KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI

MONOTON İTERATİF TEKNİK

HADİ KUTLAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
Doç. Dr. Ali YAKAR
2016

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI MONOTON İTERATİF TEKNİK

HADİ KUTLAY

TOKAT
2016

Hadi KUTLAY tarafından hazırlanan **"kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için genelleştirilmiş başlangıç zaman farklı monoton iteratif teknik"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26 Şubat 2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği / Oy Çokluğu İle Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Doç. Dr. Ali YAKAR	....
Üye: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU	....
Üye: Prof. Dr. Ercan TUNÇ	....
Üye: Doç. Dr. M. Emir KÖKSAL	....
Üye: Yrd. Doç. Dr. Mustafa DEMİRCİ	....

Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve ....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ONAY

....

Prof. Dr. Mehmet Ali SAKİN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

18-03/2016

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

HADİ KUTLAY

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI MONOTON İTERATİF TEKNİK

HADİ KUTLAY

GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ALİ YAKAR

Bu tez çalışmasında, ilk olarak kesirli analizin tarihsel geçmişi, bazı temel fonksiyonları, klasik analize sağladığı üstünlükler ile birlikte Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev ve integralleri tanımlanıp bu yaklaşımlar arasındaki geçişlerden bahsedildi. Ayrıca farklı türden kesirli basamaktan türev ve integral tanımları hakkında bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde duruldu. Alt ve üst çözümler tekniği yardımıyla başlangıç zaman farklı verilen eşlenmiş alt ve üst çözümler için karşılaştırma ve varlık teoremleri ispatlandı. Genelleştirilmiş monoton iteratif teknikte ise diferensiyel denklemler teorisinde alt ve üst çözümler metodu yardımıyla çeşitli biçimlerdeki eşlenmiş alt ve üst çözümler için verilen başlangıç değer probleminin maksimal ve minimal (ekstremal) çözümlerine düzgün ve monoton olarak yakınsayan monoton fonksiyon dizileri elde edilmektedir. Esas olarak bu çalışmada alt ve üst çözümü başlangıç zaman farklı seçilen lineer olmayan kesirli basamaktan diferensiyel denklem için genelleştirilmiş monoton iteratif teknik uygulanmış ve literatürdeki bu konuyla ilişkili bazı çalışmalar genelleştirilmiştir.

2016, 99 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Başlangıç zaman farklı, Genelleştirilmiş Monoton iteratif teknik, Kesirli türevli denklemler, Varlık teoremi, Karşılaştırma teoremi.

ABSTRACT

MASTER THESİS

GENERALIZED MONOTONE ITERETATIVE TECHNIQUE WITH INITIAL TIME DIFFERENCE FOR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

HADİ KUTLAY

GAZIOSMANPASA UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. ALİ YAKAR

In this thesis, we first give a brief historical information of fractional calculus as well as fundemantal functions and comparisons of advantages to the calculus with classical integer order derivatives. In addition, we introduce some popular definitions of fractional calculus such as Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo and demonstrate the relations between these concepts. Some basic theorems related to various types of fractional derivatives and integrals are discussed. Comparison and existence results are proved by using the technique of lower and upper solutions in terms of given initial time different coupled lower and upper solutions. Then, in main section, the generalized monotone iterative technique, which offers monotone sequences that converge uniformly and monotonically to the extremal solutions of the given nonlinear problem are employed for fractional differential equations by choosing coupled upper and lower solutions with initial time differences. The obtained results naturally include some published results related to this topic as special cases.

2016, 99 PAGES

KEYWORDS: Initial time difference, Generalized Monotone Iterative technique, Fractional differential equations, Existence result, Comparison result.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, bu tezin yönetiminde, oluşumunda ve aynı zamanda çalışmalarım sırasında karşılaştığım sorunların çözümünde bütün olanakları sağlayan ve her türlü desteğini esirgemeyen tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Ali YAKAR' a yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan aileme ve başta Abdullah BOZCA olmak üzere tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

HADİ KUTLAY

26 Şubat 2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri genelleştiren kavramlardır ve teoride çok eskiden beri bilinmesine karşın fizik, kimya ve mühendislik gibi bilimlerdeki uygulamalarıyla son yıllarda sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Kesirli basamaktan diferensiyel denklemler ise uygulamalı matematiğin önemli bir çalışma alanıdır. Kesirli analizin ve bu bağlamda kesirli basamaktan türev kavramının yaygın olarak kullanılmasının en önemli nedeni fen bilimleri ve mühendislik uygulamalarında ortaya çıkan problemlerin modellenmesinde kesirli basamaktan diferensiyel denklemlerin adi türevli veya tam sayı mertebeli diferensiyel denklemlere nazaran daha iyi sonuçlar vermesidir. Günümüzde kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer birçok disiplinde kullanılmaktadır $[1-9]$.

Monoton iteratif teknikte ise alt ve üst çözüm metodu ile birlikte, verilen lineer olmayan problemin ekstremal çözümlerine düzgün ve monoton olarak yakınsayan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilir $[13]$. Bu dizilerin her bir üyesi lineer diferensiyel denklemlerin çözümleri olması bakımından da çok önemlidir. Ayrıca bazı özel şartlar altında benzer tekniklerden biri olan kuasilineerizasyon metodu yardımıyla da verilen lineer olmayan problemin tek çözümüne düzgün ve kuadratik olarak yakınsayan monoton diziler teşkil edilebilir $[14-16]$.

Şimdi aşağıda verilen kesirli mertebeden başlangıç değer problemini ele alalım.

$$D^q x(t) = F(t,x), \quad x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0. \tag{1.1}$$

Burada $F \in C\left[[t_0, t_0+T]\times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve $0<q<1$ olmak üzere D^q, q. mertebeden Riemann-Liouville (R-L) kesirli türev operatörünü göstermektedir.

Monoton iteratif tekniğinin farklı tiplerdeki kesirli mertebeden diferensiyel denklemlere uygulanması konusu ise daha yenidir. Literatürde, (1.1) denklemine ait alt ve üst çözümleri başlangıç zaman farklı seçilen kesirli basamaktan diferensiyel denklem için monoton iteratif teknik çalışılmıştır $[22]$.

(1.1) probleminin sağ tarafında verilen $F(t,x)$ fonksiyonunu $f(t,x)+g(t,x)$ şeklinde iki fonksiyonun toplamı olarak alalım. Bu durumda problem aşağıdaki biçimde yazılır.

$$D^q x(t) = f(t,x)+g(t,x), \quad x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0 \tag{1.2}$$

burada $f, g \in C\left[[t_0, t_0+T]\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$.

Bu tez çalışmasında (1.2) tipindeki lineer olmayan kesirli mertebeden diferensiyel denklem için başlangıç zaman farklı eşlenmiş alt ve üst çözümler verildiğinde genelleştirilmiş monoton iteratif tekniğin uygulanabilirliğini inceleyeceğiz.

Genelleştirilmiş monoton iteratif teknik diferensiyel denklemler teorisinde alt ve üst çözümler metodu ile birlikte etkili bir yöntem olarak kendini gösterir. Bu yöntem yardımıyla tez çalışmamızda başlangıç zaman farklı seçilen çeşitli biçimlerdeki eşlenmiş alt ve üst çözümler için verilen kesirli basamaktan diferensiyel denklemin maksimal ve minimal (ekstremal) çözümlerine düzgün ve monoton yakınsayan monoton fonksiyon dizilerinin elde edilmesi bakımından önemlidir. Bunun için öncelikle gerekli olan varlık teoremi ve karşılaştırma teoremlerinin ispatına ihtiyaç duyacağız $[11,12]$.

Tez beş ana bölümden meydana gelmiştir.

İkinci bölümde kesirli analizin tarihsel geçmişi, bazı temel fonksiyonları, klasik analize sağladığı üstünlükler ile birlikte Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev ve integralleri tanımlanıp bu yaklaşımlar arasındaki geçişlerden bahsedilmiştir. Ayrıca farklı türden kesirli basamaktan türev ve integral tanımları hakkında bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde sırasıyla üst ve alt çözümü farklı tipten seçilen başlangıç zaman farklı kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için gerekli olan karşılaştırma ve varlık teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde tezin ana konusu olan üst ve alt çözümü başlangıç zaman farklı seçilen (1.2) de verilen lineer olmayan kesirli basamaktan diferensiyel denklem için genelleştirilmiş monoton iteratif teknik uygulanmış ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde çalışmanın sonuçları değerlendirilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

Bu bölümde kesirli analizin tarihsel geçmişi, bazı temel fonksiyonları, klasik analize sağladığı üstünlükler ile birlikte Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev ve integralleri tanımlanıp bu yaklaşımlar arasındaki geçişler üzerinde durulacaktır. Ayrıca farklı türden kesirli basamaktan türev ve integral tanımları hakkında yeri geldiğince kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

2.1. Kesirli Analiz

Kesirli analiz, klasik analizin tamsayı mertebeli türev ve integral kavramlarının rasyonel, reel ya da kompleks mertebeye bir genişlemesi olarak tanımlanır. Son yüzyıl boyunca kesirli analiz matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça geniş uygulama alanı bulmuştur. Bunun temel sebebi, viskoelastiklik ve sönüm, kaos, yayılım ve dalga hareketleri, filtreleme ve tersinemezlik, kontrolör tasarımı gibi pek çok olgunun kesirli analiz kullanılarak daha gerçeğe uygun modellenebilmesi ve açıklanabilmesidir.

Kesirli analizin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışıdır. Kesirli analizdeki birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesi fırsatını verir. Başlıcaları Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz ve Marchaud kesirli türevleridir. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklılık gösterirler.

2.2. Kesirli Analizin Tarihsel Geçmişi

Kesirli mertebeden türev kavramının başlangıcı olarak XVII. yy kabul edilir. 1695 yılında L'Hospital, türev için $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunun mucidi olan Leibniz'e bir mektup yazar ve $n = 1/2$ için fonksiyonun $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ türevinin nasıl ifade edileceğini sorar. Leibniz bu soruya çok önemli sonuçlar ortaya çıkaran ‘ $\dfrac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$ ’ cevabını verir. Bu tarihten itibaren Leibniz’in yanı sıra Liouville, Riemann, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Caputo, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerine çalışmışlardır. Esasında keyfi mertebeli diferensiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve $n-$katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

İlk zamanlar kesirli analiz için yapılan tanımların bazen çelişmesi ve tamamlanmamış olması kesirli analizin mühendislik uygulamalarında daha yaygın kullanılmasına engel olmuştur. Bu durum, 19.yy’ın ortalarına kadar devam etmiştir. Liouville (1834), Riemann (1847), Grünwald (1867) ve Letnikov (1868)’un kesirli analiz ile ilgili ortaya koydukları kesirli türev ve integral tanımları teorinin gelişimine hız kazandırmıştır. Ancak yine de bu tanımların kabulü ve uygulama problemlerinde kullanılmaları zaman almıştır.

2.3. Kesirli Analizin Bazı Temel Fonksiyonları

Kesirli hesabın tanımları ve kullanımını anlamak için bazı matematik tanımlarını iyi bilmek gerekmektedir. Bunlar öncelikle Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu ve Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Tanım 2.3.1. (Gamma fonksiyonu) $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$ olmak üzere Γ notasyonu ile gösterilen ve kompleks düzlemin sağ yarısında yakınsak olan

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. Dikkat edilirse Gamma fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun reel ve kompleks sayılara genişlemesi olan bir fonksiyondur ve $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z)$;

(ii) $\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(2)=1,\quad \Gamma(3)=2,\quad \ldots,\quad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!;$

(iii) $\Gamma(0)=\infty,\quad \Gamma(\infty)=0;$

(iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$

(v) $\Gamma(z).\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}.$

Gamma fonksiyonunun tanım kümesi sıfır ve negatif tamsayılar dışında kalan tüm reel sayılardır.

Tanım 2.3.2. (Beta fonksiyonu) $z, w \in \mathbb{C}$ ve $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$ olmak üzere

$$\beta(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt \tag{2.2}$$

ile tanımlı fonksiyona Beta fonksiyonu denir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) Tanım gereği Beta fonksiyonu simetriktir, yani

$$\beta(z,w)=\beta(w,z)$$

sağlanır.

(ii) Beta fonksiyonu ile Gama fonksiyonu arasında

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

bağıntısı vardır.

Tanım 2.3.3. (Mittag-Leffler fonksiyonu) $\alpha > 0$ olmak üzere

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k.\alpha+1)} \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona bir parametreli Mittag Leffler fonksiyonu denir. Mittag Leffler fonksiyonu üstel fonksiyonun genelleştirmesidir.

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k.\alpha + \beta)} \tag{2.4}$$

ile tanımlanan fonksiyona iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu denir ve

(i) $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$,

(ii) $E_{1,1}(z) = E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$,

(iii) $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right)$,

(iv) $E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}\right)$,

(v) $E_{\alpha,\beta}(z^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ $\{\alpha > 0, \beta > 0\}$,

(vi) $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(z)$,

(vii) $E_{2,2}(z^2) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sinh(z)}{z}$

özelliklerine sahiptir.

2.4. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral

Aşağıdaki $n-$katlı integralin ve $n.$ mertebeden ardışık türevlerin sonsuz dizisini göz önüne alalım.

$$\ldots, \quad \int_{\alpha}^{t} d\tau_2 \int_{\alpha}^{\tau_2} f(\tau_1)\, d\tau_1, \quad \int_{\alpha}^{t} f(\tau_1)\, d\tau_1, \quad f(t), \quad \frac{df(t)}{dt}, \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad \ldots$$

Keyfi mertebeli diferensiyel ve integral düşüncesi aslında tekrarlanan diferensiyel ve integralin bir genelleştirilmesidir. α ve t sırasıyla alt ve üst limit ve $q > 0$ olmak üzere keyfi mertebeden kesirli diferensiyel operatör ${}_{\alpha}D_t^q f(t)$ notasyonu ile gösterilir. Ayrıca ${}_{\alpha}D_t^{-q} f\left(t\right) = {}_{\alpha}I_t^{q} f\left(t\right)$ notasyonu ile de keyfi mertebeden kesirli integral operatörü gösterilir.

2.5. Kesirli İntegralin Çıkışında Tekrarlı İntegral Yaklaşımı

Kesirli integral tanımının ve buna bağlı olarak da kesirli türev tanımının ortaya çıkışına neden olan farklı yaklaşımlar mevcuttur. Diferansiyel denklem yaklaşımı, kompleks değişken yaklaşımı ve tekrarlı integral yaklaşımı bunların başlıcalarıdır.

Şimdi tekrarlı integral yaklaşımından hareketle kesirli integral tanımı ortaya çıkarılacaktır. p pozitif tam sayı ve f fonksiyonu $[\alpha, T]$ aralığında sürekli ve $t < T$ olmak üzere aşağıdaki kesirli integralin çıkışına sebep olan $p-$katlı integral;

$$ {}_{\alpha}I_t^{p} f(t) = \int_{\alpha}^{t} d\tau_1 \int_{\alpha}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{\alpha}^{\tau_{p-1}} f(\tau) d\tau \qquad (2.5) $$

biçimindedir. Burada Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türev ve integralleri tanımlanıp bu yaklaşımlar arasında nasıl bir ilişki bulunduğu gösterilmeye çalışılacaktır.

Tanım 2.5.1. (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) f fonksiyonu $[\alpha, T]$ üzerinde sürekli ve p pozitif tam sayı olmak üzere $p - 1 \leq q < p$ olacak biçimde $q > 0$ için;

$$ {}_{\alpha}D_t^{-q} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(q\right)} \int_{\alpha}^{t} \left(t-\tau\right)^{q-1} f\left(\tau\right) d\tau \qquad (2.6) $$

ile verilen ifadeye keyfi mertebeden Riemann-Liouville manada kesirli integral denir.

Tanım 2.5.2. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi) p pozitif tam sayı olmak üzere $p - 1 \leq q < p$ olacak biçimde $q = p - (p - q)$ olsun. O halde

$$ \begin{aligned} {}_{\alpha}D_t^{q} f(t) &= {}_{\alpha}D_t^{p-(p-q)} f(t) \\ &= {}_{\alpha}D_t^{p}\left({}_{\alpha}D_t^{-(p-q)} f(t)\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{p} \left[\frac{1}{\Gamma\left(p-q\right)} \int_{\alpha}^{t} \left(t-\tau\right)^{p-q-1} f\left(\tau\right) d\tau\right] \end{aligned} $$

yani,

$$ {}_{\alpha}D_t^q f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^p \left[\frac{1}{\Gamma(p-q)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{p-q-1} f(\tau)\, d\tau \right] \qquad (2.7) $$

keyfi mertebeden Riemann-Liouville manada kesirli türev tanımı elde edilir. Burada (2.7) ifadesi $\alpha = 0$ için Riemann tanımı ve $\alpha = -\infty$ için Liouville tanım olarak adlandırılır.

Özel olarak $0 < q < 1$ için,

$$ {}_{\alpha}D_t^q f(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-q} f(\tau)\, d\tau \right] \qquad (2.8) $$

yazılabilir.

Tanım 2.5.3. (Caputo Kesirli Türevi) $p,\ p-1 < q < p$ olacak biçimde pozitif tam sayı ve f fonksiyonu $[\alpha, T]$, $t < T$ üzerinde p kez sürekli türevlenebilir ve f fonksiyonunun p. mertebeden türevi integrallenebilir olmak şartıyla $q = -(p-q) + p$ alınırsa;

$$ \begin{aligned} {}_{\alpha}D_t^q f(t) &= {}_{\alpha}D_t^{-(p-q)+p} f(t) \\ &= {}_{\alpha}D_t^{-(p-q)} \left({}_{\alpha}D_t^p f(t) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p-q)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{p-q-1} f^{(p)}(\tau)\, d\tau \end{aligned} $$

yani

$$ {}_{\alpha}D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(p-q)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{p-q-1} f^{(p)}(\tau)\, d\tau \qquad (2.9) $$

keyfi mertebeden Caputo kesirli türevi elde edilir. $0 < q < 1$ şartını sağlayan her $q > 0$ için Caputo kesirli türev tanımı gereği

$$ {}_{\alpha}^{C}D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-q} f'(\tau)\, d\tau \qquad (2.10) $$

yazılabilir. Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. Yani Caputo yaklaşımının üstünlüğü, başlangıç değer problemlerinin çözümüne uygun olarak geliştirilmiş olmasıdır. Bu nedenle fizik problemlerinin çözümünde en sık kullanılan kesirli türev yaklaşımıdır.

Tanım 2.5.4. (Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi ve İntegrali) q keyfi reel sabit ve $h=\dfrac{t-\alpha}{n}$ için,

$$f_h^{(-q)}(t)=h^{q}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{-q}{r}f(t-rh)$$

ve

$$f_h^{(q)}(t)=h^{-q}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{q}{r}f(t-rh)$$

olmak üzere p tamsayı değerleri için,

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}:=\frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+r-1)}{r!}$$

$$\binom{-p}{r}=\frac{-p(-p-1)(-p-2)\dots(-p-r+1)}{r!}$$

alınırsa,

$$\binom{-p}{r}=(-1)^{r}\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}=\binom{-p}{r}(-1)^{r}$$

olup

$$ {}_{\alpha}D_t^{-q} f(t) = \lim_{h\to 0} f_h^{(-q)}(t) = \lim_{h\to 0} h^q \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{-q}{r} f(t-rh) = \lim_{h\to 0} h^q \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \quad (2.11) $$

ifadesine keyfi mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali denir.

(2.9) eşitliğinde $-q$ yerine q alınırsa;

$$ {}_{\alpha}D_t^{q} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-q} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{q}{r} f(t-rh) \quad (2.12) $$

keyfi mertebeden Grünwald-Letnikov manada kesirli türev elde edilir.

Sonuç 2.5.5. f fonksiyonu $[\alpha, T]$, $t < T$ üzerinde p kez sürekli türevlenebilir ve f nin $(p+1)$. mertebeden türevi integrallenebilir olsun. p pozitif tam sayı olmak üzere $p \le q < p+1$ olacak biçimde $q > 0$ için (2.6) eşitliği üzerinde $(p+1)$ kez ardışık kısmi integral yöntemi uygulanırsa o halde

$$ {}_{\alpha}D_t^{-q} f(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^{k+q}}{\Gamma(k+q+1)} + \frac{1}{\Gamma(q+p+1)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{q+p} f^{(p+1)}(\tau)\, d\tau \quad (2.13) $$

keyfi mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integral tanımının farklı bir formu elde edilir. Yani keyfi mertebeden R-L kesirli integral tanımı üzerinde ardışık olarak $(p+1)$ kez kısmi integral yöntemi uygulanırsa keyfi mertebeden G-L kesirli integral tanımı elde edilir.

İspat. f fonksiyonu $[\alpha, T]$, $t < T$ üzerinde sürekli türevlenebilir ve f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi integrallenebilir ve p pozitif tam sayı olmak üzere $p \le q < p+1$ olacak biçimde $q > 0$ için (2.6) denklemindeki integral üzerinde kısmi integrasyon yöntemi uygulansın. O halde

$$ u = f(\tau) $$
$$ dv = (t-\tau)^{q-1}\, d\tau $$

seçilip

$$du = f'(\tau)\,d\tau$$
$$v = -\frac{(t-\tau)^q}{q}$$

olup

$$\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{q-1} f(\tau)\,d\tau = \left(-f(\tau)\frac{(t-\tau)^q}{q}\right)\Bigg|_{\tau=\alpha}^{\tau=t} + \frac{1}{q}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{q} f'(\tau)\,d\tau$$

$$= f(\alpha)\frac{(t-\alpha)^q}{q} + \frac{1}{q}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{q} f'(\tau)\,d\tau \qquad (2.14)$$

yazılabilir. (2.14) sonucu (2.6) eşitliğindeki Riemann-Liouville kesirli integral tanımındayerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}D_t^{-q} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\left[f(\alpha)\frac{(t-\tau)^q}{q} + \frac{1}{q}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{q} f'(\tau)\,d\tau \right] \\ &= f(\alpha)\frac{(t-\tau)^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{q} f'(\tau)\,d\tau \qquad (2.15) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.15) eşitliğindeki integralde kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$${}_{\alpha}D_t^{-q} f(t) = f(\alpha)\frac{(t-\tau)^q}{\Gamma(q+1)} + f'(\alpha)\frac{(t-\tau)^{q+1}}{\Gamma(q+2)} + \frac{1}{\Gamma(q+2)}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{q+1} f''(\tau)\,d\tau \qquad (2.16)$$

olur. Bu durumu genellersek keyfi mertebeden R-L kesirli integral tanımı üzerinde $(p+1)$ kez ardışık kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa, o halde

$${}_{\alpha}D_t^{-q} f(t) = \sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^{k+q}}{\Gamma(k+q+1)} + \frac{1}{\Gamma(q+p+1)}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{q+p} f^{(p+1)}(\tau)\,d\tau$$

G-L keyfi mertebeden kesirli integral tanımı elde edilir.

Sonuç 2.5.6. f fonksiyonu $[\alpha, T]$, $t < T$ üzerinde p kez sürekli türevlenebilir ve f fonksiyonunun $(p+1)$. mertebeden türevi integrallenebilir olsun. Bu takdirde keyfi mertebeden R-L kesirli türevi mevcuttur ve keyfi mertebeden G-L kesirli türevine eşittir.

İspat. R-L keyfi mertebeden kesirli türev tanımında ardışık olarak $(p+1)$ kez kısmi integral yöntemi uygulanırsa keyfi mertebeden G-L kesirli türev tanımı elde edilir. Gerçekten; f fonksiyonu $[\alpha, T]$, $t < T$üzerinde sürekli türevlenebilir ve f nin birinci mertebeden türevi integrallenebilir olup p pozitif tam sayı olmak üzere $p \leq q < p+1$ olacak biçimde $q > 0$ için (2.7) denklemindeki integral üzerinde kısmi integral yöntemi uygulanırsa, o halde

$$\begin{aligned} u &= f(\tau) \\ dv &= (t-\tau)^{p-q-1}\, d\tau \end{aligned}$$

seçilirse,

$$\begin{aligned} du &= f'(\tau)\, d\tau \\ v &= -\frac{(t-\tau)^{p-q}}{p-q} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{p-q-1} f(\tau)\, d\tau &= -f(\tau)\frac{(t-\tau)^{p-q}}{p-q}\Bigg|_{\tau=\alpha}^{\tau=t} + \int_{\alpha}^{t} \frac{(t-\tau)^{p-q}}{p-q} f'(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{f(\alpha)(t-\alpha)^{p-q}}{p-q} + \frac{1}{p-q}\int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{p-q} f'(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{2.17}$$

elde edilir. (2.17) sonucu (2.7) eşitliğindeki Riemann-Liouville kesirli türev tanımında yerine yazılırsa;

$$ {}_{\alpha}D_t^q f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^p \left(\frac{f(\alpha)(t-\alpha)^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(p-q+1)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{p-q} f'(\tau)\, d\tau \right) \tag{2.18}$$

elde edilir. Bu durumu genellersek keyfi mertebeden R-L kesirli türev tanımı üzerinde $(p+1)$ kez ardışık kısmi integral yöntemi uygulanırsa, o halde

$$ {}_{\alpha}D_t^q f(t)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)}+\frac{1}{\Gamma(p-q+1)}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{p-q} f^{(p+1)}(\tau)d\tau \qquad (2.19) $$

Grünwald-Letnikov keyfi mertebeden kesirli türev tanımı elde edilir. Burada $f^{(k)}(t)$ $k=1,2,3,...,p$ için sürekli türevlenebilir ve $k=p+1$ için $f^{(p+1)}(t)$ integrallenebilirdir.

Özel olarak f fonksiyonu $[\alpha,T]$, $t<T$ üzerinde sürekli ve türevlenebilir ve f fonksiyonunun 1. mertebeden türevi integrallenebilir olsun. O halde $0<q<1$ şartını sağlayan her q için

$$ {}_{\alpha}D_t^q f(t)=D_0^q f(t)=\frac{f(\alpha)(t-\alpha)^{-q}}{\Gamma(1-q)}+\frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{-q} f'(\tau)d\tau \qquad (2.20) $$

yazılabilir.

Teorem 2.5.7. f fonksiyonu $[\alpha,T]$, $t<T$ üzerinde $f^{(k)}(t)$ $k=1,2,3,...p-1$ için sürekli türevlenebilir ve $k=p$ için $f^{(p)}(t)$ integrallenebilir olsun. Bu takdirde p pozitif tam sayı olmak üzere $p-1\le q<p$ şartını sağlayan$q$için $\left[{}_{\alpha}D_t^q f(t)\right]_{t=\alpha}=0$ ifadesi ile $f^{(j)}(\alpha)=0,\quad (j=0,1,2,3,...,p-1)$ ifadesi birbirine denktir.

Sonuç 2.5.8. f fonksiyonu $[\alpha,T]$, $t<T$ üzerinde sürekli ve integrallenebilir ve p, $p-1<q<p$ olacak biçimde pozitif tam sayı ve $f^{(k)}(t)$ $k=1,2,3,...,p-1$ türevleri de $[\alpha,T]$ aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu takdirde $k=1,2,3,...,p-1$ için $f^{(k)}(\alpha)=0$ şartları sağlanıyorsa Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevleri birbirine eşittir. Gerçekten f fonksiyonu $[\alpha,T]$, $t<T$ üzerinde sürekli ve türevlenebilir ve f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi

integrallenebilir olmak üzere $0 < q < 1$ şartını sağlayan her q için Caputo kesirli türev tanımı

$$ {}_{\alpha}^{C}D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-q} f'(\tau)\,d\tau $$

olduğundan

$$ {}_{\alpha}^{C}D_t^q f(t) = {}_{\alpha}D_t^q\left[f(t) - f(\alpha)\right] = {}_{\alpha}D_0^q\left[f(t) - f(\alpha)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-q} f'(\tau)\,d\tau $$

yazılır. Buradan

$$ {}_{\alpha}^{C}D_t^q f(t) = {}_{\alpha}D_t^q f(t) - \frac{f(\alpha)(t-\alpha)^{-q}}{\Gamma(1-q)} = {}_{\alpha}D_0^q f(t) - \frac{f(\alpha)(t-\alpha)^{-q}}{\Gamma(1-q)} $$

elde edilir. Özel olarak eğer $f(\alpha) = 0$ ise

$$ {}_{\alpha}^{C}D_t^q f(t) = {}_{\alpha}D_t^q f(t) = {}_{\alpha}D_0^q f(t). \tag{2.21} $$

2.6. Kesirli Türev ve İntegralin Özellikleri

(i) ${}_{\alpha}D_t^q f(t)$ ifadesi $q = n \in \mathbb{N}^+$ için klasik anlamda $q.$ mertebeden türevi gösterir.

(ii) Sıfırıncı mertebeden fraksiyonel türev ise fonksiyonun kendisine eşittir. Yani,

$$ {}_{\alpha}D_t^0 f(t) = f(t) \tag{2.22} $$

yazılabilir.

(iii) Fraksiyonel operatör lineerdir. Yani $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$ {}_{\alpha}D_t^q\left(af(t) + bg(t)\right) = a\,{}_{\alpha}D_t^q f(t) + b\,{}_{\alpha}D_t^q g(t) \tag{2.23} $$

olur.

(iv) $p, q \in \mathbb{R}^-$ için;

$$ {}_{\alpha}D_t^{p}\left({}_{\alpha}D_t^{q} f(t) \right) = {}_{\alpha}D_t^{q}\left({}_{\alpha}D_t^{p} f(t) \right) = {}_{\alpha}D_t^{p+q} f(t) \tag{2.24} $$

olur.

(v) $\quad p, q \in \mathbb{R}^{+}, \quad p - q > 0$ için;

$$ {}_{\alpha}D_t^{p}\left({}_{\alpha}D_t^{-q} f(t) \right) = {}_{\alpha}D_t^{p-q} f(t) \tag{2.25} $$

ve

$$ {}_{\alpha}D_t^{-p}\left({}_{\alpha}D_t^{q} f(t) \right) = {}_{\alpha}D_t^{q-p} f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_{\alpha}D_t^{q-j} f(t) \right]_{t=\alpha} \frac{(t-\alpha)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \tag{2.26} $$

yazılabilir.

(vi) $\quad p \in \mathbb{R}^{+}$ için ${}_{\alpha}D_t^{p}\left({}_{\alpha}D_t^{-p} f(t) \right) = f(t)$ ancak,

$$ {}_{\alpha}D_t^{-p}\left({}_{\alpha}D_t^{p} f(t) \right) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_{\alpha}D_t^{p-j} f(t) \right]_{t=\alpha} \frac{(t-\alpha)^{p-j}}{\Gamma(1+p-j)} \tag{2.27} $$

olur.

2.7. Uygulamalar

Örnek 2.7.1. m tam sayı olmak üzere $0 \le m \le p < m+1$, $m < \nu$ ve $\nu > -1$ reel sayı olmak şartıyla $f(t) = (t-\alpha)^{\nu}$ fonksiyonunun keyfi mertebeden kesirli türevini araştıralım. (2.19) denklemi ile verilen keyfi mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı

$$ {}_{\alpha}D_t^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\, d\tau $$

olup $f(t) = (t-\alpha)^{\nu}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$ \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} = 0 \tag{2.28} $$

olacağından (2.28) eşitliği (2.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$ {}_{\alpha}D_t^p\left(t-\alpha\right)^{\nu}=\frac{1}{\Gamma\left(-p+m+1\right)}\int_{\alpha}^{t}\left(t-\tau\right)^{m-p}\frac{d^{m+1}\left(\tau-\alpha\right)^{\nu}}{d\tau^{m+1}}d\tau \qquad (2.29)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1}\left(\tau-\alpha\right)^{\nu}}{d\tau^{m+1}}&=\nu\left(\nu-1\right)\left(\nu-2\right)...\left(\nu-m\right)\left(\tau-\alpha\right)^{\nu-m-1}\\&=\frac{\Gamma\left(\nu+1\right)}{\Gamma\left(\nu-m\right)}\left(\tau-\alpha\right)^{\nu-m-1}\end{aligned}$$

değeri (2.29) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$ {}_{\alpha}D_t^p\left(t-\alpha\right)^{\nu}=\frac{\Gamma\left(\nu+1\right)}{\Gamma\left(\nu-m\right)\Gamma\left(-p+m+1\right)}\int_{\alpha}^{t}\left(t-\tau\right)^{m-p}\left(\tau-\alpha\right)^{\nu-m-1}d\tau \qquad (2.30)$$

elde edilir. Ayrıca (2.30) denkleminde

$$\tau=\alpha+\xi\left(t-\alpha\right)$$

değişken değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}t-\tau&=t-\left(\alpha+\xi\left(t-\alpha\right)\right)\\&=\left(t-\alpha\right)\left(1-\xi\right)\end{aligned}$$

ve

$$\tau-\alpha=\xi\left(t-\alpha\right)$$

değerleri ile

$$d\tau=\left(t-\alpha\right)d\xi$$

eşitliği (2.30) denkleminde yerine yazılırsa;

$$ {}_{\alpha}D_t^p\left(t-\alpha\right)^{\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_0^1\left(t-\alpha\right)^{m-p}\left(1-\xi\right)^{m-p}\xi^{\nu-m-1}\left(t-\alpha\right)^{\nu-m-1}\left(t-\alpha\right)d\xi $$

yani

$$ {}_{\alpha}D_t^p\left(t-\alpha\right)^{\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)\left(t-\alpha\right)^{-p+\nu}}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_0^1\left(1-\xi\right)^{m-p}\xi^{\nu-m-1}d\xi \qquad (2.31) $$

eşitliği elde edilir. Buradan (2.31) eşitliğinin sağ tarafındaki integral, Beta fonksiyonu yardımıyla

$$ \begin{aligned} \int_0^1\left(1-\xi\right)^{m-p}\xi^{\nu-m-1}d\xi &= \beta\left(m-p+1,\nu-m\right) \\ &= \frac{\Gamma(-p+m+1)\Gamma(\nu-m)}{\Gamma(-p+\nu+1)} \end{aligned} \qquad (2.32) $$

yazılabilir. (2.32) eşitliği (2.31) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$ {}_{\alpha}D_t^p\left(t-\alpha\right)^{\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(-p+\nu+1)}\left(t-\alpha\right)^{-p+\nu} \qquad (2.33) $$

elde edilir. Benzer şekilde $f(t)=\left(t-\alpha\right)^{\nu}$ fonksiyonunun m tam sayı olmak üzere $0\leq m\leq p<m+1,\ m<\nu$ ve $\nu>-1$ reel sayı olmak şartıyla keyfi mertebeden kesirli integrali

$$ {}_{\alpha}D_t^{-p}\left(t-\alpha\right)^{\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(p+\nu+1)}\left(t-\alpha\right)^{p+\nu} \qquad (2.34) $$

yazılabilir. Böylece (2.33) eşitliğinden hareketle $\nu=0$ ve c keyfi reel sayı olmak üzere $f(t)=c\left(t-\alpha\right)^{0}$ ile verilen sabit fonksiyonun keyfi mertebeden kesirli türevi ise;

$$
\begin{aligned}
{}_{\alpha}D_t^p c(t-\alpha)^0 &= c\,{}_{\alpha}D_t^p (t-\alpha)^0 \\
&= c\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(-p+0+1)}(t-\alpha)^{-p+0} \\
&= c\frac{1}{\Gamma(1-p)}(t-\alpha)^{-p} \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (2.35) eşitliğinde özel olarak $c=1$ alınırsa

$$
{}_{\alpha}D_t^p 1 = \frac{(t-\alpha)^{-p}}{\Gamma(1-p)}
$$

olur.

Örnek 2.7.2. $\alpha=0$ olmak üzere $f(t)=t$ fonksiyonunun kesirli türevi (2.33) eşitliği gereği

$$
{}_{\alpha}D_t^p t = \frac{t^{1-p}}{\Gamma(2-p)}
$$

olur. Benzer yöntemle $f(t)=t^2$ seçilirse

$$
{}_{\alpha}D_t^p t^2 = \frac{\Gamma(3)t^{2-p}}{\Gamma(3-p)}
$$

elde edilir. Bu durumu genellersek; $f(t)=t^k$ için,

$$
{}_{\alpha}D_t^p t^k = \frac{\Gamma(k+1)t^{k-p}}{\Gamma(k+1-p)}
$$

elde edilir.

Örnek 2.7.3. $f(t)=e^{at}$ fonksiyonunun kesirli türevini araştıralım.

$f(t)=e^{at}$ fonksiyonu $\alpha=0$ noktası civarında Taylor serisine açılabilir olduğundan

$$e^{at}=1+at+\frac{a^2}{2!}t^2+\frac{a^3}{3!}t^3+\ldots+\frac{a^n}{n!}t^n+\ldots \tag{2.36}$$

olur. (2.36) eşitliğinin her iki tarafının $q.$ basamaktan kesirli türevi alınırsa;

$$_0D_t^q e^{at}={}_0D_t^q 1+a\,{}_0D_t^q t+\frac{a^2}{2!}\,{}_0D_t^q t^2+\frac{a^3}{3!}\,{}_0D_t^q t^3+\ldots+\frac{a^n}{n!}\,{}_0D_t^q t^n+\ldots \tag{2.37}$$

elde edilir. Örnek 2.7.2 gereği (2.37) eşitliğinden

$$\begin{aligned} {}_0D_t^q e^{at} &= \frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)}+a\frac{t^{1-q}}{\Gamma(2-q)}+a^2\frac{t^{2-q}}{\Gamma(3-q)}+\ldots+a^n\frac{t^{n-q}}{\Gamma(n+1-q)}+\ldots \\ &= t^{-q}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-q)}+\frac{at}{\Gamma(2-q)}+\frac{(at)^2}{\Gamma(3-q)}+\cdots+\frac{(at)^n}{\Gamma(n+1-q)}+\cdots\right\} \end{aligned} \tag{2.38}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (2.38) eşitliğinden

$$_0D_t^q e^{at}=t^{-q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{\Gamma(k-q+1)} \tag{2.39}$$

elde edilir. Benzer şekilde $f(t)=e^{at}$ fonksiyonunun $q.$ basamaktan kesirli integrali

$$_0D_t^{-q} e^{at}=t^{q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{\Gamma(k+q+1)} \tag{2.40}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.7.4. $f(t)=\sin(at)$ fonksiyonun $q.$ basamaktan kesirli türevini araştıralım.

$$\sin(at)=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i} \tag{2.41}$$

ve (2.38) eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
{}_0D_t^q e^{iat} &= \frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)} + (ai)\frac{t^{1-q}}{\Gamma(2-q)} + (ai)^2\frac{t^{2-q}}{\Gamma(3-q)} + (ai)^3\frac{t^{3-q}}{\Gamma(4-q)} + \ldots \\
&+ (ai)^n \frac{t^{n-q}}{\Gamma(n+1-q)} + \ldots
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

ve

$$
{}_0D_t^q e^{-iat} = \frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)} + (-ai)\frac{t^{1-q}}{\Gamma(2-q)} + (-ai)^2\frac{t^{2-q}}{\Gamma(3-q)} + \ldots + (-ai)^n\frac{t^{n-q}}{\Gamma(n+1-q)} + \ldots \tag{2.43}
$$

yazılabilir. (2.43) eşitliği -1 ile çarpılıp (2.42) eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa n tek sayı olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&{}_0D_t^q e^{iat} - {}_0D_t^q e^{-iat} \\
&= 2\left\{ (ai)\frac{t^{1-q}}{\Gamma(2-q)} + (ai)^2\frac{t^{2-q}}{\Gamma(3-q)} + \ldots + (ai)^n\frac{t^{n-q}}{\Gamma(n+1-q)} + \ldots \right\}
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

eşitliği elde edilir. Buradan (2.44) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{1}{2i}$ ile çarpılırsa

$$
{}_0D^q{}_t \sin at = t^{-q} \sum_{k\ tek\ sayı}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} (at)^k}{\Gamma(k-q+1)} \tag{2.45}
$$

olur. Benzer şekilde $f(t) = \cos(at)$ fonksiyonun $q.$ basamaktan kesirli türevi

$$
{}_0D^q{}_t \cos(at) = t^{-q} \sum_{k\ çift\ sayı}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} (at)^k}{\Gamma(k-q+1)} \tag{2.46}
$$

elde edilir. Diğer taraftan alt limit $-\infty$ alınırsa aşağıdaki örnekler geçerlidir.

Örnek 2.7.5. $\nu = 0$ ve c keyfi reel sayı olmak üzere $f(t) = c$ ile verilen sabit fonksiyonun keyfi basamaktan kesirli türevi

$$
{}_{-\infty}D_t^q c = 0 \tag{2.47}
$$

olur.

Örnek 2.7.6. $f\left(t\right)=e^{\alpha t}$ için

$$_{-\infty}D_t^q e^{at} = a^q e^{at} \qquad (2.48)$$

olur.

Örnek2.7.7. $f\left(t\right)=\sin\left(at\right)$ için $_{-\infty}D_t^q \sin\left(at\right)$ sonucunu araştıralım. $\sin\left(at\right)=\dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$ olduğunu kullanarak

$$i^q = e^{q\frac{\pi}{2}i}$$

ve $\left(2.48\right)$ eşitliğinden hareketle

$$_{-\infty}D_t^q e^{iat} = a^q e^{i\left(at+q\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (2.49)$$

ve

$$_{-\infty}D_t^q e^{-iat} = a^q e^{-i\left(at+q\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (2.50)$$

elde edilir. Buradan$\left(2.50\right)$ eşitliği -1 ile çarpılıp $\left(2.49\right)$ eşitliği ile taraf tarafa toplanırsa o halde

$$\begin{aligned} _{-\infty}D_t^q \sin\left(at\right) &= \frac{a^q}{2i}\left\{e^{i\left(at+q\frac{\pi}{2}\right)} - e^{-i\left(at+q\frac{\pi}{2}\right)}\right\} \\ &= a^q \sin\left(at+q\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.51) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $f\left(t\right)=\cos\left(at\right)$ için,

$$_{-\infty}D_t^q \cos\left(at\right) = a^q \cos\left(at+q\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2.52)$$

yazılabilir.

2.8. Kesirli Diferensiyel Eşitsizlikler

Aşağıdaki lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemi ele alalım.

$$D^q x(t) = F(t,x), \quad x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0 \tag{2.53}$$

burada $F \in C\left[[t_0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right], t_0,T>0$ ve $D^q, 0<q<1$ olacak biçimde q. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevdir. (2.53) denklemine karşılık gelen Volterra tipli kesirli integral denklemi

$$x(t) = \frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{q-1}\left[F(s,x(s))\right]ds. \tag{2.54}$$

Yani (2.54) denkleminin her çözümü aynı zamanda (2.53) denkleminin de bir çözümüdür. Tersi de doğrudur.

Bu kısımda kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için genelleştirilmiş başlangıç zaman farklı monoton iteratif tekniğe ilişkin yeri geldiğince kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.8.1. $C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right] = \left\{\alpha \in C\left[(t_0,T],\mathbb{R}\right] : (t-t_0)^p\,\alpha(t) \in C\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]\right\}$ olmak üzere $\alpha(t) \in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]$ için $(t-t_0)^p\,\alpha(t)$ fonksiyonu $\alpha(t)$ fonksiyonunun sürekli genişlemesidir.

Tanım 2.8.2. $v \in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]$ fonksiyonu

$$D^q v(t) \le F(t,v(t)), \quad v^0 \le x^0$$

koşulunu sağlıyorsa o halde bu fonksiyona (2.53) probleminin bir alt çözümü denir.

$w \in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]$ fonksiyonu

$$D^q w(t) \ge F(t,w(t)), \quad w^0 \ge x^0$$

koşulunu sağlıyorsa o halde bu fonksiyona (2.53) probleminin bir üst çözümü denir. Burada $v^0 = v(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $w^0 = w(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$.

Tanım 2.8.3. Kabul edelim ki $r(t)$, $(t_0,T]$ aralığında (2.53) probleminin bir çözümü olsun. Eğer (2.53) probleminde her $x(t)$ çözümü için $x(t)\le r(t)$ oluyorsa $r(t)$' ye (2.53) probleminin maksimal çözümü denir.

$(t_0,T]$ aralığında (2.53) probleminin başka bir çözümü $\rho(t)$ olsun. Eğer (2.53) probleminde her $x(t)$ çözümü için $x(t)\ge \rho(t)$ oluyorsa $\rho(t)$’ye (2.53) probleminin minimal çözümü denir.

Teorem 2.8.4. Kabul edelim ki

$v, w \in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right],\quad p=1-q,\quad 0<q<1,\quad F\in C\left[[t_0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$ ve

$(i)\ D^q v(t)\le F(t,v(t)),$

$(ii)\ D^q w(t)\ge F(t,w(t)),$

$t_0<t\le T$ olmak üzere (i) ya da (ii) eşitsizliklerinden birinde eşitlik durumu olmasın. O halde $v^0<w^0$ ise $v(t)<w(t)$ olur $[22]$.

Teorem 2.8.5. Kabul edelim ki

$v,\ w\in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right],\ p=1-q,\quad 0<q<1,\ F\in C\left[[t_0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$ ve

$(i)\ D^q v(t)\le F(t,v(t)),$

$(ii)\ D^q w(t)\ge F(t,w(t))$

kesin olmayan eşitsizlikleri sağlansın. Üstelik standart Lipschitz şartı sağlansın öyle ki

$$F(t,x)-F(t,y)\le L(x-y),\quad x\ge y \text{ ve } L>0$$

olsun. O halde $v^0\le w^0$ ise $v(t)\le w(t)$ $[22]$.

Eğer $t \in (t_0, T]$ için v ve w, (2.53) probleminin alt ve üst çözümleri olmak üzere $v(t) \le w(t)$ ise

$$\Omega = \left\{ (t,x) : (t-t_0)^p v(t) \le (t-t_0)^p x \le (t-t_0)^p w(t), t \in [t_0, T] \right\}$$

kapalı küme üzerinde (2.53) probleminin çözümleri ispat edilebilir.

Teorem 2.8.6. Kabul edelim ki v, $w \in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]$, (2.53) probleminin alt ve üst çözümleri olmak üzere $v(t) \le w(t)$ ve $F \in C[\Omega,\mathbb{R}]$, $t \in (t_0,T]$ olsun. Bu takdirde (2.53) probleminin $(t_0,T]$ üzerinde $v(t) \le x(t) \le w(t)$ olacak biçimde bir $x(t)$ çözümü vardır $[22]$.

Şimdi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $f \in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]$ olmak üzere aşağıdaki homojen olmayan lineer kesirli diferensiyel denklemi göz önünde bulunduralım.

$$D^q x = \lambda x + f(t), \quad x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}.$$

$t_0 < t \le T$ olmak üzere yukarıdaki denkleme karşılık gelen Volterra tipli integral denklemi

$$x(t) = \frac{x^0 (t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} x(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} f(s) ds$$

yazılır. Homojen olmayan lineer kesirli diferensiyel denklemin $x(t) = x(t, t_0, x^0)$ çözümünü bulmak için ardışık yaklaşım yöntemi uygulandığında $t_0 < t \le T$ için,

$$x(t) = x^0 (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left(\lambda (t-t_0)^q\right) + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} E_{q,q}\left(\lambda (t-s)^q\right) f(s) ds$$

elde edilir. Burada $E_{q,q}(t)$ fonksiyonu iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonudur. Eğer $f(t) \equiv 0$ ise o halde homojen lineer kesirli diferensiyel denklemin çözümü olarak

$$x(t)=x^0(t-t_0)^{q-1}E_{q,q}\left(\lambda(t-t_0)^q\right),\quad t_0<t\le T$$

alınabilir.

Sonuç 2.8.7. $m\in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]$, $1-q=p$ ve $L\ge 0$ olmak üzerekabul edelim ki

$$D^q m(t)\le Lm(t),\quad m(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=m^0$$

olsun. O halde

$$m(t)\le m^0(t-t_0)^{q-1}E_{q,q}\left(L(t-t_0)^q\right),\quad t_0<t\le T$$

yazılabilir $[22]$.

Lemma 2.8.8. Kabul edelim ki $m\in C_p\left[[t_0,T],\mathbb{R}\right]$, $1-q=p$ olmak üzere keyfi $t_1\in(t_0,T]$ için $m(t_1)=0$ ve $t_0<t\le t_1$ için $m(t)\le 0$ olsun. Bu takdirde $D^q m(t_1)\ge 0$ olur $[22]$.

Lemma 2.8.9. $(t_0,T]$ üzerinde tanımlı $\{f(x)\}$ fonksiyon ailesi verilsin. Bu aileden alınmış her $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|\le M$ olacak biçimde en az bir $M>0$ varsa o halde $\{f(x)\}$ ailesine düzgün sınırlıdır denir.

Lemma 2.8.10. $(t_0,T]$ üzerinde tanımlı $\{f(x)\}$ fonksiyon ailesi verilsin. $\forall\varepsilon>0$ için yalnızca ε'a bağlı en az bir $\delta=\delta(\varepsilon)$ olduğunda $|t_1-t_2|<\delta$ koşulunu sağlayan $t_1,t_2\in(t_0,T]$ için $\{f(x)\}$ fonksiyon ailesinden alınan her $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ sağlanıyorsa o halde $\{f(x)\}$ fonksiyon ailesi $(t_0,T]$ üzerinde eş süreklidir denir.

Teorem 2.8.11. (Ascoli-Arzela Teoremi) Kabul edelim ki $\{v_n\}$ dizisi $(t_0, T]$ üzerinde düzgün sınırlı ve eş sürekli olsun. Bu takdirde $\{v_n\}$ dizisinin $(t_0, T]$ üzerinde düzgün yakınsak bir $\{v_{n_k}\}$ alt dizisi vardır.

Şimdi farklı tiplerdeki eşlenmiş alt ve üst çözümleri inceleyelim. Bu takdirde bu durumu incelemek için (2.53) probleminin sağ tarafında verilen $F(t,x)$ fonksiyonunu $f(t,x)+g(t,x)$ şeklinde iki fonksiyonun toplamı olarak alalım. Burada $f(t,x)$ fonksiyonu x'e göre artan ve $g(t,x)$ fonksiyonu x'e göre azalan alınabilir. Ayrıca eşlenmiş alt ve üst çözümleri monoton dizileri üretmek için kullanacağız.

Aşağıdaki kesirli diferensiyel denklemi ele alalım.

$$D^q x(t) = f(t,x) + g(t,x), \quad x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0 \tag{2.55}$$

Burada $f,\ g \in C\left[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $\tau_0 > t_0$ ve $0 < q < 1$ dir. (2.55)'e karşılık gelen Volterra tipli kesirli integral denklemi

$$x(t) = \frac{x^0 (t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} \left[f(s, x(s)) + g(s, x(s)) \right] ds \tag{2.56}$$

olur. İlk olarak (2.55) denklemine bağlı muhtemel eşlenmiş alt ve üst çözümlerini aşağıda tanımlayalım.

Tanım 2.8.12. Kabul edelim ki $v,\ w \in C_p\left[[t_0, t_0+T], \mathbb{R}\right]$, $t_0,\ T > 0$ olup $p = 1-q$ ve $0 < q < 1$ için eğer v, w fonksiyonları;

(i) $D^q v \le f(t,v) + g(t,v),\ v^0 \le x^0;$

$$D^q w \ge f(t,w) + g(t,w),\ w^0 \ge x^0 \tag{2.57}$$

şartlarını sağlıyorsa o halde $v,\ w$ fonksiyonları (2.55) probleminin sırasıyla doğal alt ve üst çözümleri olarak adlandırılır.

$(ii)\ D^q v \le f(t,v) + g(t,w),\ v^0 \le x^0;$

$$D^q w \ge f(t,w) + g(t,v),\, w^0 \ge x^0 \tag{2.58}$$

şartlarını sağlıyorsa o halde $v,\ w$ fonksiyonları sırasıyla (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümleri olarak adlandırılır.

$(iii)\ D^q v \le f(t,w) + g(t,v),\ v^0 \le x^0;$

$$D^q w \ge f(t,v) + g(t,w),\, w^0 \ge x^0 \tag{2.59}$$

şartlarını sağlıyorsa o halde $v,\ w$ fonksiyonları sırasıyla (2.55) probleminin II. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümleri olarak adlandırılır.

$(iv)\ D^q v \le f(t,w) + g(t,w),\ v^0 \le x^0;$

$$D^q w \ge f(t,v) + g(t,v),\, w^0 \ge x^0 \tag{2.60}$$

şartlarını sağlıyorsa o halde $v,\ w$ fonksiyonları sırasıyla (2.55) probleminin III. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümleri olarak adlandırılır. Burada yukarıdaki eşitsizliklerde $v^0 = v(t)(t-t_0)^{1-q}\big|_{t=t_0}$, $w^0 = w(t)(t-t_0)^{1-q}\big|_{t=t_0}$.

Açıktırki $v(t) \le w(t),\ t \in (t_0, t_0 + T]$ olduğunda $f(t,x),\ x$'e göre azalmayan ve $g(t,y),\ y$ değişkenine göre artmayan ise o halde (2.57) ve (2.60)'da tanımlanan alt ve üst çözümler (2.59)'a indirgenir. Dolayısıyla böyle bir durumda (2.58) ve (2.59) durumlarını incelemek yeterlidir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI KARŞILAŞTIRMA ve VARLIK TEOREMLERİ

Şimdi bu kısımda sırasıyla üst ve alt çözümü farklı tipten seçilen başlangıç zaman farklı kesirli basamaktan diferensiyel denklemler için genelleştirilmiş karşılaştırma ve varlık teoremleri verilecektir.

3.1. Karşılaştırma Teoremleri

İlk olarak I. tipten başlangıç zaman farklı eşlenmiş alt ve üst çözümler için aşağıdaki karşılaştırma teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1.1. Kabul edelim ki

(i) $\alpha \in C_p\left[\left[t_0, t_0+T\right], \mathbb{R}\right]$ $\quad t_0, T>0, \quad \beta \in C_p\left[\left[\tau_0, \tau_0+T\right], \mathbb{R}\right], \quad \tau_0>t_0$ olmak üzere $p=1-q$ ve $0<q<1$ olsun. Burada $f, g \in C\left[\left[t_0, \tau_0+T\right] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve

$$D^q \alpha(t) \leq f\left(t, \alpha(t)\right)+g\left(t, \beta(t)\right), \ \alpha^0 \leq \ x^0,$$

$$D^q \beta(t) \geq f\left(t, \beta(t)\right)+g\left(t, \alpha(t)\right), \ \beta^0 \geq x^0$$

olmak üzere $\alpha^0=\alpha(t)\left(t-t_0\right)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0=\beta(t)\left(t-\tau_0\right)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ dır.

(ii) $f, g \in C\left[\left[t_0, \tau_0+T\right] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve $f(t, x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre azalmayan ve $g(t, y)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olsun. Üstelik $f(t, x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlasın.

(iii) α, $\left(t_0, t_0+T\right]$ üzerinde artmayan ve β, $\left(\tau_0, \tau_0+T\right]$ üzerinde artmayan olsun.

O halde

$$(a)\ \alpha(t) \leq \beta(t+\eta), \quad t_0<t \leq t_0+T$$

$$(b)\ \alpha(t-\eta)\le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T$$

olup burada $\eta = \tau_0 - t_0 > 0$ dır.

İspat. (a) Kabul edelim ki $\beta_0(t) = \beta(t+\eta)$, $t > t_0$ olsun. Bu takdir de

$$\beta_0^0 = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \beta(t+\eta)\,(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$$

olup t yerine $t-\eta$ yazılırsa

$$\beta_0^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \beta^0 \ge x^0 \ge \alpha^0 \tag{3.1}$$

elde edilir. $g(t,y)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan ve $\alpha,\ (t_0, t_0+T]$ aralığı üzerinde artmayan ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} D^q\beta_0(t) &= D^q\beta(t+\eta) \\ &\ge f\left(t+\eta, \beta(t+\eta)\right) + g\left(t+\eta, \alpha(t+\eta)\right) \\ &\ge f\left(t+\eta, \beta_0(t)\right) + g\left(t+\eta, \alpha(t)\right) \\ &\ge f\left(t, \beta_0(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

olduğu görülür. Böylece (3.2) eşitsizliği gereği,

$$D^q\beta_0(t) \ge f\left(t, \beta_0(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right)$$

sonucuna varılır. Bu ise β_0'ın verilen (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş üst çözümü olduğunu gösterir. Burada

$$\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left(2L(t-t_0)^q\right) \tag{3.3}$$

olup λ fonksiyonu,

$$D^q\lambda(t) = 2L\lambda(t), \quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \lambda^0 > 0 \tag{3.4}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olmak üzere şimdi keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) + \varepsilon\lambda(t)$$

olsun. O halde,

$$\beta_{0\varepsilon}^0 = \beta_0^0 + \varepsilon\lambda^0 > \beta^0 \geq \alpha^0 \text{ ve } \beta_{0\varepsilon}(t) > \beta_0(t),\, t > t_0$$

yazılır. β_0, I. tipten eşlenmiş üst çözüm olduğundan

$$\begin{aligned} D^q\beta_{0\varepsilon}(t) &= D^q\beta_0(t) + \varepsilon D^q\lambda(t) \\ &\geq f(t,\beta_0(t)) + g(t,\alpha(t)) + 2\varepsilon L\lambda(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$\beta_{0\varepsilon} = \beta_0 + \varepsilon\lambda$ için $\beta_0 < \beta_{0\varepsilon}$ ve f fonksiyonu Lipschitz şartını sağladığından

$$f(t,\beta_{0\varepsilon}(t)) - f(t,\beta_0(t)) \leq L(\beta_{0\varepsilon}(t) - \beta_0(t))$$

olup

$$f(t,\beta_0(t)) \geq f(t,\beta_{0\varepsilon}(t)) - L\varepsilon\lambda(t) \tag{3.6}$$

eşitsizliği (3.5) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D^q\beta_{0\varepsilon}(t) &\geq f(t,\beta_{0\varepsilon}(t)) - L\varepsilon\lambda(t) + g(t,\alpha(t)) + 2\varepsilon L\lambda(t) \\ &> f(t,\beta_{0\varepsilon}(t)) + g(t,\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği $t_0 < t \leq t_0 + T$ için

$$\alpha(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$$

olur.

Buradan $\varepsilon \to 0$ için limit alırsak $\left(t_0, t_0+T\right]$ üzerinde

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(t) &\le \lim_{\varepsilon\to 0}\beta_{0\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)\right\},\\
\alpha(t) &\le \beta_0(t) = \beta(t+\eta),\\
\alpha(t) &\le \beta(t+\eta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) Kabul edelim ki $\alpha_0(t)=\alpha(t-\eta), t>\tau_0$ olsun.

$$\alpha_0^0 = \alpha_0(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \alpha(t-\eta)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$$

olup t yerine $t+\eta$ yazılırsa,

$$\alpha_0^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \alpha^0 \le x^0 \le \beta^0 \tag{3.7}$$

elde edilir. $g(t,y)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan ve $\beta, \left(\tau_0, \tau_0+T\right]$ üzerinde artmayan ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned}
D^q\alpha_0(t) &= D^q\alpha(t-\eta)\\
&\le f\left(t-\eta, \alpha(t-\eta)\right)+g\left(t-\eta, \beta(t-\eta)\right)\\
&\le f\left(t-\eta, \alpha_0(t)\right)+g\left(t-\eta, \beta(t)\right)\\
&\le f\left(t, \alpha_0(t)\right)+g\left(t, \beta(t)\right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

yazılabilir. Böylece (3.8)' den

$$D^q\alpha_0(t) \le f\left(t, \alpha_0(t)\right)+g\left(t, \beta(t)\right) \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu ise α_0'ın verilen (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş alt çözümü olduğunu gösterir. Şimdi keyfi $\varepsilon>0$ için varsayalım ki $\alpha_{0\varepsilon}(t)=\alpha_0(t)-\varepsilon\lambda(t)$ olsun.

O halde $\alpha_{0\varepsilon} < \alpha_0$ olmak üzere $\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left(2L(t-t_0)^q\right)$ olduğundan $\alpha_{0\varepsilon}^0 = \alpha_0^0 - \varepsilon\lambda^0 < \alpha^0 \leq \beta^0$ ve $\alpha_{0\varepsilon}(t) < \alpha_0(t)$ olur. Böylece;

$$D^q\alpha_{0\varepsilon}(t) = D^q\alpha_0(t) - \varepsilon D^q\lambda(t)$$

α_0 , I. tipten eşlenmiş alt çözüm ve λ fonksiyonu,

$$D^q\lambda(t) = 2L\lambda(t), \quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \lambda^0 > 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğundan

$$D^q\alpha_{0\varepsilon}(t) \leq f\left(t,\alpha_0(t)\right) + g\left(t,\beta(t)\right) - 2\varepsilon L\lambda(t) \tag{3.10}$$

$\alpha_{0\varepsilon} = \alpha_0 - \varepsilon\lambda$ için $\alpha_{0\varepsilon} < \alpha_0$ olup f, Lipschitz şartını sağladığından

$$f\left(t,\alpha_0(t)\right) - f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) \leq L\left(\alpha_0(t) - \alpha_{0\varepsilon}(t)\right)$$

olacağından

$$f\left(t,\alpha_0(t)\right) \leq f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) + L\varepsilon\lambda(t) \tag{3.11}$$

eşitsizliği (3.10) ’ da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D^q\alpha_{0\varepsilon}(t) &\leq f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) + L\varepsilon\lambda(t) + g\left(t,\beta(t)\right) - 2\varepsilon L\lambda(t) \\ &< f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) + g\left(t,\beta(t)\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği $\tau_0 < t \leq \tau_0 + T$ için

$$\alpha_{0\varepsilon}(t) < \beta(t)$$

olur. Buradan $\varepsilon \to 0$ limit alırsak

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\alpha_0(t) - \varepsilon\lambda(t)\right\} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\beta(t), \\ &\alpha_0(t) = \alpha(t-\eta) \leq \beta(t), \quad \tau_0 < t \leq \tau_0 + T, \\ &\alpha(t-\eta) \leq \beta(t), \quad \tau_0 < t \leq \tau_0 + T \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$t_0 > \tau_0$ olduğu durumda Teorem 3.1.1'deki (ii) ve (iii) şartları; f ve g, her x için t'ye göre artmayan ayrıca α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olarak alınırsa aşağıdaki teorem geçerli kalır.

Teorem 3.1.2. Kabul edelim ki

(i) $\alpha \in C_p\left[[t_0, t_0+T], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$, $\beta \in C_p\left[[\tau_0, \tau_0+T], \mathbb{R}\right]$, $\tau_0 < t_0$ olup, $p = 1-q$, $0 < q < 1$ olsun. Burada $f, g \in C\left[[\tau_0, t_0+T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve

$$D^q\alpha(t) \le f(t, \alpha(t)) + g(t, \beta(t)), \quad \alpha^0 \le x^0$$

$$D^q\beta(t) \ge f(t, \beta(t)) + g(t, \alpha(t)), \quad \beta^0 \ge x^0$$

olmak üzere $\alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ dır.

(ii) $f, g \in C\left[[\tau_0, t_0+T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ $f(t,x)$ fonksiyonu x'e göre azalmayan ve $g(t,y)$ fonksiyonu y' ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t' ye göre artmayan olsun. Üstelik $f(t,x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlasın.

(iii) α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olsun.

O halde

$$(a)\ \alpha(t) \le \beta(t-\eta), \quad t_0 < t \le t_0+T$$

$$(b)\ \alpha(t+\eta) \le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0+T$$

olup burada $\eta = t_0 - \tau_0 > 0$ dır.

İspat. (a) Kabul edelim ki $\beta_0(t) = \beta(t-\eta)$, $t > t_0$ olsun. Bu takdir de

$$\beta_0^0 = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \beta(t-\eta)\,(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$$

olup t yerine $t+\eta$ yazılırsa,

$$\beta_0^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \beta^0 \geq x^0 \geq \alpha^0 \qquad (3.12)$$

elde edilir. $f, g \in C\big[[\tau_0, t_0+T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big]$, $g(t,y)$ fonksiyonu y' ye göre artmayan ve α $(t_0, t_0+T]$ üzerinde azalmayan ayrıca f ve g, her x için t'ye göre artmayan olduğundan $t \in (t_0, t_0+T]$ için,

$$\begin{aligned} D^q\beta_0(t) &= D^q\beta(t-\eta) \\ &\geq f\big(t-\eta, \beta(t-\eta)\big) + g\big(t-\eta, \alpha(t-\eta)\big) \\ &\geq f\big(t-\eta, \beta_0(t)\big) + g\big(t-\eta, \alpha(t)\big) \\ &\geq f\big(t, \beta_0(t)\big) + g\big(t, \alpha(t)\big) \end{aligned}$$

böylece

$$D^q\beta_0(t) \geq f\big(t, \beta_0(t)\big) + g\big(t, \alpha(t)\big) \qquad (3.13)$$

yazılabilir. Bu ise β_0'ın verilen (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş üst çözümü olduğunu gösterir. Burada,

$$\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\big(2L(t-t_0)^q\big)$$

olup λ fonksiyonu,

$$D^q\lambda(t) = 2L\lambda(t), \quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \lambda^0 > 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olmak üzere şimdi keyfi $\varepsilon > 0$ için varsayalım ki

$$\beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) + \varepsilon\lambda(t)$$

olsun. O halde

$$\beta_{0\varepsilon}^0 = \beta_0^0 + \varepsilon\lambda^0 > \beta^0 \geq \alpha^0 \text{ ve } \beta_{0\varepsilon}(t) > \beta_0(t), \quad t > t_0$$

yazılır. Bu takdirde

$$\begin{aligned} D^q\beta_{0\varepsilon}(t) &= D^q\beta_0(t) + \varepsilon D^q\lambda(t) \\ &\geq f\left(t, \beta_0(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right) + 2\varepsilon L\lambda(t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

$\beta_{0\varepsilon} = \beta_0 + \varepsilon\lambda$ için $\beta_0 < \beta_{0\varepsilon}$ olup f fonksiyonu Lipschitz şartını sağladığından

$$f\left(t, \beta_{0\varepsilon}(t)\right) - f\left(t, \beta_0(t)\right) \leq L\left(\beta_{0\varepsilon}(t) - \beta_0(t)\right)$$

olacağından

$$f\left(t, \beta_0(t)\right) \geq f\left(t, \beta_{0\varepsilon}(t)\right) - L\varepsilon\lambda(t) \tag{3.15}$$

eşitsizliği (3.14) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D^q\beta_{0\varepsilon}(t) &\geq f\left(t, \beta_{0\varepsilon}(t)\right) - L\varepsilon\lambda(t) + g\left(t, \alpha(t)\right) + 2\varepsilon L\lambda(t) \\ &> f\left(t, \beta_{0\varepsilon}(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği

$$\alpha(t) < \beta_{0\varepsilon}(t), \; t_0 < t \leq t_0 + T$$

olur.

Buradan $\varepsilon \to 0$ için limit alırsak

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(t) \le \lim_{\varepsilon\to 0}\beta_{0\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)\right\}, \\ &\qquad \alpha(t) \le \beta_0(t) = \beta(t-\eta), \\ &\qquad \alpha(t) \le \beta(t-\eta) \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) Kabul edelim ki $\alpha_0(t)=\alpha(t+\eta), t>\tau_0$ olsun.

$$\alpha_0^0 = \alpha_0(t)(t+\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \alpha(t+\eta)\,(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$$

olup t yerine $t-\eta$ alınırsa,

$$\alpha_0^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \alpha^0 \le x^0 \le \beta^0 \tag{3.16}$$

yazılr. $f,g \in C\left[[\tau_0,t_0+T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$, $g(t,y)$ fonksiyonu y' ye göre artmayan ve β, $(\tau_0,\tau_0+T]$ üzerinde azalmayan ayrıca f ve g, her x için t'ye göre artmayan olduğundan

$$\begin{aligned} D^q\alpha_0(t) &= D^q\alpha(t+\eta) \\ &\le f\left(t+\eta,\alpha(t+\eta)\right)+g\left(t+\eta,\beta(t+\eta)\right) \\ &\le f\left(t+\eta,\alpha_0(t)\right)+g\left(t+\eta,\beta(t)\right) \\ &\le f\left(t,\alpha_0(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right) \end{aligned}$$

yani

$$D^q\alpha_0(t) \le f\left(t,\alpha_0(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right) \tag{3.17}$$

elde edilir. Bu ise α_0'ın verilen (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş alt çözümü olduğunu gösterir.

Şimdi keyfi $\varepsilon>0$ için varsayalım ki $\alpha_{0\varepsilon}(t)=\alpha_0(t)-\varepsilon\lambda(t)$ olsun. O halde $\alpha_{0\varepsilon}<\alpha_0$ olmak üzere

$$\lambda(t)=(t-t_0)^{q-1}E_{q,q}\left(2L(t-t_0)^q\right)$$

olup λ fonksiyonu,

$$D^q\lambda(t)=2L\lambda(t),\quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=\lambda^0>0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğundan

$$\alpha_{0\varepsilon}^0=\alpha_0^0-\varepsilon\lambda^0<\alpha^0\le\beta^0 \text{ ve } \alpha_{0\varepsilon}(t)<\alpha_0(t)$$

olur. Buradan

$$D^q\alpha_{0\varepsilon}(t)=D^q\alpha_0(t)-\varepsilon D^q\lambda(t)$$

α_0, I. tipten eşlenmiş alt çözüm olduğundan

$$D^q\alpha_{0\varepsilon}(t)\le f\left(t,\alpha_0(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right)-2\varepsilon L\lambda(t) \tag{3.18}$$

$\alpha_{0\varepsilon}=\alpha_0-\varepsilon\lambda$ için $\alpha_{0\varepsilon}<\alpha_0$ olup f Lipschitz şartını sağladığından

$$f\left(t,\alpha_0(t)\right)-f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right)\le L\left(\alpha_0(t)-\alpha_{0\varepsilon}(t)\right)$$

olacağından

$$f\left(t,\alpha_0(t)\right)\le f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right)+L\varepsilon\lambda(t) \tag{3.19}$$

eşitsizliği (3.18)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D^q\alpha_{0\varepsilon}(t)&\le f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right)+L\varepsilon\lambda(t)+g\left(t,\beta(t)\right)-2\varepsilon L\lambda(t)\\ &< f\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right)\end{aligned}$$

yani

$$D^q \alpha_{0\varepsilon}(t) < f\left(t, \alpha_{0\varepsilon}(t)\right) + g\left(t, \beta(t)\right)$$

olur. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği

$$\alpha_{0\varepsilon}(t) < \beta(t), \ \tau_0 < t \le \tau_0 + T$$

olur.

Buradan $\varepsilon \to 0$ limit alırsak

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_{0\varepsilon}(t) &\le \lim_{\varepsilon \to 0} \beta(t), \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \alpha_0(t) - \varepsilon \lambda(t) \right\} &\le \lim_{\varepsilon \to 0} \beta(t), \\ \alpha_0(t) = \alpha(t + \eta) &\le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T, \\ \alpha(t + \eta) &\le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi II. tipten başlangıç zaman farklı eşlenmiş alt ve üst çözümler için aşağıdaki karşılaştırma teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1.3. Kabul edelim ki

(i) $\alpha \in C_p\left[\left[t_0, t_0 + T\right], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$, $\beta \in C_p\left[\left[\tau_0, \tau_0 + T\right], \mathbb{R}\right]$ $\tau_0 > t_0$ olup, $p = 1 - q$, $0 < q < 1$ olsun. Burada $f, g \in C\left[\left[t_0, \tau_0 + T\right] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve

$$D^q \alpha(t) \le f\left(t, \beta(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right), \quad \alpha^0 \le x^0$$

$$D^q \beta(t) \ge f\left(t, \alpha(t)\right) + g\left(t, \beta(t)\right), \quad \beta^0 \ge x^0$$

olmak üzere $\alpha^0 = \alpha(t)(t - t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t - \tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ dır.

(ii) $f, g \in C\left[\left[t_0, \tau_0 + T\right] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ $f(t, x)$, x'e göre azalmayan ve $g(t, y)$, y'ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olsun. Üstelik $g(t, x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlasın.

(iii) $\alpha, (t_0, t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olsun.

O halde

$$(a)\ \alpha(t) \le \beta(t+\eta), \quad t_0 < t \le t_0 + T$$

$$(b)\ \alpha(t-\eta) \le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T$$

olup burada $\eta = \tau_0 - t_0 > 0$ dır.

İspat. (a) Kabul edelim ki $\beta_0(t) = \beta(t+\eta)$, $t > t_0$ olsun. Bu takdir de

$$\beta_0^0 = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \beta(t+\eta)\,(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$$

olup t yerine $t-\eta$ alınırsa,

$$\beta_0^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \beta^0 \ge x^0 \ge \alpha^0 \tag{3.20}$$

kalır. $f, g \in C\left[[\tau_0, t_0+T]\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $f(t,x)$ fonksiyonu x' e göre azalmayan ve α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde azalmayan ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olduğundan $t \in (t_0, t_0+T]$ için,

$$\begin{aligned} D^q\beta_0(t) &= D^q\beta(t+\eta) \\ &\ge f\left(t+\eta, \alpha(t+\eta)\right) + g\left(t+\eta, \beta(t+\eta)\right) \\ &\ge f\left(t+\eta, \alpha(t)\right) + g\left(t+\eta, \beta_0(t)\right) \\ &\ge f\left(t, \alpha(t)\right) + g\left(t, \beta_0(t)\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. Bu ise β_0'ın verilen (2.55) probleminin II. tipten eşlenmiş üst çözümü olduğunu gösterir.

Burada

$$\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left(2L(t-t_0)^q\right)$$

olup λ fonksiyonu,

$$D^q\lambda(t)=2L\lambda(t),\quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=\lambda^0>0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olmak üzere şimdi keyfi $\varepsilon>0$ için varsayalım ki $\beta_{0\varepsilon}(t)=\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)$ olsun.

O halde

$$\beta_{0\varepsilon}^0=\beta_0^0+\varepsilon\lambda^0>\beta^0\geq\alpha^0 \text{ ve } \beta_{0\varepsilon}(t)>\beta_0(t),\, t>t_0 \tag{3.22}$$

yazılır. Bu takdirde β_0, II. tipten eşlenmiş üst çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} D^q\beta_{0\varepsilon}(t)&=D^q\beta_0(t)+\varepsilon D^q\lambda(t)\\ &\geq f(t,\alpha(t))+g(t,\beta_0(t))+2\varepsilon L\lambda(t) \end{aligned} \qquad (3.23).$$

$\beta_{0\varepsilon}=\beta_0+\varepsilon\lambda$ için $\beta_0<\beta_{0\varepsilon}$ olup g, Lipschitz şartını sağladığından

$$g(t,\beta_{0\varepsilon}(t))-g(t,\beta_0(t))\leq L(\beta_{0\varepsilon}(t)-\beta_0(t))$$

olacağından

$$g(t,\beta_0(t))\geq g(t,\beta_{0\varepsilon}(t))-L\varepsilon\lambda(t) \tag{3.24}$$

ifadesi (3.23) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} D^q\beta_{0\varepsilon}(t)&\geq f(t,\alpha(t))+g(t,\beta_{0\varepsilon}(t))-L\varepsilon\lambda(t)+2\varepsilon L\lambda(t)\\ &> f(t,\alpha(t))+g(t,\beta_{0\varepsilon}(t)) \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.8.3. gereği

$$\alpha(t)<\beta_{0\varepsilon}(t),\ t_0<t\leq t_0+T$$

olur.

Buradan $\varepsilon \to 0$ için limit alırsak

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(t) \le \lim_{\varepsilon\to 0}\beta_{0\varepsilon}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)\right\}, \\
\alpha(t) \le \beta_0(t) &= \beta(t+\eta), \\
\alpha(t) &\le \beta(t+\eta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) Kabul edelim ki $\alpha_0(t)=\alpha(t-\eta),\, t>\tau_0$ olsun.

$$\alpha_0^0 = \alpha_0(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \alpha(t-\eta)\,(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$$

olup t yerine $t+\eta$ yazırsa,

$$\alpha_0^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \alpha^0 \le x^0 \le \beta^0 \tag{3.26}$$

olur. $f, g \in C\left[\left[\tau_0, t_0+T\right]\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $f(t,x)$ fonksiyonu x'e göre azalmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde azalmayan ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olduğundan $t\in(t_0, t_0+T]$ için,

$$\begin{aligned}
D^q\alpha_0(t) &= D^q\alpha(t-\eta) \\
&\le f\left(t-\eta, \beta(t-\eta)\right)+g\left(t-\eta, \alpha(t-\eta)\right) \\
&\le f\left(t-\eta, \beta(t)\right)+g\left(t-\eta, \alpha_0(t)\right) \\
&\le f\left(t, \beta(t)\right)+g\left(t, \alpha_0(t)\right)
\end{aligned}$$

yani

$$D^q\alpha_0(t) \le f\left(t,\beta(t)\right)+g\left(t,\alpha_0(t)\right) \tag{3.27}$$

elde edilir. Bu ise α_0'ın verilen (2.55) probleminin II. tipten eşlenmiş alt çözümü olduğunu gösterir.

Şimdi keyfi $\varepsilon > 0$ için varsayalım ki $\alpha_{0\varepsilon}(t) = \alpha_0(t) - \varepsilon\lambda(t)$ olsun. O halde $\alpha_{0\varepsilon} < \alpha_0$ olmak üzere

$$\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left(2L(t-t_0)^q\right)$$

olup λ fonksiyonu,

$$D^q\lambda(t) = 2L\lambda(t), \quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \lambda^0 > 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğundan

$$\alpha_{0\varepsilon}^0 = \alpha_0^0 - \varepsilon\lambda^0 < \alpha^0 \leq \beta^0 \text{ ve } \alpha_{0\varepsilon}(t) < \alpha_0(t) \tag{3.28}$$

olur. Böylece;

$$D^q\alpha_{0\varepsilon}(t) = D^q\alpha_0(t) - \varepsilon D^q\lambda(t)$$

α_0, II. tipten eşlenmiş alt çözüm olduğundan

$$D^q\alpha_{0\varepsilon}(t) \leq f\left(t,\beta(t)\right) + g\left(t,\alpha_0(t)\right) - 2\varepsilon L\lambda(t) \tag{3.29}$$

$\alpha_{0\varepsilon} = \alpha_0 - \varepsilon\lambda$ için $\alpha_{0\varepsilon} < \alpha_0$ olup g fonksiyonu Lipschitz şartını sağladığından

$$g\left(t,\alpha_0(t)\right) - g\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) \leq L\left(\alpha_0(t) - \alpha_{0\varepsilon}(t)\right)$$

olacağından

$$g\left(t,\alpha_0(t)\right) \leq g\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) + L\varepsilon\lambda(t) \tag{3.30}$$

ifadesi (3.29) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} D^q\alpha_{0\varepsilon}(t) &\leq f\left(t,\beta(t)\right) + g\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) + L\varepsilon\lambda(t) - 2\varepsilon L\lambda(t) \\ &< f\left(t,\beta(t)\right) + g\left(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)\right) \end{aligned}$$

yani

$$D^q \alpha_{0\varepsilon}(t) < f(t,\beta(t)) + g(t,\alpha_{0\varepsilon}(t)) \tag{3.31}$$

olur. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği

$$\alpha_{0\varepsilon}(t) < \beta(t),\ \tau_0 < t \le \tau_0 + T$$

olur. Buradan $\varepsilon \to 0$ limit alırsak

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_{0\varepsilon}(t) &\le \lim_{\varepsilon\to 0} \beta(t), \\
\lim_{\varepsilon\to 0} \{\alpha_0(t) - \varepsilon\lambda(t)\} &\le \lim_{\varepsilon\to 0} \beta(t), \\
\alpha_0(t) = \alpha(t-\eta) &\le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T, \\
\alpha(t-\eta) &\le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$t_0 > \tau_0$ olduğu durumda bir önceki teoremde f ve g, her x için t'ye göre artmayan ayrıca α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde artmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde artmayan alınırsa aşağıdaki teorem geçerli kalır.

Teorem 3.1.4. Kabul edelim ki

(i) $\alpha \in C_p\left[[t_0, t_0+T], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$, $\beta \in C_p\left[[\tau_0, \tau_0+T], \mathbb{R}\right]$, $\tau_0 < t_0$ olup, $p = 1-q$, $0 < q < 1$ olsun. Burada $f, g \in C\left[[\tau_0, t_0+T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve

$$D^q \alpha(t) \le f(t,\beta(t)) + g(t,\alpha(t)), \quad \alpha^0 \le x^0$$

$$D^q \beta(t) \ge f(t,\alpha(t)) + g(t,\beta(t)), \quad \beta^0 \ge x^0$$

olmak üzere $\alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ dır.

(ii) $f, g \in C\left[[\tau_0, t_0+T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ $f(t,x)$ fonksiyonu x' e göre azalmayan ve $g(t,y)$ fonksiyonu y' ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t' ye göre artmayan olsun. Üstelik $g(t,x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz şartını sağlasın.

(iii) α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde artmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde artmayan olsun.

O halde

$$(a)\ \alpha(t) \le \beta(t-\eta), \quad t_0 < t \le t_0+T$$

$$(b)\ \alpha(t+\eta) \le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0+T$$

olup burada $\eta = t_0 - \tau_0 > 0$ dır.

Son olarak III. tipten başlangıç zaman farklı eşlenmiş alt ve üst çözümler için aşağıdaki karşılaştırma teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1.5. Kabul edelim ki

(i) $\alpha \in C_p\left[[t_0, t_0+T], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$, $\beta \in C_p\left[[\tau_0, \tau_0+T], \mathbb{R}\right]$, $\tau_0 > t_0$ olmak üzere $p = 1-q$ ve $0 < q < 1$ olsun. Burada $f, g \in C\left[[t_0, \tau_0+T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve

$$D^q\alpha(t) \le f(t, \beta(t)) + g(t, \beta(t)), \quad \alpha^0 \le x^0$$

$$D^q\beta(t) \ge f(t, \alpha(t)) + g(t, \alpha(t)), \quad \beta^0 \ge x^0$$

olmak üzere $\alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ dır.

(ii) $f, g \in C\left[[t_0, \tau_0+T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve $f(t,x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan ve $g(t,y)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t' ye göre azalmayan olsun.

(iii) α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde artmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde artmayan olsun.

O halde

$$(a)\ \alpha(t) \le \beta(t+\eta), \quad t_0 < t \le t_0+T$$

$$(b)\ \alpha(t-\eta) \le \beta(t), \quad \tau_0 < t \le \tau_0+T$$

olup burada $\eta = \tau_0 - t_0 > 0$ dır.

İspat. (a) Kabul edelim ki $\beta_0(t) = \beta(t+\eta)$, $t > t_0$ olsun. Bu takdir de

$$\beta_0^0 = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \beta(t+\eta)\,(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$$

olup t yerine $t-\eta$ yazılırsa,

$$\beta_0^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \beta^0 \geq x^0 \geq \alpha^0 \tag{3.32}$$

elde edilir. f ve g fonksiyonları ikinci değişkene göre artmayan ve α, $(t_0, t_0+T]$ aralığı üzerinde artmayan ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} D^q\beta_0(t) &= D^q\beta(t+\eta) \\ &\geq f\big(t+\eta, \alpha(t+\eta)\big) + g\big(t+\eta, \alpha(t+\eta)\big) \\ &\geq f\big(t+\eta, \alpha(t)\big) + g\big(t+\eta, \alpha(t)\big) \\ &\geq f\big(t, \alpha(t)\big) + g\big(t, \alpha(t)\big) \end{aligned} \tag{3.33}$$

olduğu görülür. Böylece (3.33) eşitsizliği gereği,

$$D^q\beta_0(t) \geq f\big(t, \alpha(t)\big) + g\big(t, \alpha(t)\big)$$

sonucuna varılır. Bu ise β_0'ın verilen (2.55) probleminin III. tipten eşlenmiş üst çözümü olduğunu gösterir. Burada,

$$\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left(2L(t-t_0)^q\right)$$

olup λ fonksiyonu,

$$D^q\lambda(t) = 2L\lambda(t), \quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \lambda^0 > 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olmak üzere şimdi keyfi $\varepsilon > 0$ için varsayalım ki

$$\beta_{0\varepsilon}(t)=\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)$$

olsun. O halde,

$$\beta_{0\varepsilon}^0=\beta_0^0+\varepsilon\lambda^0>\beta^0\geq\alpha^0 \text{ ve } \beta_{0\varepsilon}(t)>\beta_0(t),\, t\geq t_0$$

yazılır. β_0, III. tipten eşlenmiş üst çözüm olduğundan

$$\begin{aligned} D^q\beta_{0\varepsilon}(t) &= D^q\beta_0(t)+\varepsilon D^q\lambda(t) \\ &\geq f(t,\alpha(t))+g(t,\alpha(t))+2\varepsilon L\lambda(t) \\ &> f(t,\alpha(t))+g(t,\alpha(t)) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği $t_0<t\leq t_0+T$ için

$$\alpha(t)<\beta_{0\varepsilon}(t)$$

olur. Buradan $\varepsilon\to 0$ için limit alırsak $(t_0,t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(t)\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\beta_{0\varepsilon}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)\}, \\ &\alpha(t)\leq\beta_0(t)=\beta(t+\eta), \\ &\alpha(t)\leq\beta(t+\eta) \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) Kabul edelim ki $\alpha_0(t)=\alpha(t-\eta)$, $t>\tau_0$ olsun.

$$\alpha_0^0=\alpha_0(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}=\alpha(t-\eta)\,(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$$

olup t yerine $t+\eta$ alınırsa,

$$\alpha_0^0=\alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=\alpha^0\leq x^0\leq\beta^0 \tag{3.34}$$

yazılır. f ve g fonksiyonları ikinci değişkene göre artmayan ve β, $(\tau_0,\tau_0+T]$ üzerinde artmayan ayrıca f ve g, her x için t' ye göre azalmayan olduğundan

$$
\begin{aligned}
D^q\alpha_0(t) &= D^q\alpha(t-\eta) \\
&\le f\left(t-\eta,\beta(t-\eta)\right)+g\left(t-\eta,\beta(t-\eta)\right) \\
&\le f\left(t-\eta,\beta(t)\right)+g\left(t-\eta,\beta(t)\right) \\
&\le f\left(t,\beta(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right) \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Böylece (3.35)' ten

$$
D^q\alpha_0(t)\le f\left(t,\beta(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right) \qquad (3.36)
$$

elde edilir. Bu ise α_0'ın verilen (2.55) probleminin III. tipten eşlenmiş alt çözümü olduğunu gösterir. Şimdi keyfi $\varepsilon>0$ için varsayalım ki $\alpha_{0\varepsilon}(t)=\alpha_0(t)-\varepsilon\lambda(t)$ olsun. O halde $\alpha_{0\varepsilon}<\alpha_0$ olmak üzere $\lambda(t)=(t-t_0)^{q-1}E_{q,q}\left(2L(t-t_0)^q\right)$ olduğundan $\alpha_{0\varepsilon}^0=\alpha_0^0-\varepsilon\lambda^0<\alpha^0\le\beta^0$ ve $\alpha_{0\varepsilon}(t)<\alpha_0(t)$ olur.

Böylece;

$$
D^q\alpha_{0\varepsilon}(t)=D^q\alpha_0(t)-\varepsilon D^q\lambda(t).
$$

α_0, III. tipten eşlenmiş alt çözüm ve λ fonksiyonu,

$$
D^q\lambda(t)=2L\lambda(t), \quad \lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=\lambda^0>0
$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğundan

$$
\begin{aligned}
D^q\alpha_{0\varepsilon}(t) &\le f\left(t,\beta(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right)-2\varepsilon L\lambda(t) \\
&< f\left(t,\beta(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.8.4 gereği $\tau_0<t\le\tau_0+T$ için

$$
\alpha_{0\varepsilon}(t)<\beta(t)
$$

olur. Buradan $\varepsilon\to 0$ limit alırsak

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\alpha_0(t)-\varepsilon\lambda(t)\right\}\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\beta(t),$$
$$\alpha_0(t)=\alpha(t-\eta)\leq\beta(t),\quad \tau_0<t\leq\tau_0+T,$$
$$\alpha(t-\eta)\leq\beta(t),\quad \tau_0<t\leq\tau_0+T$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

$t_0>\tau_0$ olduğu durumda Teorem 3.1.5'deki (ii) ve (iii) şartları; f ve g, her x için t'ye göre artmayan ayrıca α, $(t_0,t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0,\tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olarak alınırsa aşağıdaki teorem geçerli kalır.

Teorem 3.1.6. Kabul edelim ki

(i) $\alpha\in C_p\left[[t_0,t_0+T],\mathbb{R}\right]$ $t_0,T>0,$ $\beta\in C_p\left[[\tau_0,\tau_0+T],\mathbb{R}\right],$ $\tau_0>t_0$ olmak üzere $p=1-q$ ve $0<q<1$ olsun. Burada $f,g\in C\left[[t_0,\tau_0+T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$ ve

$$D^q\alpha(t)\leq f\left(t,\beta(t)\right)+g\left(t,\beta(t)\right),\quad \alpha^0\leq x^0$$

$$D^q\beta(t)\geq f\left(t,\alpha(t)\right)+g\left(t,\alpha(t)\right),\quad \beta^0\geq x^0$$

olmak üzere $\alpha^0=\alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0=\beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ dır.

(ii) $f,g\in C\left[[t_0,\tau_0+T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$ ve $f(t,x)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan ve $g(t,y)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t' ye göre artmayan olsun.

(iii) α, $(t_0,t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0,\tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olsun.

O halde

$$(a)\ \alpha(t)\leq\beta(t-\eta),\quad t_0<t\leq t_0+T$$

$$(b)\ \alpha(t+\eta)\leq\beta(t),\quad \tau_0<t\leq\tau_0+T$$

olup burada $\eta=t_0-\tau_0>0$ dır.

3.2. Varlık Teoremleri

$t \in (t_0, t_0 + T]$ için v, w fonksiyonları (2.53) probleminin alt ve üst çözümleri olmak üzere $v(t) \leq w(t)$ ise

$$\Omega = \left\{ (t, x) : (t - t_0)^p\, v(t) \leq x \leq (t - t_0)^p\, w(t), t \in [t_0, t_0 + T] \right\}$$

kapalı kümesi üzerinde (2.53) probleminin çözümünün varlığı ispat edilebilir.

Şimdi I. tipten başlangıç zaman farklı eşlenmiş alt ve üst çözümler için aşağıdaki varlık teoremini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.2.1. Kabul edelim ki

(i) $\alpha \in C_p\left[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$, $\beta \in C_p\left[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}\right]$ $\tau_0 > t_0$ olup, $p = 1 - q$, $0 < q < 1$ olsun. Burada $f, g \in C\left[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ ve

$$D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)) + g(t, \beta(t)), \quad \alpha^0 \leq x^0$$

$$D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)) + g(t, \alpha(t)), \quad \beta^0 \geq x^0$$

olmak üzere $\alpha^0 = \alpha(t)(t - t_0)^{1-q}\Big|_{t = t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t - \tau_0)^{1-q}\Big|_{t = \tau_0}$ dır.

(ii) $f, g \in C\left[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $f(t, x)$, x' e göre azalmayan ve $g(t, y)$, y' ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t' ye göre azalmayan ve $\alpha(t) \leq \beta(t + \eta)$, $t_0 < t \leq t_0 + T$ ve $\eta = \tau_0 - t_0$ olsun.

(iii) α, $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde artmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0 + T]$ üzerinde artmayan olsun.

O halde $\eta = \tau_0 - t_0 > 0$ için $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde (2.55) probleminin bir $x(t)$ çözümü vardır öyle ki $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t + \eta)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\beta_0(t) = \beta(t+\eta)$, $t > t_0$ olsun. Bu takdir de;

$$\beta_0^0 = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = \beta(t+\eta)\,(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$$

olup t yerine $t-\eta$ yazılırsa,

$$\beta_0^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = \beta^0 \geq x^0 \geq \alpha^0 \qquad (3.37)$$

elde edilir. $g(t,y)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre artmayan ve α, $(t_0, t_0+T]$ aralığı üzerinde artmayan ayrıca f ve g, her x için t' ye göre azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} D^q\beta_0(t) &= D^q\beta(t+\eta) \\ &\geq f\left(t+\eta, \beta(t+\eta)\right) + g\left(t+\eta, \alpha(t+\eta)\right) \\ &\geq f\left(t+\eta, \beta_0(t)\right) + g\left(t+\eta, \alpha(t)\right) \\ &\geq f\left(t, \beta_0(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece son eşitsizlikten

$$D^q\beta_0(t) \geq f\left(t, \beta_0(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right) \qquad (3.38)$$

elde edilir. Bu ise β_0'ın verilen (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş üst çözümü olduğunu gösterir.

f ve g fonksiyonları;

$$\Omega = \left\{(t,x) : (t-t_0)^p\, v(t) \leq x \leq (t-t_0)^p\, w(t), t \in [t_0, t_0+T]\right\}$$

kümesi üzerinde sürekli olduğundan $f(t,x) = f\left(t, (t-t_0)^p x\right)$ ve $g(t,x) = g\left(t, (t-t_0)^p x\right)$ yazılır.

Şimdi kabul edelim ki

$$p:[t_0,t_0+T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$
$$p(t,x)=\max\left[(t-t_0)^p\alpha(t),\min\left((t-t_0)^p x(t),(t-t_0)^p\beta_0(t)\right)\right] \qquad (3.39)$$

olsun. O halde f ve g fonksiyonları;

$$\Omega=\left\{(t,x):(t-t_0)^p v(t)\le x\le (t-t_0)^p w(t), t\in[t_0,t_0+T]\right\}$$

kümesi üzerinde sınırlı olduğundan $[t_0,t_0+T]\times\mathbb{R}$ üzerinde f ve g fonksiyonların sürekli bir genişlemesi olan $f(t,p(t,x))$ ve $g(t,p(t,x))$ fonksiyonları da sınırlıdır. Dolayısıyla Teorem 2.8.6 gereği

$$D^q x(t)=f(t,p(t,x))+g(t,p(t,x)),\quad x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0 \qquad (3.40)$$

probleminin $(t_0,t_0+T]$ üzerinde bir $x(t)$ çözümü vardır.

Şimdi keyfi $\varepsilon>0$ için $\alpha_\varepsilon(t)=\alpha(t)-\varepsilon\lambda(t)$ ve $\beta_{0\varepsilon}(t)=\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)$ olup burada $\lambda(t)=(t-t_0)^{q-1}E_{q,q}\left((t-t_0)^q\right)$ olduğunu göz önünde bulunduralım.

Açıktır ki

$$\begin{aligned}\alpha_\varepsilon^0&=\alpha_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}\\&=\alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}-\varepsilon\lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}\\&=\alpha^0-\varepsilon\lambda^0\end{aligned}$$

yani

$$\alpha_\varepsilon^0=\alpha^0-\varepsilon\lambda^0 \qquad (3.41)$$

elde edilir. Ayrıca benzer şekilde

$$\beta_{0\varepsilon}^0=\beta^0+\varepsilon\lambda^0 \qquad (3.42)$$

yazılır. Bu takdir de (3.41) ve (3.42) sonuçları birleştirilirse o halde $\lambda^0 > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\alpha_\varepsilon^0 < \alpha^0 \le x^0 \le \beta^0 < \beta_{0\varepsilon}^0 \\ &\alpha_\varepsilon^0 < x^0 < \beta_{0\varepsilon}^0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Şimdi $[t_0, t_0 + T]$ üzerinde

$$(t - t_0)^p \alpha_\varepsilon(t) < (t - t_0)^p x(t) < (t - t_0)^p \beta_{0\varepsilon}(t)$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bu ifade doğru olmasın. O halde en az bir $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ vardır öyle ki

$$(t_1 - t_0)^p x(t_1) = (t_1 - t_0)^p \beta_{0\varepsilon}(t_1)$$

ve $t_0 \le t < t_1$ için

$$(t - t_0)^p \alpha_\varepsilon(t) < (t - t_0)^p x(t) < (t - t_0)^p \beta_{0\varepsilon}(t)$$

olsun. Yani α_ε, x ve $\beta_{0\varepsilon}$ sürekli olduğundan dolayı $t_0 < t < t_1$ olmak üzere $\alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} (t_1 - t_0)^p x(t_1) &= (t_1 - t_0)^p \beta_{0\varepsilon}(t_1) \\ &= (t_1 - t_0)^p \beta_0(t_1) + (t_1 - t_0)^p \varepsilon\lambda(t_1) \\ &> (t_1 - t_0)^p \beta_0(t_1) \end{aligned}$$

yani

$$(t_1 - t_0)^p x(t_1) > (t_1 - t_0)^p \beta_0(t_1) \tag{3.44}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} p(t_1, x(t_1)) &= \max\left[(t_1 - t_0)^p \alpha(t_1), \min\left((t_1 - t_0)^p x(t_1), (t_1 - t_0)^p \beta_0(t_1)\right)\right] \\ &= \max\left[(t_1 - t_0)^p \alpha(t_1), (t_1 - t_0)^p \beta_0(t_1)\right] \end{aligned}$$

ve

$$(t_1-t_0)^p\,\alpha(t_1)\le(t_1-t_0)^p\,\beta(t_1+\eta)=(t_1-t_0)^p\,\beta_0(t_1)$$

olduğundan

$$p(t_1,x(t_1))=(t_1-t_0)^p\,\beta_0(t_1) \tag{3.45}$$

olur. O halde $(t_1-t_0)^p\,x(t_1)>(t_1-t_0)^p\,\beta_0(t_1)$ ve $p(t_1,x(t_1))=(t_1-t_0)^p\,\beta_0(t_1)$ olduğundan,

$$(t_1-t_0)^p\,\alpha(t_1)\le p(t_1,x(t_1))\le(t_1-t_0)^p\,\beta_0(t_1) \tag{3.46}$$

kalır. $(t_0,t_1]$ üzerinde $m(t)=x(t)-\beta_{0\varepsilon}(t)$ teşkil edelim.

$$m(t_1)=x(t_1)-\beta_{0\varepsilon}(t_1)=0 \tag{3.47}$$

olduğu görülür. Buradan $(t_0,t_1]$ üzerinde $m(t_1)=0$ ve $m(t)\le 0$ olduğundan Lemma 2.8.8 gereği,

$$D^q m(t_1)\ge 0 \tag{3.48}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
f\left(t_1,(t_1-t_0)^p\,\beta_0(t_1)\right)+g\left(t_1,(t_1-t_0)^p\,\alpha(t_1)\right)&\ge f\left(t_1,p(t_1,x(t_1))\right)+g\left(t_1,p(t_1,x(t_1))\right)\\
&=D^q x(t_1)\\
&\ge D^q\beta_{0\varepsilon}(t_1)\\
&=D^q\beta_0(t_1)+\varepsilon D^q\lambda(t_1)\\
&>D^q\beta_0(t_1)\\
&\ge f\left(t_1,\beta_0(t_1)\right)+g\left(t_1,\alpha(t_1)\right)\\
&=f\left(t_1,(t_1-t_0)^p\,\beta_0(t_1)\right)+g\left(t_1,(t_1-t_0)^p\,\alpha(t_1)\right).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Bu ise bir çelişkidir. Diğer durum benzer şekilde gösterilebilir. Sonuç olarak $[t_0,t_0+T]$ üzerinde

$$(t-t_0)^p\alpha_\varepsilon(t)<(t-t_0)^p x(t)<(t-t_0)^p\beta_{0\varepsilon}(t)$$

olur. α_ε, x ve $\beta_{0\varepsilon}$, sürekli olduğundan dolayı $t_0<t\le t_0+T$ olmak üzere

$$\alpha_\varepsilon(t)<x(t)<\beta_{0\varepsilon}(t) \qquad (3.50)$$

yazılır. Burada $\varepsilon\to 0$ limit alınırsa $(t_0,t_0+T]$ üzerinde

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\alpha(t)-\varepsilon\lambda(t)\}\le\lim_{\varepsilon\to 0}x(t)\le\lim_{\varepsilon\to 0}\{\beta_0(t)+\varepsilon\lambda(t)\},$$
$$\alpha(t)\le x(t)\le\beta_0(t)=\beta(t+\eta)$$

olur. Böylece ispat biter.

$t_0>\tau_0$ olduğu durumda Teorem 3.2.1' deki (ii) ve (iii) şartları; f ve g, her x için t' ye göre artmayan ayrıca α, $(t_0,t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0,\tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olarak alınırsa aşağıdaki teorem geçerli kalır.

Teorem 3.2.2. Kabul edelim ki

(i) $\alpha\in C_p\big[[t_0,t_0+T],\mathbb{R}\big]$ $t_0,T>0$, $\beta\in C_p\big[[\tau_0,\tau_0+T],\mathbb{R}\big]$ $\tau_0<t_0$ olup $p=1-q$, $0<q<1$ olsun. Burada $f,g\in C\big[[\tau_0,t_0+T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big]$ ve

$$D^q\alpha(t)\le f(t,\alpha(t))+g(t,\beta(t)), \quad \alpha^0\le x^0,$$

$$D^q\beta(t)\ge f(t,\beta(t))+g(t,\alpha(t)), \quad \beta^0\ge x^0$$

olmak üzere $\alpha^0=\alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\big|_{t=t_0}$, $\beta^0=\beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\big|_{t=\tau_0}$ dır.

(ii) $f,g\in C\big[[t_0,\tau_0+T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\big]$, $f(t,x)$, x' e göre azalmayan ve $g(t,y)$, y' ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t' ye göre artmayan ve $\alpha(t)\le\beta(t-\eta)$, $t_0<t\le t_0+T$ ve $\eta=t_0-\tau_0$ olsun.

(iii) α, $(t_0,t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0,\tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olsun.

O halde $\eta = t_0 - \tau_0 > 0$ için $\left(t_0, t_0 + T\right]$ üzerinde $\left(2.55\right)$ probleminin bir $x\left(t\right)$ çözümü vardır öyle ki $\alpha\left(t\right) \leq x\left(x\right) \leq \beta\left(t - \eta\right)$.

4. KESİRLİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI MONOTON İTERATİF TEKNİK

Bu bölümde üst ve alt çözümü başlangıç zaman farklı seçilen lineer olmayan kesirli basamaktan diferensiyel denklem için monoton iteratif tekniğe başvurulacaktır. Monoton iteratif teknikte ise alt ve üst çözüm metodu ile birlikte, verilen lineer olmayan problemin ekstremal çözümlerine düzgün ve monoton olarak yakınsayan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilir. Bu dizilerin her bir üyesi lineer diferensiyel denklemlerin çözümleri olması bakımından da çok önemlidir $[13]$.

Monoton iteratif tekniğinin farklı tiplerdeki kesirli mertebeden diferensiyel denklemlere uygulanması konusu ise daha yenidir.

4.1. Genelleştirilmiş Monoton İteratif Teknik

Genelleştirilmiş monoton iteratif teknikte ise diferensiyel denklemler teorisinde alt ve üst çözümler metodu yardımıyla çeşitli biçimlerdeki eşlenmiş alt ve üst çözümler için verilen başlangıç değer probleminin maksimal ve minimal (ekstremal) çözümlerine düzgün ve monoton olarak yakınsayan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilecektir.

Teorem 4.1.1. Kabul edelim ki

$(A1)$ $\alpha \in C_p\left[\left[t_0, t_0+T\right], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$ ve $\beta \in C_p\left[\left[\tau_0, \tau_0+T\right], \mathbb{R}\right]$ $\tau_0 > t_0$ olup, $p = 1-q$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere α ve β fonksiyonları (2.55) probleminin sırasıyla I. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümüdür öyle ki

$$\begin{aligned} D^q\alpha &\le f(t,\alpha) + g(t,\beta), \alpha^0 \le x^0 \quad t_0 < t \le t_0 + T, \\ D^q\beta &\ge f(t,\beta) + g(t,\alpha), \beta^0 \ge x^0 \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T \end{aligned}$$

burada $t_0 < s_0 < \tau_0$ ve $\alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $x^0 = x(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ şeklindedir. Ayrıca $(t_0, t_0+T]$ üzerinde $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ olmak üzere $\alpha(t) \le \beta(t+\eta_1)$ olsun.

$(A2)$ f, $g \in C\big[[t_0, \tau_0+T]\times\mathbb{R}, \mathbb{R}\big]$, $f(t,x)$, x'e göre azalmayan ve $g(t,y)$, y'ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t' ye göre azalmayan olsun.

$(A3)$ α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde artmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde artmayan olsun.

O halde $\{\alpha_n(t)\}$, $\{\beta_n(t)\} \in C_p\big[[s_0, s_0+T], \mathbb{R}\big]$ monoton fonksiyon dizileri vardır öyle ki $[s_0, s_0+T]$ üzerinde düzgün ve monoton olarak $n \to \infty$ için $(t-s_0)^p \alpha_n(t) \to (t-s_0)^p \rho(t)$ ve $(t-s_0)^p \beta_n(t) \to (t-s_0)^p r(t)$ olup ρ ve r limit fonksiyonları $(s_0, s_0+T]$ üzerinde

$$D^q x(t) = f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t)\big), \quad x(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

başlangıç değer probleminin sırasıyla eşlenmiş minimal ve maksimal çözümleridir. Yani;

$$D^q \rho(t) = f\big(t, \rho(t)\big) + g\big(t, r(t)\big), \quad \rho(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0 \quad , s_0 < t \le s_0+T$$

$$D^q r(t) = f\big(t, r(t)\big) + g\big(t, \rho(t)\big), \quad r(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0 \quad , s_0 < t \le s_0+T$$

yazılabilir.

İspat. $(t_0, t_0+T]$ üzerinde $\alpha(t) \le \beta(t+\eta_1)$, $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ olmak üzere f ve g, her x için t değişkenine göre azalmayan ve $\beta(t+\eta_1) = \tilde{\beta}_0(t)$ ve $\alpha(t) = \tilde{\alpha}_0(t)$ olsun.

Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde f ve g, her x için t' ye göre azalmayan ve $(A3)$' ü kullanarak

$$\begin{aligned}
D^q \tilde{\beta}_0(t) &= D^q \beta(t+\eta_1) \\
&\geq f\left(t+\eta_1, \beta(t+\eta_1)\right) + g\left(t+\eta_1, \alpha(t+\eta_1)\right) \\
&= f\left(t+\eta_1, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_1, \alpha(t+\eta_1)\right) \\
&\geq f\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t, \alpha(t+\eta_1)\right) \\
&\geq f\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t, \alpha(t)\right) \\
&= f\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right)
\end{aligned}$$

yani

$$D^q \tilde{\beta}_0(t) \geq f\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right)$$

ve $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_0^0 &= \tilde{\beta}_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\
&= \beta(t+\eta_1)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\
&= \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} \\
&= \beta^0 \geq x^0 \geq \alpha^0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}
D^q \tilde{\alpha}_0(t) &= D^q \alpha(t) \\
&\leq f\left(t, \alpha(t)\right) + g\left(t, \beta(t)\right) \\
&\leq f\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right) + g\left(t, \beta(t+\eta_1)\right) \\
&= f\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right) + g\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right)
\end{aligned}$$

böylece

$$D^q \tilde{\alpha}_0(t) \leq f\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right) + g\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right)$$

ve $\left(t_0, t_0+T\right]$ üzerinde

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0^0 &= \tilde{\alpha}_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\ &= \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\ &= \alpha^0 \le x^0 \le \beta^0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{\alpha}_0$ ve $\tilde{\beta}_0$ 'ın verilen (2.55) probleminin sırasıyla I. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümü olduğunu gösterir.

$\eta_2 = s_0 - t_0 > 0$ olmak üzere her $n \ge 0$ için aşağıdaki lineer başlangıç değer problemlerini göz önüne alalım.

$$D^q \tilde{\alpha}_{n+1}(t) = f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n(t)\right), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0 \qquad (4.1)$$

$$D^q \tilde{\beta}_{n+1}(t) = f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n(t)\right), \quad \tilde{\beta}_{n+1}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0 \qquad (4.2)$$

$\tilde{\alpha}_{n+1}$ ve $\tilde{\beta}_{n+1}$, $C_p\left[\left[t_0, t_0+T\right], \mathbb{R}\right]$ üzerinde tek çözümlere sahiptir. Şimdi $\left(t_0, t_0+T\right]$ üzerinde

$$\tilde{\alpha}_0 \le \tilde{\alpha}_1 \le \tilde{\alpha}_2 \le \ldots \le \tilde{\alpha}_n \le \tilde{\beta}_n \le \tilde{\beta}_{n-1} \le \ldots \le \tilde{\beta}_2 \le \tilde{\beta}_1 \le \tilde{\beta}_0$$

olduğunu gösterelim. Bu takdirde $t \in \left(t_0, t_0+T\right]$ olmak üzere (4.1) denkleminde $n=0$ alalım ve

$$p(t) = \tilde{\alpha}_0(t) - \tilde{\alpha}_1(t)$$

teşkil edelim.

$$D^q p(t) = D^q \tilde{\alpha}_0(t) - D^q \tilde{\alpha}_1(t)$$

$\tilde{\alpha}_0$ alt çözüm olduğundan

$$\le f\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right) + g\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right) - \left(f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right)\right)$$

f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} D^q p(t) &\le f\left(t,\tilde{\alpha}_0(t)\right)+g\left(t,\tilde{\beta}_0(t)\right)-\left(f\left(t,\tilde{\alpha}_0(t)\right)+g\left(t,\tilde{\beta}_0(t)\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve ayrıca

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \le 0$$

elde edilir. Buradan $(t_0,t_0+T]$ üzerinde $D^q p(t)\le 0$ ve $p^0 \le 0$ olduğundan

Sonuç 2.8.7 kullanılırsa

$$\begin{aligned} p(t) &\le 0 \\ \tilde{\alpha}_0(t) &\le \tilde{\alpha}_1(t) \end{aligned} \qquad (4.3)$$

elde edilir. $t\in(t_0,t_0+T]$ olmak üzere

$$p(t)=\tilde{\alpha}_1(t)-\tilde{\beta}_1(t)$$

teşkil edelim. $f,\ g\in C\left[[t_0,\tau_0+T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$, $f(t,x)$, x' e göre azalmayan ve $g(t,y)$, y' ye göre artmayan olduğundan ayrıca (4.1) ve (4.2) denklemlerinde $n=0$ için,

$$\begin{aligned} D^q p(t) &= D^q\tilde{\alpha}_1(t)-D^q\tilde{\beta}_1(t) \\ &= f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_0(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_0(t)\right)-\left(f\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_0(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_0(t)\right)\right) \\ &= f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_0(t)\right)-f\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_0(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_0(t)\right)-g\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_0(t)\right) \\ &\le 0 \end{aligned}$$

yani;

$$D^q p(t)\le 0$$

dır ve

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

elde edilir. Buradan $t \in (t_0, t_0 + T]$ olmak üzere $D^q p(t) \le 0$ ve $p^0 = 0$ olduğundan Sonuç 2.8.7 gereği

$$\begin{aligned} &p(t) \le 0 \\ &\tilde{\alpha}_1(t) \le \tilde{\beta}_1(t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde

$$p(t) = \tilde{\beta}_1(t) - \tilde{\beta}_0(t)$$

teşkil edelim. Bu takdirde $t \in (t_0, t_0 + T]$ olmak üzere (4.2) denkleminde $n = 0$ alalım. $\beta(t+\eta_1) = \tilde{\beta}_0(t)$ ve $\tilde{\beta}_0$ üst çözüm olduğundan;

$$\begin{aligned} D^q p(t) &= D^q \tilde{\beta}_1(t) - D^q \tilde{\beta}_0(t) \\ &= D^q \tilde{\beta}_1(t) - D^q \beta(t+\eta_1) \\ &\le f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) - \left(f\left(t+\eta_1, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_1, \tilde{\alpha}_0(t)\right)\right) \end{aligned}$$

f ve g, her x için t' ye göre azalmayan ve $\eta_2 < \eta_1$ olduğundan

$$\begin{aligned} D^q p(t) &\le f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) - \left(f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yani

$$D^q p(t) \le 0$$

dır ve

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \le 0$$

elde edilir. Buradan $D^q p(t) \le 0$ ve $p^0 \le 0$ olduğundan Sonuç 2.8.7 kullanılırsa $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde

$$\begin{aligned} p(t) &\le 0 \\ \tilde{\beta}_1(t) &\le \tilde{\beta}_0(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Dolayısıyla $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde

$$\tilde{\alpha}_0 \le \tilde{\alpha}_1 \le \tilde{\beta}_1 \le \tilde{\beta}_0 \tag{4.6}$$

olur. Matematiksel İndüksiyon prensibi gereği $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde $k \ge 1$ için $\tilde{\alpha}_{k-1} \le \tilde{\alpha}_k \le \tilde{\beta}_k \le \tilde{\beta}_{k-1}$ doğru olduğunu kabul edip $\tilde{\alpha}_k \le \tilde{\alpha}_{k+1} \le \tilde{\beta}_{k+1} \le \tilde{\beta}_k$ eşitsizliğinin var olduğu gösterilmelidir. Bu takdirde $t \in (t_0, t_0 + T]$ olmak üzere

$$p(t) = \tilde{\alpha}_k(t) - \tilde{\alpha}_{k+1}(t)$$

teşkil edelim.

$f, g \in C\left[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ $f(t,x)$ x'e göre azalmayan ve $g(t,y)$ y'ye göre artmayan olduğunu kullanarak; $t \in (t_0, t_0 + T]$ için

$$\begin{aligned} D^q p(t) &= D^q \tilde{\alpha}_k(t) - D^q \tilde{\alpha}_{k+1}(t) \\ &= f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1}(t)\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_k(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{k-1}(t)\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_k(t)\right) \\ &\le f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_k(t)\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_k(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_k(t)\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_k(t)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

elde edilir. Buradan $D^q p(t) \le 0$ ve $p^0 = 0$ olduğundan dolayı Sonuç 2.8.7 gereği $t \in (t_0, t_0 + T]$ için

$$p(t) \leq 0$$
$$\tilde{\alpha}_k(t) \leq \tilde{\alpha}_{k+1}(t) \tag{4.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde $\tilde{\alpha}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1}$ ve $\tilde{\beta}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_k$ olduğu gösterilebilir. Böylece Matematiksel İndiksiyon Prensibiyle göstermiş olduk ki $t \in (t_0, t_0+T]$ olmak üzerinde her n için,

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\alpha}_2 \leq \ldots \leq \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{\beta}_n \leq \tilde{\beta}_{n-1} \leq \ldots \leq \tilde{\beta}_2 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \tilde{\beta}_0 \tag{4.8}$$

elde edilir.

Amacımıza ulaşmak için $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_n\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\beta}_n\right\}$ fonksiyon dizilerinin $[t_0, t_0+T]$ üzerinde düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğu gösterilmelidir. Bu takdirde ilk olarak $[t_0, t_0+T]$ üzerinde $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_n\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\beta}_n\right\}$ fonksiyon dizilerinin düzgün sınırlılığını araştıralım. O halde her $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
\left|(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_n\right| &= \left|(t-t_0)^p \left((\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_0) + \tilde{\alpha}_0\right)\right| \\
&\leq (t-t_0)^p \left|\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_0\right| + (t-t_0)^p \left|\tilde{\alpha}_0\right| \\
&\leq (t-t_0)^p \left|\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0\right| + (t-t_0)^p \left|\tilde{\alpha}_0\right|
\end{aligned}$$

yazılır. $\tilde{\alpha}_0,\ \tilde{\beta}_0 \in C_p\left[[t_0, t_0+T], \mathbb{R}\right]$ olduğundan $(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_0$ ve $(t-t_0)^p \tilde{\beta}_0$, $[t_0, t_0+T]$ üzerinde sınırlıdır. Ayrıca $(t-t_0)^p \tilde{w}_0 = (t-t_0)^p \left(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0\right)$ dersek $(t-t_0)^p \tilde{w}_0$ fonksiyonu da $[t_0, t_0+T]$ üzerinde sınırlı olur. Bu yüzden de $(t-t_0)^p \left|\tilde{\alpha}_0\right| \leq M_1$ ve $(t-t_0)^p \left|\tilde{w}_0\right| \leq M_2$ olacak biçimde $M_1, M_2 > 0$ vardır. Buradan hareketle

$$\begin{aligned}
\left|(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_n\right| &\leq (t-t_0)^p \left|\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0\right| + (t-t_0)^p \left|\tilde{\alpha}_0\right| \\
&= (t-t_0)^p \left|\tilde{\alpha}_0\right| + (t-t_0)^p \left|\tilde{w}_0\right| \\
&\leq M_1 + M_2 \\
&= M
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M>0$ dır. Bu ise her $n\geq 0$ için $[t_0,t_0+T]$ üzerinde $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_n\right\}$ dizisinin düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Benzer şekilde $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_n\right\}$ fonksiyon dizisinin $[t_0,t_0+T]$ üzerinde düzgün sınırlı olduğu gösterilebilir. Ayrıca gösterilebilir ki $[t_0,t_0+T]$ üzerinde $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_n\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_n\right\}$ fonksiyon dizileri eş süreklidir $[23]$. Dolayısıyla $[t_0,t_0+T]$ üzerinde $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_n\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_n\right\}$ fonksiyon dizileri düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğundan Ascoli-Arzela teoremi gereği $[t_0,t_0+T]$ üzerinde $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_{n_k}\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_{n_k}\right\}$ alt dizileri mevcuttur öyle ki $n\to\infty$ iken düzgün ve monoton olarak $(t-t_0)^p\,\tilde{\rho}$ ve $(t-t_0)^p\,\tilde{r}$' ya yakınsar. Dolayısıyla $[t_0,t_0+T]$ üzerinde $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_n\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_n\right\}$ fonksiyon dizileri monoton olduklarından bu diziler de sırasıyla $n\to\infty$ iken düzgün ve monoton olarak $(t-t_0)^p\,\tilde{\rho}$ ve $(t-t_0)^p\,\tilde{r}$' ya yakınsar.

Şimdi $\tilde{\rho}$ ve $\tilde{r}$'nın $(t_0,t_0+T]$ üzerinde

$$D^q\tilde{x}(t)=f\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right),\ \tilde{x}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0 \tag{4.9}$$

probleminin eşlenmiş çözümleri olduğunu gösterelim. Bunun için (4.1) ve (4.2) Riemann-Liouville kesirli lineer diferensiyel denklemlerine karşılık gelen Volterra tipli integral denklemini kullanacağız.

Burada $\tilde{x}(t)=x(t+\eta_2),\ t\in(t_0,t_0+T]$ alalım. $s\in(s_0,s_0+T]$ olmak üzere $s=t+\eta_2$ değişken dönüşümü yapalım. Bu takdirde

$$D^q x(s)=f\left(s,x(s)\right)+g\left(s,x(s)\right),\ x(s)(s-s_0)^{1-q}\Big|_{s=s_0}=x^0 \tag{4.10}$$

olur. O halde $t\in\left(t_0,t_0+T\right]$ olmak üzere (4.1) ve (4.2) Riemann-Liouville kesirli lineer diferensiyel denklemlerine karşılık gelen Volterra tipli integral denklemlerinin $(t-t_0)^p$ ile çarpılmış hali

$$\begin{aligned}&(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_n(t)\\&=\frac{x^0}{\Gamma(q)}+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{n-1}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{n-1}(\xi)\right)\right]d\xi,\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}&(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_n(t)\\&=\frac{x^0}{\Gamma(q)}+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{n-1}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{n-1}(\xi)\right)\right]d\xi\end{aligned}\tag{4.12}$$

olduğundan (4.11) ve (4.12) eşitliklerinin her iki tarafı $n\to\infty$ için limit alınıp ayrıca $(t-t_0)^p$ ile bölünürse

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left((t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_n(t)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^0}{\Gamma(q)}\right)+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{n-1}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{n-1}(\xi)\right)\right]d\xi\right)\end{aligned}$$

$$\tilde{\rho}(t)=\frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\rho}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{r}(\xi)\right)\right]d\xi\tag{4.13}$$

ve

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left((t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_n(t)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^0}{\Gamma(q)}\right)+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\lim_{n\to\infty}\left(\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{n-1}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{n-1}(\xi)\right)\right]d\xi\right)\end{aligned}$$

$$\tilde{r}(t)=\frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{r}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\rho}(\xi)\right)\right]d\xi\tag{4.14}$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{\rho}$ ve $\tilde{r}$' nın sırasıyla $t \in (t_0, t_0 + T]$ olmak üzere (4.9) başlangıç değer probleminin eşlenmiş çözümleri olduğunu gösterir. O halde $t \in (t_0, t_0 + T]$ olmak üzere $\tilde{\rho}$ ve $\tilde{r}$ limit fonksiyonları (4.1) ve (4.2) lineer başlangıç değer problemlerini sağlar. Bu yüzden de $t \in (t_0, t_0 + T]$ olmak üzere

$$D^q \tilde{\rho}(t) = f\left(t + \eta_2, \tilde{\rho}(t)\right) + g\left(t + \eta_2, \tilde{r}(t)\right), \quad \tilde{\rho}(t)(t - t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0$$

$$D^q \tilde{r}(t) = f\left(t + \eta_2, \tilde{r}(t)\right) + g\left(t + \eta_2, \tilde{\rho}(t)\right), \quad \tilde{r}(t)(t - t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0$$

yazılır.

$\tilde{\rho}(t) = \rho(t + \eta_2)$ ve $\tilde{r}(t) = r(t + \eta_2)$, $t \in (t_0, t_0 + T]$ alalım. $s \in (s_0, s_0 + T]$ olmak üzere $s = t + \eta_2$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$D^q \rho(s) = f\left(s, \rho(s)\right) + g\left(s, r(s)\right), \quad \rho(s)(s - s_0)^{1-q}\Big|_{s=s_0} = x^0, \ s_0 < s \leq s_0 + T \qquad (4.15)$$

$$D^q r(s) = f\left(s, r(s)\right) + g\left(s, \rho(s)\right), \quad r(s)(s - s_0)^{1-q}\Big|_{s=s_0} = x^0, \ s_0 < s \leq s_0 + T \qquad (4.16)$$

elde edilir. Dolayısıyla göstermiş olduk ki ρ ve r değerleri $(s_0, s_0 + T]$ üzerinde sırasıyla (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş çözümleridir. Şimdi $(s_0, s_0 + T]$ üzerinde sırasıyla ρ ve r' nin (2.55) probleminin I. tipten eşlenmiş minimal ve maksimal çözümleri olduğunu gösterelim. Bunun için $t \in (t_0, t_0 + T]$ olmak üzere (4.9) probleminin $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{x}(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$ şartını sağlayan her $\tilde{x}(t)$ çözümü için göstermeliyiz ki $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde;

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\rho} \leq \tilde{x} \leq \tilde{r} \leq \tilde{\beta}_0 \qquad (4.17)$$

olur. O halde her n için

$$\tilde{\alpha}_n \leq \tilde{x} \leq \tilde{\beta}_n \qquad (4.18)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$n=0$ için $\tilde{\alpha}_0 \le \tilde{x} \le \tilde{\beta}_0$ doğrudur.

$n=k$ için $\tilde{\alpha}_k \le \tilde{x} \le \tilde{\beta}_k$ doğru olduğu kabul edilip $n=k+1$ için $\tilde{\alpha}_{k+1} \le \tilde{x} \le \tilde{\beta}_{k+1}$ olduğu gösterilmelidir. Bu takdirde

$$p(t)=\tilde{\alpha}_{k+1}(t)-\tilde{x}(t)$$

teşkil edelim.

$f,g \in C\left[\left[t_0,\tau_0+T\right]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$ $f(t,x)$ x'e göre azalmayan ve $g(t,y)$ y'ye göre artmayan olduğunu kullanarak $t\in\left(t_0,t_0+T\right]$ için

$$\begin{aligned}
D^q p(t) &= D^q\tilde{\alpha}_{k+1}(t)-D^q\tilde{x}(t) \\
&= f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_k(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_k(t)\right)-\left(f\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right)\right) \\
&= f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_k(t)\right)-f\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_k(t)\right)-g\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right) \\
&\le 0
\end{aligned}$$

dır ve

$$p^0=p(t)\left(t-t_0\right)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=0$$

elde edilir.

Buradan $D^q p(t)\le 0$ ve $p^0=0$ olduğundan dolayı Sonuç 2.8.7 kullanılırsa

$$\begin{gathered}
p(t)\le 0 \\
\tilde{\alpha}_{k+1}(t)\le\tilde{x}(t)
\end{gathered} \tag{4.19}$$

olur. Benzer şekilde $t\in\left(t_0,t_0+T\right]$ için

$$\tilde{x}(t)\le\tilde{\beta}_{k+1}(t) \tag{4.20}$$

elde edilir. O halde Matematiksel İndiksiyon Prensibiyle göstermiş olduk ki $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde her n için;

$$\tilde{\alpha}_n(t) \le \tilde{x}(t) \le \tilde{\beta}_n(t) \tag{4.21}$$

olur. Bu takdirde $[t_0, t_0+T]$ üzerinde (4.21) eşitsizliğinden

$$(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_n(t) \le (t-t_0)^p \tilde{x}(t) \le (t-t_0)^p \tilde{\beta}_n(t)$$

yazılır. Buradan $n \to \infty$ için limit alırsak $[t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$(t-t_0)^p \tilde{\rho}(t) \le (t-t_0)^p \tilde{x}(t) \le (t-t_0)^p \tilde{r}(t) \tag{4.22}$$

elde edilir. Böylece $t \in (t_0, t_0+T]$ olmak üzere göstermiş olduk ki

$$\tilde{\rho}(t) \le \tilde{x}(t) \le \tilde{r}(t) \tag{4.23}$$

olur. Bu nedenle $\tilde{\rho}$ ve $\tilde{r}$ eşlenmiş ekstremal çözümlerdir. O halde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\tilde{\alpha}_0 \le \tilde{\rho} \le \tilde{x} \le \tilde{r} \le \tilde{\beta}_0 \tag{4.24}$$

yazılır.

Son olarak (4.21) eşitsizliğinden hareketle $t \in (t_0, t_0+T]$ olmak üzere $\tilde{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t+\eta_2)$, $\tilde{\beta}_n(t) = \beta_n(t+\eta_2)$, $\tilde{\rho}(t) = \rho(t+\eta_2)$, $\tilde{x}(t) = x(t+\eta_2)$, $\tilde{r}(t) = r(t+\eta_2)$ alalım. $t \in (s_0, s_0+T]$ için $t+\eta_2$ yerine t yazılırsa bu takdirde

$$\rho(t) \le x(t) \le r(t),\ t \in (s_0, s_0+T]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2. Kabul edelim ki Teorem 4.1.1.' in şartlarına ek olarak $t \in (s_0, s_0+T]$ olmak üzere $u_1(t) \ge u_2(t)$ ve $L_1, L_2 > 0$ için

$$f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) \le L_1(u_1(t) - u_2(t)), \tag{4.25}$$

$$g(t, u_1(t)) - g(t, u_2(t)) \ge -L_2(u_1(t) - u_2(t)) \tag{4.26}$$

olsun. O halde $(s_0, s_0+T]$ üzerinde $\rho = x = r$, (2.55) probleminin tek çözümüdür.

İspat. $(s_0, s_0+T]$ üzerinde $\rho(t) \le r(t)$ olduğundan amacımıza ulaşmak için $r(t) \le \rho(t)$ olduğunu göstermekyeterlidir. $(s_0, s_0+T]$ üzerinde

$p(t) = r(t) - \rho(t)$ teşkil edelim. (4.25) ve (4.26) eşitlikleri gereği,

$$
\begin{aligned}
D^q p(t) &= D^q r(t) - D^q \rho(t) \\
&= f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)) - f(t, \rho(t)) - g(t, r(t)) \\
&= f(t, r(t)) - f(t, \rho(t)) + g(t, \rho(t)) - g(t, r(t)) \\
&\le L_1 (r(t) - \rho(t)) + L_2 (r(t) - \rho(t)) \\
&= (L_1 + L_2)\, p(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $p^0 = 0$ olduğundan Sonuç 2.8.6 kullanılırsa $(s_0, s_0+T]$ üzerinde

$$
\begin{aligned}
&p(t) \le 0, \\
&r(t) \le \rho(t) \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

kalır. Böylece $(s_0, s_0+T]$ üzerinde (2.55) probleminin tek çözümü $\rho = x = r$ olarak elde edilir.

$t_0 > \tau_0$ için Teorem 4.1.1 aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.3. Kabul edelim ki

$(A1)$ $\alpha \in C_p\left[[t_0, t_0+T], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$ ve $\beta \in C_p\left[[\tau_0, \tau_0+T], \mathbb{R}\right]$ $\tau_0 < t_0$ olup $p = 1 - q$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere α ve β fonksiyonları (2.55) probleminin sırasıyla I. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümüdür öyle ki

$$
\begin{aligned}
&D^q \alpha \le f(t, \alpha) + g(t, \beta), \alpha^0 \le x^0 \quad t_0 < t \le t_0 + T, \\
&D^q \beta \ge f(t, \beta) + g(t, \alpha), \beta^0 \ge x^0 \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T
\end{aligned}
$$

burada $\tau_0 < s_0 < t_0$ ve $\alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\big|_{t=t_0}$, $x^0 = x(t)(t-s_0)^{1-q}\big|_{t=s_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\big|_{t=\tau_0}$ şeklindedir. Ayrıca $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde $\eta_1 = t_0 - \tau_0$ olmak üzere $\alpha(t+\eta_1) \le \beta(t)$ olsun.

$(A2)$ $f, g \in C\left[[t_0, \tau_0+T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $f(t,x)$, x'e göre azalmayan ve $g(t,y)$, y'ye göre artmayan olsun. . Ayrıca f ve g, her x için t'ye göre artmayan olsun.

$(A3)$ α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olsun.

O halde $\{\alpha_n(t)\}$, $\{\beta_n(t)\} \in C_p\left[[s_0, s_0+T], \mathbb{R}\right]$ monoton fonksiyon dizileri vardır öyle ki $[s_0, s_0+T]$ üzerinde düzgün ve monoton olarak $n \to \infty$ için $(t-s_0)^p \alpha_n(t) \to (t-s_0)^p \rho(t)$ ve $(t-s_0)^p \beta_n(t) \to (t-s_0)^p r(t)$ olup ρ ve r limit fonksiyonları $(s_0, s_0+T]$ üzerinde

$$D^q x(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), \quad x(t)(t-s_0)^{1-q}\big|_{t=s_0} = x^0$$

başlangıç değer probleminin sırasıyla eşlenmiş minimal ve maksimal çözümleridir.

Yani;

$$D^q \rho(t) = f(t, \rho(t)) + g(t, r(t)), \quad \rho(t)(t-s_0)^{1-q}\big|_{t=s_0} = x^0 \quad , s_0 < t \le s_0 + T,$$

$$D^q r(t) = f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)), \quad r(t)(t-s_0)^{1-q}\big|_{t=s_0} = x^0 \quad , s_0 < t \le s_0 + T$$

yazılabilir.

$t_0 = s_0$ alındığında Teorem 4.1.1 aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.4. Kabul edelim ki

$(A1)$ $\alpha \in C_p\left[\left[t_0, t_0+T\right], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$ ve $\beta \in C_p\left[\left[\tau_0, \tau_0+T\right], \mathbb{R}\right]$ $\tau_0 > t_0$ olup $p = 1-q$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere α ve β fonksiyonları (2.55) probleminin sırasıyla I. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümüdür öyle ki

$$\begin{aligned} D^q\alpha &\le f(t,\alpha) + g(t,\beta), \alpha^0 \le x^0 \quad t_0 < t \le t_0 + T, \\ D^q\beta &\ge f(t,\beta) + g(t,\alpha), \beta^0 \ge x^0 \quad \tau_0 < t \le \tau_0 + T, \end{aligned}$$

burada $t_0 < \tau_0$ ve $\alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ şeklindedir. Ayrıca $\left(t_0, t_0+T\right]$ üzerinde $\eta = \tau_0 - t_0$ olmak üzere $\alpha(t) \le \beta(t+\eta)$ olsun.

$(A2)$ $f, g \in C\left[\left[t_0, \tau_0+T\right] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $f(t,x)$, x' e göre azalmayan ve $g(t,y)$, y' ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olsun.

$(A3)$ α, $\left(t_0, t_0+T\right]$ üzerinde artmayan ve β, $\left(\tau_0, \tau_0+T\right]$ üzerinde artmayan olsun.

O halde $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ monoton fonksiyon dizileri vardır öyle ki $n \to \infty$ için $\left[t_0, t_0+T\right]$ üzerinde $(t-t_0)^p \alpha_n \to (t-t_0)^p \rho$ ve $(t-t_0)^p \beta_n \to (t-t_0)^p r$ olup ρ ve r limit fonksiyonları $\left(t_0, t_0+T\right]$ üzerinde

$$D^q x(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), \quad x(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0$$

başlangıç değer probleminin sırasıyla eşlenmiş minimal ve maksimal çözümleridir.

Yani $t \in \left(t_0, t_0+T\right]$ olmak üzere

$$D^q\rho(t) = f(t, \rho(t)) + g(t, r(t)), \quad \rho(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0,$$

$$D^q r(t) = f(t, r(t)) + g(t, \rho(t)), \quad r(t)(t - t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0$$

yazılır.

$s_0 = \tau_0$ alındığında Teorem 4.1.1 aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.5. Kabul edelim ki

$(A1)$ $\alpha \in C_p\left[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}\right]$ $t_0, T > 0$ ve $\beta \in C_p\left[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}\right]$ $\tau_0 > t_0$ olup $p = 1 - q$, $0 < q < 1$ olmak üzere α ve β fonksiyonları (2.55) probleminin sırasıyla I. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümüdür öyle ki

$$\begin{aligned} D^q \alpha &\leq f(t, \alpha) + g(t, \beta), \alpha^0 \leq x^0 \quad t_0 < t \leq t_0 + T, \\ D^q \beta &\geq f(t, \beta) + g(t, \alpha), \beta^0 \geq x^0 \quad \tau_0 < t \leq \tau_0 + T \end{aligned}$$

burada $t_0 < \tau_0$ ve $\alpha^0 = \alpha(t)(t - t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $x^0 = x(t)(t - t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t - \tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0}$ şeklindedir. Ayrıca $(\tau_0, \tau_0 + T]$ üzerinde $\eta = \tau_0 - t_0$ olmak üzere $\alpha(t - \eta) \leq \beta(t)$ olsun.

$(A2)$ $f, g \in C\left[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $f(t, x)$, x ' e göre azalmayan ve $g(t, y)$, y ' ye göre artmayan olsun. Ayrıca f ve g, her x için t 'ye göre azalmayan olsun.

$(A3)$ α, $(t_0, t_0 + T]$ üzerinde artmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0 + T]$ üzerinde artmayan olsun.

O halde $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ monoton fonksiyon dizileri vardır öyle ki $n \to \infty$ için $[\tau_0, \tau_0 + T]$ üzerinde $(t - \tau_0)^p \alpha_n \to (t - \tau_0)^p \rho$ ve $(t - \tau_0)^p \beta_n \to (t - \tau_0)^p r$ olup ρ ve r limit fonksiyonları $(\tau_0, \tau_0 + T]$ üzerinde

$$D^q x(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), \quad x(t)(t - \tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = x^0$$

başlangıç değer probleminin sırasıyla eşlenmiş minimal ve maksimal çözümleridir. Yani $t \in (\tau_0, \tau_0 + T]$ olmak üzere

$$D^q\rho(t) = f\left(t,\rho(t)\right) + g\left(t,r(t)\right), \quad \rho(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = x^0,$$

$$D^q r(t) = f\left(t,r(t)\right) + g\left(t,\rho(t)\right), \quad r(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} = x^0$$

yazılır.

Benzer yöntem yardımıyla aşağıdaki teoremde inşaa edilen başlangıç zaman farklı II. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümler için verilen kesirli basamaktan diferensiyel denklemin II. tipten eşlenmiş çözümlerine düzgün ve monoton yakınsayan fonksiyon dizileri teşkil edilecektir.

Teorem 4.1.6. Kabul edelim ki

(A_1) $\alpha \in C_p\left[\left[t_0,t_0+T\right],\mathbb{R}\right]$, $t_0,T>0$ ve $\beta \in C_p\left[\left[\tau_0,\tau_0+T\right],\mathbb{R}\right]$, $\tau_0 > t_0$ olup $p = 1-q$, $0<q<1$ olsun.

(A_2) $f,g \in C\left[\left[t_0,\tau_0+T\right]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right]$, $f(t,x)$, x'e göre azalmayan ve $g(t,y)$, y'ye göre artmayan olsun. Ayrıca $\left[t_0,\tau_0+T\right]$ üzerinde f ve g, her x için t'ye göre azalmayan olsun.

(A_3) α, $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde azalmayan ve β, $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde azalmayan olsun. O halde $t_0 < s_0 < \tau_0$ olmak üzere $\eta_2 = s_0 - t_0$ için $\tilde{\alpha}_0(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_0(t)$ olacak biçimde

$$D^q x(t) = f\left(t,x(t)\right) + g\left(t,x(t)\right), \quad x(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

probleminin keyfi $x(t)$ çözümü için $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde $\tilde{\alpha}_0(t) \le \tilde{\alpha}_2(t)$ ve $\tilde{\beta}_2(t) \le \tilde{\beta}_0(t)$ olmak üzere

$$\tilde{\alpha}_0(t) \le \tilde{\alpha}_2(t) \le \ldots \le \tilde{\alpha}_{2n}(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\alpha}_{2n+1}(t) \le \ldots \le \tilde{\alpha}_3(t) \le \tilde{\alpha}_1(t), \qquad (4.28)$$
$$\tilde{\beta}_1(t) \le \tilde{\beta}_3(t) \le \ldots \le \tilde{\beta}_{2n+1}(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_{2n}(t) \le \ldots \le \tilde{\beta}_2(t) \le \tilde{\beta}_0(t) \qquad (4.29)$$

sağlanır. Burada $t \in \left(t_0,t_0+T\right]$, $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ ve $\eta_2 = s_0 - t_0$ olmak üzere iterasyon şeması aşağıdaki gibidir.

$$D^q\tilde{\alpha}_{n+1} = f\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_n\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_n\right), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0, \tag{4.30}$$

$$D^q\tilde{\beta}_{n+1} = f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_n\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_n\right), \quad \tilde{\beta}_{n+1}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0. \tag{4.31}$$

Ayrıca $\{\alpha_{2n}\}$, $\{\alpha_{2n+1}\}$, $\{\beta_{2n}\}$ ve $\{\beta_{2n+1}\} \in C_p\left[[s_0,s_0+T],\mathbb{R}\right]$ monoton dizileri vardır öyleki $[s_0,s_0+T]$ üzerinde düzgün ve monoton olarak sırasıyla $n\to\infty$ için $(t-s_0)^p\rho$, $(t-s_0)^p r$, $(t-s_0)^p\rho^*$ ve $(t-s_0)^p r^*$ değerlerine yakınsak olup ρ, r, ρ^* ve r^* limit fonksiyonları $t\in(s_0,s_0+T]$ olmak üzere

$$D^q x(t) = f\left(t,x(t)\right)+g\left(t,x(t)\right), \quad x(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

başlangıç değer probleminin II. tipten eşlenmiş çözümleridir.

Yani; $t\in(s_0,s_0+T]$ üzerinde

$$D^q\rho(t) = f\left(t,r^*(t)\right)+g\left(t,r(t)\right), \quad \rho(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0, \tag{4.32}$$

$$D^q r(t) = f\left(t,\rho^*(t)\right)+g\left(t,\rho(t)\right), \quad r(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0, \tag{4.33}$$

$$D^q\rho^*(t) = f\left(t,r(t)\right)+g\left(t,r^*(t)\right), \quad \rho^*(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0 \tag{4.34}$$

ve

$$D^q r^*(t) = f\left(t,\rho(t)\right)+g\left(t,\rho^*(t)\right), \quad r^*(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0 \tag{4.35}$$

sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $(s_0,s_0+T]$ üzerinde $x(t)$,

$$D^q x(t) = f\left(t,x(t)\right)+g\left(t,x(t)\right), \quad x(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

probleminin keyfi bir çözümü olsun. İlk olarak yukardaki probleminin başlangıç zaman farklı II. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümlerinin varlığını göstermeliyiz. Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde;

$$D^q z = f(t,0) + g(t,0), \quad z(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0 \tag{4.37}$$

problemini göz önüne alalım. O halde bu probleminin $z(t)$ çözümü vardır. Şimdi $\alpha(t) = z(t) - K$ ve $\beta(t) = z(t) + K$ teşkil edelim öyle ki $\alpha(t) \le 0 \le \beta(t)$ olacak biçimde $K > 0$ seçelim. Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde,

$$\begin{aligned} D^q \alpha(t) &= D^q z(t) - D^q K \\ &= f(t,0) + g(t,0) - \frac{K}{\Gamma(1-q)}(t-t_0)^{-q} \\ &\le f(t,0) + g(t,0) \\ &\le f(t,\beta) + g(t,\alpha) \end{aligned}$$

ve $\alpha^0 \le x^0$ elde edilir. Ayrıca $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned} D^q \beta(t) &= D^q z(t) + D^q K \\ &= f(t,0) + g(t,0) + \frac{K}{\Gamma(1-q)}(t-t_0)^{-q} \\ &\ge f(t,0) + g(t,0) \\ &\ge f(t,\alpha) + g(t,\beta), \end{aligned}$$

ve $\beta^0 \ge x^0$ yazılabilir.

Bu ise α ve β fonksiyonlarının (2.55) probleminin sırasıyla başlangıç zaman farklı II. tipten eşlenmiş alt ve üst çözümü olduğu gösteririr. Burada $\alpha \le 0 \le \beta$ olmak üzere $D^q K > 0$ ve $f(t,x)$, x'e göre azalmayan ve $g(t,y)$, y'ye göre artmayan olduğu kullanıldı. Bu yüzden de Teorem 3.1.3 gereği $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ olmak üzere $t_0 < t \le t_0 + T$ için $\alpha(t) \le \beta(t+\eta_1)$ yazılır.

$f(t,x)$, x' e göre azalmayan, $g(t,y)$, y' ye göre artmayan ve f ile g, her x için t' ye göre azalmayan ve α, $(t_0, t_0+T]$ üzerinde azalmayan ve β, $(\tau_0, \tau_0+T]$ üzerinde azalmayan olduğu kullanılarak $\beta(t+\eta_1)=\tilde{\beta}_0(t)$ ve $\tilde{\alpha}_0(t)=\alpha(t)$ olsun. Bu takdirde;

$$
\begin{aligned}
D^q\tilde{\beta}_0(t) &= D^q\beta(t+\eta_1) \\
&\geq f\left(t+\eta_1, \alpha(t+\eta_1)\right)+g\left(t+\eta_1, \beta(t+\eta_1)\right) \\
&= f\left(t+\eta_1, \alpha(t+\eta_1)\right)+g\left(t+\eta_1, \tilde{\beta}_0(t)\right) \\
&\geq f\left(t, \alpha(t)\right)+g\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right) \\
&= f\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right)+g\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right)
\end{aligned}
$$

yani

$$D^q\tilde{\beta}_0(t) \geq f\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right)+g\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right)$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}_0^0 &= \tilde{\beta}_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\
&= \beta(t+\eta_1)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\
&= \beta(t)(t-\tau_0)^{1-q}\Big|_{t=\tau_0} \\
&= \beta^0 \geq x^0 \geq \alpha^0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
D^q\tilde{\alpha}_0(t) &= D^q\alpha(t) \\
&\leq f\left(t, \beta(t)\right)+g\left(t, \alpha(t)\right) \\
&\leq f\left(t, \beta(t+\eta_1)\right)+g\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right) \\
&= f\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right)+g\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right)
\end{aligned}
$$

böylece

$$D^q\tilde{\alpha}_0(t) \leq f\left(t, \tilde{\beta}_0(t)\right)+g\left(t, \tilde{\alpha}_0(t)\right)$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0^0 &= \tilde{\alpha}_0(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\ &= \alpha(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} \\ &= \alpha^0 \le x^0 \le \beta^0\end{aligned}$$

olur. Demek ki $\tilde{\beta}_0$ ve $\tilde{\alpha}_0$, (2.55) probleminin sırasıyla II. tipten eşlenmiş üst ve alt çözümüdür. Dolayısıyla kabul gereği $(s_0, s_0+T]$ üzerinde (2.55) probleminin bir $x(t)$ çözümü vardır öyle ki $(t_0, t_0+T]$ üzerinde $\tilde{\alpha}_0(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_0(t)$ yazılabilir.

İlk olarak $(t_0, t_0+T]$ üzerinde $\tilde{\alpha}_0 \le \tilde{\alpha}_2$ ve $\tilde{\beta}_2 \le \tilde{\beta}_0$ olduğunu varsayarak $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\tilde{\alpha}_0(t) \le \tilde{\alpha}_2(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\alpha}_3(t) \le \tilde{\alpha}_1(t) \text{ ve } \tilde{\beta}_1(t) \le \tilde{\beta}_3(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_2(t) \le \tilde{\beta}_0(t)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$p(t) = x(t+\eta_2) - \tilde{\alpha}_1(t)$$

teşkil edelim. (4.30) denkleminde $n=0$ alalım. Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}D^q p(t) &= D^q x(t+\eta_2) - D^q \tilde{\alpha}_1(t) \\ &= f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) + g\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) \\ &= f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) \\ &\le 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\tilde{\alpha}_0(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_0(t)$ ve f ve g'nin ikinci değişkene göre monotonluk özelliği kullanıldı. Ayrıca

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

olur. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$p(t) \le 0,$$
$$x(t+\eta_2) \le \tilde{\alpha}_1(t) \tag{4.38}$$

elde edilir.

$$p(t) = \tilde{\beta}_1(t) - x(t+\eta_2)$$

teşkil edelim. (4.31) denkleminde $n=0$ alalım. Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}
D^q p(t) &= D^q \tilde{\beta}_1(t) - D^q x(t+\eta_2) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) - g\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) - g\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) \\
&\le 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\alpha}_0(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_0(t)$ ve f ve g'nin ikinci değişkene göre monotonluk özelliği kullanıldı. Ayrıca

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

olur. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$p(t) \le 0,$$
$$\tilde{\beta}_1(t) \le x(t+\eta_2) \tag{4.39}$$

elde edilir.

$$p(t) = \tilde{\alpha}_2(t) - x(t+\eta_2)$$

teşkil edelim. (4.30) denkleminde $n=0$ alalım. Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}
D^q p(t) &= D^q \tilde{\alpha}_2(t) - D^q x(t+\eta_2) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_1(t)\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1(t)\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_1(t)\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) \\
&\le 0
\end{aligned}$$

olur. Burada $x(t+\eta_2) \le \tilde{\alpha}_1(t)$, $\tilde{\beta}_1(t) \le x(t+\eta_2)$ ve f ile g 'nin ikinci bileşene göre monotonluk özelliği kullanıldı. Ayrıca

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

olur. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\tilde{\alpha}_2(t) \le x(t+\eta_2) \tag{4.40}$$

elde edilir. Benzer şekilde gösterebiliriz ki $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_2(t) \tag{4.41}$$

yazılabilir.

$$p(t) = \tilde{\alpha}_3(t) - \tilde{\alpha}_1(t)$$

teşkil edelim. (4.30) denkleminde $n=0$ ve $n=2$ alalım. Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned} D^q p(t) &= D^q\tilde{\alpha}_3(t) - D^q\tilde{\alpha}_1(t) \\ &= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_2(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_2(t)\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) \\ &= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_2(t)\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_2(t)\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0(t)\right) \\ &\le 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\beta}_2(t) \le \tilde{\beta}_0(t), \tilde{\alpha}_0(t) \le \tilde{\alpha}_2(t)$ ve f, g 'nin ikinci bileşene göre monotonluk özelliği kullanıldı.

Ayrıca

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

olur. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$p(t)\le 0,$$
$$\tilde{\alpha}_3(t)\le\tilde{\alpha}_1(t) \tag{4.42}$$

elde edilir.

$$p(t)=\tilde{\beta}_1(t)-\tilde{\beta}_3(t)$$

teşkil edelim. (4.31) denkleminde $n=0$ ve $n=2$ alalım. Bu takdirde $(t_0,t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}D^q p(t)&=D^q\tilde{\beta}_1(t)-D^q\tilde{\beta}_3(t)\\&=f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_0(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_0(t)\right)-f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_2(t)\right)-g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_2(t)\right)\\&=f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_0(t)\right)-f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_2(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_0(t)\right)-g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_2(t)\right)\\&\le 0\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\alpha}_0(t)\le\tilde{\alpha}_2(t),\tilde{\beta}_2(t)\le\tilde{\beta}_0(t)$ ve f, g 'nin ikinci bileşine göre monotonluk özelliği kullanıldı. Ayrıca

$$p^0=p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=0$$

olur. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $(t_0,t_0+T]$ üzerinde

$$p(t)\le 0,$$
$$\tilde{\beta}_1(t)\le\tilde{\beta}_3(t) \tag{4.43}$$

elde edilir. Benzer şekilde gösterebiliriz ki $(t_0,t_0+T]$ üzerinde;

$$x(t+\eta_2)\le\tilde{\alpha}_3(t) \text{ ve } \tilde{\beta}_3(t)\le x(t+\eta_2) \tag{4.44}$$

olur. Dolayısıyla $(t_0,t_0+T]$ üzerinde göstermiş olduk ki

$$\tilde{\alpha}_0(t)\le\tilde{\alpha}_2(t)\le x(t+\eta_2)\le\tilde{\alpha}_3(t)\le\tilde{\alpha}_1(t)$$

ve

$$\tilde{\beta}_1(t) \le \tilde{\beta}_3(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_2(t) \le \tilde{\beta}_0(t) \qquad (4.45)$$

yazılabilir.

$n > 2$ için $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\tilde{\alpha}_{2n-4}(t) \le \tilde{\alpha}_{2n-2}(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\alpha}_{2n-1}(t) \le \tilde{\alpha}_{2n-3}(t)$$

ve

$$\tilde{\beta}_{2n-3}(t) \le \tilde{\beta}_{2n-1}(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_{2n-2}(t) \le \tilde{\beta}_{2n-4}(t)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını varsayarak göstermeliyiz ki

$$\tilde{\alpha}_{2n-2}(t) \le \tilde{\alpha}_{2n}(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\alpha}_{2n+1}(t) \le \tilde{\alpha}_{2n-1}(t)$$

ve

$$\tilde{\beta}_{2n-1}(t) \le \tilde{\beta}_{2n+1}(t) \le x(t+\eta_2) \le \tilde{\beta}_{2n}(t) \le \tilde{\beta}_{2n-2}(t)$$

olur.

$$p(t) = \tilde{\alpha}_{2n-2}(t) - \tilde{\alpha}_{2n}(t)$$

teşkil edelim. Bu takdirde $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}
D^q p(t) &= D^q \tilde{\alpha}_{2n-2}(t) - D^q \tilde{\alpha}_{2n}(t) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{2n-3}\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{2n-3}\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{2n-1}\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{2n-1}\right) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{2n-3}\right) - f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{2n-1}\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{2n-3}\right) - g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{2n-1}\right) \\
&\le 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\beta}_{2n-3}(t) \le \tilde{\beta}_{2n-1}(t)$, $\tilde{\alpha}_{2n-1}(t) \le \tilde{\alpha}_{2n-3}(t)$ ve f ile g' nin ikinci değişkene göre monotonluk özelliği kullanıldı. Ayrıca

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

dır. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde

$$\begin{aligned} &p(t)\leq 0, \\ &\tilde{\alpha}_{2n-2}(t)\leq\tilde{\alpha}_{2n}(t) \end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir.

$$p(t)=\tilde{\beta}_{2n}(t)-\tilde{\beta}_{2n-2}(t)$$

teşkil edelim. (4.31) denkleminde $n=0$ ve $n=2$ alalım. Bu takdirde $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde

$$\begin{aligned} D^q p(t) &= D^q\tilde{\beta}_{2n}(t)-D^q\tilde{\beta}_{2n-2}(t) \\ &= f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n-1}\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n-1}\right)-f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n-3}\right)-g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n-3}\right) \\ &= f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n-1}\right)-f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n-3}\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n-1}\right)-g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n-3}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tilde{\beta}_{2n-3}(t)\leq\tilde{\beta}_{2n-1}(t)$, $\tilde{\alpha}_{2n-1}(t)\leq\tilde{\alpha}_{2n-3}(t)$ ve f ile g' nin ikinci bileşene göre monotonluk özelliği kullanıldı. Ayrıca

$$p^0=p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=0$$

olur. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde

$$\begin{aligned} &p(t)\leq 0, \\ &\tilde{\beta}_{2n}(t)\leq\tilde{\beta}_{2n-2}(t) \end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. Benzer şekilde gösterebiliriz ki $\left(t_0,t_0+T\right]$ üzerinde;

$$\tilde{\alpha}_{2n+1}(t)\leq\tilde{\alpha}_{2n-1}(t) \text{ ve } \tilde{\beta}_{2n-1}(t)\leq\tilde{\beta}_{2n+1}(t) \tag{4.48}$$

yazılabilir.

Şimdi $\tilde{\alpha}_{2n}(t)\leq x(t+\eta_2)$ ve $x(t+\eta_2)\leq\tilde{\beta}_{2n}(t)$ olduğunu gösterelim.

$$p(t) = \tilde{\alpha}_{2n}(t) - x(t+\eta_2)$$

teşkil edelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
D^q p(t) &= D^q \tilde{\alpha}_{2n}(t) - D^q x(t+\eta_2) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{2n-1}\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{2n-1}\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) - g\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) \\
&= f\left(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{2n-1}\right) - f\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{2n-1}\right) - g\left(t+\eta_2, x(t+\eta_2)\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

olur. Burada $x(t+\eta_2) \leq \tilde{\alpha}_{2n-1}(t)$, $\tilde{\beta}_{2n-1}(t) \leq x(t+\eta_2)$ ve f, g'nin monotonluk özelliği kullanıldı. Ayrıca

$$p^0 = p(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = 0$$

yazılabilir. Buradan Sonuç 2.8.7 gereği $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$\begin{aligned}
&p(t) \leq 0, \\
&\tilde{\alpha}_{2n}(t) \leq x(t+\eta_2)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

olur. Benzer şekilde gösterebiliriz ki $(t_0, t_0+T]$ üzerinde

$$x(t+\eta_2) \leq \tilde{\beta}_{2n}(t) \tag{4.50}$$

yazılabilir. Böylece Matematiksel İndiksüyon Prensibiyle göstermiş olduk ki her n için $(t_0, t_0+T]$ üzerinde,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_2(t) \leq \ldots \leq \tilde{\alpha}_{2n}(t) \leq x(t+\eta_2) \leq \tilde{\alpha}_{2n+1}(t) \leq \ldots \leq \tilde{\alpha}_3(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t), \\
&\tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_3(t) \leq \ldots \leq \tilde{\beta}_{2n+1}(t) \leq x(t+\eta_2) \leq \tilde{\beta}_{2n}(t) \leq \ldots \leq \tilde{\beta}_2(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)
\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 4.1.1' de olduğu gibi benzer şekilde gösterilebilir ki $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_{2n}\right\}$, $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\alpha}_{2n+1}\right\}$, $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\beta}_{2n}\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p \tilde{\beta}_{2n+1}\right\}$ dizileri $[t_0, t_0+T]$ üzerinde düzgün sınırlı ve eş süreklidir. Dolayısıyla Ascoli-Arzela teoremi gereği $\left[t_0,t_0+T\right]$ üzerinde sırasıyla $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_{(2n)_k}\right\}$, $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_{(2n+1)_k}\right\}$, $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_{(2n)_k}\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_{(2n+1)_k}\right\}$ düzgün yakınsak alt dizileri mevcuttur. Bu yüzden de $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_{2n}\right\}$, $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_{2n+1}\right\}$, $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_{2n}\right\}$ ve $\left\{(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_{2n+1}\right\}$ dizileri monoton olduğundan $\left[t_0,t_0+T\right]$ üzerinde sırasıyla $n\to\infty$ iken düzgün ve monoton olarak $(t-t_0)^p\,\tilde{\rho}$, $(t-t_0)^p\,\tilde{r}$, $(t-t_0)^p\,\tilde{\rho}^*$ ve $(t-t_0)^p\,\tilde{r}^*$ değerlerine yakınsar.

Şimdi $\tilde{\rho}$, $\tilde{r}$, $\tilde{\rho}^*$ ve $\tilde{r}^*$ limit değerleri, $x(t+\eta_2)=\tilde{x}(t)$ ve $t\in\left(t_0,t_0+T\right]$ olmak üzere

$$D^q\tilde{x}(t)=f\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{x}(t)\right),\quad \tilde{x}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0 \tag{4.51}$$

probleminin II. tipten eşlenmiş çözümleri olduğunu gösterelim. Bunun için (4.30) ve (4.31) Riemann-Liouville lineer diferensiyel denklemlerine karşılık gelen Volterra tipli integral denklemlerinin $(t-t_0)^p$ ile çarpılmış hali

$$\begin{aligned}&(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_{2n}(t)\\&=\frac{x^0}{\Gamma(q)}+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n-1}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n-1}(\xi)\right)\right]d\xi,\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}&(t-t_0)^p\,\tilde{\alpha}_{2n+1}(t)\\&=\frac{x^0}{\Gamma(q)}+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n}(\xi)\right)\right]d\xi,\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}&(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_{2n}(t)\\&=\frac{x^0}{\Gamma(q)}+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n-1}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n-1}(\xi)\right)\right]d\xi,\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}&(t-t_0)^p\,\tilde{\beta}_{2n+1}(t)\\&=\frac{x^0}{\Gamma(q)}+\frac{(t-t_0)^p}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n}(\xi)\right)\right]d\xi\end{aligned} \tag{4.55}$$

olduğundan sırasıyla $n \to \infty$ için limit alınıp ayrıca $(t-t_0)^p$ ile bölünürse

$$\tilde{\rho}(t)=\frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{r}^*(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{r}(\xi)\right)\right]d\xi \qquad (4.56)$$

$$\tilde{r}(t)=\frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\rho}^*(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\rho}(\xi)\right)\right]d\xi \qquad (4.57)$$

$$\tilde{\rho}^*(t)=\frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{r}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{r}^*(\xi)\right)\right]d\xi \qquad (4.58)$$

ve

$$\tilde{r}^*(t)=\frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{q-1}\left[f\left(\xi+\eta_2,\tilde{\rho}(\xi)\right)+g\left(\xi+\eta_2,\tilde{\rho}^*(\xi)\right)\right]d\xi \qquad (4.59)$$

elde edilir. Bu ise $(t_0,t_0+T]$ üzerinde $\tilde{\rho}$, $\tilde{r}$, $\tilde{\rho}^*$ve $\tilde{r}^*$ limit değerlerinin (4.51) başlangıç değer probleminin II. tipten eşlenmiş çözümleri olduğunu gösterir. Dolayısıyla $(t_0,t_0+T]$ üzerinde $\tilde{\rho}$, $\tilde{r}$, $\tilde{\rho}^*$ve $\tilde{r}^*$ limit fonksiyonları (4.30) ve (4.31) problemlerini sağlar. Bu takdirde $t\in(t_0,t_0+T]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
D^q\tilde{\alpha}_{2n+2}(t)&=f\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n+1}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n+1}(t)\right), \quad \tilde{\alpha}_{2n+2}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0\\
D^q\tilde{\alpha}_{2n+1}(t)&=f\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n}(t)\right), \quad \tilde{\alpha}_{2n+1}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0\\
D^q\tilde{\beta}_{2n+2}(t)&=f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n+1}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n+1}(t)\right), \quad \tilde{\beta}_{2n+2}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0\\
D^q\tilde{\beta}_{2n+1}(t)&=f\left(t+\eta_2,\tilde{\alpha}_{2n}(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\beta}_{2n}(t)\right), \quad \tilde{\beta}_{2n+1}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\{\tilde{\alpha}_{2n}\}$, $\{\tilde{\alpha}_{2n+1}\}$, $\{\tilde{\beta}_{2n}\}$ve $\{\tilde{\beta}_{2n+1}\}$ dizileri $(t_0,t_0+T]$ üzerinde sırasıyla $n\to\infty$ iken düzgün ve monoton olarak $\tilde{\rho}$, $\tilde{r}$, $\tilde{\rho}^*$ve $\tilde{r}^*$ değerlerine yakınsadığından

$$D^q\tilde{\rho}(t)=f\left(t+\eta_2,\tilde{r}^*(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{r}(t)\right), \quad \tilde{\rho}(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0 \qquad (4.60)$$

$$D^q\tilde{r}(t)=f\left(t+\eta_2,\tilde{\rho}^*(t)\right)+g\left(t+\eta_2,\tilde{\rho}(t)\right), \quad \tilde{r}(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0}=x^0, \qquad (4.61)$$

$$D^q\tilde{\rho}^*(t) = f\left(t+\eta_2, \tilde{r}(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{r}^*(t)\right), \quad \tilde{\rho}^*(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0, \qquad (4.62)$$

$$D^q\tilde{r}^*(t) = f\left(t+\eta_2, \tilde{\rho}(t)\right) + g\left(t+\eta_2, \tilde{\rho}^*(t)\right), \quad \tilde{r}^*(t)(t-t_0)^{1-q}\Big|_{t=t_0} = x^0. \qquad (4.63)$$

$\tilde{\rho}(t) = \rho(t+\eta_2)$, $\tilde{r}(t) = r(t+\eta_2)$, $\tilde{\rho}^*(t) = \rho^*(t+\eta_2)$ ve $\tilde{r}^*(t) = r^*(t+\eta_2)$ alalım. O halde $t \in (t_0, t_0+T]$ olmak üzere $t+\eta_2$ yerine t dersek $t \in (s_0, s_0+T]$ olur. Şimdi sırasıyla (4.60), (4.61), (4.62) ve (4.63) başlangıç değer problemleri incelenirse $(s_0, s_0+T]$ üzerinde

$$D^q\rho(t) = f\left(t, r^*(t)\right) + g\left(t, r(t)\right), \quad \rho(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

$$D^q r(t) = f\left(t, \rho^*(t)\right) + g\left(t, \rho(t)\right), \quad r(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

$$D^q\rho^*(t) = f\left(t, r(t)\right) + g\left(t, r^*(t)\right), \quad \rho^*(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

ve

$$D^q r^*(t) = f\left(t, \rho(t)\right) + g\left(t, \rho^*(t)\right), \quad r^*(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

elde edilir. Dolayısıyla göstermiş olduk ki ρ, r, ρ^* ve r^* limit fonksiyonları $t \in (s_0, s_0+T]$ olmak üzerinde

$$D^q x(t) = f\left(t, x(t)\right) + g\left(t, x(t)\right), \quad x(t)(t-s_0)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

başlangıç değer probleminin II. tipten eşlenmiş çözümleridir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında; $f,\ g \in C\left[\left[t_0, \tau_0 + T\right] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, $t_0 < s_0 < \tau_0$ ve $t \in \left(s_0, s_0 + T\right]$ olmak üzere

$$D^q x(t) = f\left(t, x(t)\right) + g\left(t, x(t)\right), \quad x(t)\left(t - s_0\right)^{1-q}\Big|_{t=s_0} = x^0$$

lineer olmayan kesirli mertebeden diferensiyel denklem için başlangıç zaman farklı eşlenmiş alt ve üst çözümler verildiğinde genelleştirilmiş monoton iteratif tekniğin uygulanabilirliği incelendi.

6. KAYNAKLAR

[1] T. C. Hu, D. L. Qian, C. P. Lian, Comparison theorems of fractional differential equations, Comm. Appl. Math. Comput. 23 (1), Pages 97-103, 2009

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivatsava and J. J.Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] V. Kiryakova, Generalized fractional calculus and applications, in: Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 301, Longman-Wiley, New York, 1994.

[4] V. Lakshmikantham, S. Leela and Vasundhara Devi, J. Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Academic Publishers, Cambridge, 2009.

[5] V. Lakshmikantham and A. S.Vatsala, "Basic theory of fractional differential equations", Nonlinear Analysis TMA, 69, no. 8, 26772682, 2008

[6] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley and Sons, New York, 1993.

[7] K. B. Oldham, and J. Spanier The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[8] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[9] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Maritchev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[10] V. Lakshmikantham and J. Vasundhara Devi, Theory of fractional differential equations in a Banach space, European Jour. Pure and Appl. Math. Vol.1, No.1, 3845, 2008.

[11] A. Yakar, M. E. Koksal: Existence results for solutions of nonlinear fractional differential equations. Abst Appl Anal 2012, 12

[12] A. Yakar, Some generalizations of comparison results for fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications 62, 3215–3220, (2011).

[13] G. S. Ladde, V. Lakshmikantham, and A. S. Vatsala, Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1985.

[14] Lakshmikantham, V, Vatsala, AS: Generalized Quasilinearization for Nonlinear Problems. Kluwer Academic Publisher, The Netherlands (1998).

[15] C. Yakar, A. Yakar, A refinement of quasilinearization method for Caputo's sense fractional order differential equations. Abst Appl Anal 2010 (2010). Article ID 704367. doi:10.1155/2010/704367

[16] C. Yakar, A. Yakar, Further generalization of quasilinearization method with initial time difference. J Appl Funct Anal. 4(4), 714–727 (2009)

[17] GVSR. Deekshitulu, Generalized Monotone iterative technique for RL fractional differential equations, Nonlinear Studies 16 (1), Pages 85-94, 2009.

[18] V. Lakshmikantham, A. S.Vatsala, "General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations", Applied Mathematics Letters, Volume 21, Issue 8, 828834, 2008

[19] F. A Mc Rae, Monotone iterative technique and existence results for fractional differential Equations, Nonlinear Analysis TMA, 71, no. 12, 6093-6096, 2009

[20] F. A Mc Rae, Monotone iterative technique for PBVP of fractional differential equations.

[21] J. Vasundhara Devi, Generalized monotone iterative technique for PBVP of fractional differential equations, 2008.

[22] C. Yakar, A. Yakar, Monotone iterative technique with initial time difference for fractional differential equations, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 40(2), 2011, Pages 331-340

[23] J. D. Ramirez, A. S. Vatsala, Monotone iterative technique for fractional differential equations with periodic boundary conditions. Opuscula Mathematica 29 (3) (2009), 289- 304.

7. ÖZGEÇMİŞ

Aralık 1987’ de Tokat’ta doğdu. İlk ve orta dereceli öğrenimini Tokat’ ta tamamladı. 2006 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Matematik bölümüne girdi ve aynı üniversiteden 2010 yılında mezun oldu. 2013 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığında Yozgat/Sorgun Toki Şehit Mustafa Tekgül Anadolu lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.