}\big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big] \\ &= C(X,Y)Z \qquad (2.3.10)\end{aligned}$$

eşitliğine indirgenir. Burada C tensörüne ise *konformal eğrilik tensörü* denir. Böylece konformal eğrilik tensörü C nin, quasi-konformal eğrilik tensörü $\widetilde{C}$ nin bir özel durumu olduğu görülür.

Tanım 2.3.8. M, $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere, *projektif eğrilik tensörü* P, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}\big[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\big] \qquad (2.3.11)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano ve Sawaki, 1968).

Tanım 2.3.9. M, $(2n+1)$-boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere, *concircular eğrilik tensörü* $\widetilde{Z}$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\widetilde{Z}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)}\big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big] \qquad (2.3.12)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano, 1940). Burada r manifoldun skaler eğriliğidir.

Bundan sonraki bölümde ise ileride kullanacağımız bazı temel sonuçlar elde edeceğiz.

M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu ve R, Riemann eğrilik tensörü olmak üzere (2.3.6) da $X = \xi$ seçtiğimizde

$$R(\xi,Y)Z = \alpha\{g(Y,Z)\xi - \eta(Z)Y\} \qquad (2.3.13)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde (2.3.6) da $Z = \xi$ seçtiğimizde ise

$$R(X,Y)\xi = \alpha\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} \tag{2.3.14}$$

olur. Yine (2.3.14) de $Y = \xi$ seçersek

$$R(X,\xi)\xi = \alpha\{X - \eta(X)\xi\} \tag{2.3.15}$$

bulunur. Ayrıca (2.3.6) denkleminin her iki tarafını $\xi \in \chi(M)$ ile iç çarpıma tabi tuttuğumuzda

$$\eta(R(X,Y)Z) = \alpha\{g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)\} \tag{2.3.16}$$

eşitliği elde edilir.
Diğer taraftan (2.3.11) de $X = \xi$ seçtiğimizde

$$P(\xi,Y)Z = \alpha g(Y,Z)\xi - \frac{1}{2n}S(Y,Z)\xi \tag{2.3.17}$$

bulunur. Yine (2.3.11) denkleminin her iki tarafının $\xi \in \chi(M)$ ile iç çarpımından

$$\begin{aligned} \eta(P(X,Y)Z) &= \eta(X)\big[\alpha g(Y,Z) - \frac{1}{2n}S(Y,Z)\big] \\ &- \eta(Y)\big[\alpha g(X,Z) - \frac{1}{2n}S(X,Z)\big] \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

elde edilir. Yine benzer şekilde (2.3.12) de $X = \xi$ seçtiğimizde

$$\widetilde{Z}(\xi,Y)Z = \{\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\}\{g(Y,Z)\xi - \eta(Z)Y\} \tag{2.3.19}$$

ve (2.3.19) denkleminde $Z = \xi$ seçtiğimizde ise

$$\widetilde{Z}(\xi,Y)\xi = \{\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\}\{\eta(Y)\xi - Y\} \tag{2.3.20}$$

elde edilir. Aynı şekilde (2.3.9) da $X = \xi$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\xi,Y)Z &= \{a\alpha + 2n\alpha b - \frac{r}{2n+1}[\frac{a}{2n} + 2b]\}\{g(Y,Z)\xi - \eta(Z)Y\} \\ &+ b\{S(Y,Z)\xi - \eta(Z)QY\} \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

ve (2.3.21) de $Z = \xi$ seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\xi, Y)\xi &= \{a\alpha + 2n\alpha b - \frac{r}{2n+1}[\frac{a}{2n} + 2b]\}\{\eta(Y)\xi - Y\} \\ &+ b\{2n\alpha\eta(Y)\xi - QY\} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.9) da $X = \xi$ için (2.3.21) denkleminin başka bir formu olan

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\xi, Y)Z &= [\frac{bc(n+1) + \alpha(2a + 7bn - b)}{2} - \frac{r}{2n+1}[\frac{a}{2n} + 2b]] \\ &\otimes [g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y] \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

elde edilir.

Ayrıca M nin bir ortonormal bazı olan $\{e_1, e_2, ..., e_n, \phi e_1, \phi e_2, ..., \phi e_n, \xi\}$ için (2.3.6) dan

$$\begin{aligned} R(X, e_i)e_i + R(X, \phi e_i)\phi e_i + R(X, \xi)\xi &= \sum_{i=1}^{n}\{(\frac{3\alpha + c}{4})\{nX - g(X, e_i)e_i + nX \\ &- g(X, \phi e_i)\phi e_i + X - g(X, \xi)\xi\} \\ &+ (\frac{c - \alpha}{4})\{3g(X, \phi e_i)\phi e_i - 2n\eta(X)\xi \\ &+ 3g(X, \phi^2 e_i)\phi^2 e_i \eta(X)\xi - X\}\} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

yazılır. (2.3.24) eşitliğinde $Y \in \chi(M)$ için

$$S(X, Y) = \left(\frac{\alpha(3n-1) + c(n+1)}{2}\right) g(X, Y) + \left(\frac{(\alpha - c)(n+1)}{2}\right) \eta(X)\eta(Y) \quad (2.3.25)$$

ve

$$QX = \left(\frac{\alpha(3n-1) + c(n+1)}{2}\right) X + \left(\frac{(\alpha - c)(n+1)}{2}\right) \eta(X)\xi \quad (2.3.26)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada (2.3.25) den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.3.2. Sabit kesit eğrilikli her hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu η-Einstein manifoldudur.

Burada (2.3.25) denkleminden sabit kesit eğrilikli bir hemen hemen $C(\alpha)$- manifoldunun skaler eğriliği

$$r = n[\alpha(3n+1) + c(n+1)] \quad (2.3.27)$$

olarak hesaplanır [43]. Yine benzer şekilde (2.3.25) de $Y = \xi$ seçtiğimizde

$$S(X,\xi) = 2n\alpha\eta(X) \tag{2.3.28}$$

ve (2.3.26) da $X = \xi$ seçtiğimizde

$$Q\xi = 2n\alpha\xi \tag{2.3.29}$$

eşitlikleri elde edilir. Yine burada ϕ, $(1,1)$-tipinden tensör alanı olmak üzere (2.3.26) ve (2.3.27) dan

$$Q\phi Y = \frac{r - 2n\alpha}{2n}\phi Y \tag{2.3.30}$$

bağıntısını elde ederiz.
Şimdi 5-boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifold örneği vereceğiz.

Örnek 2.3.1. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5 : x_2 \neq 0, x_3 \neq 0\}$ 5-boyutlu Riemann manifoldunu göz önüne alalım. M nin her noktasında lineer bağımsız vektör alanlarını ise

$$e_1 = x_2(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}) \qquad e_2 = x_2(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$e_3 = x_3(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4}) \qquad e_4 = x_3(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}) \qquad e_5 = \frac{\partial}{\partial x_5}$$

baz vöktörleri şeklinde alalım. g Riemann metriğini ise $1 \leq i,j \leq 5$ olmak üzere

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. M üzerindeki her bir X vektör alanı için η 1-formu, $\eta(X) = g(X,\xi)$ şeklindedir. Ayrıca $(1,1)$ tipinden ϕ tensör alanını ise $e_5 = \xi$ için

$$\phi e_1 = e_2, \qquad \phi e_2 = -e_1, \qquad \phi e_3 = e_4, \qquad \phi e_4 = -e_3, \qquad \phi e_5 = 0$$

olacak şekilde alalım. Burada,

$$\eta(e_5) = 1, \qquad \phi^2 X = -X + \eta(X)e_5,$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $e_5 = \xi$ için (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisi bir hemen hemen kontak metrik manifolddur. Burada (2.2.2) formulü kullanılarak

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_5] = [e_2, e_5] = [e_3, e_4] = [e_3, e_5] = [e_4, e_5] = 0$$

$$[e_1, e_3] = \frac{x_2}{x_3} e_3 - \frac{x_3}{x_2} e_1, \qquad [e_1, e_4] = -\frac{x_3}{x_2} e_1 + \frac{x_2}{x_3} e_4$$

$$[e_2, e_3] = -\frac{x_3}{x_2} e_2 - \frac{x_2}{x_3} e_3, \qquad [e_2, e_4] = -\frac{x_3}{x_2} e_1 - \frac{x_2}{x_3} e_4$$

değerleri hesaplanır. Ayrıca Kozsul formulü yardımıyla

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{x_3}{x_2}(e_3 + e_4), \quad \nabla_{e_1} e_3 = -\frac{x_3}{x_1} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_4 = -\frac{x_3}{x_2} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_5 = 0,$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \frac{x_3}{x_2}(e_3 + e_4), \quad \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{x_3}{x_2} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_4 = -\frac{x_3}{x_2} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_2} e_5 = 0,$$

$$\nabla_{e_3} e_3 = \frac{x_2}{x_3}(e_1 - e_2), \quad \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{x_2}{x_3} e_3, \quad \nabla_{e_3} e_2 = \frac{x_2}{x_3} e_3, \quad \nabla_{e_3} e_4 = \nabla_{e_3} e_5 = 0,$$

$$\nabla_{e_4} e_4 = \frac{x_2}{x_3}(e_1 - e_2), \quad \nabla_{e_4} e_1 = -\frac{x_2}{x_3} e_4, \quad \nabla_{e_4} e_2 = \frac{x_2}{x_3} e_4, \quad \nabla_{e_4} e_3 = \nabla_{e_4} e_5 = 0,$$

$$\nabla_{e_5} e_1 = \nabla_{e_5} e_2 = \nabla_{e_5} e_3 = \nabla_{e_5} e_4 = \nabla_{e_5} e_5 = 0$$

eşitlikleri hesaplanır. Daha sonra (2.2.6) formulü yardımıyla Riemann eğriliklerini

$$R(e_1, e_2)e_1 = 2\frac{x_3^2}{x_2^2} e_2 + e_3 + e_4, \quad R(e_1, e_2)e_2 = \big(-\frac{x_3^2}{x_1 x_2} - \frac{x_3^2}{x_2^2}\big) e_1 + e_3 + e_4$$

$$R(e_1, e_2)e_3 = \big(-\frac{x_2 x_3}{x_1^2} - \frac{x_2}{x_1}\big) e_1 - e_2, \quad R(e_1, e_2)e_4 = -e_1 - e_2,$$

$$R(e_1, e_3)e_1 = \big(\frac{x_2 - x_1}{x_1}\big) e_1 + e_2 + \big(\frac{x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_3^2}{x_2^2}\big) e_3 + \frac{2x_3^2}{x_2^2} e_4, \quad R(e_1, e_3)e_2 = -\frac{x_2}{1} e_1 - \frac{2x_2^2}{x_3^2} e_3,$$

$$R(e_1,e_3)e_3=\big(-\frac{x_2x_3-x_2}{x_1}-\frac{x_2^2}{x_3^2}-\frac{x_3^2}{x_1x_2}\big)e_1+2\frac{x_2^2}{x_3^2}e_2+\big(\frac{x_1-x_2}{x_1}\big)e_3+e_4,$$

$$R(e_1,e_3)e_4=-2\frac{x_3^2}{x_2^2}e_1-e_3,$$

$$R(e_1,e_4)e_1=e_2+\frac{2x_3^2}{x_2^2}e_3+\big(-\frac{x_2}{x_3}+\frac{2x_2^2}{x_3^2}+\frac{2x_3^2}{x_2^2}\big)e_4,\quad R(e_1,e_4)e_2=-e_1-\frac{2x_2^2}{x_3^2}e_4$$

$$R(e_1,e_4)e_3=-\frac{x_3^2}{x_1x_2}e_1-\frac{x_2}{x_1}e_4,\quad R(e_1,e_4)e_4=\big(\frac{x_2^2-2x_3^2}{x_2^2}-\frac{x_2^2}{x_3^2}\big)e_1+\frac{2x_2^3}{x_3^2}e_2+e_3,$$

$$R(e_2,e_3)e_1=e_2,\quad R(e_2,e_3)e_2=-e_1+\big(\frac{2x_2^2}{x_3^2}+\frac{2x_3^2}{x_2^2}\big)e_3+\frac{2x_3^2}{x_2^2}e_4,$$

$$R(e_2,e_3)e_3=\frac{2x_2^2}{x_3^2}e_1-\frac{2x_3^2}{x_2^2}e_2-e_4,\quad R(e_2,e_3)e_4=-\frac{2x_3^2}{x_2^2}e_2+e_3,$$

$$R(e_2,e_4)e_1=e_2-\frac{2x_2^2}{x_3^2}e_4,\quad R(e_2,e_4)e_2=-e_1+\frac{2x_3^2}{x_2^2}e_3+\frac{2x_2^2}{x_3^2}e_4,$$

$$R(e_2,e_4)e_3=-\frac{2x_3^2}{x_2^2}e_2+e_4,\quad R(e_2,e_4)e_4=\frac{2x_2^2}{x_3^2}e_1+\big(-\frac{2x_2^2}{x_3^2}-\frac{2x_3^2}{x_2^2}\big)e_2-e_3,$$

olarak hesaplarız. Ayrıca $e_5=\xi$ ve $1\leq i,j\leq 5$ olmak üzere

$$R(e_i,e_j)\xi=R(e_i,\xi)e_j=0$$

olarak hesaplanır. Ayrıca 5-boyutlu M manifoldunun Ricci tensörü S

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{5}g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.3.31}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada (2.3.31) denkleminde daha önce elde ettiğimiz Riemann eğrilikleri kullanıldığında

$$S(e_1,e_1)=-\frac{3x_3^2}{x_1x_2}-\frac{x_3x_2}{x_1^2}-\frac{5x_3^2}{x_2^2}-\frac{2x_2^2}{x_3^2}+\frac{2x_2}{x_1}-\frac{x_2x_3}{x_1}-4$$

$$S(e_2,e_2)=-\frac{10x_3^2}{x_2^2}-\frac{2x_2^2}{x_3^2}+4,\quad S(e_3,e_3)=-\frac{2x_3^2}{x_2^2}-\frac{2x_2^2}{x_3^2}+\frac{x_2}{x_1}-1,$$

$$S(e_4,e_4)=-\frac{2x_3^2}{x_2^2}-\frac{x_2^2}{x_3^2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_2}{x_3}-1,\quad S(e_1,e_4)=\frac{4x_3^2}{x_2^2}-\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_3}+3,$$

$$S(e_2,e_3)=\frac{2x_2^2}{x_3^2}+\frac{4x_3^2}{x_2^2}-2,\quad S(e_2,e_4)=\frac{2x_3^2}{x_2^2}-2,\quad S(e_3,e_4)=-\frac{2x_2^2}{x_3^2}+\frac{x_2^2}{x_3^2}$$

değerleri bulunur. Ayrıca burada

$$S(e_i,\xi)=0$$

dir. Buradan da manifoldun skaler eğrilik fonksiyonu

$$r=-\frac{19x_3^2}{x_2^2}-\frac{7x_2^2}{x_3^2}-\frac{3x_3^2}{x_1x_2}-\frac{x_3x_2}{x_1^2}-\frac{x_2x_3-4x_2}{x_1}+\frac{x_2}{x_3}-2$$

olarak hesaplanır.

3. Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldların Eğrilik Tensörleri

Bu bölümde çalışmamızda elde edilen orijinal sonuçlara yer verilmiştir. Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörünün birbirleri üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiş olup bölüm sonunda, verdiğimiz teoremlerin bazılarını sağlayan 5-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu örneği inşa edilmiştir.

3.1 Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldların Riemann Eğrilik Tensörü

Bu kısımda bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun Riemann eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun semi-simetrik, projektif semi-simetrik, concircular semi-simetrik, Ricci semi-simetrik ve quasi-konformal semi-simetrik olması durumunda ortaya çıkan sonuçlar ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Teorem 3.1.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere M nin semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki M manifoldu semi-simetrik olsun. O zaman, $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(R(X,Y)R)(Z,W,U) &= R(X,Y)R(Z,W)U - R(R(X,Y)Z,W)U \\ &- R(Z,R(X,Y)W)U - R(W,Z)R(X,Y)U \\ &= 0 \qquad (3.1.1)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $X = \xi$ yazıldığında

$$\begin{aligned}(R(\xi,Y)R)(Z,W,U) &= R(\xi,Y)R(Z,W)U - R(R(\xi,Y)Z,W)U \\ &- R(Z,R(\xi,Y)W)U - R(W,Z)R(\xi,Y)U \\ &= 0 \qquad (3.1.2)\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte (2.3.13) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \alpha\big[g(Y,R(Z,W)U)\xi - \eta(R(Z,W)U)Y \\
- & \; g(Y,Z)R(\xi,W)U + \eta(Z)R(Y,W)U \\
- & \; g(Y,W)R(Z,\xi)U + \eta(W)R(Z,Y)U \\
- & \; g(Y,U)R(Z,W)\xi - \eta(U)R(Z,W)Y\big] \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

bulunur. Daha sonra (3.1.3) den (2.3.6), (2.3.13) ve (2.3.16) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \alpha\big[g(Y,R(Z,W)U)\xi - \alpha g(W,U)\eta(Z)Y \\
+ & \; \alpha g(Z,U)\eta(W)Y - \alpha g(Y,Z)g(W,U)\xi \\
+ & \; \alpha g(Y,Z)\eta(U)W + \alpha g(Y,W)g(Z,U)\xi \\
- & \; \alpha g(Y,W)\eta(U)Z - \alpha g(Y,U)\eta(W)Z \\
+ & \; g(Y,U)\eta(Z)W + \eta(Z)R(Y,W)U \\
+ & \; \eta(W)R(Z,Y)U + \eta(U)R(Z,W)Y\big] \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

elde edilir ki tekrardan (2.3.6) denklemi son denklemde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \alpha\big[g(Y,R(Z,U)W)\xi + (\frac{c+3\alpha}{4})\{g(Y,U)\eta(W)Z \\
- & \; g(Y,U)\eta(Z)W + g(Y,W)g(Z,U)\xi - g(Y,Z)g(W,U)\xi\} \\
+ & \; (\frac{c-\alpha}{4})\{g(W,U)\eta(Z)Y - g(Z,U)\eta(W)Y + g(Y,Z)g(W,U)\xi \\
- & \; g(Y,Z)\eta(U)\xi - g(Y,W)g(Z,U)\xi + g(Y,W)\eta(U)Z \\
+ & \; g(Y,\phi U)\phi W\eta(Z) - g(W,\phi U)\phi Y\eta(Z) + 2g(Y,\phi W)\phi U\eta(Z) \\
+ & \; \eta(Z)\eta(Y)\eta(U)W + g(Y,U)\eta(Z)\eta(W)\xi - g(W,U)\eta(Z)\eta(Y)\xi \\
+ & \; g(Z,\phi U)\eta(W)\phi Y - g(Y,\phi U)\eta(W)\phi Z + 2g(Z,\phi Y)\eta(W)\phi U \\
- & \; \eta(W)\eta(Y)\eta(U)Z + g(Z,U)\eta(Y)\eta(W)\xi - g(Y,U)\eta(Z)\eta(W)\xi \\
+ & \; g(Z,\phi Y)\eta(U)\phi W - g(W,\phi Y)\phi Z\eta(U) + 2g(Z,\phi W)\eta(U)\phi Y \\
- & \; \eta(W)\eta(U)\eta(Y)Z + g(Y,Z)\eta(W)\eta(U)\xi + \eta(Z)\eta(Y)\eta(U)W \\
- & \; g(W,Y)\eta(U)\eta(Z)\xi\}\big] \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

ifadesi elde edilir. Burada (3.1.5) eşitliğinin her iki tarafına $\xi \in \chi(M)$ uygulandığında ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\alpha\big[g(Y,R(Z,W)U)+\alpha g(Y,W)g(Z,U)-g(Y,Z)g(W,U)\big]=0 \tag{3.1.6}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan da (3.1.6) denklemi $\forall Y\in\chi(M)$ için sağlandığından

$$\alpha\big[R(Z,W)U+\alpha\{g(Z,U)W-g(W,U)Z\}\big]=0 \tag{3.1.7}$$

sonucu ortaya çıkar. Burada $\alpha\neq 0$ için

$$R(Z,W)U=\alpha\{g(W,U)Z-g(Z,U)W\} \tag{3.1.8}$$

olarak yazılır. Bu da bize söyler ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur.

Tersine kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olsun.
O zaman $\forall Z,W,U\in\chi(M)$ için

$$R(Z,W)U=\alpha\{g(W,U)Z-g(Z,U)W\} \tag{3.1.9}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\begin{aligned}(R(X,Y)R)(Z,W,U) &= R(X,Y)R(Z,W)U-R(R(X,Y)Z,W)U\\ &- R(Z,R(X,Y)W)U-R(Z,W)R(X,Y)U\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

olduğundan bu eşitlikte (3.1.9) kullanıldığında

$$\begin{aligned}(R(X,Y)R)(Z,W,U) &= \alpha\big[g(U,W)R(X,Y)Z-g(Z,U)R(X,Y)W\\ &- g(Y,Z)R(X,W)U+g(X,Z)R(Y,W)U\\ &- g(Y,W)R(Z,X)U+g(X,W)R(Z,Y)U\\ &- g(Y,U)R(Z,W)X+g(X,U)R(Z,W)Y\big]\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

elde edilir. (3.1.11) de tekrar (3.1.9) kullanıldığında

$$\begin{aligned}(R(X,Y)R)(Z,W,U) &= \alpha^2\big[g(U,W)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}\\ &- g(Z,U)\{g(Y,W)X - g(X,W)Y\}\\ &- g(Y,Z)\{g(W,U)X - g(X,U)W\}\\ &+ g(X,Z)\{g(W,U)Y - g(Y,U)W\}\\ &- g(Y,W)\{g(X,U)Z - g(Z,U)X\}\\ &+ g(X,W)\{g(Y,U)Z - g(Z,U)Y\}\\ &- g(Y,U)\{g(W,X)Z - g(Z,X)W\}\\ &+ g(X,U)\{g(W,Y)Z - g(Z,Y)W\}\big] \qquad (3.1.12)\end{aligned}$$

olarak yazılır. Son olarak (3.1.12) de gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise

$$(R(X,Y)R)(Z,W,U) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece α-sabit kesit eğrilikli bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun semi-simetrik olduğu görülür.

Teorem 3.1.2. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere M nin projektif semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart bir Einstein manifoldu olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki M manifoldu projektif semi-simetrik olsun. O zaman $\forall X,Y,U,W,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(R(X,Y)P)(U,W,Z) &= R(X,Y)P(U,W)Z - P(R(X,Y)U,W)Z\\ &- P(U,R(X,Y)W)Z - P(U,W)R(X,Y)Z\\ &= 0 \qquad (3.1.13)\end{aligned}$$

dir. Bu denklem $X=\xi$ için

$$\begin{aligned}&R(\xi,Y)P(U,W)Z - P(R(\xi,Y)U,W)Z\\ -\ &P(U,R(\xi,Y)W)Z - P(U,W)R(\xi,Y)Z\\ =\ &0 \qquad (3.1.14)\end{aligned}$$

olarak yazılır. (3.1.14) denklemi (2.3.13) yardımıyla

$$\begin{aligned} & \alpha\big[g(Y,P(U,W)Z)\xi-\eta(P(U,W)Z)Y \\ - & \ g(Y,U)P(\xi,W)Z+\eta(U)P(Y,W)Z \\ - & \ g(Y,W)P(U,\xi)Z+\eta(W)P(U,Y)Z \\ - & \ g(Y,Z)P(U,W)\xi+\eta(Z)P(U,W)Y\big] \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

haline dönüşür. Burada $\alpha \neq 0$ olmak üzere, (3.1.15) de (2.3.11) ve (2.3.17) kullanıldığında

$$\begin{aligned} & g(Y,R(U,W)Z)\xi-\frac{1}{2n}S(U,W)g(Y,U)\xi+\frac{1}{2n}S(U,Z)g(Y,W)\xi \\ - & \ \alpha g(W,Z)\eta(U)Y+\alpha g(U,Z)\eta(W)Y+\frac{1}{2n}S(W,Z)\eta(U)Y \\ - & \ \frac{1}{2n}S(U,Z)\eta(W)Y-g(Y,U)R(\xi,W)Z+\frac{1}{2n}g(Y,U)S(W,Z)\xi \\ - & \ \frac{1}{2n}g(Y,U)S(\xi,Z)W+\eta(U)R(Y,W)Z-\frac{1}{2n}\eta(U)S(W,Z)Y \\ + & \ \frac{1}{2n}S(Y,Z)\eta(U)W-g(Y,W)R(U,\xi)Z+\frac{1}{2n}g(Y,W)S(\xi,Z)U \\ - & \ \frac{1}{2n}g(Y,W)S(U,Z)\xi+\eta(W)R(U,Y)Z-\frac{1}{2n}S(Y,Z)\eta(W)U \\ + & \ \frac{1}{2n}S(U,Z)\eta(W)Y-g(Y,Z)R(U,W)\xi+\frac{1}{2n}g(Y,Z)S(W,\xi)U \\ - & \ \frac{1}{2n}g(Y,Z)S(U,\xi)W+\eta(Z)R(U,W)Y-\frac{1}{2n}S(W,Y)\eta(Z)U \\ + & \ \frac{1}{2n}S(U,Y)\eta(Z)W \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

bulunur. (3.1.16) de (2.3.13), (2.3.14) ve (2.3.28) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& g(Y,R(U,W)Z)\xi-\frac{1}{2n}S(U,W)g(Y,U)\xi+\frac{1}{2n}S(U,Z)g(Y,W)\xi \\
- \; & \alpha g(W,Z)\eta(U)Y+\alpha g(U,Z)\eta(W)Y+\frac{1}{2n}S(W,Z)\eta(U)Y \\
- \; & \frac{1}{2n}S(U,Z)\eta(W)Y-\alpha g(Y,U)g(W,Z)\xi+\frac{1}{2n}g(Y,U)S(W,Z)\xi \\
+ \; & \eta(U)R(Y,W)Z-\frac{1}{2n}S(W,Z)\eta(U)Y+\frac{1}{2n}S(Y,Z)\eta(U)W \\
+ \; & \alpha g(Y,W)g(U,Z)\xi-\frac{1}{2n}g(Y,W)S(U,Z)\xi+\eta(W)R(U,Y)Z \\
- \; & \frac{1}{2n}S(Y,Z)\eta(W)U+\frac{1}{2n}S(U,Z)\eta(W)Y+\eta(Z)R(U,W)U \\
- \; & \frac{1}{2n}S(W,Y)\eta(Z)U+\frac{1}{2n}S(U,Y)\eta(Z)W \\
= \; & 0
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

elde edilir. Burada (3.1.17) de $U=\xi$ seçilip (2.3.2) ve (2.3.28) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& g(Y,(R(\xi,W)Z))\xi+\alpha g(Y,W)\eta(Z)\xi \\
- \; & 2\alpha g(W,Z)\eta(Y)\xi-R(Y,W)Z \\
+ \; & \frac{1}{2n}S(Y,Z)W+\eta(W)R(\xi,Y)Z \\
- \; & \frac{1}{2n}S(Y,Z)\eta(W)\xi+\alpha\eta(Z)\eta(W)Y \\
+ \; & \eta(Z)R(\xi,W)Y-\frac{1}{2n}S(W,Y)\eta(Z)\xi \\
+ \; & \alpha\eta(Y)\eta(Z)W \\
= \; & 0
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

bulunur. Bu denklemde (2.3.13) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \alpha g(Y,W)\eta(Z)\xi-\alpha g(W,Z)\eta(Y)\xi \\
+ \; & R(Y,W)Z+\frac{1}{2n}S(Y,Z)W \\
+ \; & \alpha g(Y,Z)\eta(W)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,Z)\eta(W)\xi \\
- \; & \frac{1}{2n}S(W,Y)\eta(Z)\xi \\
= \; & 0
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

elde edilir. (3.1.19) eşitliğinin her iki tarafına $\xi \in \chi(M)$ uygulandığında ise

$$\begin{aligned} & g(Y,W)\eta(Z) - \alpha g(W,Z)\eta(Y) + \eta(R(Y,W)Z) \\ + \; & \alpha g(Y,Z)\eta(W) - \frac{1}{2n} S(Y,W)\eta(Z) \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

bulunur. Burada (3.1.20) de (2.3.16) kullanıldığında

$$\frac{1}{2n} S(Y,W)\eta(Z) = \alpha g(Y,W)\eta(Z) \tag{3.1.21}$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak (3.1.21) de $Z = \xi$ seçtiğimizde ise

$$S(Y,W) = 2n\alpha g(Y,W) \tag{3.1.22}$$

bulunur ki buradan M nin bir Einstein manifoldu olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı biter.

Teorem 3.1.3. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olsun. Bu durumda M nin concircular semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu concircular semi-simetrik olsun. Bu durumda her $X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (R(X,Y)\widetilde{Z})(U,W,Z) &= R(X,Y)\widetilde{Z}(U,W)Z - \widetilde{Z}(R(X,Y)U,W)Z \\ &- \widetilde{Z}(U,R(X,Y)W)Z - \widetilde{Z}(U,W)R(X,Y)Z \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklem $X = \xi$ için

$$\begin{aligned} & R(\xi,Y)\widetilde{Z}(U,W)Z - \widetilde{Z}(R(\xi,Y)U,W)Z \\ - \; & \widetilde{Z}(U,R(\xi,Y)W)Z - \widetilde{Z}(U,W)R(\xi,Y)Z \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

haline dönüşür. (3.1.24) de (2.3.13) kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \alpha\big[g(Y,\widetilde{Z}(U,W)Z)\xi - \eta(\widetilde{Z}(U,W)Z)Y \\ - & \; g(Y,U)\widetilde{Z}(\xi,W)Z + \eta(U)\widetilde{Z}(Y,W)Z \\ - & \; g(Y,W)\widetilde{Z}(U,\xi)Z + \eta(W)\widetilde{Z}(U,Y)Z \\ - & \; g(Y,Z)\widetilde{Z}(U,W)\xi + \eta(Z)\widetilde{Z}(U,W)Y\big] \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

elde edilir. (3.1.25) de $U = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned} & \alpha\big[g(Y,\widetilde{Z}(\xi,W)Z)\xi - \eta(\widetilde{Z}(\xi,W)Z)Y \\ - & \; \eta(Y)\widetilde{Z}(\xi,W)Z + \widetilde{Z}(Y,W)Z \\ + & \; \eta(W)\widetilde{Z}(\xi,Y)Z - g(Y,Z)\widetilde{Z}(\xi,W)\xi + \eta(Z)\widetilde{Z}(\xi,W)Y\big] \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

olarak yazılır. (3.1.26) da, (2.3.19) ve (2.3.20) kullanıldığında

$$\widetilde{Z}(Y,W)Z = \big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(W,Z)Y - g(Y,Z)W\big] \tag{3.1.27}$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklemden de (2.3.12) yardımıyla

$$R(Y,W)Z = \alpha\{g(W,Z)Y - g(Y,Z)W\} \tag{3.1.28}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece M nin concircular semi-simetrik olduğunda α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğu görülür.

Tersine kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olsun. Burada (3.1.28) eşitliğini (3.1.23) de yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} (R(X,Y)\widetilde{Z})(U,W,Z) &= \alpha\big[g(Y,\widetilde{Z}(U,W)Z)X - g(X,\widetilde{Z}(U,W)Z)Y \\ &- \widetilde{Z}(g(Y,U)X - g(X,U)Y,W)Z \\ &- \widetilde{Z}(U,g(Y,W)X - g(X,W)Y)Z \\ &- \widetilde{Z}(U,W)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)\big] \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

elde edilir. (3.1.29) de (3.1.27) eşitliğini kullandığımızda

$$\big(R(X,Y)\widetilde{Z}\big)(U,W,Z) = 0 \tag{3.1.30}$$

olarak bulunur. Bu da bize M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun α-sabit kesit eğrilikli bir reel uzay form olduğunda concircular semi-simetrik olduğunu söyler. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.4. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere M nin Ricci semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart bir Einstein manifoldu olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu Ricci semi-simetrik olsun. Bu durumda $\forall X, Y, U, W \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)S = 0 \tag{3.1.31}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemden

$$S(R(X,Y)U,W) + S(U,R(X,Y)W) = 0 \tag{3.1.32}$$

bulunur. (3.1.32) denklemi $X = \xi$ seçtiğimizde

$$S(R(\xi,Y)U,W) + S(U,R(\xi,Y)W) = 0 \tag{3.1.33}$$

halini alır. (3.1.33) de (2.3.13) kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \alpha\big[g(Y,U)S(\xi,W) - \eta(U)S(Y,W) \\ + \ & g(Y,W)S(U,\xi) - \eta(W)S(U,Y)\big] \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{3.1.34}$$

bulunur. (3.1.34) de $U = \xi$ seçtiğimizde ise

$$S(Y,W) = 2n\alpha g(Y,W) \tag{3.1.35}$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece M nin bir Einstein manifoldu olduğu görülür.

Tersine kabul edelim ki M bir Esintein manifoldu olsun. O zaman

$$S(Y,W) = \frac{r}{2n+1}g(Y,W) \tag{3.1.36}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$(R(X,Y)S)(U,W) = \frac{r}{2n+1}\big[g(R(X,Y)U,W) + g(U,R(X,Y)W)\big] \tag{3.1.37}$$

olarak yazılır. Son olarak (3.1.37) de (2.3.6) eşitliği kullanıldığında ise

$$(R(X,Y)S)(U,W) = 0 \tag{3.1.38}$$

elde edilir ki buradan M nin Ricci semi-simetrik olduğu görülür.
Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.5. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere M nin quasi-konformal semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki M quasi-konformal semi-simetrik olsun. O zaman $\forall X,Y,U,W,Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\widetilde{C})(Z,U,W) &= R(X,Y)\widetilde{C}(Z,U)W - \widetilde{C}(R(X,Y)Z,U)W \\ &- \widetilde{C}(Z,R(X,Y)U)W - \widetilde{C}(Z,U)R(X,Y)W \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.1.39}$$

olarak yazılır. Son denklemde $X = \xi$ yazıldığında

$$\begin{aligned}& R(\xi,Y)\widetilde{C}(Z,U)W - \widetilde{C}(R(\xi,Y)Z,U)W \\ -\ & \widetilde{C}(Z,R(\xi,Y)U)W - \widetilde{C}(Z,U)R(\xi,Y)W \\ =\ & 0\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

bulunur. Burada (3.1.40) de (2.3.13) kullanıldığında

$$\begin{aligned}& \alpha\big[g(Y,\widetilde{C}(Z,U)W)\xi - \eta(\widetilde{C}(Z,U)W)Y \\ -\ & g(Y,Z)\widetilde{C}(\xi,U)W + \eta(Z)\widetilde{C}(Y,U)W \\ -\ & g(Y,U)\widetilde{C}(Z,\xi)W + \eta(U)\widetilde{C}(Z,Y)W \\ -\ & g(Y,W)\widetilde{C}(Z,U)\xi + \eta(W)\widetilde{C}(Z,U)Y\big] \\ =\ & 0\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

elde edilir. Şimdi (3.1.41) de, $\alpha \neq 0$ olmak üzere $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned}& g(Y,\widetilde{C}(\xi,U)W)\xi - \eta(\widetilde{C}(\xi,U)W)Y \\ -\ & \eta(Y)\widetilde{C}(\xi,U)W + \widetilde{C}(Y,U)W \\ +\ & \eta(U)\widetilde{C}(\xi,Y)W - g(Y,W)\widetilde{C}(\xi,U)\xi \\ +\ & \eta(W)\widetilde{C}(\xi,U)Y \\ =\ & 0\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

olur. (3.1.42) de (2.3.23) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(Y,U)W &= \Big[\frac{bc(n+1)+\alpha(2a+7bn-b)}{2} - \frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big] \\ &\otimes \big[g(U,W)Y - g(Y,W)U\big]\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

elde edilir. (3.1.43) de $Y \to \phi Y$ ve $U \to \phi U$ seçtiğimizde bu denklem

$$\begin{aligned}\widetilde{C}(\phi Y,\phi U)W &= \Big[\frac{bc(n+1)+\alpha(2a+7bn-b)}{2} - \frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big] \\ &\otimes \big[g(\phi U,W)\phi Y - g(\phi Y,W)\phi U\big]\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

halini alır. (3.1.44) denklemi (2.3.9) yardımıyla

$$\begin{aligned}0 &= aR(\phi Y,\phi U)W + b\big[S(\phi U,W)\phi Y - S(\phi Y,W)\phi U \\ &+ g(\phi U,W)Q\phi Y - g(\phi,W)Q\phi Y\big] \\ &- \frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\big[g(\phi U,W)\phi Y - g(\phi Y,W)\phi U\big]\end{aligned} \tag{3.1.45}$$

biçiminde yazılır. (3.1.45) denkleminde (2.3.25) ve (2.3.30) kullanıldığında ise

$$\begin{aligned}R(\phi Y,\phi U)W &= \Big[\frac{2n\alpha\big[a+b(2n+1)\big]-b(r+cn^2)}{2an}\Big] \\ &\otimes \big[g(\phi U,W)\phi Y - g(\phi Y,W)\phi U\big]\end{aligned} \tag{3.1.46}$$

buradan da

$$\begin{aligned}R(\phi Y,\phi U)W &= \Big[\frac{\alpha\big[2a+b(n+1)\big]-bc(n+1)}{2a}\Big] \\ &\otimes \big[g(\phi U,W)\phi Y - g(\phi Y,W)\phi U\big]\end{aligned} \tag{3.1.47}$$

Böylece M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu quasi-konformal semi-simetrik ise o zaman sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olur.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

3.2 Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldların Projektif Eğrilik Tensörü

Bu kısımda bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun projektif eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri araştırılarak ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.2.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $P(\xi, X)R = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $P(\xi, X)R = 0$ olsun. O zaman $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(P(Y,X)R)(U,W,Z) &= P(Y,X)R(U,W,Z) - R(P(Y,X)U,W)Z \\ &- R(U,P(Y,X)W)Z - R(U,W)P(Y,X)Z \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

olduğunu biliyoruz. (3.2.1) de $Y = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned}(P(\xi,X)R)(U,W,Z) &= P(\xi,X)R(U,W,Z) - R(P(\xi,X)U,W)Z \\ &- R(U,P(\xi,X)W)Z - R(U,W)P(\xi,X)Z \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

olur. (3.2.2) de (2.3.17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha g(X,R(U,W)Z)\xi - \frac{1}{2n}S(X,R(U,W)Z)\xi \\ - & \alpha g(X,U)R(\xi,W)Z + \frac{1}{2n}S(X,U)R(\xi,W)Z \\ - & \alpha g(X,W)R(U,\xi)Z + \frac{1}{2n}S(X,W)R(U,\xi)Z \\ - & \alpha g(X,Z)R(U,W)\xi + \frac{1}{2n}S(X,Z)R(U,W)\xi \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

elde edilir. (3.2.3) de (2.3.13) ve (2.3.14) kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \alpha g(X,R(U,W)Z)\xi - \frac{1}{2n}S(X,R(U,W)Z)\xi \\ + & \alpha^2 g(X,U)g(W,Z)\xi + \alpha^2 g(X,U)\eta ZW \\ + & \frac{1}{2n}\alpha S(X,U)g(W,Z)\xi - \frac{1}{2n}\alpha S(X,U)\eta(Z)W \\ - & \alpha^2 g(X,W)\eta(Z)U + \alpha^2 g(X,W)g(U,Z)\xi \\ + & \frac{1}{2n}\alpha S(X,W)\eta(Z)U - \frac{1}{2n}\alpha S(X,W)g(U,Z)\xi \\ - & \alpha^2 g(X,Z)\eta(W)U + \alpha^2 g(X,Z)\eta(U)W \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

bulunur. (3.2.4) de $U=\xi$ seçilerek (2.3.13) ve (2.3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha g(W,Z)\eta(X)\xi-\alpha g(X,W)\eta(Z)\xi \\
- & \frac{1}{2n}g(W,Z)S(X,\xi)\xi+\frac{1}{2n}S(X,W)\eta(Z)\xi \\
+ & \frac{1}{2n}S(X,\xi)g(W,Z)\xi-\frac{1}{2n}S(X,\xi)\eta(Z)W \\
- & \alpha g(X,W)\eta(Z)\xi+\alpha g(X,W)\eta(Z)\xi \\
+ & \frac{1}{2n}S(X,W)\eta(Z)\xi-\frac{1}{2n}S(X,W)\eta(Z)\xi \\
- & \alpha g(X,Z)\eta(W)\xi+\alpha g(X,Z)W \\
+ & \frac{1}{2n}S(X,Z)\eta(W)\xi-\frac{1}{2n}S(X,Z)W \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

sonucuna ulaşılır. (3.2.5) de (2.3.28) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n}S(X,W)\eta(Z)\xi+\alpha g(W,Z)\eta(X)\xi-\alpha\eta(Z)\eta(X)W \\
- & \alpha g(X,W)\eta(Z)\xi-\alpha g(X,Z)\eta(W)\xi+\alpha g(X,Z)W \\
+ & \frac{1}{2n}S(X,Z)\eta(W)\xi-\frac{1}{2n}S(X,Z)W \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

bulunur. Burada (3.2.6) eşitliğinin her iki tarafına $\xi\in\chi(M)$ uygulandığında

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n}S(X,W)\eta(Z)-\alpha g(X,W)\eta(Z) \\
- & \alpha\eta(Z)\eta(X)\eta(W)-\alpha g(W,Z)\eta(X) \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

olur. Son olarak (3.2.7) denkleminde $Z=\xi$ seçtiğimizde

$$\frac{1}{2n}S(X,W)=\alpha g(X,W)$$

ve buradan da

$$S(X,W)=2n\alpha g(X,W) \tag{3.2.8}$$

elde edilir. Böylece M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğu görülür.

Buradan manifoldun skaler eğriliği $r=2n\alpha(2n+1)$ olarak hesaplanır. Bu durumda

(2.3.27) denkleminden

$$r = n\big[\alpha(3n+1) + c(n+1)\big] = 2n\alpha(2n+1) \tag{3.2.9}$$

eşitliğini yazarız. Buradan da $\alpha = c$ dir. Bu da bize söyler ki bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunda $P(\xi, X)R = 0$ ise manifold $\alpha = c$ sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur. Yani

$$R(X,Y)Z = \alpha\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \tag{3.2.10}$$

sonucuna varılır. İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.2. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $P(\xi, X)P = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $P(\xi, Y)P = 0$ olsun. O zaman $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(P(X,Y)P)(Z,U,W) &= P(X,Y)P(Z,U)W - P(P(X,Y)Z,U)W \\ &- P(Z,P(X,Y)U)W - P(Z,U)P(X,Y)W\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

denkleminde $X = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned}(P(\xi,Y)P)(Z,U,W) &= P(\xi,Y)P(Z,U)W - P(P(\xi,Y)Z,U)W \\ &- P(Z,P(\xi,Y)U)W - P(Z,U)P(\xi,Y)W \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

bulunur. (3.2.12) de (2.3.17) eşitliğini kullandığımızda

$$\begin{aligned}&\alpha\big[g(Y,P(Z,U)W)\xi - g(Y,Z)P(\xi,U)W \\ -\ &g(Y,U)P(Z,\xi)W - g(Y,W)P(Z,U)\xi\big] \\ +\ &\frac{1}{2n}\big[-S(Y,P(Z,U)W)\xi + S(Y,Z)P(\xi,U)W \\ +\ &S(Y,U)P(Z,\xi)W + S(Y,W)P(Z,U)\xi\big] \\ =\ &0\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

eşitliği bulunur. (3.2.13) de (2.3.17) yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\alpha\big[g(Y,P(Z,U)W)\xi-\alpha g(Y,Z)g(U,W)\xi+\frac{1}{2n}g(Y,Z)S(U,W)\xi\\
-&\frac{1}{2n}g(Y,U)S(Z,W)\xi\alpha g(Y,U)g(W,Z)\xi\big]\\
+&\frac{1}{2n}\big[-S(Y,P(Z,U)W)\xi+\alpha g(U,W)S(Y,Z)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,Z)S(U,W)\\
+&\frac{1}{2n}S(Y,U)S(Z,W)\xi-\alpha S(Y,U)g(W,Z)\xi\big]\\
=&\ 0
\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

elde edilir. (3.2.14) de (2.3.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\alpha\big[g(Y,R(Z,U)W)\xi-\alpha g(Y,Z)g(U,W)\xi+\alpha g(Y,U)g(W,Z)\xi\big]\\
+&\frac{1}{2n}\big[-S(Y,R(Z,U)W)\xi+\alpha S(Y,Z)g(U,W)\xi-\alpha S(Y,U)g(W,Z)\xi\big]\\
=&\ 0
\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

bulunur. (3.2.15) de (2.3.25) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\alpha\big[g(Y,R(Z,U)W)\xi-\alpha g(Y,Z)g(U,W)\xi+\alpha g(Y,U)g(W,Z)\xi\big]\\
+&\Big(\frac{\alpha(3n-1)+c(n+1)}{4n}\Big)\big[-g(Y,R(Z,U)W)\xi\\
+&\alpha g(Y,Z)g(U,W)\xi-\alpha g(Y,U)g(W,Z)\xi\big]\\
=&\ 0
\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

elde edilir. (3.2.16) da yapılan kısaltmalardan sonra

$$\begin{aligned}
&\big[\alpha-\frac{\alpha(3n-1)+c(n+1)}{4n}\big]\big[g(Y,R(Z,U)W)\xi\\
-&\alpha g(Y,Z)g(U,W)\xi+\alpha g(Y,U)g(W,Z)\xi\big]\\
=&\ 0
\end{aligned}\tag{3.2.17}$$

bulunur. (3.2.17) eşitliğinin her iki tarafına $\xi\in\chi(M)$ uygulandığında

$$\Big(\frac{\alpha-c}{4n}\Big)\big[R(Z,U)W-\alpha\{g(U,W)Z-g(W,Z)U\}\big]=0 \tag{3.2.18}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun $c=\alpha$ sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğu görülür.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.3. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $P(\xi, X)\widetilde{Z} = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $P(\xi, Y)\widetilde{Z} = 0$ olsun. Burada $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (P(X,Y)\widetilde{Z})(U,W,Z) &= P(X,Y)\widetilde{Z}(U,W)Z - \widetilde{Z}(P(X,Y)U,W)Z \\ &- \widetilde{Z}(U,P(X,Y)W)Z - \widetilde{Z}(U,W)P(X,Y)Z \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $X = \xi$ yazıldığında

$$\begin{aligned} (P(\xi,Y)\widetilde{Z})(U,W,Z) &= P(\xi,Y)\widetilde{Z}(U,W)Z - \widetilde{Z}(P(\xi,Y)U,W)Z \\ &- \widetilde{Z}(U,P(\xi,Y)W)Z - \widetilde{Z}(U,W)P(\xi,Y)Z \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

bulunur. (3.2.20) de (2.3.17) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha g(Y,\widetilde{Z}(U,W)Z)\xi - \frac{1}{2n}S(Y,\widetilde{Z}(U,W)Z)\xi \\ - & \alpha g(Y,U)\widetilde{Z}(\xi,W)Z + \frac{1}{2n}S(Y,U)\widetilde{Z}(\xi,W)Z \\ - & \alpha g(Y,W)\widetilde{Z}(U,\xi)Z + \frac{1}{2n}S(Y,W)\widetilde{Z}(U,\xi)Z \\ - & \alpha g(Y,Z)\widetilde{Z}(U,W)\xi + \frac{1}{2n}S(Y,Z)\widetilde{Z}(U,W)\xi \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

olarak bulunur. (3.2.21) denkleminde $U = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned} & \alpha g(Y,\widetilde{Z}(\xi,W)Z)\xi - \frac{1}{2n}S(Y,\widetilde{Z}(\xi,W)Z)\xi \\ - & \alpha\eta(Y)\widetilde{Z}(\xi,W)Z + \frac{1}{2n}S(Y,\xi)\widetilde{Z}(\xi,W)Z \\ - & \alpha g(Y,Z)\widetilde{Z}(\xi,W)\xi + \frac{1}{2n}S(Y,Z)\widetilde{Z}(\xi,W)\xi \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

yazılır. (3.2.22) de (2.3.28) kullanıldığında ise

$$\begin{aligned} & \alpha g(Y,\widetilde{Z}(\xi,W)Z)\xi - \frac{1}{2n}S(Y,\widetilde{Z}(\xi,W)Z)\xi \\ - & \alpha g(Y,Z)\widetilde{Z}(\xi,W)\xi + \frac{1}{2n}S(Y,Z)\widetilde{Z}(\xi,W)\xi \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

olarak bulunur. (3.2.23) de (2.3.19) ve (2.3.20) eşitliklerini kullandığımızda

$$\begin{aligned}
& \big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[\alpha g(W,Z)\eta(Y)\xi-\alpha\eta(Z)g(Y,W)\xi \\
- & \frac{1}{2n}g(W,Z)S(Y,\xi)\xi+\frac{1}{2n}\eta(Z)S(Y,W)\xi \\
- & \alpha g(Y,Z)\eta(W)\xi+\alpha g(Y,Z)W \\
+ & \frac{1}{2n}S(Y,Z)\eta(W)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,Z)W\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

elde edilir. (3.2.24) de (2.3.28) kullanılıp eşitliğin her iki tarafına $\xi\in\chi(M)$ uygulandığında

$$\big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[\frac{1}{2n}S(Y,W)\eta(Z)-\alpha g(Y,W)\eta(Z)\big]=0 \tag{3.2.25}$$

sonucu hesaplanır. (3.2.25) de $Z=\xi$ seçtiğimizde ise

$$\big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[\frac{1}{2n}S(Y,W)-\alpha g(Y,W)\big]=0 \tag{3.2.26}$$

sonucu ortaya çıkar. Burada $\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}=0$ için $r=2n\alpha(2n+1)$ dir. Buradan da $\alpha=c$ elde edilir.

Diğer taraftan $S(X,Y)=2n\alpha g(X,Y)$ eşitliğinden $r=2n\alpha(2n+1)$ olduğunu daha önce göstermiştik.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı biter.

Teorem 3.2.4. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $P(\xi,X)S=0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $P(\xi,Y)S=0$ olsun. Burada $\forall X,Y,U,W\in\chi(M)$ için

$$(P(X,Y)S)(U,W)=-S(P(X,Y)U,W)-S(U,P(X,Y)W) \tag{3.2.27}$$

eşitliğinde $X=\xi$ seçtiğimizde

$$S(P(\xi,Y)U,W)+S(U,P(\xi,Y)W)=0 \tag{3.2.28}$$

olarak yazılır. (3.2.28) de (2.3.17) kullanıldığında

$$\alpha g(Y,W)\xi+\alpha g(Y,U)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,W)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,U)\xi=0 \tag{3.2.29}$$

bulunur. Son olarak (3.2.29) de $U = \xi$ seçtiğimizde ise

$$S(Y, W) = 2n\alpha g(Y, W) \tag{3.2.30}$$

elde edilir. Bu da bize M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğunu gösterir.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.5. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $P(\xi, X)\widetilde{C} = 0$ olması için gerek ve yeter şart ya M α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da bir Einstein manifoldudur.*

İspat . Kabul edelim ki $P(\xi, Y)\widetilde{C} = 0$ olsun. Burada $\forall X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(P(X,Y)\widetilde{C})(Z,U,W) &= P(X,Y)\widetilde{C}(Z,U)W - \widetilde{C}(P(X,Y)Z,U)W \\ &- \widetilde{C}(Z,P(X,Y)U)W - \widetilde{C}(Z,U)P(X,Y)W\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $X = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned}(P(\xi,Y)\widetilde{C})(Z,U,W) &= P(\xi,Y)\widetilde{C}(Z,U)W - \widetilde{C}(P(\xi,Y)Z,U)W \\ &- \widetilde{C}(Z,P(\xi,Y)U)W - \widetilde{C}(Z,U)P(\xi,Y)W \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

olarak yazılır. (3.2.32) de (2.3.17) kullanıldığında

$$\begin{aligned}&\alpha g(Y,\widetilde{C}(Z,U)W)\xi - \frac{1}{2n}S(Y,\widetilde{C}(Z,U)W)\xi \\ -\ &\alpha g(Y,Z)\widetilde{C}(\xi,U)W + \frac{1}{2n}S(Y,Z)\widetilde{C}(\xi,U)W \\ -\ &\alpha g(Y,U)\widetilde{C}(Z,\xi)W + \frac{1}{2n}S(Y,U)\widetilde{C}(Z,\xi)W \\ -\ &\alpha g(Y,W)\widetilde{C}(Z,U)\xi + \frac{1}{2n}S(Y,W)\widetilde{C}(Z,U)\xi \\ =\ &0\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

elde edilir. (3.2.33) de $Z = \xi$ seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned}&\alpha\big[g(Y,\widetilde{C}(\xi,U)W)\xi - g(Y,W)\widetilde{C}(\xi,U)\xi\big] \\ -\ &\frac{1}{2n}\big[S(Y,\widetilde{C}(\xi,U)W)\xi - S(Y,W)\widetilde{C}(\xi,U)\xi\big] \\ =\ &0\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

eşitliği bulunur. (3.2.34) de (2.3.21) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[\alpha g(U,W)\eta(Y)\xi \\
- & \ \alpha g(Y,U)\eta(W)\xi - \alpha g(Y,W)\eta(U)\xi + \alpha g(Y,W)U \\
- & \ \frac{1}{2n} g(U,W)S(Y,\xi)\xi + \frac{1}{2n} S(Y,U)\eta(W)\xi \\
+ & \ \frac{1}{2n} S(Y,W)\eta(U)\xi - \frac{1}{2n} S(Y,W)U\big] \\
+ & \ b\big[\alpha S(U,W)\eta(Y)\xi - \alpha g(Y,QU)\eta(W)\xi \\
- & \ 2n\alpha g(Y,W)\eta(U)\xi + \alpha g(Y,W)QU \\
- & \ \frac{1}{2n} S(U,W)S(Y,\xi)\xi + \frac{1}{2n} S(Y,QU)\eta(W)\xi \\
+ & \ \alpha S(Y,W)\eta(U)\xi - \frac{1}{2n} S(Y,W)QU\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

olarak hesaplanır. (3.2.35) de (2.3.28) yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[-\alpha g(Y,U)\eta(W)\xi \\
- & \ \alpha g(Y,W)\eta(U)\xi + \alpha g(Y,W)U \\
+ & \ \frac{1}{2n} S(Y,U)\eta(W)\xi + \frac{1}{2n} S(Y,W)\eta(U)\xi - \frac{1}{2n} S(Y,W)U\big] \\
+ & \ b\big[-\alpha S(U,Y)\eta(W)\xi - 2n\alpha g(Y,W)\eta(U)\xi \\
+ & \ \alpha g(Y,W)QU + \frac{1}{2n} S(Y,QU)\eta(W)\xi + \alpha S(Y,W)\eta(U)\xi \\
- & \ \frac{1}{2n} S(Y,W)QU\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

bulunur. (3.2.36) eşitliğinin her iki tarafına $\xi \in \chi(M)$ uygularsak bu denklem

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[-\alpha g(Y,U)\eta(W) \\
+ & \ \frac{1}{2n} S(Y,U)\eta(W)\big] \\
+ & \ b\big[\frac{1}{2n} S(Y,U)\eta(W) + \frac{1}{2n} S(Y,QU)\eta(W)\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

haline dönüşür. (3.2.37) de $W = \xi$ seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned} & \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[g(Y, QU) - 2n\alpha g(Y, U)\big] \\ + \ & b\big[S(Y, QU) - S(Y, U)\big] \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

bulunur. (3.2.38) de (2.3.25) ve (2.3.26) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \big[\frac{(n+1)(c-\alpha)}{2}\big]\big[bS(U, Y) + \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]g(Y, U) \\ - \ & \big[a\alpha + 4bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\eta(U)\eta(Y)\big] \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

olur. Son olarak (3.2.39) de U yerine ϕU seçtiğimizde

$$\big[\frac{(n+1)(c-\alpha)}{2}\big]\big[bS(\phi U, Y) + \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]g(Y, \phi U)\big] = 0$$

eşitliğini elde ederiz.
Burada $\frac{(n+1)(c-\alpha)}{2} = 0$ için $\alpha = c$ olur. Buradan M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğunu görürüz.
Diğer taraftan

$$S(\phi U, Y) = \big[\frac{a\alpha}{b} + 2n\alpha - \frac{r}{b(2n+1)}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]g(\phi U, Y) \tag{3.2.40}$$

eşitliğine göre M bir Einstein manifoldu olur.
İspatın tersi açıktır. Böylece teroemin ispatı biter.

3.3 Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldların Concircular Eğrilik Tensörü

Bu kısımda bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun concircular eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenerek elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 3.3.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{Z}(\xi, X)R = 0$ olması için gerek ve yeter şart ya M α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da M nin skaler eğriliği $r = 2n\alpha(2n+1)$ dir.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{Z}(\xi, X)R = 0$ olsun. Burada $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\widetilde{Z}(X,Y)R)(U,W,Z) &= \widetilde{Z}(X,Y)R(U,W)Z - R(\widetilde{Z}(X,Y)U,W)Z \\ &- R(U,\widetilde{Z}(X,Y)W)Z - R(U,W)\widetilde{Z}(X,Y)Z \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $X = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned} (\widetilde{Z}(\xi,Y)R)(U,W,Z) &= \widetilde{Z}(\xi,Y)R(U,W)Z - R(\widetilde{Z}(\xi,Y)U,W)Z \\ &- R(U,\widetilde{Z}(\xi,Y)W)Z - R(U,W)\widetilde{Z}(\xi,Y)Z \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

yazılır. (3.3.2) de (2.3.19) kullanıldığında

$$\begin{aligned} &\big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(Y,R(U,W)Z)\xi - \eta(R(U,W)Z)Y \\ &- g(Y,U)R(\xi,W)Z + \eta(U)R(Y,W)Z \\ &- g(Y,W)R(U,\xi)Z + \eta(W)R(U,Y)Z \\ &- g(Y,Z)R(U,W)\xi + \eta(Z)R(U,W)Y\big] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

bulunur. Son denklemde $U = \xi$ seçtiğimizde

$$\big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[R(Y,W)Z - \alpha\{g(W,Z)Y - g(Y,Z)W\}\big] = 0 \tag{3.3.4}$$

elde edilir. (3.3.4) den manifoldun skaler eğriliği

$$r = 2n\alpha(2n+1) \tag{3.3.5}$$

olarak hesaplanır.
Diğer taraftan

$$R(Y,W)Z = \alpha\{g(W,Z)Y - g(Y,Z)W\} \tag{3.3.6}$$

olduğundan M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğu görülür.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı biter.

Teorem 3.3.2. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{Z}(\xi, X)P = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{Z}(\xi, X)P = 0$ olsun. Burada $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(\widetilde{Z}(Z,X)P)(Y,U,W) &= \widetilde{Z}(Z,X)P(Y,U)W - P(\widetilde{Z}(Z,X)Y,U)W \\ &- P(Y,\widetilde{Z}(Z,X)U)W - P(Y,U)\widetilde{Z}(Z,X)W \qquad (3.3.7)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. (3.3.7) de $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned}(\widetilde{Z}(\xi,X)P)(Y,U,W) &= \widetilde{Z}(\xi,X)P(Y,U)W - P(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,U)W \\ &- P(Y,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W - P(Y,U)\widetilde{Z}(\xi,X)W \\ &= 0 \qquad (3.3.8)\end{aligned}$$

olarak yazılır. (3.3.8) de (2.3.19) kullanıldığında ise

$$\begin{aligned}&\big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(X,P(Y,U)W)\xi - \eta(P(Y,U)W)X \\ &- g(X,Y)P(\xi,U)W + \eta(Y)P(X,U)W \\ &- g(X,U)P(Y,\xi)W + \eta(U)P(X,Y)W \\ &- g(X,W)P(Y,U)\xi + \eta(W)P(Y,U)X\big] \\ &= 0 \qquad (3.3.9)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.9) da $Y = \xi$ seçtiğimizde ve sonrasında (2.3.17) kullanıldığında

$$\begin{aligned}&\big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[\alpha g(X,U)\eta(W)\xi - \alpha g(U,W)X - \alpha g(X,W)\eta(U)\xi \\ +&\ \frac{1}{2n}\big[S(U,W)X + S(X,W)\eta(U)\xi - S(U,X)\eta(W)\xi\big] + P(U,X)W\big] \\ =&\ 0 \qquad (3.3.10)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (3.3.10) eşitliğinin her iki tarafına $\xi \in \chi(M)$ uygulandığında

$$\begin{aligned}&\big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[\alpha g(X,U)\eta(W) - \alpha g(U,W)\eta(X) - \alpha g(X,W)\eta(U) \\ +&\ \frac{1}{2n}\big[S(U,W)\eta(X) + S(X,W)\eta(U) - S(U,X)\eta(W)\big] + \eta(P(U,X)W)\big] \\ =&\ 0 \qquad (3.3.11)\end{aligned}$$

bulunup burada (2.3.18) kullanıp $W = \xi$ seçildiğinde ise

$$\big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[\alpha g(U,X) - \frac{1}{2n}S(U,X)\big] = 0 \qquad (3.3.12)$$

sonucuna varılır. Buradan da ya

$$r = 2n\alpha(2n+1), \tag{3.3.13}$$

ya da

$$S(U,X) = 2n\alpha g(U,X) \tag{3.3.14}$$

bulunur. Bu da bize M nin bir Einstein manifoldu olduğunu gösterir.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı biter.

Teorem 3.3.3. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{Z} = 0$ olması için gerek ve yeter şart ya M α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da M nin skaler eğriliği $r = 2n\alpha(2n+1)$ dir.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{Z} = 0$ olsun. Burada $\forall X,Y,Z,U,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}(Z,X)\widetilde{Z}(Y,U,W) &= \widetilde{Z}(Z,X)\widetilde{Z}(Y,U)W - \widetilde{Z}(\widetilde{Z}(Z,X)Y,U)W \\ &- \widetilde{Z}(Y,\widetilde{Z}(Z,X)U)W - \widetilde{Z}(Y,U)\widetilde{Z}(Z,X)W \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

yazılır. (3.3.15) de $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{Z}(Y,U,W) &= \widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{Z}(Y,U)W - \widetilde{Z}(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,U)W \\ &- \widetilde{Z}(Y,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W - \widetilde{Z}(Y,U)\widetilde{Z}(\xi,X)W \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

olur. (3.3.16) de (2.3.12) kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \widetilde{Z}(\xi,X)R(Y,U)W - \widetilde{Z}(R(\xi,X)Y,U)W \\ - \ & \widetilde{Z}(Y,R(\xi,X)U)W - \widetilde{Z}(Y,U)R(\xi,X)W \\ + \ & \big(\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(Y,W)\widetilde{Z}(\xi,X)U - g(U,W)\widetilde{Z}(\xi,X)Y \\ + \ & g(X,Y)\widetilde{Z}(\xi,U)W - \eta(Y)\widetilde{Z}(X,U)W \\ + \ & g(X,U)\widetilde{Z}(Y,\xi)W - \eta(U)\widetilde{Z}(Y,X)W \\ + \ & g(X,W)\widetilde{Z}(Y,U)\xi - \eta(W)\widetilde{Z}(Y,U)X\big] \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

eşitliği bulunur. (3.3.17) de $Y = \xi$ seçilerek gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise

$$\big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[R(X,U)W - \alpha\{g(U,W)X - g(X,W)U\}\big] = 0 \tag{3.3.18}$$

sonucu elde edilir. Buradan ya manifoldun skaler eğriliği $r = 2n\alpha(2n+1)$ ya da

$$R(X,U)W = \alpha\{g(U,W)X - g(X,W)U\}$$

olduğunu söyleriz.

İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı biter.

Teorem 3.3.4. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{Z}(\xi,X)S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{Z}(\xi,X)S = 0$ olsun. Burada $\forall X,Y,U,W \in \chi(M)$ için

$$(\widetilde{Z}(X,Y)S)(U,W) = -S(\widetilde{Z}(X,Y)U,W) - S(U,\widetilde{Z}(X,Y)W) \tag{3.3.19}$$

olduğunu biliyoruz. (3.3.19) da $X = \xi$ seçtiğimizde

$$S(\widetilde{Z}(\xi,Y)U,W) + S(U,\widetilde{Z}(\xi,Y)W) = 0 \tag{3.3.20}$$

olur. Burada (3.3.20) da (2.3.19) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& S\big(R(\xi,Y)U - \frac{r}{2n(2n+1)}\big[g(Y,U)\xi - \eta(U)Y\big],W\big) \\
+ \;\; & S\big(U,R(\xi,Y)W - \frac{r}{2n(2n+1)}\big[g(Y,W)\xi - \eta(W)Y\big]\big) \\
= \;\; & 0
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

bulunur. (3.3.21) de (2.3.13) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& 2n\alpha^2 g(X,U)\eta(W) - \alpha\eta(U)S(X,W) \\
- \;\; & \big(\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[2n\alpha g(X,U)\eta(W) - \eta(U)S(X,W)\big] \\
+ \;\; & 2n\alpha^2 g(X,W)\eta(U) - \alpha\eta(W)S(X,U) \\
- \;\; & \big(\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[2n\alpha g(X,W)\eta(U) - \eta(W)S(X,U)\big] \\
= \;\; & 0
\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

olduğu görülür. (3.3.22) de $U = \xi$ seçtiğimizde ise

$$\big[\frac{r}{2n(2n+1)} - \alpha\big]S(X,W) + \big[2n\alpha^2 - \alpha\frac{r}{2n+1}\big]g(X,W) = 0 \tag{3.3.23}$$

sonucuna varılır. Burada ya manifoldun skaler eğriliği $r = 2n\alpha(2n+1)$ ya da

$$S(X,W) = 2n\alpha g(X,W) \tag{3.3.24}$$

olup buradan M nin bir Einstein manifoldu olduğu görülür.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı biter.

Teorem 3.3.5. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{C}=0$ olması için gerek ve yeter şart ya M α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da M nin skaler eğriliği $r=2n\alpha(2n+1)$ dir.*

İspat . Kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu için $\widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{C}=0$ şartı sağlansın. Burada $\forall X,Y,Z,U,W\in\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}(Z,X)\widetilde{C}(Y,U,W) &= \widetilde{Z}(Z,X)\widetilde{C}(Y,U)W-\widetilde{C}(\widetilde{Z}(Z,X)Y,U)W\\ &- \widetilde{C}(Y,\widetilde{Z}(Z,X)U)W-\widetilde{C}(Y,U)\widetilde{Z}(Z,X)W \qquad (3.3.25)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. (3.3.25) de $Z=\xi$ seçtiğimizde bu denklemi

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{C}(Y,U,W) &= \widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{C}(Y,U)W-\widetilde{C}(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,U)W\\ &- \widetilde{C}(Y,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W-\widetilde{C}(Y,U)\widetilde{Z}(\xi,X)W\\ &= 0 \qquad (3.3.26)\end{aligned}$$

şeklinde yazarız. (3.3.26) de (2.3.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(X,\widetilde{C}(Y,U)W)\xi-\eta(\widetilde{C}(Y,U)W)X\\ -\ & g(X,Y)\widetilde{C}(\xi,U)W+\eta(Y)\widetilde{C}(X,U)W\\ -\ & g(X,U)\widetilde{C}(Y,\xi)W+\eta(U)\widetilde{C}(Y,X)W\\ -\ & g(X,W)\widetilde{C}(Y,U)\xi+\eta(W)\widetilde{C}(Y,U)X\big]\\ =\ & 0 \qquad (3.3.27)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (3.3.27) da $Y=\xi$ seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned}&\big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(X,\widetilde{C}(\xi,U)W)\xi-\eta(\widetilde{C}(\xi,U)W)X\\ -\ & \eta(X)\widetilde{C}(\xi,U)W+\widetilde{C}(X,U)W+\eta(U)\widetilde{C}(\xi,X)W\\ -\ & g(X,W)\widetilde{C}(\xi,U)\xi+\eta(W)\widetilde{C}(\xi,U)X\big]\\ =\ & 0 \qquad (3.3.28)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.28) de gerekli kısaltmalar yapıldığında bu denklem

$$
\begin{aligned}
& (\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)})\big[\big[\frac{bc(n+1)+\alpha(2a+7bn-b)}{2} - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big] \\
& \big[g(X, g(U,W)\xi - \eta(W)U) - g(U,W)X + \eta(W)\eta(U)X \\
& -\eta(X)\{g(U,W)\xi - \eta(W)U\} \\
+ \; & \eta(U)\{g(X,W)\xi - \eta(W)X\} \\
- \; & g(X,W)\{\eta(U)\xi - U\} \\
+ \; & \eta(W)\{g(U,X)\xi - \eta(X)U\}\big] \\
+ \; & \widetilde{C}(X,U)W\big] \\
= \; & 0 \qquad (3.3.29)
\end{aligned}
$$

halini alır. (3.3.29) de gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$
\begin{aligned}
& (\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)})\big[\widetilde{C}(X,U)W \\
- \; & \big[\frac{bc(n+1)\alpha(2a+2bn-b)}{2} - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big]\big[g(U,W)X - g(X,W)U\big]\big] \\
= \; & 0 \qquad (3.3.30)
\end{aligned}
$$

eşitliğini yazarız. Bu denklemde (2.3.9) kullanıldığında ise

$$
\begin{aligned}
& (\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)})\big[aR(X,U)W + b\big[S(U,W)X - S(X,W)U \\
+ \; & g(U,W)QX - g(X,W)QU\big] \\
- \; & \big(a\alpha + 2bn\alpha + \frac{b\alpha(3n-1)+bc(n+1)}{2}\big)\big[g(U,W)X - g(X,W)U\big]\big] \\
= \; & 0 \qquad (3.3.31)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.3.31) de (2.3.25) ve (2.3.26) eşitliklerini kullanarak gerekli kısaltmaları yaptığımızda

$$
\begin{aligned}
& (\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)})\big[aR(X,U)W \\
- \; & (\frac{\alpha(2a+b(n+1)-bc(n+1))}{2})\big[g(U,W)X - g(X,W)U\big] \\
+ \; & (\frac{b(\alpha-c)(n+1)}{2})\big[\eta(U)\eta(W)X - \eta(X)\eta(W)U \\
- \; & g(U,W)\eta(X)\xi - g(X,W)\eta(U)\xi\big]\big] \\
= \; & 0 \qquad (3.3.32)
\end{aligned}
$$

olarak yazılır. (3.3.32) de X yerine ϕX, U yerine ϕU seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned} & \big(\alpha - \frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[aR(\phi X, \phi U)W \\ - & \big(\frac{\alpha\big[2a+b(n+1)\big]-bc(n+1)}{2}\big)\big[g(\phi U, W)\phi X - g(\phi X, W)\phi U\big]\big] \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

elde edilir. Burada (3.3.33) den ya manifoldun skaler eğriliği $r = 2n\alpha(2n+1)$ ya da

$$R(\phi X, \phi U)W = \big(\frac{\alpha\big[2a+b(n+1)\big]-bc(n+1)}{2a}\big)\big[g(\phi U, W)\phi X - g(\phi X, W)\phi U\big]$$

eşitliğini yazarız. Buradan da M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğunu söyleriz.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı biter.

3.4 Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldların Quasi-Konformal Eğrilik Tensörü

Şimdiye kadar incelediğimiz eğrilik tensörlerinin en genel olanı quasi-konformal eğrilik tensörüdür. Böylelikle daha önce elde ettiğimiz sonuçların daha genel durumlarını elde etmiş olacağız. Bu kısımda bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun quasi-konformal eğrilik tensörünün diğer eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Teorem 3.4.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{C}(\xi, X)R = 0$ olması için gerek ve yeter şart ya M α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da $\alpha - c \neq 0$ olmak üzere quasi-konformal eğrilik tensörü konformal eğrilik tensörüne indirgenir.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{C}(\xi, X)R = 0$ olsun. Burada $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\widetilde{C}(X,Y)R)(Z,U,W) &= \widetilde{C}(X,Y)R(Z,U)W - R(\widetilde{C}(X,Y)Z,U)W \\ &- R(Z,\widetilde{C}(X,Y)U)W - R(Z,U)\widetilde{C}(X,Y)W \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

olduğundan bu denklem $X = \xi$ için

$$\begin{aligned} (\widetilde{C}(\xi,Y)R)(Z,U,W) &= \widetilde{C}(\xi,Y)R(Z,U)W - R(\widetilde{C}(\xi,Y)Z,U)W \\ &- R(Z,\widetilde{C}(\xi,Y)U)W - R(Z,U)\widetilde{C}(\xi,Y)W \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

halini alır. (3.4.2) de (2.3.21) kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
& a\alpha g(Y,R(Z,U)W)\xi - a\alpha\eta(R(Z,U)W)Y + bS(Y,R(Z,U)W)\xi \\
- \; & 2bn\alpha\eta(R(Z,U)W)Y + 2bn\alpha g(Y,R(Z,U)W)\xi - b\eta(R(Z,U)W)QY \\
- \; & \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big[g(Y,R(Z,U)W)\xi - \eta(R(Z,U)W)Y\big] \\
- \; & a\alpha g(Y,Z)R(\xi,U)W + a\alpha\eta(Z)R(Y,U)W - bS(Y,Z)R(\xi,U)W \\
+ \; & 2bn\alpha\eta(Z)R(Y,U)W - 2bn\alpha g(Y,Z)R(\xi,U)W + b\eta(Z)R(QY,U)W \\
+ \; & \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big[g(Y,Z)R(\xi,U)W - \eta(Z)R(Y,U)W\big] \\
- \; & a\alpha g(Y,U)R(Z,\xi)W + a\alpha\eta(U)R(Z,Y)W - bS(Y,U)R(Z,\xi)W \\
+ \; & 2bn\alpha\eta(U)R(Z,Y)W - 2bn\alpha g(Y,U)R(Z,\xi)W + b\eta(U)R(Z,QY)W \\
+ \; & \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big[g(Y,U)R(Z,\xi)W - \eta(U)R(Z,Y)W\big] \\
- \; & a\alpha g(Y,W)R(Z,U)\xi + a\alpha\eta(W)R(Z,U)Y - bS(Y,W)R(Z,U)\xi \\
+ \; & 2bn\alpha\eta(W)R(Z,U)Y - 2bn\alpha g(Y,W)R(Z,U)\xi + b\eta(W)R(Z,U)QY \\
+ \; & \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big[g(Y,W)R(Z,U)\xi - \eta(W)R(Z,U)Y\big] \\
= \; & 0 \qquad (3.4.3)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.4.3) de $Z=\xi$ alarak (2.3.13), (2.3.14) ve (2.3.16) eşitliklerini kullandığımızda

$$
\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big]\big[R(Y,U)W \\
- \; & \alpha\{g(U,W)Y - g(Y,W)U\}\big] \\
+ \; & b\big[R(QY,U)W - \alpha\{g(U,W)QY - g(QY,W)U\}\big] \\
= \; & 0 \qquad (3.4.4)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. (3.4.4) de (2.3.26) yerine yazıldığında ise

$$
\begin{aligned}
& \big[\frac{\alpha(2a+7bn-b)+bc(n+1)}{2} - \frac{r(a+4bn)}{2n(2n+1)}\big]\big[R(Y,U)W \\
- \; & \alpha\{g(Y,U)W - g(Y,W)U\}\big] \\
= \; & 0 \qquad (3.4.5)
\end{aligned}
$$

sonucu hesaplanır. Buradan

$$
R(Y,U)W = \alpha\{g(Y,U)W - g(Y,W)U\} \qquad (3.4.6)
$$

yazılır ki böylece M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur.

Diğer taraftan

$$\Big[\frac{\alpha(2a+7bn-b)+bc(n+1)}{2}-\frac{r(a+4bn)}{2n(2n+1)}\Big]=0 \tag{3.4.7}$$

eşitliğinde gerekli düzenlemelerden sonra manifoldun skaler eğriliği

$$r=\frac{n(2n+1)\big[\alpha(2a+7bn-b)+bc(n+1)\big]}{a+4bn} \tag{3.4.8}$$

olarak hesaplanır. Burada (3.4.8) de (2.3.27) kullanıldığında $\alpha - c \neq 0$ olmak üzere

$$a+b(2n-1)=0 \tag{3.4.9}$$

elde edilir. Son olarak (2.3.9), (2.3.10) ve (3.4.9) eşitliklerinden

$$\widetilde{C}=a.C \tag{3.4.10}$$

olduğu görülür. Böylece quasi-konformal eğrilik tensörü konformal eğrilik tensörüne indirgenir.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4.2. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{C}(\xi,X)P=0$ olması için gerek ve yeter şart ya M α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da bir Einstein manifoldudur.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{C}(\xi,X)P=0$ olsun. O zaman $\forall X,Y,Z,U,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(\widetilde{C}(X,Y)P)(Z,U,W) &= \widetilde{C}(X,Y)P(Z,U)W-P(\widetilde{C}(X,Y)Z,U)W\\ &- P(Z,\widetilde{C}(X,Y)U)W-P(Z,U)\widetilde{C}(X,Y)W\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklem $X=\xi$ için

$$\begin{aligned}(\widetilde{C}(\xi,Y)P)(Z,U,W) &= \widetilde{C}(\xi,Y)P(Z,U)W-P(\widetilde{C}(\xi,Y)Z,U)W\\ &- P(Z,\widetilde{C}(\xi,Y)U)W-P(Z,U)\widetilde{C}(\xi,Y)W\\ &= 0\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

halini alır. (3.4.12) de (2.3.17) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[g(Y,P(Z,U)W)\xi \\
- \ & \eta(P(Z,U)W)Y - g(Y,Z)P(\xi,U)W \\
+ \ & \eta(Z)P(Y,U)W - g(Y,U)P(Z,\xi)W \\
+ \ & \eta(U)P(Z,Y)W - g(Y,W)P(Z,U)\xi \\
+ \ & \eta(W)P(Z,U)Y\big] \\
+ \ & b\big[S(Y,P(Z,U)W)\xi - \eta(P(Z,U)W)QY \\
- \ & S(Y,Z)P(\xi,U)W + \eta(Z)P(QY,U)W \\
- \ & S(Y,U)P(Z,\xi)W + \eta(U)P(Z,QY)W \\
- \ & S(Y,W)P(Z,U)\xi + \eta(W)P(Z,U)QY\big] \\
= \ & 0
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

bulunur. Bu denklem $Z = \xi$ için

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big[P(Y,U)W \\
- \ & \alpha g(U,W)Y + \alpha g(Y,W)\eta(U)\xi \\
+ \ & \alpha(U,Y)\eta(W)\xi + \frac{1}{2n}S(U,W)Y \\
- \ & \frac{1}{2n}S(Y,W)\eta(U)\xi - \frac{1}{2n}S(U,Y)\eta(W)\xi\big] \\
+ \ & b\big[P(QY,U)W - \alpha g(U,W)QY \\
+ \ & \alpha g(QY,W)\eta(U)\xi + \alpha g(U,QY)\eta(W)\xi \\
+ \ & \frac{1}{2n}S(U,W)QY - \frac{1}{2n}S(QY,W)\eta(U)\xi \\
- \ & \frac{1}{2n}S(U,QY)\eta(W)\xi\big] \\
= \ & 0
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

biçiminde yazılır. (3.4.14) de (2.3.11) kullanıldığında ise

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big[R(Y,U)W \\
- \ & \alpha g(U,W)Y + \alpha g(Y,W)\eta(U)\xi + \alpha g(U,Y)\eta(W)\xi \\
+ \ & \frac{1}{2n}S(Y,W)U - \frac{1}{2n}S(Y,W)\eta(U)\xi - \frac{1}{2n}S(U,Y)\eta(W)\xi\big] \\
+ \ & b\big[R(QY,U)W - \alpha g(U,W)QY \\
+ \ & \alpha g(QY,W)\eta(U)\xi + \alpha g(U,QY)\eta(W)\xi \\
- \ & \frac{1}{2n}S(QY,W)U - \frac{1}{2n}S(QY,W)\eta(U)\xi - \frac{1}{2n}S(U,QY)\eta(W)\xi\big] \\
= \ & 0 \qquad (3.4.15)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.4.15) eşitliğinin her iki tarafına $\xi \in \chi(M)$ uygulandığında

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big[\alpha g(U,Y)\eta(W) \\
- \ & \frac{1}{2n}S(U,Y)\eta(W)\big] \\
- \ & \big[\alpha g(U,QY)\eta(W) - \frac{1}{2n}S(U,QY)\eta(W)\big] \\
= \ & 0 \qquad (3.4.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4.16) da Y yerine ϕY seçtiğimizde ise

$$\begin{aligned}
& \big[b\big(\frac{r-2n\alpha}{2n}\big) + a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big] \\
& \otimes\big[\alpha g(U,\phi Y) - \frac{1}{2n}S(U,\phi Y)\big] \\
= \ & 0 \qquad (3.4.17)
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. (3.4.17) de gerekli kısaltmalar yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \big[(\alpha - c)\big[a + b(2n-1)\big]\big(\frac{n+1}{2n(2n+1)}\big)\big] \\
& \otimes\big[\alpha g(U,\phi Y) - \frac{1}{2n}S(U,\phi Y)\big] \\
= \ & 0 \qquad (3.4.18)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak (3.4.18) den M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu ya $\alpha = c$ için α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da $S(U,\phi Y) = 2n\alpha g(U,\phi Y)$ için bir Einstein manifoldudur.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4.3. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{C}(\xi, X)\widetilde{Z} = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{C}(\xi, X)\widetilde{Z} = 0$ olsun. Buarada $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(\widetilde{C}(X,Y)\widetilde{Z})(Z,U,W) &= \widetilde{C}(X,Y)\widetilde{Z}(Z,U)W - \widetilde{Z}(\widetilde{C}(X,Y)Z,U)W \\ &- \widetilde{Z}(Z,\widetilde{C}(X,Y)U)W - \widetilde{Z}(Z,U)\widetilde{C}(X,Y)W \qquad (3.4.19)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklem $X = \xi$ için

$$\begin{aligned}(\widetilde{C}(\xi,Y)\widetilde{Z})(Z,U,W) &= \widetilde{C}(\xi,Y)\widetilde{Z}(Z,U)W - \widetilde{Z}(\widetilde{C}(\xi,Y)Z,U)W \\ &- \widetilde{Z}(Z,\widetilde{C}(\xi,Y)U)W - \widetilde{Z}(Z,U)\widetilde{C}(\xi,Y)W \\ &= 0 \qquad (3.4.20)\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. (3.4.20) de (2.3.21) kullanıldığında ise

$$\begin{aligned}&\big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[g(Y,\widetilde{Z}(Z,U)W)\xi \\ -\ & \eta(\widetilde{Z}(Z,U)W)Y - g(Y,Z)\widetilde{Z}(\xi,U)W \\ +\ & \eta(Z)\widetilde{Z}(Y,U)W - g(Y,U)\widetilde{Z}(Z,\xi)W \\ +\ & \eta(U)\widetilde{Z}(Z,Y)W - g(Y,W)\widetilde{Z}(Z,U)\xi \\ +\ & \eta(W)\widetilde{Z}(Z,U)Y\big] \\ +\ & b\big[S(Y,\widetilde{Z}(Z,U)W)\xi - \eta(\widetilde{Z}(Z,U)W)QY \\ -\ & S(Y,Z)\widetilde{Z}(\xi,U)W + \eta(Z)\widetilde{Z}(QY,U)W \\ -\ & S(Y,U)\widetilde{Z}(Z,\xi)W + \eta(U)\widetilde{Z}(Z,QY)W \\ -\ & S(Y,W)\widetilde{Z}(Z,U)\xi + \eta(W)\widetilde{Z}(Z,U)QY\big] \\ =\ & 0 \qquad (3.4.21)\end{aligned}$$

bulunur. (3.4.21) de $Z=\xi$ seçerek gerekli kısaltmaları yaptığımızda

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha+2bn\alpha-\frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big]\big[g(Y,\widetilde{Z}(\xi,U)W)\xi \\
- & \ \eta(\widetilde{Z}(\xi,U)W)Y-\eta(Y)\widetilde{Z}(\xi,U)W \\
+ & \ \widetilde{Z}(Y,U)W+\eta(U)\widetilde{Z}(\xi,Y)W \\
- & \ g(Y,W)\widetilde{Z}(\xi,U)\xi+\eta(W)\widetilde{Z}(\xi,U)Y\big] \\
+ & \ b\big[S(Y,\widetilde{Z}(\xi,U)W)\xi-\eta(\widetilde{Z}(\xi,U)W)QY \\
- & \ 2n\alpha\eta(Y)\widetilde{Z}(\xi,U)W+\widetilde{Z}(QY,U)W \\
+ & \ \eta(U)\widetilde{Z}(\xi,QY)W-S(Y,W)\widetilde{Z}(\xi,U)\xi+\eta(W)\widetilde{Z}(\xi,U)QY\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.4.22}$$

bulunur. (3.4.22) de (2.3.19) ve (2.3.20) kullanılarak gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda ise

$$\begin{aligned}
& \big[\widetilde{Z}(QY,U)W-\big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(U,W)QY-g(QY,W)U\big]\big] \\
+ & \ \big[a\alpha+2bn\alpha-\frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big]\big[\widetilde{Z}(Y,U)W \\
- & \ \big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(U,W)Y-g(Y,W)U\big]\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

eşitliği bulunur. (3.4.23) de Y yerine ϕY yazdığımızda

$$\begin{aligned}
& \big[\widetilde{Z}(Q\phi Y,U)W-\big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(U,W)Q\phi Y-g(Q\phi Y,W)U\big]\big] \\
+ & \ \big[a\alpha+2bn\alpha-\frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big]\big[\widetilde{Z}(\phi Y,U)W \\
- & \ \big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(U,W)\phi Y-g(\phi Y,W)U\big]\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

elde edilir. (3.4.24) de (2.3.30) kullanıldığında ise

$$\begin{aligned}
& \big[\frac{(\alpha-c)(2bn^2-b+an+a+bn)}{4n+2}\big]\big[\widetilde{Z}(\phi Y,U)W \\
- & \ \big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(U,W)\phi Y-g(\phi Y,W)U\big]\big] \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

bulunur. Burada gerekli kısaltmalardan sonra bu denklem

$$\begin{aligned} & \big[(\alpha-c)\big[a+b(2n-1)\big]\big(\frac{n+1}{4n+2}\big)\big]\big[\widetilde{Z}(\phi Y,U)W \\ - & \big(\alpha-\frac{r}{2n(2n+1)}\big)\big[g(U,W)\phi Y-g(\phi Y,W)U\big]\big] \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

halini alır. (3.4.26) da (2.3.12) kullanıldığında ise

$$\begin{aligned} & \big[(\alpha-c)\big[a+b(2n-1)\big]\big(\frac{n+1}{4n+2}\big)\big] \\ & \big[R(\phi Y,U)W-\alpha\big[g(U,W)\phi Y-g(\phi Y,W)U\big]\big] \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

sonucuna varılır. Buradan da

$$R(\phi Y,U)W=\alpha\{g(U,W)\phi Y-g(\phi Y,W)U\} \tag{3.4.28}$$

eşitliği yazılır. Bu denklemden de M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğu görülür.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4.4. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{C}(\xi,X)S=0$ olması için gerek ve yeter şart ya M α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da bir Einstein manifoldudur.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{C}(\xi,X)S=0$ olsun. Burada $\forall X,Y,Z,U,W\in\chi(M)$ için

$$(\widetilde{C}(X,Y)S)(U,W)=-S(\widetilde{C}(X,Y)U,W)-S(U,\widetilde{C}(X,Y)W) \tag{3.4.29}$$

şeklindedir. (3.4.29) da $X=\xi$ seçtiğimizde

$$S(\widetilde{C}(\xi,Y)U,W)+S(U,\widetilde{C}(\xi,Y)W)=0 \tag{3.4.30}$$

olur. (3.4.30) da (2.3.21) kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \big[a\alpha+2bn\alpha-\frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n}+2b\big]\big]\big[g(X,U)S(\xi,W) \\ - & \ \eta(U)S(X,W)+g(X,W)S(U,\xi)-\eta(W)S(U,X)\big] \\ + & \ b\big[S(X,U)S(\xi,W)-\eta(U)S(QX,W) \\ + & \ S(X,W)S(U,\xi)-\eta(W)S(U,QX)\big] \\ = & \ 0 \end{aligned} \tag{3.4.31}$$

bulunur. (2.3.28) denklemi, (3.4.31) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[2n\alpha g(X,U)\eta(W) \\
- & \ \eta(U)S(X,W) + 2n\alpha g(X,W)\eta(U) - \eta(W)S(U,X)\big] \\
+ & \ b\big[2n\alpha S(U,X)\eta(W) - \eta(U)S(QX,W) \\
+ & \ 2n\alpha S(X,W)\eta(U) - \eta(W)S(QX,U)\big] \\
= & \ 0 \qquad (3.4.32)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem $U = \xi$ için

$$\begin{aligned}
& \big[a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big]\big[S(X,W) - 2n\alpha g(X,W)\big] \\
+ & \ b\big[S(QX,W) - 2n\alpha g(QX,W)\big] \\
= & \ 0 \qquad (3.4.33)
\end{aligned}$$

halini alır. (3.4.33) de X yerine ϕX yazdığımızda ise

$$\begin{aligned}
& \big[b\big(\frac{r-2n\alpha}{2n}\big) + a\alpha + 2bn\alpha - \frac{r}{2n+1}\big[\frac{a}{2n} + 2b\big]\big] \\
& \big[S(\phi X,W) - 2n\alpha g(\phi X,W)\big] \\
= & \ 0 \qquad (3.4.34)
\end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned}
& \big[(\alpha - c)\big[a + b(2n-1)\big]\big(\frac{n+1}{2n(2n+1)}\big)\big]\big[S(\phi X,W) - 2n\alpha g(\phi X,W)\big] \\
= & \ 0 \qquad (3.4.35)
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Sonuç olarak (3.4.35) den M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu ya $\alpha = c$ için α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur ya da $S(U,\phi Y) = 2n\alpha g(U,\phi Y)$ için bir Einstein manifoldudur.

İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4.5. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere $\widetilde{C}(\xi,X)\widetilde{C} = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki $\widetilde{C}(\xi, X)\widetilde{C} = 0$ olsun. Burada $\forall X, Y, U, W, Z \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{C}(X,Y)\widetilde{C})(Z,U,W) &= \widetilde{C}(X,Y)\widetilde{C}(Z,U)W - \widetilde{C}(\widetilde{C}(X,Y)Z,U)W \\
&- \widetilde{C}(Z,\widetilde{C}(X,Y)U)W - \widetilde{C}(Z,U)\widetilde{C}(X,Y)W
\end{aligned}
\tag{3.4.36}
$$

olduğunda bu denklem $X = \xi$ için

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{C}(\xi,Y)\widetilde{C})(Z,U,W) &= \widetilde{C}(\xi,Y)\widetilde{C}(Z,U)W - \widetilde{C}(\widetilde{C}(\xi,Y)Z,U)W \\
&- \widetilde{C}(Z,\widetilde{C}(\xi,Y)U)W - \widetilde{C}(Z,U)\widetilde{C}(\xi,Y)W \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.4.37}
$$

halini alır. (3.4.37) de (2.3.23) kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{bc(n+1)+\alpha\big(2a+7bn-b\big)}{2} - \frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big]\Big[g(Y,\widetilde{C}(Z,U)W)\xi \\
-\ & \eta(\widetilde{C}(Z,U)W)Y - g(Y,Z)\widetilde{C}(\xi,U)W \\
+\ & \eta(Z)\widetilde{C}(Y,U)W - g(Y,U)\widetilde{C}(Z,\xi)W \\
+\ & \eta(U)\widetilde{C}(Z,Y)W - g(Y,W)\widetilde{C}(Z,U)\xi \\
+\ & \eta(W)\widetilde{C}(Z,U)Y\Big] \\
=\ & 0
\end{aligned}
\tag{3.4.38}
$$

bulunur. (3.4.38) de $Z = \xi$ seçtiğimizde ise

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{bc(n+1)+\alpha\big(2a+7bn-b\big)}{2} - \frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big]\Big[g(Y,\widetilde{C}(\xi,U)W)\xi \\
-\ & \eta(\widetilde{C}(\xi,U)W)Y - \eta(Y)\widetilde{C}(\xi,U)W \\
+\ & \widetilde{C}(Y,U)W + \eta(U)\widetilde{C}(\xi,Y)W \\
-\ & g(Y,W)\widetilde{C}(\xi,U)\xi + \eta(W)\widetilde{C}(\xi,U)Y\Big] \\
=\ & 0
\end{aligned}
\tag{3.4.39}
$$

elde edilir. (3.4.39) dan (2.3.22) ve (2.3.23) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}(Y,U)W &= \Big[\frac{bc(n+1)+\alpha\big(2a+7bn-b\big)}{2} - \frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big] \\
&\quad \big[-g\big(Y,\{g(U,W)\xi-\eta(W)U\}\big)\xi \\
&+ \{g(U,W)Y-\eta(W)\eta(U)Y\} \\
&+ \eta(Y)\{g(U,W)\xi-\eta(W)U\} \\
&- \eta(U)\{g(Y,W)\xi-\eta(W)U\} \\
&+ g(Y,W)\{\eta(U)\xi-U\} \\
&- \eta(W)\{g(U,Y)\xi-\eta(Y)U\}\big]
\end{aligned} \tag{3.4.40}$$

eşitliğini yazarız. (3.4.40) da gerekli kısaltmalardan sonra

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}(Y,U)W &= \Big[\frac{bc(n+1)+\alpha\big(2a+7bn-b\big)}{2} - \frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big] \\
&\quad \big[g(U,W)Y-g(Y,W)U\big]
\end{aligned} \tag{3.4.41}$$

ifadesi elde edilir. Sonrasında (3.4.41) de (2.3.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
aR(Y,U)W &= \big[-S(U,W)Y+S(Y,W)U-g(U,W)QY+g(Y,W)QU\big] \\
&+ \Big[a\alpha+2bn\alpha+\frac{b\alpha(3n-1)+bc(n+1)}{2}\Big] \\
&\quad \big[g(U,W)Y-g(Y,W)U\big]
\end{aligned} \tag{3.4.42}$$

elde edilir. (3.4.42) de (2.3.25) ve (2.3.26) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
aR(Y,U)W &= \big[b\alpha(3n-1)+bc(n+1)\big]\big[g(Y,W)U-g(U,W)Y\big] \\
&- \frac{b(\alpha-c)(n+1)}{2}\big[\eta(U)\eta(W)Y-\eta(Y)\eta(W)U \\
&+ g(U,W)\eta(Y)\xi-g(Y,W)\eta(U)\xi\big] \\
&+ \Big[a\alpha+2bn\alpha+\frac{b\alpha(3n-1)+bc(n+1)}{2}\Big]\big[g(U,W)Y-g(Y,W)U\big] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.4.43}$$

bulunur. (3.4.43) denklemi gerekli kısaltmalardan sonra

$$\begin{aligned}
aR(Y,U)W &= \Big[\frac{\alpha\big[2a+b(n+1)\big]-bc(n+1)}{2}\Big]\big[g(U,W)Y-g(Y,W)U\big] \\
&- \Big[\frac{b(\alpha-c)(n+1)}{2}\Big]\big[\eta(U)\eta(W)Y-\eta(Y)\eta(W)U \\
&- g(U,W)\eta(Y)\xi-g(Y,W)\eta(U)\xi\big]
\end{aligned} \tag{3.4.44}$$

halini alır. (3.4.44) de Y yerine ϕY ve U yerine de ϕU yazdığımızda ise

$$R(\phi Y, \phi U)W \;=\; \Big[\frac{\alpha\big[2a+b(n+1)\big]-bc(n+1)}{2a}\Big]\big[g(\phi U, W)\phi Y - g(\phi Y, W)\phi U\big]$$

sonucuna varılır. Böylece M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğu görülür.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi ise daha önce vermiş olduğumuz teoremlerin bazılarını sağlayan 5-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu örneği vereceğiz.

Örnek 3.4.1. $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5\}$ 5-boyutlu Riemann manifoldu olsun. M nin her noktasında lineer bağımsız

$$e_1 = e^{2x_5}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad e_2 = e^{2x_5}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad e_3 = e^{2x_5}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$e_4 = e^{2x_5}\frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad e_5 = \frac{\partial}{\partial x_5}$$

baz vektörlerini alalım. M üzerinde g Riemann metriğini

$$g = e^{-4x_5}(\partial x_i^2) + dz^2$$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

olduğu görülmektedir. Diğer taraftan ϕ $(1,1)$-tipinden tensör alanını, ξ vektör alanını ve η 1-formunu $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\phi e_1 = -e_3, \qquad \phi e_2 = -e_4, \qquad \phi e_3 = e_1, \qquad \phi e_4 = e_2, \qquad \phi e_5 = 0$$

$$\xi = e_5, \qquad \eta(X) = g(X, e_5)$$

biçiminde alalım.
Burada ϕ tensör alanı ve g metrik tensörünün lineerlik özeliklerini kullandığımızda

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\eta(e_5) = 1,$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X) e_5$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliklerini sağlayan (ϕ, ξ, η, g) nin M üzerinde bir hemen hemen kontak metrik yapı olduğu görülür.

Şimdi de M üzerindeki ∇ Levi-Civita konneksiyonunu alalım. (2.2.2) formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
\big[e_1, e_2\big] = \big[e^{2x_5}\frac{\partial}{\partial x_1}, e^{2x_5}\frac{\partial}{\partial x_2}\big] &= e^{4x_5}\big[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\big] + e^{2x_5}\big(\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{2x_5})\big)\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&- e^{2x_5}\big(\frac{\partial}{\partial x_2}(e^{2x_5})\big)\frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\big[e_1, e_3\big] = \big[e_1, e_4\big] = \big[e_2, e_3\big] = \big[e_2, e_4\big] = \big[e_3, e_4\big] = 0$$

ve

$$\big[e_1, e_5\big] = -2e_1, \quad \big[e_2, e_5\big] = -2e_2, \quad \big[e_3, e_5\big] = -2e_3, \quad \big[e_4, e_5\big] = -2e_4,$$

değerleri hesaplanır. Diğer taraftan

$$\nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_1} e_4 = \nabla_{e_2} e_1 = \nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_2} e_4 = 0,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = \nabla_{e_3} e_2 = \nabla_{e_3} e_4 = \nabla_{e_4} e_1 = \nabla_{e_4} e_2 = \nabla_{e_4} e_3 = 0,$$

$$\nabla_{e_5} e_1 = \nabla_{e_5} e_2 = \nabla_{e_5} e_3 = \nabla_{e_5} e_4 = \nabla_{e_5} e_5 = 0,$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_3} e_3 = \nabla_{e_4} e_4 = 2e_5$$

ve

$$\nabla_{e_1} e_5 = -2e_1, \quad \nabla_{e_2} e_5 = -2e_2, \quad \nabla_{e_3} e_5 = -2e_3, \quad \nabla_{e_4} e_5 = -2e_4$$

olarak hesaplanır. Buradan manifoldun Riemann eğriliklerini ise

$$R(e_1, e_2)e_2 = R(e_1, e_3)e_3 = R(e_1, e_4)e_4 = R(e_1, e_5)e_5 = -4e_1,$$

$$R(e_2, e_1)e_1 = R(e_2, e_3)e_3 = R(e_2, e_4)e_4 = R(e_2, e_5)e_5 = -4e_2,$$

$$R(e_3, e_1)e_1 = R(e_3, e_2)e_2 = R(e_3, e_4)e_4 = R(e_3, e_5)e_5 = -4e_3,$$

$$R(e_4, e_1)e_1 = R(e_4, e_2)e_2 = R(e_4, e_3)e_3 = R(e_4, e_5)e_5 = -4e_4,$$

$$R(e_5, e_1)e_1 = R(e_5, e_2)e_2 = R(e_5, e_3)e_3 = R(e_5, e_4)e_4 = -4e_5$$

olacak şekilde hesaplarız. Ayrıca $1 \leq i, j, k \leq 5$ ve $i \neq k \neq j$ için

$$R(e_i, e_j)e_k = 0$$

olarak hesaplanır. Burada yukarıda hesapladığımız eğrilikler (2.3.5) eşitliğinde yerine yazıldığında $\alpha = -4$ olduğu görülür. Bu da bize söyler ki M 5-boyutlu bir hemen hemen $C(-4)$ manifoldudur.
Diğer taraftan (2.2.15) eşitliği yardımıyla manifoldun $c = -4$ sabit kesit eğrilikli bir reel uzay form olduğu görülür.

4. Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldların Simetriklik Durumları

Simetrik manifoldlar diferansiyel geometrinin popüler konularından biridir. Çünkü manifoldların üzerindeki simetriklik durumları, o manifold üzerinde çalışma yapan geometricilerin işlerini oldukça kolaylaştırmaktadır. Bu bölümde bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun lokal ϕ-simetrik, lokal simetrik, η-paralel ve quasi-konformal flat olma durumları incelenmiştir. Bölüm sonunda ise 3-boyutlu özel bir $C(\alpha)$-manifoldu örneği inşa edilmiştir.

4.1 Lokal ϕ-Simetrik Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldları

Bu kısımda öncelikle lokal ϕ-simetriklik kavramı tanıtılarak daha sonra bir hemen hemen $C(\alpha)$- manifoldunun lokal ϕ-simetrik olması durumunda ortaya çıkan sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 4.1.1. Bir M kontak metrik manifoldunda $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\phi^2\big((\nabla_W R)(X, Y, Z)\big) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda M ye *lokal ϕ-simetriktir* denir (Takahashi, 1977).

Teorem 4.1.1. *M, (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere M nin lokal ϕ-simetrik olması için gerek ve yeter şart α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu lokal ϕ-simetrik olsun. O zaman her $X, Y, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\phi^2((\nabla_X R)(Y, W, Z)) = 0 \tag{4.1.1}$$

olduğunu biliyoruz. (4.1.1) denkleminden

$$\begin{aligned}
- &\ \nabla_X R(Y, W)Z + R(\nabla_X Y, W)Z + R(Y, \nabla_X W)Z + R(Y, W)\nabla_X Z \\
+ &\ \eta(\nabla_X R(Y, W)Z)\xi - \eta(R(\nabla_X Y, W)Z)\xi - \eta(R(Y, \nabla_X W)Z)\xi \\
- &\ \eta(R(Y, W)\nabla_X Z)\xi \\
= &\ 0
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

bulunur. (4.1.2) de (2.3.6) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
- & \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(W,Z)\nabla_X Y + Yg(\nabla_X W,Z) + Yg(W,\nabla_X Z)\\
- & g(Y,Z)\nabla_X W - Wg(\nabla_X Y,Z) - Wg(\nabla_X Z,Y)\big]\\
- & \frac{c-\alpha}{4}\big[g(Y,\phi Z)\nabla_X \phi W + g(\nabla_X Y,\phi Z)\phi W + g(Y,\nabla_X \phi Z)\phi W\\
- & g(W,\phi Z)\nabla_X \phi Y - g(\nabla_X W,\phi Z)\phi Y - g(W,\nabla_X \phi Z)\phi Y\\
+ & 2g(Y,\phi W)\nabla_X \phi Z + 2g(\nabla_X Y,\phi W)\phi Z + 2g(Y,\nabla_X \phi W)\phi Z\\
+ & \eta(Y)\eta Z\nabla_X W + \eta(Y)W\eta(\nabla_X Z) + \eta(Y)Wg(Z,\nabla_X \xi)\\
+ & \eta(Z)W\eta(\nabla_X Y) + \eta(Z)Wg(Y,\nabla_X \xi) - \eta(W)\eta(Z)\nabla_X Y\\
- & \eta(W)Y\eta(\nabla_X Z) - \eta(W)Yg(Z,\nabla_X \xi) - \eta(Z)Y\eta(\nabla_X W)\\
- & \eta(Z)Yg(W,\nabla_X \xi) + g(\nabla_X Y,Z)\eta(W)\xi + g(Y,\nabla_X Z)\eta(W)\xi\\
+ & \eta(\nabla_X W)g(Y,Z)\xi + g(W,\nabla_X \xi)g(Y,Z)\xi + g(Y,Z)\eta(W)\nabla_X \xi\\
- & g(\nabla_X W,Z)\eta(Y)\xi - g(W,\nabla_X Z)\eta(Y)\xi - \eta(\nabla_X Y)g(W,Z)\xi\\
- & g(Y,\nabla_X \xi)g(W,Z)\xi - g(W,Z)\eta(Y)\nabla_X \xi\big]\\
+ & \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(W,Z)\nabla_X Y - g(\nabla_X Y,Z)W + g(\nabla_X W)Y\\
- & g(Y,Z)\nabla_X W + g(W,\nabla_X Z)Y - g(Y,\nabla_X Z)W\big]\\
+ & \frac{c-\alpha}{4}\big[g(\nabla_X Y,\phi Z)\phi W - g(W,\phi Z)\phi\nabla_X Y + 2g(\nabla_X Y,\phi W)\phi Z\\
+ & \eta(\nabla_X Y\eta(Z)W - \eta(W)\eta(Z)\nabla_X Y) + g(\nabla_X Y,Z)\eta(W)\xi\\
- & g(W,Z)\eta(\nabla_X Y)\xi + g(Y,\phi Z)\phi\nabla_X W - g(\nabla_X W,\phi Z)\phi Y\\
+ & 2g(Y,\phi\nabla_X W)\phi Z + \eta(Y)\eta(Z)\nabla_X W - \eta(\nabla_X W)\eta(Z)Y\\
+ & g(Y,Z)\eta(\nabla_X W)\xi - g(\nabla_X W,Z)\eta(Y)\xi + g(Y,\phi\nabla_X Z)\phi W\\
- & g(W,\phi\nabla_X Z)\phi Y + 2g(Y,\phi W)\phi\nabla_X Z + \eta(Y)\eta(\nabla_X Z)W\\
- & \eta(W)\eta(\nabla_X Z)Y + g(Y,\nabla_X Z)\eta(W)\xi - g(W,\nabla_X Z)\eta(Y)\xi\big]\\
+ & \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(W,Z)\eta(\nabla_X Y)\xi + g(\nabla_X W,Z)\eta(Y)\xi + g(W,\nabla_X Z)\eta(Y)\xi\\
- & g(Y,Z)\eta(\nabla_X W)\xi - g(\nabla_X Y,Z)\eta(W)\xi - g(Y,\nabla_X Z)\eta(W)\xi\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \quad & \frac{c-\alpha}{4}\big[g(Y,\phi Z)\eta(\nabla_X\phi W)\xi - g(W,\phi Z)\eta(\nabla_X\phi Y)\xi + 2g(Y,\phi W)\eta(\nabla_X\phi Z)\xi \\
+ \quad & \eta(Y)\eta(Z)\eta(\nabla_X W)\xi + \eta(Y)\eta(W)\eta(\nabla_X Z)\xi + \eta(Y)\eta(W)g(Z,\nabla_X\xi)\xi \\
+ \quad & \eta(Z)\eta(W)\eta(\nabla_X Y)\xi + \eta(Z)\eta(W)g(Y,\nabla_X\xi)\xi - \eta(Z)\eta(W)\eta(\nabla_X Y)\xi \\
- \quad & \eta(W)\eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\xi - \eta(W)\eta(Y)g(Z,\nabla_X\xi)\xi - \eta(Z)\eta(Y)\eta(\nabla_X W)\xi \\
- \quad & \eta(Z)\eta(Y)g(W,\nabla_X\xi)\xi + g(\nabla_X Y, Z)\eta(W)\xi + g(Y,\nabla_X Z)\eta(W)\xi \\
+ \quad & \eta(\nabla_X W)g(Y,Z)\xi + g(W,\nabla_X\xi)g(Y,Z)\xi + g(Y,Z)\eta(W)\eta(\nabla_X\xi)\xi \\
- \quad & g(\nabla_X W, Z)\eta(Y)\xi - g(W,\nabla_X Z)\eta(Y)\xi - \eta(\nabla_X Y)g(W,Z)\xi \\
- \quad & g(Y,\nabla_X\xi)g(W,Z)\xi - g(W,Z)\eta(Y)\eta(\nabla_X\xi)\xi\big] \\
- \quad & \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(W,Z)\eta(\nabla_X Y)\xi - g(\nabla_X Y, Z)\eta(W)\xi + g(\nabla_{X,W}, Z)\eta(Y)\xi \\
- \quad & g(Y,Z)\eta(\nabla_X W)\xi + g(W,\nabla_X Z)\eta(Y)\xi - g(Y,\nabla_X Z)\eta(W)\xi\big] \\
- \quad & \frac{c-\alpha}{4}\big[g(\nabla_X Y, Z)\eta(W)\xi - g(W,Z)\eta(\nabla_X Y)\xi + g(Y,Z)\eta(\nabla_X W)\xi \\
- \quad & g(\nabla_X W, Z)\eta(Y)\xi - g(Y,\nabla_X Z)\eta(W)\xi - g(W,\nabla_X Z)\eta(Y)\xi\big] \\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Bu denklem gerekli kısaltmalardan sonra

$$
\begin{aligned}
& \frac{c-\alpha}{4}\big[-g(Y,\phi Z)\nabla_X\phi W - g(Y,\nabla_X\phi Z)\phi W + g(W,\phi Z)\nabla_X\phi Y \\
+ \quad & g(W,\nabla_X\phi Z)\phi Y - 2g(Y,\phi W)\nabla_X\phi Z - 2g(Y,\nabla_X\phi W)\phi Z \\
- \quad & \eta(Y)Wg(Z,\nabla_X\xi) - \eta(Z)Wg(Y,\nabla_X\xi) + \eta(W)Yg(Z,\nabla_X\xi) \\
+ \quad & \eta(Z)Yg(W,\nabla_X\xi) - \eta(\nabla_X W)g(Y,Z)\xi - g(Y,Z)\eta(W)\nabla_X\xi \\
+ \quad & g(W,Z)\eta(Y)\nabla_X\xi - g(W,\phi Z)\phi\nabla_X Y + g(Y,\phi Z)\phi\nabla_X W \\
+ \quad & 2g(Y,\phi\nabla_X W)\phi Z + g(Y,Z)\eta(\nabla_X W)\xi + g(Y,\phi\nabla_X Z)\phi W \\
- \quad & g(W,\phi\nabla_X Z)\phi Y + 2g(Y,\phi W)\phi\nabla_X Z + g(Y,\phi Z)\eta(\nabla_X\phi W)\xi \\
- \quad & g(W,\phi Z)\eta(\nabla_X\phi Y)\xi + 2g(Y,\phi W)\eta(\nabla_X\phi Z)\xi + \eta(Z)g((Y,\nabla_X\xi)\xi) \\
- \quad & \eta(Y)\eta(Z)g(W,\nabla_X\xi)\xi\big] \\
= \quad & 0
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

halini alır. (4.1.3) eşitliğinin her iki tarafına $U \in \chi(M)$ uygulayıp sonrasında $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned} & [\frac{c-\alpha}{4}]\big[-g(U,W)g(Y,\nabla_X\xi) + g(Y,U)g(W,\nabla_X\xi) \\ - & \; g(\phi Y,\nabla_X\xi)g(\phi W,U) + g(\phi W,\nabla_X\xi)g(\phi Y,U) \\ - & \; 2g(Y,\phi W)g(\nabla_X\xi,\phi U) + \eta(W)\eta(U)g(Y,\nabla_X\xi) \\ - & \; \eta(Y)\eta(U)g(W,\nabla_X\xi)\big] \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

bulunur. Burada (2.3.6) kullanıldığında (4.1.4) eşitliği

$$g(\nabla_X\xi, R(Y,W)U - \alpha\{g(W,U)Y - g(Y,U)W\}) = 0 \tag{4.1.5}$$

olarak yazılır. Böylece lokal ϕ-simetrik bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğu görülür.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.
Şimdi (4.1.5) eşitliğinden aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.1.1. Lokal ϕ-simetrik her α-Kenmotsu manifoldu α-sabit kesit eğrilikli uzay formdur.

Sonuç 4.1.2. Lokal ϕ-simetrik her α-Sasakian manifoldu α-sabit kesit eğrilikli uzay formdur.

Sonuç 4.1.3. Her cosymplectic manifold lokal ϕ-simetriktir.

4.2 Lokal Simetrik Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldları

Bu kısımda ise lokal ϕ- simetrikliğin daha genel durumu olan lokal simetriklik ele alınacaktır. Bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun lokal simetrik olması durumunda ortaya çıkan sonuçlar incelenmiştir.

Tanım 4.2.1. Bir M kontak metrik manifoldunda $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ olmak üzere

$$(\nabla_W R)(X,Y,Z) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye *lokal simetriktir* denir (Takahashi, 1977).

Teorem 4.2.1. *M, (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere M nin lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olmasıdır.*

İspat . Kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu lokal simetrik olsun. O zaman her $X, Y, W, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X R)(Y, W)Z = 0 \tag{4.2.1}$$

olduğunu biliyoruz. Burada (4.2.1) den

$$\nabla_X R(Y, W)Z - R(\nabla_X Y, W)Z - R(Y, \nabla_X W)Z - R(Y, W)\nabla_X Z = 0 \tag{4.2.2}$$

elde edilir. Bu eşitlik (2.3.6) yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(\nabla_X W, Z)Y + g(W, \nabla_X Z)Y + g(W, Z)\nabla_X Y \\
- \;& g(\nabla_X Y, Z)W - g(Y, \nabla_X Z)W - g(Y, Z)\nabla_X W\big] \\
+ \;& \frac{c-\alpha}{4}\big[g(\nabla_X Y, \phi Z)\phi W + g(Y, \nabla_X \phi Z)\phi W + g(Y, \phi Z)\nabla_X \phi W \\
- \;& g(\nabla_X W, \phi Z)\phi Y - g(W, \nabla_X \phi Z)\phi Y - g(W, \phi Z)\nabla_X \phi Y \\
+ \;& 2g(\nabla_X Y, \phi W)\phi Z + 2g(Y, \nabla_X \phi W)\phi Z + 2g(Y, \phi W)\nabla_X \phi Z \\
+ \;& g(\nabla_X Y, \xi)\eta(Z)W + g(Y, \nabla_X \xi)\eta(Z)W + g(\nabla_X Z, \xi)\eta(Y)W \\
+ \;& g(Z, \nabla_X \xi)\eta(Y)W + g(Z, \xi)\eta(Y)\nabla_X W - g(\nabla_X W, \xi)\eta(Z)Y \\
- \;& g(W, \nabla_X \xi)\eta(Z)Y - g(\nabla_X Z, \xi)\eta(W)Y - g(Z, \nabla_X \xi)\eta(W)Y \\
- \;& g(Z, \xi)\eta(W)\nabla_X Y + g(\nabla_X Y, Z)\eta(W)\xi + g(Y, \nabla_X Z)\eta(W)\xi \\
+ \;& g(\nabla_X W, \xi)g(Y, Z)\xi + g(W, \nabla_X \xi)g(Y, Z)\xi + g(Y, Z)\eta(W)\nabla_X \xi \\
- \;& g(\nabla_X W, Z)\eta(Y)\xi - g(W, \nabla_X Z)\eta(Y)\xi - g(\nabla_X Y, \xi)g(W, Z)\xi \\
- \;& g(Y, \nabla_X \xi)g(W, Z)\xi - g(W, Z)\eta(Y)\nabla_X \xi\big] \\
- \;& \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(W, Z)\nabla_X Y - g(\nabla_X Y, Z)W\big] \\
- \;& \frac{c-\alpha}{4}\big[g(\nabla_X Y, \phi Z)\phi W - g(W, \phi Z)\phi\nabla_X Y + 2g(\nabla_X Y, \phi W)\phi Z \\
+ \;& \eta(\nabla_X Y)\eta(Z)W - \eta(W)\eta(Z)\nabla_X Y + g(\nabla_X Y, Z)\eta(W)\xi \\
- \;& g(W, Z)\eta(\nabla_X Y)\xi\big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
- & \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(\nabla_X W, Z)Y - g(Y,Z)\nabla_X W\big] \\
- & \frac{c-\alpha}{4}\big[g(Y,\phi Z)\phi\nabla_X W - g(\nabla_X W, \phi Z)\phi Y + 2g(Y,\phi\nabla_X W)\phi Z \\
+ & \eta(Y)\eta(Z)\nabla_X W - \eta(\nabla_X W)\eta(Z)Y + g(Y,Z)\eta(\nabla_X W)\xi \\
- & g(\nabla_X W, Z)\eta(Y)\xi\big] \\
- & \frac{c+3\alpha}{4}\big[g(W,\nabla_X Z)Y - g(Y,\nabla_X Z)W\big] \\
- & \frac{c-\alpha}{4}\big[g(Y,\phi\nabla_X Z)\phi W - g(W,\phi\nabla_X Z\phi Y + 2g(Y,\phi W)\phi\nabla_X Z \\
+ & \eta(Y)\eta(\nabla_X Z)W - \eta(W)\eta(\nabla_X Z)Y + g(Y,\nabla_X Z)\eta(W)\xi \\
- & g(W,\nabla_X Z)\eta(Y)\xi\big] \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{4.2.3}
$$

halini alır. (4.2.3) de gerekli kısaltmalar yapıldığında ise

$$
\begin{aligned}
& \frac{c-\alpha}{4}\big[g(Y,\phi Z)\eta(\nabla_X\phi W) - g(W,\phi Z)\eta(\nabla_X\phi Y) \\
+ & \; 2g(Y,\phi W)\eta(\nabla_X\phi Z) + g(Y,\nabla_X\xi)\eta(Z)\eta(W) \\
- & \; g(W,\nabla_X\xi)\eta(Y)\eta(Z) + g(W,\nabla_X\xi)g(Y,Z) \\
- & \; g(Y,\nabla_X\xi)g(W,Z)\big] \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{4.2.4}
$$

eşitliği elde edilir. (4.2.4) denklemi $\eta(\nabla_X\phi W) = -g(\nabla_X\xi,\phi W)$ bağıntısı yardımıyla

$$
\begin{aligned}
& \frac{c-\alpha}{4}\big[g(\nabla_X, g(Y,\phi Z)\phi W - g(W,\phi Z)\phi Y \\
+ & \; 2g(Y,\phi W)\phi Z + g(W,Z)Y - \eta(W)\eta(Z)Y \\
- & \; g(Y,Z)W + \eta(Y)\eta(Z)W)\big] \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{4.2.5}
$$

biçiminde yazabiliriz. Burada (4.2.5) de (2.3.6) kullanıldığında

$$
g(\nabla_X\xi, R(Y,W)Z - \alpha\{g(W,Z)Y - g(Y,Z)W\}) = 0 \tag{4.2.6}
$$

sonucuna ulaşılır.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.
Bu teoremden aşağıdaki sonuçları yazarız.

Sonuç 4.2.1. Lokal simetrik her α-Kenmotsu manifoldu α-sabit kesit eğrilikli uzay formdur.

Sonuç 4.2.2. Lokal simetrik her α-Sasakian manifoldu α-sabit kesit eğrilikli uzay formdur.

Sonuç 4.2.3. Her cosymplectic manifold lokal simetriktir.

4.3 η-Paralel Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldları

Bu kısımda ise bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun η-paralel olma durumu incelenmiştir.

Tanım 4.3.1. Bir M kontak metrik manifoldunun Ricci tensörü S olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = 0$$

şartı sağlanıyorsa bu durumda M ye *η-paraleldir* denir (Kon, 1976).

Teorem 4.3.1. *Her* $(2n+1)$*-boyutlu* M *hemen hemen* $C(\alpha)$*-manifoldu daima* η*-paraleldir.*

İspat . Kabul edelim ki M $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu η-paralel olsun. O zaman

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = 0 \tag{4.3.1}$$

olduğunu biliyoruz. Burada S nin kovaryant türevinden

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) &= \nabla_X S(\phi Y, \phi Z) - S(\nabla_X \phi Y, \phi Z) \\ &- S(\phi Y, \nabla_X \phi Z)\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

bulunur. Ayrıca (2.3.25) denkleminden

$$S(\phi Y, \phi Z) = \big(\frac{\alpha(3n-1) + c(n+1)}{2}\big) g(\phi Y, \phi Z) \tag{4.3.3}$$

eşitliği yazılır. (4.3.3) denklemi, (4.3.2) de kullanıldığında ise

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) &= \big(\frac{\alpha(3n-1) + c(n+1)}{2}\big)\big[\nabla_X g(\phi Y, \phi Z) \\ &- g(\nabla_X \phi Y, \phi Z) - g(\phi Y, \nabla_X \phi Z)\big] \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

dir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.4 Quasi-Konformal Flat Hemen Hemen $C(\alpha)$-Manifoldları

Son olarak bu kısımda bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldunun quasi-konformal flat olması durumunda ortaya çıkan sonuçlar incelenmiştir.

Teorem 4.4.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu olmak üzere M nin quasi-konformal flat olması için gerek ve yeter şart ya konformal flattır ya da α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay formdur.*

İspat . Kabul edelim ki M hemen hemen $C(\alpha)$-manifoldu quasi-konformal flat olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\widetilde{C}(X,Y)Z = 0 \tag{4.4.1}$$

olduğunu biliyoruz. (4.4.1) de (2.3.9) kullanıldığında

$$\begin{aligned} aR(X,Y)Z &= \Big[\frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big]\big[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big] \\ &- b\big[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &+ g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY\big] \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

eşitliği bulunur. Bu denklemde $Z=\xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned} aR(X,Y)\xi &= \Big[\frac{r}{2n+1}\Big[\frac{a}{2n}+2b\Big]\Big]\big[\eta(Y)X - \eta(X)Y\big] \\ &- b\big[S(Y,\xi)X - S(X,\xi)Y \\ &+ \eta(Y)QX - \eta(X)QY\big] \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

bulunur. (4.4.3) denklemi (2.3.28) yardımıyla

$$\begin{aligned} aR(X,Y)\xi &= \Big[\frac{r(a+4bn)}{2n(2n+1)} - 2bn\alpha\Big]\big[\eta(Y)X - \eta(X)Y\big] \\ &- b\big[\eta(Y)QX - \eta(X)QY\big] \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

şeklinde yazılır. (4.4.4) de (2.3.14) ve (2.3.26) kullanılırsa

$$a\alpha = \frac{r(a+4bn)}{2n(2n+1)} - \frac{b\alpha(3n-1)+bc(n+1)}{2} - 2bn\alpha \tag{4.4.5}$$

sonucu bulunur. Son olarak (4.4.5) de (2.3.27) kullanıldığında ise

$$(\alpha - c)\big[a + b(2n-1)\big] = 0 \tag{4.4.6}$$

elde edilir.
Burada $\alpha - c = 0$ ve $a + b(2n-1) \neq 0$ alırsak, M nin α-sabit kesit eğrilikli reel bir uzay form olduğu görülür. Diğer yandan eğer $a + b(2n-1) = 0$ ve $\alpha - c \neq 0$ ise o zaman da M manifoldu konformal flat olur.
İspatın tersi açıktır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi ise daha önce verdiğimiz teoremlerden bazılarını sağlayan bir örnek vereceğiz.

Örnek 4.4.1. $M = \{(x,y,z) \in R^3 : x \neq 0\}$ 3-boyutlu manifoldunu göz önüne alalım. Burada (x,y,z), R^3 de standart koordinatlardır. M nin her bir noktasında lineer bağımsız vektör alanlarını ise

$$e_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad e_2 = -x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad e_3 = x\frac{\partial}{\partial z},$$

olacak şekilde seçelim. Ayrıca g Riemann metriğini ise

$$g(e_1,e_2) = g(e_2,e_3) = g(e_3,e_1) = 0,$$

$$g(e_1,e_1) = g(e_2,e_2) = g(e_3,e_3) = 1.$$

şeklinde tanımlayalım.

M üzerinde her bir X vektör alanı için η 1-formu $\eta(X) = g(X,\xi)$ şeklindedir. $(1,1)$-tipinden tensör alanı ϕ ise $\phi(e_2) = -e_3$, $\phi(e_1) = 0$ şeklinde tanımlansın. Burada $\forall X, Y \in \chi(M)$ için ve ϕ tensörünün lineerliğinden

$$\eta(e_1) = 1, \qquad \phi^2 X = -X + \eta(X)e_1,$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $e_1 = \xi$ olmak üzere, (M,ϕ,ξ,η,g) beşlisi bir hemen hemen kontak metrik manifoldudur. Burada (2.2.2) formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
[e_1,e_2] &= -x^2[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}] + x(\frac{\partial}{\partial x}(-x))\frac{\partial}{\partial y} + x(\frac{\partial}{\partial y}(x))\frac{\partial}{\partial x} \\
&= -x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde $[e_1, e_3]$ ve $[e_2, e_3]$ değerleri de hesaplandığında

$$[e_1, e_2] = e_2, \qquad [e_1, e_3] = e_3, \qquad [e_2, e_3] = 0$$

eşitlikleri bulunur. ∇, g metriğine göre Levi-civita konneksiyonu olmak üzere Kozsul formülü yardımıyla

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \qquad \nabla_{e_1} e_2 = 0, \qquad \nabla_{e_1} e_3 = 0,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -e_2, \qquad \nabla_{e_2} e_2 = e_1, \qquad \nabla_{e_2} e_3 = 0,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = -e_3, \qquad \nabla_{e_3} e_2 = e_1, \qquad \nabla_{e_3} e_3 = e_1$$

değerleri hesaplanır. Daha sonra bu sonuçları kullanarak Riemann eğriliklerini ise

$$R(e_1, e_2, e_3) = 0, \qquad R(e_2, e_1, e_3) = 0, \qquad R(e_3, e_1, e_2) = 0,$$

$$R(e_1, e_3, e_2) = 0, \qquad R(e_2, e_1, e_3) = 0, \qquad R(e_3, e_2, e_1) = 0,$$

$$R(e_1, e_2, e_2) = -e_1, \qquad R(e_2, e_1, e_1) = -e_2, \qquad R(e_3, e_1, e_1) = -e_3,$$

$$R(e_1, e_3, e_3) = -e_1, \qquad R(e_2, e_3, e_3) = -e_2, \qquad R(e_3, e_2, e_2) = -e_3.$$

olarak hesaplarız. Bu sonuçlara göre manifoldun Riemann eğrilik tensörü R, (2.3.5) eşitliğini sağlar. Böylece manifold $c = -1$ kesit eğriliklidir. Buradan da

$$R(X, Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$$

olur. Sonuç olarak M manifoldu bir hemen hemen $C(-1)$-manifoldudur. Buradan da söyleyebiliriz ki M manifoldu, concircular semi-simetrik, lokal ϕ-simetrik ve lokal simetriktir. Dolayısıyla örneğimiz Teorem 3.1.3, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1 i sağlar.

Ayrıca 3-boyutlu M manifoldunun S Ricci tensörü ise

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{3} g(R(e_i, X)Y, e_i). \tag{4.4.7}$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi (4.4.7) denkleminde yukarıdaki eğrilikler kullanıldığında

$$S(e_1, e_1) = S(e_2, e_2) = S(e_3, e_3) = -2,$$

$$S(e_1, e_2) = S(e_1, e_3) = S(e_2, e_3) = 0$$

sonuçlarını elde ederiz. Buradan da manifoldun skaler eğriliğini $r = -6$ olarak hesaplarız. Ayrıca manifoldun Ricci tensörü ise

$$S(X, Y) = -2g(X, Y)$$

olarak hesaplanır. Buradan da M nin bir Einstein manifoldu olduğu görülür. Böylece Teorem 3.1.4 gereği M manifoldu Ricci semi-simetriktir.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmadan elde edilen sonuçların yazıldığı makaleler ulusal ve uluslararası hakemli dergilere gönderildi. Bunlardan bazıları yayınlandı, bazıları yayınlanmak üzere kabul aldı, bazılarının ise hakem süreci devam etmektedir. Bu çalışmamız ile literatüre Türkçe özgün bir kaynak sunulacaktır. Ayrıca çalışmamızın, kapsamı geniş olan bu konuda çalışma yapacak araştırmacılara bir ışık tutacağı ve bu alandaki yeniliklere katkıda bulunacağı kanısındayız.

KAYNAKLAR

Al – Solamy, F.R., 2006. Contact CR-warped product submanifolds in almost $C(\alpha)-$ manifolds with constant $\phi-$ sectional curvature. An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Math., (N.S.) 56, No. 2, 423 – 432.

Arslan, K., Murathan, C. and Özgür, C., 2000. On contact manifolds satisfying certain curvature conditions, An. Univ. Bucuresti Math., 49(2), 17-26.

Aslım, G., 1988. Genel Topoloji. Ege Ünv. Fen Fakültesi Yayınları. No. 109, İzmir.

Atçeken, M., 2015. On curvatures of Lorentzian concircular structure manifolds. British Journal of Mathematics and Computer Science, 8 (1), 80-88.

Atçeken, M, 2014. On generalized Sasakian space forms satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 6 (1), 1 – 8.

Boeckx, E., Buecken, P. and Vanhecke, L., 1999. $\phi-$ symmetric contact metric spaces, Glasgow Math. J., 41, 409-416.

Boothby, W.M., 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, Inc. London.

Blair, D.E., 2012. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progress in Mathematics, 203. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA.

Blair, D.E., 1976. Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture Notes in Math. 509, Springer Verlag, Berlin.

Blair, D.E., Koufogiorgus, T. and Sharma, R., 1990. A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with $Q\phi = \phi Q.$ Kodai Math. J., 13, 391-401.

Cartan, E., 1926. Sur one classe remarquable d'espaces de Riemannian. Bull. Soc. Math. France, 54, 214-264.

Chaki, M.C., 1988. On pseudo Ricci symmetric manifolds. Bulgarian J. Physics, 15, 526-531.

Deszcz, R., 1989. On Ricci pseudosymmetric warped products. Demonstratio Math., 22, 1053-1065.

De, U.C., Shaikh, A.A. and Biswas, S., 2003. On $\phi-$ recurrent Sasakian manifolds. Novi Sad. J. Math., 33, 13-48.

Geiges, H., 2001. A brief history oc contact geometry and topology. Expo. Math., 19, No.1, 25-53.

Hacısalihoğlu, H.H., 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Yayınları.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Yayınları.

Hosseinzadeh, A. and Taleshian, A., 2012. On conformal and quasi-conformal curvature tensors of an $N(\kappa)-$quasi Einstein manifold, Commun. Korean Math. Soc., 27, No. 2, 317-326.

Janssens, D. and Vanhecke, L., 1981. Almost contact structure and curvature tensors. Kodai Math. J., 4,1-27.

Kenmotsu, K., 1972. A class of almost contact metric Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 24, 93-103.

Kon, M., 1976. Invariant submanifolds in Sasakian manifolds. Math. Ann. 219, 277-290.

Majhi, P. and De, U.C., 2013. Concircular curvature tensor on $\kappa-$contact manifolds. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N.S.) 29, No. 1, 89-99.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics, 103, Acedemic Press, Inc. Newyork.

Obina, J.A., 1985. New classes of almost contact metric structures. Publ. Math., 32, 187-193.

Özgür, C. and De, U.C., 2006. On the quasi-conformal curvature tensor of a Kenmotsu manifold. Mathematica Pannonica, 17(2), 221-228.

Özgür, C. and Tripathi, M.M., 2007. On $P-$Sasakian manifolds satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor. Turkish Journal of Math., 31, 171-179.

Patterson, E.M., 1952. Some theorems on Ricci-recurrent spaces. J. London Math. Soc., 27,287-295.

Perrone, D., 1992. Contact Riemannian manifolds satisfying $R(X,\xi)Y=0.$ Yokohama Math. J., 39, 2, 141-149.

Sasaki, S., 1965, 1967, 1968. Almost contact manifolds. I, II, III, A Lecture note, Tohoku University.

Szabo, Z.I., 1982. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)R=0.$ I Local version, J. Diff. Geom., 17, 531-582.

Szabo, Z.I., 1983. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)R=0.$ I Global version, Geom. Dedicate, 19, 65-108.

Szabo, Z.I., 1984. Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X,Y)R=0.$ Acta. Sci. Math., 7, 321-348.

Takahashi, K., 1977. Sasakian $\phi-$symmetric spaces. Tohoku Math. J. 29, 91-113.

Taleshian, A. and Asghari, N., 2010. On LP-Sasakian manifolds satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor, Differantial Geometry-Dynamical Systems, Vol. 12, 228-232.

Tripathi, M.M. and Kim, J.S., 2004. On the concircular curvature tensor of a $(\kappa,\mu)-$ manifold. Balkan J. Geom. Appl., 9, No. 1, 104-114.

Yano, K. and Kon, M., 1984. Structures on Manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, 72.

Yano, K. and Sawaki, S., 1968. Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group. J. Diff. Geom., 2, 161-184.

Yano, K., 1940. Concircular geometry I. Concircular transformations. Proc. Imp. Acad., Tokyo, 16,195-200.

Yıldız, A., De, U.C. and Acet, B.E., 2009. On Kenmotsu manifolds satisfying certain curvature conditions. SUT journal of mathematics, Vol. 45, No. 2, 89-101.

Yıldız, A., De, U.C., Murathan, C. and Arslan, K., 2010. On the Weyl Projective curvature tensor of an $N(\kappa)-$contact metric manifold. Mathematica Pannonica, 21, 1-14.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ümit YILDIRIM

Doğum Tarihi: 03.02.1982

Doğum Yeri : Amasya-Gümüşhacıköy

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 543 375 38 15

E-posta : umit.yildirim@gop.edu.tr

Eğitim:

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gaziosmanpaşa Üniveristesi	2010
Lisans	Atatürk Üniversitesi	2003
Lise	Hamamözü Lisesi	1998

Bu Tezden Üretilen Makaleler:

Atçeken, M and Yıldırım, Ü., 2016. Almost $C(\alpha)-$manifolds satisfying certain curvature conditions, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol. 26, No. 2.

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü., 2016. On almost $C(\alpha)-$manifolds satisfying certain conditions on quasi-conformal curvature tensor, Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, 19, No.1, 115-124.

Yıldırım, Ü. and Atçeken, M., 2015. On curvature tensor of an almost $C(\alpha)-$manifold, International Journal of Physical and Mathematical Sciences, Vol. 5, No. 1, 53-61.

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü., 2015. On almost $C(\alpha)-$manifold satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor, Pure and Applied Mathematic Journal, Special Issue: Applications of Geometry, Vol. 4, No. 1-2, 31-34.

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. Almost $C(\alpha)-$manifolds satisfying some conditions on the Weyl projective curvature tensor, (Hakem sürecinde).

Diğer Yayınlanmış Makaleler:

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü., 2013. Weakly symmetric and weakly Ricci symmetric conditions on $(LCS)_n-$manifolds, African Journal of Mathematics and Computer Science Research, Vol. 6(6), 129-134.

Atçeken, M., Dirik, S. and Yıldırım, Ü., 2015. Pseudo-slant submanifolds of a locally decomposable Riemannian Manifold, Journal of Advances in Mathematics, Vol. 11, No. 10, 5587-5597.

Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, Ü., 2016. Pseudo-slant submanifold in Kenmotsu space forms, Journal of Advances in Mathematics, Vol. 11, No. 10, 5680-5696.

Uluslararası Sempozyumlarda Tam Metin Basılmış Bildiriler

Yıldırım, Ü., Atçeken, M. and Dirik, S., 2016. Properties provided by the curvatures of a normal paracontact metric manifold, International Conference on Natural Science and Engineering, Thales Akademik Yayıncılık, ISBN No: 978-605-83631-1-3, 1565 – 1572.

Atçeken, M., Yıldırım, Ü. and Dirik, S., 2016. On almost $C(\alpha)-$manifolds satisfying certain conditions on $M-$projective curvature tensor, International Conference on Natural Science and Engineering, Thales Akademik Yayıncılık, ISBN No: 978-605-83631-1-3, 1573-1582.

Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, 2016. On the geometry pseudo-slant submanifolds of normal paracontact metric manifolds, International Conference on Natural Science and Engineering, Thales Akademik Yayıncılık, ISBN No: 978-605-83631-1-3, 1799 –1815.