T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞME YARI-HERMİTSEL 3-MANİFOLDLARDA EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şaban GÜVENÇ

Balıkesir, Haziran-2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞME YARI-HERMİTSEL 3-MANİFOLDLARDA EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şaban GÜVENÇ

Balıkesir, Haziran-2011

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞME YARI-HERMİTSEL 3-MANİFOLDLARDA EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şaban GÜVENÇ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

Sınav Tarihi: 22.06.2011

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN (UÜ)

Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR (Danışman-BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Bengü BAYRAM (BAÜ)

Enstitü Yönetim Kurulunun .... tarih .... sayılı oturumunun ..... nolu kararı ile .... mezun olmuştur.

Balıkesir, Haziran-2011

ÖZET

DEĞME YARI-HERMİTSEL 3-MANİFOLDLARDA EĞRİLER

Şaban GÜVENÇ

Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir, 2011

Bu çalışmada bir değme yarı-Hermitsel 3-manifold üzerindeki Tanaka-Webster koneksiyonu ve özellikleri verilmiş; bu yarı-Hermitsel yapı üzerinde tanımlanmış kavramlar kullanılarak, Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğrilerin tanjant veya normal demette yarı-Hermitsel has veya harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olma koşulları incelenmiştir. Ayrıca bu eğrilerin yarı-Hermitsel AW(k)-tipinden olması için gerekli ve yeterli şartlar belirlenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir değme yarı-Hermitsel 3-manifold üzerinde tanımlı olan Tanaka-Webster koneksiyonu ve bu koneksiyonun özellikleri verilmiştir. Legendre eğrileri için, tanjant veya normal demette yarı-Hermitsel has veya harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olma koşulları incelenmiştir. Ayrıca Legendre eğrilerinin yarı-Hermitsel AW(k)-tipinden olma şartları belirlenmiştir.

Dördüncü bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde, üçüncü bölümdeki çalışmalar Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğrilere genellenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Özel durumda, üçüncü bölümdeki sonuçların desteklendiği gösterilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölüm de orijinal sonuçlar içermektedir. Bu bölümde 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde bulunan, Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğrileri, tanjant veya normal demette karakterize eden diferensiyel denklemler elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Slant eğri, Tanaka-Webster koneksiyonu, yarı-Hermitsel ortalama eğrilik vektör alanı, yarı-Hermitsel AW(k)-tipinden eğri.

ABSTRACT

CURVES ON CONTACT PSEUDO-HERMITIAN 3-MANIFOLDS

Şaban GÜVENÇ

Balıkesir University, Institute of Science, Department of Mathematics

(M. Sc. Thesis / Supervisor : Associate Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR)
Balıkesir-Turkey, 2011

In this thesis, we study slant curves in contact Riemannian 3-manifolds with pseudo-Hermitian proper mean curvature vector field and pseudo-Hermitian harmonic mean curvature vector field for Tanaka-Webster connection in the tangent and normal bundle, respectively. We also study slant curves of pseudo-Hermitian AW(k)-type.

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, we give some notions and definitions which will be used in the next chapters.

In the third chapter, we introduce the Tanaka-Webster connection on a contact 3-dimensional Riemannian manifold and we find necessary and sufficent conditions for a Legendre curve to have pseudo-Hermitian proper or harmonic mean curvature vector field in the tangent or normal bundle. Moreover, we classify Legendre curves of pseudo-Hermitian AW(k)-type.

The fourth chapter consists of original results. Since a Legendre curve is a special type of a slant curve, we generalize the results of the third chapter to non-geodesic slant curves. In particular, we show that the results of the third chapter are satisfied.

In the final chapter, which also consists of original results, we obtain differential equations which characterize non-geodesic slant curves with respect to the Tanaka-Webster connection in the tangent or normal bundle on a contact 3-dimensional Riemannian manifold.

KEY WORDS : Slant curve, the Tanaka-Webster connection, pseudo-Hermitian mean curvature vector field, curves of pseudo-Hermitian AW(k)-type.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

M	Manifold
φ	(1,1)-tensör alanı (Endomorfizm)
ξ	Karakteristik (Reeb) vektör alanı
η	Değme Yapı (1-Form)
g	Metrik Tensörü
$[\ ,\ ]$	Lie Parantez Operatörü
T_pM	Tanjant Uzay
$\chi(M)$	Vektör Alanları Uzayı
∇	Levi-Civita Koneksiyonu
$\widehat{\nabla}$	Tanaka-Webster Koneksiyonu
$\nabla^{\perp}$	Normal Demette Levi-Civita Koneksiyonu
$\widehat{\nabla}^{\perp}$	Normal Demette Tanaka-Webster Koneksiyonu
Δ	Laplas Dönüşümü
$\widehat{\Delta}$	Tanaka-Webster Koneksiyonuna Göre Laplas Dönüşümü
$\Delta^{\perp}$	Normal Demette Laplas Dönüşümü
$\widehat{\Delta}^{\perp}$	Normal Demette Tanaka-Webster Koneksiyonuna Göre Laplas Dönüşümü
H	Ortalama Eğrilik Vektör Alanı
$\widehat{H}$	Yarı-Hermitsel Ortalama Eğrilik Vektör Alanı
$\widehat{\kappa}$	Yarı-Hermitsel Eğrilik
$\widehat{\tau}$	Yarı-Hermitsel Torsiyon
$\otimes$	Tensör Çarpımı

ÖNSÖZ

Bu çalışmada 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğriler için, tanjant veya normal demette yarı-Hermitsel has veya yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olma koşulları elde edilmektedir. Ayrıca bir slant eğrinin yarı-Hermitsel *AW*(k)-tipinden olması için gerekli ve yeterli şartlara ulaşılmaktadır.

Bana her türlü konuda yardımcı ve örnek olan, beni cesaretlendiren ve Diferensiyel Geometri'yi bana sevdiren tez danışmanım Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca akademik hayata adım atmamda çok büyük katkısı olan sayın Yrd. Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR'e, akademik çalışma disiplinini kazanmam için tavsiyelerinden yararlandığım Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR'e, yardımını benden esirgemeyen ve her türlü soruma yanıt veren Arş. Gör. Dr. Sibel SULAR'a, çalışkanlıklarıyla bana örnek olan oda arkadaşlarım Arş. Gör. Beyza Billur İSKENDER ve Arş. Gör. Derya AVCI'ya da teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, henüz ilköğretim 5. sınıftayken akademik yeteneğimi keşfeden ve hayatıma yön vermede çok önemli etkileri olan Şaban GÖNÜL'e, Cengiz BALCI'ya ve Yıldız HACIMİRZAOĞLU'na özellikle teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince, maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK BİDEB'e de teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2011 **Şaban GÜVENÇ**

1. GİRİŞ

3-boyutlu bir değme manifold üzerinde bulunan bir eğri, Reeb vektör alanı ξ ile sabit değme açısına sahip ise bu eğriye bir *slant eğri* denir. Özel olarak, eğer bu sabit değme açısı $\frac{\pi}{2}$ ye eşitse, bu durumda eğriye bir *Legendre eğrisi* denir. Slant eğrilerle doğal olarak Sasakian manifoldlarda da karşılaşılır. J. T. Cho ve J. E. Lee, [18] de Tanaka-Webster koneksiyonu $\hat{\nabla}$ ya göre holomorfik kesitsel eğriliği $2c$ olan 3-boyutlu Sasakian uzay formlarında değme yarı-Hermitsel geometri çalışmışlardır. Bu çalışmalarında Tanaka-Webster koneksiyonu $\hat{\nabla}$ ya göre geodezik olmayan bir eğri eğer bir slant eğri ise $\hat{\kappa}$ ve $\hat{\tau}$ oranının sabit olduğunu ispatlamışlardır. Burada $\hat{\kappa}$ ve $\hat{\tau}$, sırasıyla eğrinin Tanaka-Webster koneksiyonu $\hat{\nabla}$ ya göre eğrilik ve torsiyonudur. Ayrıca, J. E. Lee [19] da değme yarı-Hermitsel 3-manifoldlar üzerindeki Legendre eğrileri üzerine çalışmıştır. Tanjant veya normal demette yarı-Hermitsel has veya yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip Legendre eğrilerini incelemiştir.

K. Arslan ve C. Özgür, [5] de AW(k)-tipinden eğriler üzerine çalışmışlardır. J. E. Lee ise [19] da 3-boyutlu bir Sasakian manifoldu üzerinde yarı-Hermitsel AW(k)-tipinden olma koşullarını tanımlamış ve Legendre eğrilerinin yarı-Hermitsel AW(k)-tipinden olması için gerekli ve yeterli şartları elde etmiştir.

Yukarıdaki çalışmalardan yola çıkılarak, bu çalışmanın dördüncü bölümünde 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğriler için, tanjant veya normal demette yarı-Hermitsel has veya yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olma koşulları elde edilmektedir. Ayrıca bir slant eğrinin yarı-Hermitsel AW(k)-tipinden olması için gerekli ve yeterli şartlara ulaşılmaktadır. Burada elde edilen sonuçlar orijinaldir. Her

Legendre eğrisi özel bir slant eğri olduğundan, bu tezde elde edilen sonuçlar [19] daki sonuçların genellenmiş halidir.

Ayrıca, beşinci bölümde Tanaka-Webster koneksiyonu ve yarı-Hermitsel geometride Frenet formülleri kullanılarak, 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemler elde edilmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar da orijinaldir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M n-boyutlu, diferensiyellenebilir (C^{∞}) bir manifold olsun. M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^{∞} fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer Riemann metriği g ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir [1].

M manifoldunun herhangi iki P ve Q noktası için; M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye *bağlantılı manifold* adı verilir [2].

Tanım 2.1.2. M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi\,(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü ;

(i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$; $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$,

(ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$; $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall\, f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$; $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall\, f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir *Afin Koneksiyon* adı verilir [3].

Tanım 2.1.3. M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve ∇ M üzerinde bir afin koneksiyon olsun.

$$T(X,Y)= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ile tanımlanan T tensörüne ∇ koneksiyonunun *torsion tensörü* adı verilir [3].

Tanım 2.1.4. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere;

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$; $\forall X, Y \in \chi(M)$,

(ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

şartlarını sağladığında ∇ ya M üzerinde *Riemann Koneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Koneksiyonu* adı verilir [3].

Tanım 2.1.5. M bir Riemann manifoldu ve f, M üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. M üzerindeki *Laplas operatörü,*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.1.6. M n-boyutlu bir C^∞ manifold ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, M de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ nın yüksek mertebeden türevleri

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), ..., \gamma^{(d)}(s)$$

lineer bağımsız ve

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), ..., \gamma^{(d)}(s), \gamma^{(d+1)}(s)$$

$\forall s \in I$ için lineer bağımlı ise γ ya *oskülatör mertebesi d olan bir Frenet eğrisi* denir.

d. mertebeden her Frenet eğrisi için γ boyunca $\gamma'(s) = v_1(s)$ olmak üzere bir $v_1, v_2, v_3, ..., v_d$ ortonormal çatısı bulunabilir. Bu çatıya Frenet çatısı denir ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, ..., \kappa_{d-1} : I \to \mathbb{R}$ (d-1)-fonksiyonları Frenet eğrilikleri olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\nabla_{v_1}\gamma'(s)=\gamma''(s)=\kappa_1(s)v_2(s)$$

$$\nabla_{v_1}v_2(s)=-\kappa_1(s)v_1(s)+\kappa_2(s)v_3(s)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\nabla_{v_1}v_i(s)=-\kappa_{i-1}(s)v_{i-1}(s)+\kappa_i(s)v_{i+1}(s)$$

$$\nabla_{v_1}v_{i+1}(s)=-\kappa_i(s)v_i(s)$$

Burada ∇, M de Levi-Civita koneksiyonudur [4].

Önerme 2.1.7. γ, M de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda γ nın Frenet çatısı $\{\ T(s)=v_1(s),\ N(s)=v_2(s),\ B(s)=v_3(s)\ \}$ ve $\kappa_1(s)=\kappa(s)$, $\kappa_2(s)=\tau(s)$ ile gösterilmek üzere

$$\gamma'(s)=T(s)$$

$$\gamma''(s)=\nabla_T T(s)=\kappa(s)N(s) \tag{2.1}$$

$$\gamma'''(s)=\nabla_T\nabla_T T(s)=-\kappa^2(s)T(s)+\kappa'(s)N(s)+\kappa(s)\tau(s)B(s) \tag{2.2}$$

$$\gamma^{(iv)}(s)=\nabla_T\nabla_T\nabla_T T(s)=-3\kappa(s)\kappa'(s)T(s)$$

$$+\left\{\kappa''(s)-\kappa^3(s)-\kappa(s)\tau^2(s)\right\}N(s)+\left\{2\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)\right\}B(s) \tag{2.3}$$

dir [5].

2.2 *AW*(k)-tipinden Eğriler

Notasyon 2.2.1.

$$N_1(s)=\left(\gamma''(s)\right)^{\perp}=\kappa(s)N(s), \tag{2.4}$$

$$N_2(s)=\left(\gamma'''(s)\right)^{\perp}=\kappa'(s)N(s)+\kappa(s)\tau(s)B(s), \tag{2.5}$$

ve

$$N_3(s)=\left(\gamma^{(iv)}(s)\right)^{\perp}=\left\{\kappa''(s)-\kappa^3(s)-\kappa(s)\tau^2(s)\right\}N(s)+\left\{2\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)\right\}B(s) \tag{2.6}$$

ile gösterelim [5].

Tanım 2.2.2. γ oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun.

(i) Eğer

$$N_3(s) = 0$$

ise γ ya $AW(1)$-*tipindendir* denir.

(ii) Eğer

$$\|N_2(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_2(s)\rangle N_2(s) \tag{2.7}$$

ise γ ya $AW(2)$-*tipindendir* denir.

(iii) Eğer

$$\|N_1(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_1(s)\rangle N_1(s) \tag{2.8}$$

ise γ ya $AW(3)$-*tipindendir* denir [5, 6].

Önerme 2.2.3. γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde γ nın $AW(1)$-tipinden olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s) = 0 \tag{2.9}$$

ve

$$\tau(s) = \frac{c}{\kappa^2(s)} \tag{2.10}$$

olmasıdır [5].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi $AW(1)$-tipinden olsun. Tanım 2.2.2.(i) den dolayı $N_3(s) = 0$ dır. Böylece (2.6) eşitliğinden

$$\{\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s)\} N(s) + \{2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s)\} B(s) = 0$$

dır. Ayrıca $N(s)$ ve $B(s)$ lineer bağımsız olduğundan

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s) - \kappa(s)\tau^2(s) = 0$$

$$2\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s) = 0$$

bulunur. Son denklemin çözümü

$$\tau(s) = \frac{c}{\kappa^2(s)}, \ c\text{=sabit}$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir.

Yeterlilik: İspatı açıktır.

Önerme 2.2.4. γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde γ nın $AW(2)$-tipinden olması için gerek ve yeter şart

$$2(\kappa'(s))^2\tau(s)+\kappa(s)\kappa'(s)\tau'(s)=\kappa(s)\kappa''(s)\tau(s)-\kappa^4(s)\tau(s)-\kappa^2(s)\tau^3(s) \tag{2.11}$$

olmasıdır [5].

İspat: Gereklilik: γ $AW(2)$-tipinden ise γ üzerinde (2.7) eşitliği sağlanır. (2.5) ve (2.6) denklemleri (2.7) de yerine konursa

$$\begin{aligned}&\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa''(s)-\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa^3(s)-\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa(s)\tau^2(s)+\kappa''(s)\kappa^2(s)\tau^2(s)-\kappa^5(s)\tau^2(s)\\&-\kappa^3(s)\tau^4(s)=\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa''(s)-\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa^3(s)+\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa(s)\tau^2(s)+\kappa'(s)\kappa^2(s)\tau'(s)\tau(s)\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$\begin{aligned}&-\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa(s)\tau^2(s)+\kappa''(s)\kappa^2(s)\tau^2(s)-\kappa^5(s)\tau^2(s)-\kappa^3(s)\tau^4(s)\\&=\left(\kappa'(s)\right)^2\kappa(s)\tau^2(s)+\kappa'(s)\kappa^2(s)\tau'(s)\tau(s)\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Son olarak eşitliğin her iki tarafı

$$\frac{1}{\kappa(s)\tau(s)}$$

ile çarpılarak denklem düzenlenirse (2.11) eşitliği elde edilir.

Yeterlilik: Tersi tanımdan açıktır.

Teorem 2.2.5. γ eğrisi 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde γ nın $AW(3)$-tipinden olması için gerek ve yeter şart

$$2\kappa'(s)\tau(s)+\kappa(s)\tau'(s)=0 \tag{2.12}$$

olmasıdır. Bu diferensiyel denklemin çözümü ise

$$\tau(s)=\frac{c}{\kappa^2(s)},\ c\in\mathbb{R} \tag{2.13}$$

dir [5].

İspat: Gereklilik: γ $AW(3)$-tipinden ise (2.8) eşitliği sağlanır. (2.4) ve (2.6) denklemlerin (2.8) eşitliğinde yerine koyarsak

$$\begin{aligned}&\left(\kappa^2(s)\kappa''(s)-\kappa^5(s)-\kappa^3(s)\tau^2(s)\right)N(s)+\left(2\kappa^2(s)\kappa'(s)\tau(s)+\kappa^3(s)\tau'(s)\right)B(s)\\&=\left(\kappa^2(s)\kappa''(s)-\kappa^5(s)-\kappa^3(s)\tau^2(s)\right)N(s)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $N(s)$ ve $B(s)$ lineer bağımsız olduğundan,

$$2\kappa^2(s)\kappa'(s)\tau(s)+\kappa^3(s)\tau'(s)=0 \tag{2.14}$$

sonucuna varırız. Eğer $\kappa(s)=0$ ise γ bir düz doğrudur. Eğer $\kappa(s)\neq 0$ ise (2.14) eşitliğini $\kappa^2(s)$ ile sadeleştirerek (2.12) eşitliğini elde ederiz.

Yeterlilik: Açıktır.

Örnek 2.2.6. $\gamma: I \to \mathbb{E}^3$, $\gamma(s)=\left(a\cos s, a\sin s, bs\right)$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ ile tanımlanan dik dairesel helis eğrisi için $\kappa(s)=\dfrac{a}{a^2+b^2}$ ve $\tau(s)=\dfrac{b}{a^2+b^2}$ değerleri sabit olduğundan (2.12) eşitliği sağlanır. Eğrilik ve torsiyonu sıfırdan farklı sabitler olan bu tip eğrilere dik dairesel helis denmektedir. Böylece dik dairesel helisin $AW(3)$-tipinden olduğu görülür.

2.3 Has ve Harmonik Ortalama Eğrilik Vektör Alanı

Tanım 2.3.1. M n-boyutlu bir manifold ve $\tilde{M}$ (n+d)-boyutlu manifold olsun. $\forall p\in M$ noktası için $\tilde{M}$ üzerinde bir $\tilde{U}$, M üzerinde bir U komşuluğu mevcut ve

$$U=\{m\in\tilde{U}:\tilde{x}_{n+1}(m)=...=\tilde{x}_{n+d}(m)=0\}$$

ise M ye $\tilde{M}$ nın bir *altmanifoldu* adı verilir. Burada $\{\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_{n+d}\}$ koordinat sistemi $\tilde{U}$ da, $\{x_1,...,x_n\}$ de U üzerinde koordinat sistemleridir [7].

Tanım 2.3.2. M ve $\tilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\tilde{M}$ nın altmanifoldu ve ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırası ile M ve $\tilde{M}$ da kovaryant türevler olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$h:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi^{\perp}(M)$$

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-h(X,Y) \tag{2.15}$$

biçiminde *Gauss eşitliği* elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. (2.15) ile tanımlanan h ya M nin *ikinci temel formu* adı verilir. Eğer $h=0$ ise M ye *total geodeziktir* denir [8].

Tanım 2.3.3. M ve $\tilde{M}$ sırası ile n ve (n+d)-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\tilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. M ye normal bir birim vektör alanı N olsun. $\tilde{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_N X$ ve $\nabla^{\perp}_X N$ olmak üzere;

$$A : \chi(M) \times \chi^{\perp}(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^{\perp}_X N \tag{2.16}$$

biçiminde *Weingarten eşitliği* elde edilir. Burada A_N ye şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M nin $T^{\perp}M$ *normal demetindeki (normal) koneksiyon* adı verilir [8].

M nin şekil operatörü A_N ile ikinci temel form h arasında;

$$g(A_N X, Y) = g(h(X, Y), N) \tag{2.17}$$

bağıntısı vardır. Burada g, T_pM de skaler çarpımdır [8].

Tanım 2.3.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için $\bar{R} \cdot h$;

$$\begin{aligned}(\bar{R}(X, Y)\cdot h)(Z, W) = {} & R^{\perp}(X, Y)h(Z, W) - h(R(X, Y)Z, W) \\ & - h(Z, R(X, Y)W)\end{aligned} \tag{2.18}$$

ile tanımlanır [9]. Eğer M nin her noktasında

$$\bar{R} \cdot h = 0 \tag{2.19}$$

ise M ye $\tilde{M}$ nın *semiparalel altmanifoldu* adı verilir [9].

Tanım 2.3.5. M 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. γ üzerindeki Frenet çatı alanı $\{T, N, B\}$, γ nın geodezik eğriliği ve torsiyonu sırasıyla κ ve τ olmak üzere

$$H = \kappa N \tag{2.20}$$

eşitliğiyle tanımlanan H vektör alanına γ nın *ortalama eğrilik vektör alanı* denir [10].

Tanım 2.3.6. M 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. H ortalama eğrilik vektör alanının (*tanjant demette) Laplas'ı*

$$\Delta H = -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 2.3.7. M 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. H ortalama eğrilik vektör alanının *normal demette Laplas'ı*

$$\Delta^{\perp} H = -\nabla^{\perp}{}_T \nabla^{\perp}{}_T \nabla^{\perp}{}_T T \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 2.3.8. M 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\Delta H = \lambda H \tag{2.23}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ ya *has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir. Özel olarak, $\Delta H = 0$ ise γ ya *harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir [10].

Tanım 2.3.9. M 3-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\Delta^{\perp} H = \lambda H \tag{2.24}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ ya *normal demette has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir. Özel olarak, $\Delta^{\perp} H = 0$ ise γ ya *normal demette harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir [10].

2.4 Değme Metrik Manifoldlar

Tanım 2.4.1. M, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde her yerde,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olacak şekilde bir η diferensiyel 1-formu varsa η ya *değme form*, $(M,\ \eta)$ ikilisine de *değme manifold* denir [8].

Tanım 2.4.2. M, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. φ, (1, 1)-tipinden bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η da M üzerinde bir diferensiyel 1-form olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için $(\varphi,\ \xi,\ \eta)$ üçlüsü;

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

$$\eta : \chi(M) \xrightarrow{\text{dif.bilir}} C^{\infty}(M,\ \mathbb{R})$$

$$\eta(\xi) = 1 \ \text{ ve } \ \varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \tag{2.25}$$

koşullarını sağlıyor ise bu üçlüye bir *hemen hemen değme yapı*, $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta)$ dörtlüsüne de bir *hemen hemen değme manifold* adı verilir [11].

Tanım 2.4.3. M bir hemen hemen değme manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\big(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\big) \tag{2.26}$$

dir [8].

Tanım 2.4.4. M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ için,

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{ve} \quad d\eta(\xi,\ X) = 0$$

olacak biçimde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı var ise; ξ ye η*-değme yapısının karakteristik vektör alanı* denir [8].

Örnek 2.4.5. *M*, 3-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Her (x, y, z) noktası civarında

$$\eta = \cos z dx + \sin z dy$$

diferensiyel 1-formu ile *M* üzerinde

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

vektör alanını alalım. Buradan

$$d\eta = \sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy$$

olup bir $X \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned}
d\eta(X,\xi) &= (\sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy)(X,\xi) \\
&= (\sin z dx \wedge dz)(X,\xi) + (\cos z dz \wedge dy)(X,\xi) \\
&= \sin z[dx(X)dz(\xi) - dx(\xi)dz(X)] \\
&\quad + \cos z[dz(X)dy(\xi) - dz(\xi)dy(X)] \\
&= \sin z dx(X)dz(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}) \\
&\quad - \sin z dx(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y})dz(X) \\
&\quad + \cos z dz(X)dy(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}) \\
&\quad - \cos z dz(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y})dy(X) \\
&= -\sin z \cos z dx(\frac{\partial}{\partial x})dz(X) + \cos z sinz dz(X)dy(\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= -\sin z \cos z dz(X) + \cos z sinz dz(X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Kısaca $\forall X \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X,\xi)=0$$

dır. Diğer taraftan

$$\eta(\xi)=(\cos zdx+\sin zdy)(\cos z\frac{\partial}{\partial x}+\sin z\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\begin{aligned}
&=\cos^2 zdx(\frac{\partial}{\partial x})+\cos z\sin zdx(\frac{\partial}{\partial y})\\
&+\cos z\sin zdy(\frac{\partial}{\partial x})+\sin^2 zdy(\frac{\partial}{\partial y})\\
&=\cos^2 z+\sin^2 z\\
&=1
\end{aligned}$$

dir. Böylece η diferensiyel 1-formu için Tanım 2.4.4 deki şartları sağlayan bir tek $\xi\in\chi(M)$ vektör alanı

$$\xi = \cos z\frac{\partial}{\partial x}+\sin z\frac{\partial}{\partial y}$$

dir [12].

Teorem 2.4.6. (2n+1)-boyutlu *M* hemen hemen değme manifoldu üzerinde, $X,\xi\in\chi(M)$, $X\neq\xi$ vektör alanları ve $\varphi:\chi(M)\xrightarrow{\text{lineer}}\chi(M)$ için,

$$\varphi\xi=0$$

$$\eta\circ\varphi=0$$

$$\operatorname{rank}\varphi = 2n$$

eşitlikleri sağlanır [11].

Tanım 2.4.7. (2n+1)-boyutlu *M* hemen hemen değme manifoldu üzerinde, $\forall X, Y\in\chi(M)$ ve $\xi\in\chi(M)$ için;

$$\eta(X)=g(X,\ \xi) \tag{2.27}$$

ve

$$g(\varphi X,\ \varphi Y)=g(X,\ Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.28}$$

koşullarını sağlayan bir g metriği var ise; $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ dörtlüsüne bir *hemen hemen değme metrik yapı*, $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ beşlisine de bir *hemen hemen değme metrik manifold* adı verilir [11].

Teorem 2.4.8. (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için ,

$$g(\varphi X,\ \varphi Y) = g(X,\ Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [11].

Sonuç 2.4.9. (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme metrik manifoldu verilmiş olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$g(\varphi X,\ Y) = -g(X,\ \varphi Y) \tag{2.29}$$

dir. Bu da, φ nin g ye göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir [11].

Teorem 2.4.10. (2n+1)-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu verilmiş olsun. M üzerinde bir η değme yapısı verildiğinde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$
$$g(X,\ \varphi Y) = d\eta(X,\ Y)$$

olacak şekilde bir $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen değme metrik yapısı vardır [11].

Tanım 2.4.11. (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde, bir $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen değme metrik yapısı verilmiş olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\Phi(X,\ Y) = g(X,\ \varphi Y)$$

biçiminde tanımlı Φ dönüşümüne $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen değme metrik yapısının *temel 2-formu* denir [11].

Tanım 2.4.12. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n e yönlendirilebilirdir denir [13].

Sonuç 2.4.13. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.4.11 yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.4.12 gereğince $\left(M^n, \varphi, \xi, \eta, g\right)$ hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir [14].

Tanım 2.4.14. *M* bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer her $p \in M$ noktası için $J^2 = -I$ olacak biçimde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizmi mevcut ise, *M* üzerindeki J tensör alanına bir *hemen hemen kompleks yapı* adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir *hemen hemen kompleks manifold* denir [15].

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangibir vektör alanı

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklinde yazılabilir. Burada *X*, *M* manifolduna teğet bir vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve $f\dfrac{d}{dt}$, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

(φ, ξ, η, g), *M* üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ olduğu gösterilebilir [15].

Tanım 2.4.15. *M* diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere, *M* üzerinde (1, 1)-tipinde bir tensör alanı *F* olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına *F* tensör alanının *Nijenhuis torsiyon tensörü* adı verilir. $F = J$ olarak alınırsa,

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$
$$= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

eşitliği yazılır. Eğer $N_J = 0$ ise J ye *integrallenebilirdir* denir. Eğer φ nin Nijenhuis torsiyon tensörü sıfır ise $(\varphi,\ \xi,\ \eta)$ yapısına *normal* veya *Sasakian yapı* denir [15].

Yukarıda verilen normallik tanımı

$$[\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$$

olmasına denktir [8].

Tanım 2.4.16. (2n+1)-boyutlu bir $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ değme metrik manifoldu alalım. Eğer *M* nin değme metrik yapısı normal ise $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ yapısına *Sasakian yapı* (veya *normal değme metrik yapı*) ve $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ ye de *Sasakian manifold* (veya *normal değme metrik manifold*) denir [11].

Teorem 2.4.17. Bir $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen değme metrik yapısının Sasakian olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{2.30}$$

olmasıdır [8].

Tanım 2.4.18. *M* bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\varphi : \mathbb{R} \text{ x } M \xrightarrow{C^\infty} M$$
$$(t,P) \longrightarrow \varphi_t(P)$$

dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, φ ye *M nin diferensiyellenebilir 1-parametreli grubu* adı verilir:

(i) $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_t : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$$
$$P \longrightarrow \varphi_t(P)$$

bir difeomorfizmdir.

(ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $\forall P \in M$ için

$$\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$$

dir [16].

Tanım 2.4.19. M bir diferensiyellenebilir manifold, $X \in \chi(M)$ ve X ile gerilmiş lokal dönüşümlü 1-parametreli grup φ_t olsun. X vektör alanına göre bir F (1,1)-tipinden tensör alanının $L_X F$ ile gösterilen *Lie türevi*:

$$L_X F = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[F_P - (\varphi_t F)_P\right] \tag{2.31}$$

olarak tanımlanır [11].

Tanım 2.4.20. $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ bir değme Riemann manifoldu olmak üzere M nin *yapısal dönüşümü*

$$h : \chi(\mathrm{M}) \to \chi(\mathrm{M}),\ h(X) = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)(X) \tag{2.32}$$

endomorfizmi olarak tanımlanır. Burada L_ξ, ξ karakteristik vektör alanı yönündeki Lie türevidir [8].

Önerme 2.4.21. Bir $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ değme Riemann manifoldu üzerindeki yapısal dönüşüm h aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) h simetrik dönüşümdür; yani, $g(hX,\ Y) = g(X,\ hY)$ dir.

(ii) $\nabla_X \xi = -\varphi X - \varphi h X$ dir.

(iii) $h\xi = 0$ dır.

(iv) h ile φ anti-simetriktir; yani, $h\varphi = -\varphi h$ dır.

Burada ∇ M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonudur [8].

Önerme 2.4.22. $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme metrik manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX) \tag{2.33}$$

dir [8].

Önerme 2.4.23. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir değme Riemann manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki üç önerme denktir [8]:

(i) Karakteristik vektör alanı ξ bir Killing vektör alanıdır; yani, $\nabla\xi = -\varphi$ dir.

(ii) $h = 0$ dır.

(iii) M bir Sasakian manifolddur.

3. YARI-HERMİTSEL YAPI VE TANAKA-WEBSTER KONEKSİYONU

3-boyutlu bir değme Riemann $M=\left(M^3,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g\right)$ manifoldu için, *M* nin bir $p\in \mathrm{M}$ noktasındaki tanjant uzayı

$$T_pM=D_p+\mathbb{R}\xi_p\,,\ \ D_p=\ker\eta_p=\left\{v\in T_pM\mid \eta(v)=0\right\}$$

şeklinde lineer alt uzayların direkt toplamı olarak elde edilebilir. Böylece $D:P\to D_P$, değme distribüsyon olarak adlandırılan, ξ ye ortogonal iki boyutlu bir *distribüsyon* tanımlar. $J=\varphi\,|_D$ kısıtlanışı, D *üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı* tanımlar. Bu durumda *M* değme Riemann manifoldunun ilişkilendirilmiş CR-yapısı

$$H=\left\{X-iJX\mid X\in D\right\}$$

holomorfik altuzayı ile verilir. (Bu altuzay $TM^{\mathbb{C}}$ kompleks tanjant uzayının bir altuzayıdır). Böylece her H_P liftinin kompleks 1-boyuttan olduğu, $H\cap\overline{H}=\left\{0\right\}$ ve $D\ \mathrm{x}\ \mathbb{C}=H\oplus\overline{H}$ olduğu görülür. Dahası, ilişkilendirilmiş hemen hemen CR-yapı her zaman integrallenebilirdir; integrallenebilirlik koşulu

$$\left[H,H\right]\subset H$$

ile verilir.

H için L "*Levi formu*"

$$L:D\ \mathrm{x}\ D\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})\,,\ \ L(X,Y)=-d\eta(X,Y)$$

ile tanımlanır. Burada $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, *M* deki diferensiyellenebilir fonksiyonların cebirini ifade etmektedir. Böylece Levi formu Hermitsel ve pozitif tanımlıdır. $\left(\eta,L\right)$ çifti, *M* üzerinde bir *değme güçlü yarı-dışbükey yarı-Hermitsel yapı* olarak adlandırılır.

$(\eta,\ \varphi,\ \xi,\ g)$ değme Riemann yapısıyla ilişkilendirilmiş $M=(M,\eta,L)$ değme güçlü yarı-dışbükey yarı-Hermitsel manifoldu üzerinde *Tanaka-Webster koneksiyonu* $\widehat{\nabla}$, $\forall X,Y\in\chi(\mathrm{M})$ için

$$\widehat{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\eta(X)\varphi Y+\left(\nabla_X\eta\right)(Y)\xi-\eta(Y)\nabla_X\xi \tag{3.1}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Burada ∇ Levi-Civita koneksiyonudur. Önerme 2.4.21 i kullanarak (3.1) eşitliğini aşağıdaki şekilde yeniden yazalım:

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_X Y&=\nabla_X Y+\eta(X)\varphi Y+\left(\nabla_X\eta\right)(Y)\xi-\eta(Y)\nabla_X\\&=\nabla_X Y+\eta\left(X\right)\varphi Y+g(Y,-\varphi X-\varphi hX)\xi-\eta\left(Y\right)\left(-\varphi X-\varphi hX\right)\\&=\nabla_X Y+\eta\left(X\right)\varphi Y+\eta\left(Y\right)\left(\varphi X+\varphi hX\right)-g(\varphi X+\varphi hX,Y)\xi.\end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) eşitliğinde

$$A(X,Y)=\eta\left(X\right)\varphi Y+\eta\left(Y\right)\left(\varphi X+\varphi hX\right)-g(\varphi X+\varphi hX,Y)\xi \tag{3.3}$$

olarak tanımlanırsa

$$\widehat{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+A(X,Y) \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi Tanaka-Webster koneksiyonunun torsionunu bulalım.

$$\begin{aligned}\widehat{T}(X,Y)&=\widehat{\nabla}_X Y-\widehat{\nabla}_Y X-\left[X,Y\right]\\&=\left\{\nabla_X Y+A\left(X,Y\right)\right\}-\left\{\nabla_Y X+A(Y,X)\right\}-\left[X,Y\right]\\&=\left\{\nabla_X Y-\nabla_Y X-\left[X,Y\right]\right\}+\left\{A(X,Y)-A(Y,X)\right\}\\&=A(X,Y)-A(Y,X)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Burada ∇ Riemann koneksiyonu olduğundan $\nabla_X Y-\nabla_Y X-\left[X,Y\right]=T(X,Y)=0$ dır. (3.3) eşitliğinden

$$A(Y,X)=\eta\left(Y\right)\varphi X+\eta\left(X\right)\left(\varphi Y+\varphi hY\right)-g(\varphi Y+\varphi hY,X)\xi \tag{3.6}$$

bulunur. (3.3) ve (3.6) denklemleri (3.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\widehat{T}(X,Y)&=A(X,Y)-A(Y,X)\\&=\left\{\eta\left(X\right)\varphi Y+\eta\left(Y\right)\left(\varphi X+\varphi hX\right)-g(\varphi X+\varphi hX,Y)\xi\right\}\\&\quad-\left\{\eta\left(Y\right)\varphi X+\eta\left(X\right)\left(\varphi Y+\varphi hY\right)-g(\varphi Y+\varphi hY,X)\xi\right\}\\&=2g(X,\varphi Y)\xi+\eta\left(Y\right)\varphi hX-g(\varphi hX,Y)\xi-\eta\left(X\right)\varphi hY+g(\varphi hY,X)\xi\\&=2g(X,\varphi Y)\xi+\eta\left(Y\right)\varphi hX-\eta\left(X\right)\varphi hY\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Özel olarak, Sasakian manifoldlar için Önerme 2.4.23 kullanılarak (3.3) ve (3.7) eşitlikleri

$$A(X,Y)=\eta(X)\varphi Y+\eta(Y)\varphi X-g(\varphi X,Y)\xi \tag{3.8}$$

$$\widehat{T}(X,Y)=2g(X,\varphi Y)\xi \tag{3.9}$$

haline dönüşür.

Önerme 3.1. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu olmak üzere, $\widehat{\nabla}$ Tanaka-Webster koneksiyonu, M üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan tek dönüşümdür [17]:

(i) $\widehat{\nabla}\eta=0$, $\widehat{\nabla}\xi=0$;

(ii) $\widehat{\nabla}g=0$, $\widehat{\nabla}\varphi=0$;

(iii) $\widehat{T}(X,Y)=-\eta([X,Y])\xi$, $X,Y\in D$;

(iv) $\widehat{T}(\xi,\varphi Y)=-\varphi\widehat{T}(\xi,Y)$, $Y\in D$.

İspat: Öncelikle $\widehat{\nabla}$ nın bir metrik koneksiyon olduğunu gösterelim.
$\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\left(\widehat{\nabla}_X g\right)(Y,Z)=\widehat{\nabla}_X g(Y,Z)-g\left(\widehat{\nabla}_X Y,Z\right)-g\left(Y,\widehat{\nabla}_X Z\right) \tag{3.10}$$

olarak tanımlıdır. $g(Y,Z)\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olduğundan $\widehat{\nabla}_X g(Y,Z)=\nabla_X g(Y,Z)$ dir. Burada ∇, Levi-Civita koneksiyonudur. (3.2) ve (2.29) eşitlikleri kullanılarak (3.10) eşitliği aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\nabla}_X g\right)(Y,Z)=&\nabla_X g(Y,Z)-g(\nabla_X Y,Z)-\eta(X)g(\varphi Y,Z)-\eta(Y)g(\varphi X,Z)\\&-\eta(Y)g(\varphi hX,Z)+g(\varphi X+\varphi hX,Y)\eta(Z)-g(Y,\nabla_X Z)\\&-\eta(X)g(Y,\varphi Z)-\eta(Z)g(Y,\varphi X+\varphi hX)\\&+g(\varphi X+\varphi hX,Z)\eta(Y)\\=&\nabla_X g(Y,Z)-g(\nabla_X Y,Z)-g(Y,\nabla_X Z)=(\nabla_X g)(Y,Z)\end{aligned}$$

∇ Levi-Civita koneksiyonu olduğundan $\nabla g = 0$ dır. Böylece yukarıdaki ifadeden $\left(\widehat{\nabla}_X g\right)(Y,Z) = 0$ elde edilir. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için $\left(\widehat{\nabla}_X g\right)(Y,Z) = 0$ bulunduğundan $\widehat{\nabla}$ Tanaka-Webster koneksiyonu bir metrik koneksiyondur. Yani;

$$\widehat{\nabla}_X g(Y,Z) = g\left(\widehat{\nabla}_X Y, Z\right) + g\left(Y, \widehat{\nabla}_X Z\right),\ \forall X,Y,Z \in \chi(\mathrm{M}) \tag{3.11}$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi $\widehat{\nabla}\varphi = 0$ olduğunu göstereceğiz. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için (3.2) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\nabla}_X \varphi\right)(Y) &= \widehat{\nabla}_X \varphi(Y) - \varphi\left(\widehat{\nabla}_X Y\right) \\
&= \nabla_X \varphi(Y) + \eta(X)\varphi^2(Y) + \eta(\varphi Y)(\varphi X + \varphi h X) \\
&\quad - g(\varphi X + \varphi h X, \varphi Y)\xi - \varphi(\nabla_X Y) - \eta(X)\varphi^2(Y) \\
&\quad - \eta(Y)\left(\varphi^2 X + \varphi^2 h X\right) + g(\varphi X + \varphi h X, Y)\varphi\xi
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitlikte Teorem 2.4.6, (2.1) ve (2.33) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\nabla}_X \varphi\right)(Y) &= (\nabla_X \varphi)Y - g(\varphi X, \varphi Y)\xi - g(\varphi h X, \varphi Y)\xi \\
&\quad - \eta(Y)\left[-X + \eta(X)\xi\right] - \eta(Y)\left[-hX + \eta(hX)\xi\right] \\
&= (\nabla_X \varphi)Y - g(X,Y)\xi + \eta(X)\eta(Y)\xi - g(hX,Y)\xi \\
&\quad + \eta(hX)\eta(Y)\xi + \eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(Y)hX \\
&= (\nabla_X \varphi)Y - \left\{g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX)\right\} \\
&= (\nabla_X \varphi)Y - (\nabla_X \varphi)Y = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\widehat{\nabla}\varphi = 0$ dır. Böylece (ii) ispatlanmış olur.

Diğer taraftan (3.2) eşitliği, Teorem 2.4.6, (2.29) ve Önerme 2.4.21 (ii) kullanılarak, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_X \xi &= \nabla_X \xi + \eta(X)\varphi\xi + \eta(\xi)(\varphi X + \varphi h X) - g(\varphi X + \varphi h X, \xi)\xi \\
&= \nabla_X \xi + \varphi X + \varphi h X \\
&= \nabla_X \xi - \nabla_X \xi = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\widehat{\nabla}\xi = 0 \tag{3.12}$$

dır.

Ayrıca, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için (3.12) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\nabla}_X \eta\right)Y &= \widehat{\nabla}_X \eta(Y) - \eta\left(\widehat{\nabla}_X Y\right) \\
&= g\left(\widehat{\nabla}_X Y, \xi\right) + g\left(Y, \widehat{\nabla}_X \xi\right) - \eta\left(\widehat{\nabla}_X Y\right) \\
&= g\left(Y, \widehat{\nabla}_X \xi\right) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\widehat{\nabla}\eta = 0 \tag{3.13}$$

dır. Bu ise (i) nin ispatını tamamlar.

Bundan başka, $\forall X, Y \in D$ için $\eta(X) = \eta(Y) = 0$ olduğundan, (2.26) ve Teorem 2.4.10 kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\widehat{T}(X,Y) &= 2g(X,\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi hX - \eta(X)\varphi hY \\
&= 2g(X,\varphi Y)\xi = 2d\eta(X,Y)\xi \\
&= \left(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\right)\xi \\
&= -\eta([X,Y])\xi
\end{aligned} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.7) eşitliğinde X yerine ξ, Y yerine de φY yazılarak

$$\begin{aligned}
\widehat{T}(\xi,\varphi Y) &= 2g\left(\xi,\varphi^2 Y\right) + \eta(\varphi Y)\varphi h\xi - \eta(\xi)\varphi h\varphi Y \\
&= -\varphi h\varphi Y = h\varphi^2 Y = h\left(-Y + \eta(Y)\xi\right) \\
&= -hY + \eta(Y)h\xi
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. $Y \in D$ olduğunda $\eta(Y) = 0$ olacağından (3.15) eşitliği

$$\widehat{T}(\xi,\varphi Y) = -hY \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $\forall Y \in D$ için Teorem 2.4.6, Önerme 2.4.21 (iii) ve (2.25) eşitlikleri kullanıldığında

$$\varphi\hat{T}(\xi,Y)=\varphi\big(2g(\xi,\varphi Y)\xi-\eta(\xi)\varphi hY+\eta(Y)\varphi h\xi\big)$$

$$=\varphi(-\varphi hY)=-\varphi^2 hY=-\big(-hY+\eta(hY)\xi\big)=hY \qquad (3.17)$$

bulunur. (3.16) ve (3.17) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde $\forall Y\in D$ için

$$\hat{T}(\xi,\varphi Y)=-\varphi\hat{T}(\xi,Y) \qquad (3.18)$$

yazılabilir. Böylece (iii) ve (iv) önermelerinin sağlandığı da gösterilmiş olur.

$\tilde{\nabla}$; (i), (ii), (iii) ve (iv) özelliklerini sağlayan bir başka koneksiyon olsun. $\hat{\nabla}$ Tanaka-Webster koneksiyonu ile $\tilde{\nabla}$ koneksiyonunun farkı olacak şekilde bir $\mathrm{U}(X,Y)=\hat{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_X Y$ (1, 2)-tensör alanı tanımlayalım. $\mathrm{U}=0$ olduğu gösterilebilir. Böylece $\tilde{\nabla}=\hat{\nabla}$ elde edilir. O halde $\hat{\nabla}$ dönüşümü tektir. ■

$M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to \mathrm{M}$ yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir eğri olsun. $\hat{\nabla}$ *yarı-Hermitsel koneksiyonu için*, γ boyunca $\{T,\ N,\ B\}$ *Frenet çatı alanı* J. T. Cho ve J. E. Lee tarafından [18] de şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\hat{\nabla}_T T=\hat{\kappa}N, \qquad (3.19)$$

$$\hat{\nabla}_T N=-\hat{\kappa}T+\hat{\tau}B, \qquad (3.20)$$

$$\hat{\nabla}_T B=-\hat{\tau}N. \qquad (3.21)$$

Burada $\hat{\kappa}=\left\|\hat{\nabla}_T T\right\|$, γ nın *yarı-Hermitsel eğriliği* ve $\hat{\tau}$, γ nın *yarı-Hermitsel torsiyonudur*. Yarı-Hermitsel geometride eğriler şu şekilde sınıflandırılmıştır:

$\hat{\kappa}\neq 0$ sabit ve $\hat{\tau}\neq 0$ sabittir $\Leftrightarrow$ γ yarı-Hermitsel helistir. (3.22)

$\hat{\kappa}\neq 0$ sabit ve $\hat{\tau}=0$ dır $\Leftrightarrow$ γ yarı-Hermitsel çemberdir. (3.23)

$\hat{\kappa}=0$ ve $\hat{\tau}=0$ dır $\Leftrightarrow$ γ yarı-Hermitsel geodeziktir. (3.24)

Tanım 3.2. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu olmak üzere $\gamma(s)$, M de yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş bir eğri ve $T(s)=\gamma^{'}(s)$, γ nın tanjant vektör alanı olsun.

$$\cos\alpha(s)=g(T(s),\xi(s)) \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanan $\alpha(s)$ fonksiyonuna γ nın *değme açısı* denir. Değme açısı sabit olan bir γ eğrisine bir *slant eğri* denir [18]. Özel olarak, değme açısı $\frac{\pi}{2}$ olan slant eğrilere *Legendre eğrisi* denir [18].

(3.25) eşitliğinin her iki tarafında γ boyunca $\widehat{\nabla}$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre türev alınırsa

$$\alpha'(s)\sin\alpha(s)=g\left(\widehat{\kappa}(s)N(s),\xi(s)\right)+g\left(T(s),\widehat{\nabla}_{T(s)}\xi(s)\right)=\widehat{\kappa}(s)\eta(N(s)) \tag{3.26}$$

elde edilir.

Bu kısımda slant eğrilerin özel bir durumu olan Legendre eğrileri üzerinde durulacaktır.

$M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu olmak üzere $\gamma(s)$, M de yay uzunluğu parametresiyle parametrelendirilmiş bir Legendre eğrisi olsun. γ üzerindeki Frenet çatı alanının $\{T=\gamma',\ N=\varphi\gamma',\ B=\xi\}$ olduğunu gösterelim. Öncelikle γ Legendre eğrisi olduğundan

$$\eta(\gamma')=g(T,\ \xi)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \tag{3.27}$$

bulunur. γ birim hızlı eğri olduğundan

$$g(T,T)=g(\gamma',\gamma')=1$$

dir. (3.27) ve (2.28) eşitliklerinden

$$g(N,N)=g(\varphi\gamma',\varphi\gamma')=g(\gamma',\gamma')-\eta(\gamma')\eta(\gamma')=1$$

elde edilir. ξ karakteristik vektör alanı olduğundan (2.27) ve Tanım 2.4.4 gereği

$$g(B,B)=g(\xi,\xi)=\eta(\xi)=1$$

sonucuna ulaşılır. Böylece T, N ve B vektör alanları birimdir. Bu vektör alanlarının ikişer ikişer ortogonal olduğunu gösterelim. φ anti-simetrik bir tensör alanı olduğundan (2.29) kullanılarak

$$g(T,N)=g(\gamma',\varphi\gamma')=0$$

bulunur. Ayrıca γ Legendre eğrisi olduğundan (2.27) ve (3.27) gereği

$$g(T,B)=g(\gamma',\xi)=\eta(\gamma')=0$$

dır. Son olarak Teorem 2.4.6 ve (2.29) eşitliği birlikte düşünüldüğünde

$$g(N,B)=g(\varphi\gamma',\xi)=-g(\gamma',\varphi\xi)=0$$

bulunur. Böylece $\{T=\gamma',\ N=\varphi\gamma',\ B=\xi\}$ kümesi ortonormal bir kümedir ve γ Legendre eğrisinin Frenet çatı alanını oluşturur. Bu çatı alanını ve $\widehat{\nabla}$ Tanaka-Webster koneksiyonunu kullanarak bazı sonuçlar elde edeceğiz. "Yarı-Hermitsel" denildiğinde her zaman Tanaka-Webster koneksiyonu aklımıza gelmelidir.

Tanım 3.3. 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerindeki bir γ eğrisinin *yarı-Hermitsel ortalama eğrilik vektör alanı*

$$\widehat{H}=\widehat{\nabla}_T T=\widehat{\kappa}N \tag{3.28}$$

şeklinde tanımlanır [18].

Özel olarak, bir Legendre eğrisi için $T=\gamma'$, $N=\varphi\gamma'$ ve $B=\xi$ olduğundan

$$\widehat{H}=\widehat{\nabla}_T T=\widehat{\nabla}_{\gamma'}\gamma'=\widehat{\kappa}\varphi\gamma' \tag{3.29}$$

elde ederiz [18].

Önerme 3.4. 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldunda $\widehat{\nabla}$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan bir γ eğrisi bir Legendre eğrisi ise $\widehat{\tau}=0$ dır [18].

İspat: γ eğrisi 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldunda $\widehat{\nabla}$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan bir Legendre eğrisi olsun.

$\{T=\gamma',\ N=\varphi\gamma',\ B=\xi\}$ Frenet çatı alanı olmak üzere (3.21) ve Önerme 3.1 (i) gereği

$$\widehat{\nabla}_T B=\widehat{\nabla}_{\gamma'}\xi=-\hat{\tau}\varphi\gamma'=0 \tag{3.30}$$

bulunur. Buradan $\hat{\tau}=0$ sonucuna ulaşılır. ■

Tanım 3.5. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki bir γ eğrisine normal olan bir N vektör alanı için

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp}N=0 \tag{3.31}$$

ise N ye *yarı-Hermitsel paraleldir* denir [19].

Teorem 3.6. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma:I\subset\mathbb{R}\to M$ geodezik olmayan birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. Bu takdirde γ eğrisinin yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın bir yarı-Hermitsel çember olmasıdır [19].

İspat: Gereklilik: γ eğrisinin yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. O halde (3.31) gereği $\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{H}=0$ dır. (3.29) ve (3.20) ve Önerme 3.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_T\widehat{H}=\widehat{\nabla}_{\gamma'}\left(\hat{\kappa}\varphi\gamma'\right)&=\hat{\kappa}'\varphi\gamma'+\hat{\kappa}\widehat{\nabla}_{\gamma'}\varphi\gamma'\\&=\hat{\kappa}'\varphi\gamma'+\hat{\kappa}\left(-\hat{\kappa}\gamma'+\hat{\tau}\xi\right)\\&=-\hat{\kappa}^2\gamma'+\hat{\kappa}'\varphi\gamma'\end{aligned}$$

elde edilir. Yani kısaca

$$\widehat{\nabla}_T\widehat{H}=-\hat{\kappa}^2\gamma'+\hat{\kappa}'\varphi\gamma' \tag{3.32}$$

dir. O halde

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{H}=\left(\widehat{\nabla}_{\gamma'}\widehat{H}\right)^{\perp}=\hat{\kappa}'\varphi\gamma' \tag{3.33}$$

ve $\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{H}=0$ olduğundan $\hat{\kappa}'=0$ sonucuna varılır. Böylece $\hat{\kappa}\neq 0$ sabit ve $\hat{\tau}=0$ dır. (3.23) gereği γ yarı-Hermitsel çemberdir.

Yeterlilik: γ yarı-Hermitsel çember olsun. (3.23) gereği $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\hat{\tau} = 0$ dır. (3.33) eşitliği kullanılarak $\widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{H} = \hat{\kappa}' \varphi\gamma' = 0$ bulunur. Böylece Tanım 3.5 gereği $\widehat{H}$ yarı-Hermitsel paraleldir. ■

Tanım 3.7. $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. $T = \gamma'$ olmak üzere, $\widehat{H}$ yarı-Hermitsel ortalama eğrilik vektör alanının

(i) *(tanjant demette) Laplas'ı*

$$\widehat{\Delta}\widehat{H} = -\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T \tag{3.34}$$

(ii) *normal demette Laplas'ı*

$$\widehat{\Delta}^{\perp} \widehat{H} = -\widehat{\nabla}^{\perp}{}_T \widehat{\nabla}^{\perp}{}_T \widehat{\nabla}^{\perp}{}_T T \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlanır [19].

Tanım 3.8. $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

(i) Eğer

$$\widehat{\Delta}\widehat{H} = \lambda \widehat{H} \tag{3.36}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ ya *yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir [19].

(ii) Özel olarak,

$$\widehat{\Delta}\widehat{H} = 0 \tag{3.37}$$

ise γ ya *yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir [19].

(iii) Eğer

$$\widehat{\Delta}^{\perp} \widehat{H} = \lambda \widehat{H} \tag{3.38}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa γ ya *normal demette yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir [19].

(iv) Özel olarak,

$$\widehat{\Delta}^{\perp} \widehat{H} = 0 \tag{3.39}$$

ise γ ya *normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir* denir [19].

Önerme 3.9. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ geodezik olmayan birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. Bu durumda

$$\widehat{\nabla}_{\gamma'} \widehat{\nabla}_{\gamma'} \widehat{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = -3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\gamma' + \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3\right)\varphi\gamma' \tag{3.40}$$

ve

$$\widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'} \widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'} \widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'} \gamma' = \widehat{\kappa}''\varphi\gamma' \tag{3.41}$$

dür [19].

İspat: γ Legendre eğrisi için Tanaka-Webster koneksiyonuna göre Frenet-Serret denklemleri

$$\widehat{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = \widehat{\kappa}\varphi\gamma' \tag{3.42}$$

$$\widehat{\nabla}_{\gamma'} \varphi\gamma' = -\widehat{\kappa}\gamma' \tag{3.43}$$

$$\widehat{\nabla}_{\gamma'} \xi = 0 \tag{3.44}$$

şeklindedir. (3.42) nin her iki tarafında $\widehat{\nabla}$ ya göre iki kez türev alınır ve (3.43) eşitliği ile birlikte kullanılırsa

$$\widehat{\nabla}_{\gamma'} \widehat{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = \widehat{\nabla}_{\gamma'}\left(\widehat{\kappa}\varphi\gamma'\right) = \widehat{\kappa}'\varphi\gamma' + \widehat{\kappa}\widehat{\nabla}_{\gamma'}\varphi\gamma' = -\widehat{\kappa}^2\gamma' + \widehat{\kappa}'\varphi\gamma' \tag{3.45}$$

ve

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{\gamma'} \widehat{\nabla}_{\gamma'} \widehat{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = \widehat{\nabla}_{\gamma'}\left(-\widehat{\kappa}^2\gamma' + \widehat{\kappa}'\varphi\gamma'\right) &= -2\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\gamma' - \widehat{\kappa}^2\widehat{\nabla}_{\gamma'}\gamma' + \widehat{\kappa}''\varphi\gamma' + \widehat{\kappa}'\widehat{\nabla}_{\gamma'}\varphi\gamma' \\
&= -2\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\gamma' - \widehat{\kappa}^2\left(\widehat{\kappa}\varphi\gamma'\right) + \widehat{\kappa}''\varphi\gamma' + \widehat{\kappa}'\left(-\widehat{\kappa}\gamma'\right) \\
&= -3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\gamma' + \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3\right)\varphi\gamma'
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.42) eşitliğinden

$$\widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'}\gamma' = \left(\widehat{\nabla}_{\gamma'}\gamma'\right)^{\perp} = \left(\widehat{\kappa}\varphi\gamma'\right)^{\perp} = \widehat{\kappa}\varphi\gamma' \tag{3.46}$$

bulunur. (3.46), (3.42) ve (3.43) birlikte düşünüldüğünde

$$\widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'}\widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'}\gamma' = \left(\widehat{\nabla}_{\gamma'}\left(\widehat{\kappa}\varphi\gamma'\right)\right)^{\perp} = \left(-\widehat{\kappa}^{2}\gamma' + \widehat{\kappa}'\varphi\gamma'\right)^{\perp} = \widehat{\kappa}'\varphi\gamma' \tag{3.47}$$

ve normal demette tekrar türev alınarak (3.43) eşitliği yardımıyla

$$\widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'}\widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'}\widehat{\nabla}^{\perp}_{\gamma'}\gamma' = \left(\widehat{\nabla}_{\gamma'}\left(\widehat{\kappa}'\varphi\gamma'\right)\right)^{\perp} = \left(\widehat{\kappa}''\varphi\gamma' + \widehat{\kappa}'\widehat{\nabla}_{\gamma'}\varphi\gamma'\right) = \widehat{\kappa}''\varphi\gamma'$$

sonucuna ulaşılır. ■

Tanım 3.7 ve Önerme 3.9 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.10. $M = \left(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g\right)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ geodezik olmayan birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel ortalama eğrilik vektör alanının (tanjant demette) Laplas'ı

$$\widehat{\Delta}\widehat{H} = 3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\gamma' + \left(\widehat{\kappa}^{3} - \widehat{\kappa}''\right)\varphi\gamma' \tag{3.48}$$

ve normal demette Laplas'ı

$$\widehat{\Delta}^{\perp}\widehat{H} = -\widehat{\kappa}''\varphi\gamma' \tag{3.49}$$

dür [19].

Teorem 3.11. $M = \left(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g\right)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. γ nın yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın yarı-Hermitsel geodezik veya $\lambda = \widehat{\kappa}^{2}$ eşitliğini sağlayan bir yarı-Hermitsel çember olmasıdır [19].

İspat: Gereklilik: γ yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. O halde Tanım 3.8 (i) gereği $\widehat{\Delta}\widehat{H} = \lambda\widehat{H}$ olacak şekilde bir $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. (3.48) ve (3.29) eşitliklerinden

$$3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\gamma' + \left(\widehat{\kappa}^{3} - \widehat{\kappa}''\right)\varphi\gamma' = \lambda\widehat{\kappa}\varphi\gamma' \tag{3.50}$$

elde edilir. γ' ve $\varphi\gamma'$ vektör alanları lineer bağımsız olduğundan

$$3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'=0 \tag{3.51}$$

$$\hat{\kappa}^3-\hat{\kappa}''=\lambda\hat{\kappa} \tag{3.52}$$

eşitliklerine ulaşılır. (3.51) gereği $\hat{\kappa}=0$ veya $\hat{\kappa}'=0$ dır. Eğer $\hat{\kappa}=0$ ise γ eğrisi yarı-Hermitsel geodeziktir. Eğer $\hat{\kappa}\neq 0$ ise $\hat{\kappa}'=0$ dır ve bu $\hat{\kappa}$ nın sabit olduğu anlamına gelir. Bu durumda $\hat{\kappa}''=0$ olduğundan (3.52) denkleminden $\lambda=\hat{\kappa}^2$ elde edilir. $\hat{\kappa}\neq 0$ sabit ve Önerme 3.4 gereği $\hat{\tau}=0$ olduğundan γ bir yarı-Hermitsel çemberdir.

Yeterlilik: γ yarı-Hermitsel geodezik veya $\lambda=\hat{\kappa}^2$ eşitliğini sağlayan bir yarı-Hermitsel çember olsun. Her iki durumda da (3.50) eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. O halde Tanım 3.8 (i) gereği γ eğrisi yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. ■

Sonuç 3.12. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. γ nın yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın yarı-Hermitsel geodezik olmasıdır [19].

İspat: Gereklilik: γ yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. Bu durumda $\hat{\Delta}\widehat{H}=0$ olduğundan (3.48) eşitliği yardımıyla

$$3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'\gamma'+\left(\hat{\kappa}^3-\hat{\kappa}''\right)\varphi\gamma'=0 \tag{3.53}$$

yazılabilir. γ' ve $\varphi\gamma'$ lineer bağımsız olduklarından

$$3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'=0, \tag{3.54}$$

$$\hat{\kappa}^3-\hat{\kappa}''=0 \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.54) eşitliğinde $\hat{\kappa}=0$ veya $\hat{\kappa}'=0$ dır. Varsayalım ki $\hat{\kappa}\neq 0$ olsun. O halde $\hat{\kappa}'=0$ olmak zorundadır. Bu durumda $\hat{\kappa}\neq 0$ bir sabittir ve $\hat{\kappa}''=0$ olur. Böylece (3.55) eşitliği $\hat{\kappa}^3=0$ şekline gelir. Bu eşitlik, varsayımımızla çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. $\hat{\kappa} = 0$ olmalıdır. Yani γ eğrisi bir yarı-Hermitsel geodeziktir.

Yeterlilik: γ eğrisi bir yarı-Hermitsel geodezik olsun. (3.53) eşitliğinin sağlandığı açıktır. Yani $\hat{\Delta}\widehat{H} = 0$ dır. Böylece Tanım 3.8 (ii) den γ eğrisi yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. ∎

Teorem 3.13. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir Legendre eğrisi ve $\lambda > 0$ sabit olsun. Bu durumda γ eğrisinin normal demette yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın $\hat{\kappa}(s) = a\cos\left(\pm\sqrt{\lambda}s + b\right)$ formunda bir yarı-Hermitsel eğriliğe sahip olmasıdır. Burada a ve b keyfi sabitlerdir [19].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi normal demette yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. Tanım 3.8 (iii) dan $\hat{\Delta}^{\perp}\widehat{H} = \lambda\widehat{H}$ dır. (3.29) ve (3.49) eşitlikleri yardımıyla

$$-\hat{\kappa}''\varphi\gamma' = \lambda\hat{\kappa}\varphi\gamma' \tag{3.56}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten

$$\hat{\kappa}'' + \lambda\hat{\kappa} = 0 \tag{3.57}$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

Şimdi $\lambda > 0$ sabit olduğunda, (3.57) eşitliğindeki bağımsız değişken içermeyen diferensiyel denklemin genel çözümünü bulalım.

(3.57) diferensiyel denkleminde, $\hat{\kappa}' = p$ ve $\hat{\kappa}'' = p\dfrac{dp}{d\hat{\kappa}}$ yazılırsa

$$p\frac{dp}{d\hat{\kappa}} + \lambda\hat{\kappa} = 0$$

ve dolayısıyla

$$pdp + \lambda\hat{\kappa}d\hat{\kappa} = 0$$

elde edilir. Bu son diferensiyel denklem değişkenlerine ayrılabilirdir. Eşitliğin her iki tarafında integral alınığında

$$\frac{p^2}{2}+\frac{\lambda\hat{\kappa}^2}{2}=\frac{\lambda a^2}{2},\ a=\text{sabit}$$

bulunur. Bu denklem düzenlendiğinde

$$p=\pm\sqrt{\lambda}\sqrt{a^2-\hat{\kappa}^2}$$

haline dönüşür. $\hat{\kappa}'=\dfrac{d\hat{\kappa}}{ds}=p$ eşitliği son denklemde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\frac{d\hat{\kappa}}{\sqrt{a^2-\hat{\kappa}^2}}=\pm\sqrt{\lambda}ds$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınır ve denklem yeniden düzenlenirse (3.57) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$\hat{\kappa}(s)=a\cos\left(\pm\sqrt{\lambda}s+b\right)$$

olarak elde edilir. Burada a ve b keyfi sabitlerdir.

Yeterlilik: a ve b keyfi sabitler olmak üzere $\hat{\kappa}(s)=a\cos\left(\pm\sqrt{\lambda}s+b\right)$ olsun. Bu durumda s değişkenine göre türev alınarak

$$\hat{\kappa}'(s)=\mp a\sqrt{\lambda}\sin\left(\pm\sqrt{\lambda}s+b\right) \tag{3.58}$$

$$\hat{\kappa}''(s)=-a\lambda\cos\left(\pm\sqrt{\lambda}s+b\right) \tag{3.59}$$

yazılabilir. Böylece $\hat{\kappa}''(s)=-\lambda\hat{\kappa}(s)$ olduğu görülür. Yani $\hat{\kappa}''(s)+\lambda\hat{\kappa}(s)=0$ dır. Sonuç olarak (3.57) ve dolayısıyla (3.56) eşitlikleri sağlandığından $\hat{\Delta}^{\perp}\widehat{H}=\lambda\widehat{H}$ bulunur. Böylece Tanım 3.8 (iii) gereği γ eğrisi normal demette yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. ■

Sonuç 3.14. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. γ eğrisinin normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart a ve b keyfi sabitler olmak üzere $\hat{\kappa}(s)=as+b$ olmasıdır [19].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. Tanım 3.8 (iv) gereği $\hat{\Delta}^{\perp}\widehat{H}=0$ dır. (3.49) eşitliği kullanılarak

$$-\hat{\kappa}''\varphi\gamma'=0 \tag{3.60}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten $\hat{\kappa}''=0$ bulunur. Yani a ve b keyfi sabitler olmak üzere $\hat{\kappa}(s)=as+b$ formundadır.

Yeterlilik: a ve b keyfi sabitler olmak üzere $\hat{\kappa}(s)=as+b$ olsun. Bu durumda $\hat{\kappa}'=a$ ve $\hat{\kappa}''=0$ dır. Bu değerler (3.49) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\hat{\Delta}^{\perp}\widehat{H}=-\hat{\kappa}''\varphi\gamma'=0$$

bulunur. Böylece Tanım 3.8 (iv) gereği γ eğrisi normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. ■

Tanım 3.15. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\hat{\nabla}$ M üzerinde Tanaka-Webster koneksiyonu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ birim hızlı bir eğri olsun. $T=\gamma'$ olmak üzere

(i) Eğer

$$\left(\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}=0$$

ise γ ya *yarı-Hermitsel* $AW(1)$*-tipinden eğri*,

(ii) Eğer

$$\left(\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}\wedge\left(\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}=0$$

ise γ ya *yarı-Hermitsel* $AW(2)$*-tipinden eğri*,

(iii) Eğer

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} \wedge \left(\widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$$

ise γ ya *yarı-Hermitsel* $AW(3)$*-tipinden eğri* denir [19].

Önerme 3.16. $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir Legendre eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

(i) γ nın yarı-Hermitsel $AW(1)$ -tipinden olması için yeter şart c sabit olmak üzere $\widehat{\kappa}(s) = \dfrac{\pm\sqrt{2}}{s+c}$ olmasıdır.

(ii) γ eğrisi her zaman yarı-Hermitsel $AW(2)$ ve $AW(3)$-tipindendir [19].

İspat:

(i) c sabit olmak üzere

$$\widehat{\kappa}(s) = \frac{\pm\sqrt{2}}{s+c} \tag{3.61}$$

olsun. Bu durumda türev alınarak

$$\widehat{\kappa}'(s) = \frac{\mp\sqrt{2}}{(s+c)^2} \tag{3.62}$$

ve

$$\widehat{\kappa}''(s) = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{(s+c)^3} \tag{3.63}$$

eşitlikleri elde edilir. $T = \gamma'$ olmak üzere, (3.40) eşitliği yardımıyla

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \left(-3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\gamma' + \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3\right)\varphi\gamma'\right)^{\perp} = \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3\right)\varphi\gamma' \tag{3.64}$$

bulunur. (3.61) ve (3.63) eşitlikleri, (3.64) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3\right)\varphi\gamma' = \left\{\left(\frac{\pm 2\sqrt{2}}{(s+c)^3}\right) - \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{s+c}\right)^3\right\}\varphi\gamma' = 0$$

olarak hesaplanır. Böylece Tanım 3.15 (i) gereği γ yarı-Hermitsel $AW(1)$-tipindendir.

(ii) (3.40), (3.42) ve (3.45) eşitlikleri kullanılarak

$$\left(\widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \hat{\kappa}\varphi\gamma' \tag{3.65}$$

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \hat{\kappa}'\varphi\gamma' \tag{3.66}$$

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \left(\hat{\kappa}'' - \hat{\kappa}^3\right)\varphi\gamma' \tag{3.67}$$

bulunur. $\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ ve $\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ lineer bağımlı olduğundan her zaman $\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} \wedge \left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ eşitliği geçerlidir. Yani γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipindendir. Benzer şekilde $\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ ve $\left(\widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ lineer bağımlı olduğundan her zaman $\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} \wedge \left(\widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ dır. Yani γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipindendir. ∎

4. YARI-HERMİTSEL 3-MANİFOLDLARDA SLANT EĞRİLER

Bu bölümde; 3. bölümde elde edilen sonuçlar slant eğrilere genellenecektir. 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldunda Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğrilerin tanjant veya normal demette yarı-Hermitsel has veya yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilecektir. Ayrıca, yarı-Hermitsel *AW*(k)-tipinden olma şartları bulunacaktır. Elde edilen sonuçların bazıları orijinaldir.

Önerme 4.1. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin bir slant eğri olması için gerek ve yeter şart $\eta(N)=0$ olmasıdır. Burada N , γ nın asli normal vektör alanıdır [18].

İspat: γ üzerindeki Frenet çatı alanı $\{T,\ N,\ B\}$ ve γ nın değme açısı $\alpha=\alpha(s)$ olsun. Tanım 3.2 gereği

$$\cos\alpha = g(T,\ \xi)$$

dir. Her iki tarafın Tanaka-Webster koneksiyonuna göre türevi alınır ve (3.11), (3.12), (3.19) ve (2.27) kullanılırsa

$$-\alpha'\sin\alpha = \hat{\nabla}_T g(T,\xi) = g\left(\hat{\nabla}_T T,\ \xi\right) + g\left(T,\ \hat{\nabla}_T \xi\right) = \hat{\kappa}\eta(N) \tag{4.1}$$

elde edilir. Ayrıca γ eğrisi geodezik olmadığından $\hat{\kappa} \neq 0$ dır.

Gereklilik: γ eğrisi bir slant eğri olsun. Tanım 3.2 gereği α değme açısı sabittir. O halde $\alpha'=0$ dır. Bu durumda $\hat{\kappa} \neq 0$ olduğundan (4.1) eşitliğinde $\eta(N)=0$ olmak zorundadır.

Yeterlilik: $\eta(N)=0$ olsun. (4.1) eşitliğinden $-\alpha'\sin\alpha=0$ elde edilir. $\alpha \in (0,\pi)$ olduğundan $\sin\alpha \neq 0$ dır. Böylece $\alpha'=0$ bulunur. Yani α değme açısı sabittir. Tanım 3.2 gereği γ eğrisi bir slant eğridir. ■

Önerme 4.2. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. Bu durumda $\hat{\tau}$ ve $\hat{\kappa}$ oranı sabittir [18].

İspat: γ eğrisinin sabit değme açısı α_0 ve γ üzerindeki Frenet çatı alanı $\{T,\ N,\ B\}$ olsun. Önerme 4.1 ve (2.27) kullanılarak

$$\eta(N)=g(N,\ \xi)=0 \tag{4.2}$$

bulunur. O halde (3.25), (4.2) ve (2.25) kullanılarak ortonormal açılım gereği

$$\xi=\cos\alpha_0 T+\sin\alpha_0 B \tag{4.3}$$

yazılabilir. (4.3) eşitliğinin her iki tarafının Tanaka-Webster koneksiyonuna göre türevi alınarak (3.12), (3.19) ve (3.21) kullanılırsa

$$0=\left(\hat{\kappa}\cos\alpha_0-\hat{\tau}\sin\alpha_0\right)N \tag{4.4}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}}=\cot\alpha_0 \tag{4.5}$$

sonucuna ulaşılır. α_0 sabit olduğundan $\hat{\tau}$ ve $\hat{\kappa}$ oranı da sabittir. ■

[18] de J. T. Cho ve J. E. Lee 3. bölümde verilen Önerme 3.4 ü ispatlamışlardır. Önerme 3.4 ün tersi her zaman geçerli değildir. Aşağıdaki önerme ile geodezik olmayan slant eğriler için ters önermenin de gerçeklendiğini göstereceğiz.

Önerme 4.3. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. Bu durumda γ nın bir Legendre eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\hat{\tau}=0$ olmasıdır [22].

İspat: Yeterlilik: $\hat{\tau} = 0$ olsun. (4.5) eşitliği kullanılarak $\cot \alpha_0 = \dfrac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} = 0$ elde edilir. O halde $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ dir. Böylece Tanım 3.2 gereği γ bir Legendre eğrisidir.

Gereklilik: γ bir Legendre eğrisi olsun. Önerme 3.4 ten ispat açıktır. ■

Ji-Eun Lee, [19] da 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerindeki Legendre eğrilerinin yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerekli ve yeterli koşulları incelemiştir. Geodezik olmayan herhangi bir bir eğri için, Teorem 3.6 aşağıdaki şekilde genellenebilir:

Teorem 4.4. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın bir yarı-Hermitsel çember olmasıdır [22].

İspat: (3.28) eşitliğinin her iki tarafını Tanaka-Webster koneksiyonuna göre türevler ve (3.20) eşitliğini kullanırsak

$$\hat{\nabla}_T \hat{H} = \hat{\nabla}_T \left(\hat{\kappa} N\right) = \hat{\kappa}' N + \hat{\kappa} \hat{\nabla}_T N$$

$$= -\hat{\kappa}^2 T + \hat{\kappa}' N + \hat{\kappa}\hat{\tau} B$$

elde ederiz. Yani kısaca

$$\hat{\nabla}_T \hat{H} = -\hat{\kappa}^2 T + \hat{\kappa}' N + \hat{\kappa}\hat{\tau} B \tag{4.6}$$

dır. O halde (4.6) eşitliğinin normal kısmı

$$\hat{\nabla}_T^{\perp} \hat{H} = \left(\hat{\nabla}_T \hat{H}\right)^{\perp} = \hat{\kappa}' N + \hat{\kappa}\hat{\tau} B \tag{4.7}$$

dir.

Gereklilik: γ eğrisi yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. Bu durumda Tanım 3.5 gereği $\hat{\nabla}_T^{\perp} \hat{H} = 0$ dır. (4.7) eşitliği kullanılarak

$$\hat{\kappa}' N + \hat{\kappa}\hat{\tau} B = 0 \tag{4.8}$$

bulunur. N ve B vektör alanları lineer bağımsız olduğundan $\hat{\kappa}'=0$ ve $\hat{\kappa}\hat{\tau}=0$ olmak zorundadır. Sonuçta, γ geodezik olmadığından $\hat{\kappa}\neq 0$ sabit ve $\hat{\tau}=0$ elde edilir. Böylece (3.23) gereği γ yarı-Hermitsel çemberdir.

Yeterlilik: γ yarı-Hermitsel çember olsun. O halde (3.23) gereği $\hat{\kappa}\neq 0$ sabit ve $\hat{\tau}=0$ dır. Buradan (4.7) eşitliği kullanıldığında

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{H}=\hat{\kappa}'N+\hat{\kappa}\hat{\tau}B=0.N+\hat{\kappa}.0.B=0$$

bulunur. Böylece Tanım 3.5 gereği, $\widehat{H}$ yarı-Hermitsel paraleldir. ■

Önerme 4.3 ve Teorem 4.4 birlikte düşünüldüğünde, aşağıdaki sonuç ifade edilebilir:

Sonuç 4.5. $M=\left(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g\right)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın bir yarı-Hermitsel Legendre çember olmasıdır [22].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. Teorem 4.4 gereği γ eğrisi yarı-Hermitsel çemberdir. O halde, (3.23) gereği $\hat{\kappa}\neq 0$ sabit ve $\hat{\tau}=0$ dır. γ eğrisinin geodezik olmayan bir slant eğri ve $\hat{\tau}=0$ olduğu göz önüne alınırsa, Önerme 4.3 gereği, γ eğrisi bir Legendre eğrisidir. Yani γ bir yarı-Hermitsel Legendre çemberdir.

Yeterlilik: γ eğrisi bir yarı-Hermitsel Legendre çember olsun. γ yarı-Hermitsel çember olduğundan Teorem 4.4 gereği yarı-Hermitsel paralel ortalama eğrilik vektör alanına sahiptir. ■

Şimdi slant eğrilerin yarı-Hermitsel has veya yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olma koşullarını elde etmeye çalışacağız. Aşağıdaki önerme ile başlayalım:

Önerme 4.6. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet çatı alanı $\{T,\ N,\ B\}$ olmak üzere

$$\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T=-3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T+\left(\hat{\kappa}''-\hat{\kappa}^3-\hat{\kappa}\hat{\tau}^2\right)N+\left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau}+\hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B \tag{4.9}$$

ve

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T=\left(\hat{\kappa}''-\hat{\kappa}\hat{\tau}^2\right)N+\left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau}+\hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B \tag{4.10}$$

dir [22].

İspat: (3.19) dan $\hat{\nabla}_T T=\hat{\kappa}N$ dir. (3.19) u $\hat{\nabla}$ ya göre türevler ve (3.20) yi kullanırsak

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T=\hat{\nabla}_T\left(\hat{\kappa}N\right)&=\hat{\kappa}'N+\hat{\kappa}\hat{\nabla}_T N\\ &=-\hat{\kappa}^2T+\hat{\kappa}'N+\hat{\kappa}\hat{\tau}B\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani kısaca

$$\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T=-\hat{\kappa}^2T+\hat{\kappa}'N+\hat{\kappa}\hat{\tau}B \tag{4.11}$$

dir. (4.11) eşitliğinde tekrar türev alır ve (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T&=\hat{\nabla}_T\left(-\hat{\kappa}^2T+\hat{\kappa}'N+\hat{\kappa}\hat{\tau}B\right)\\ &=-2\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T-\hat{\kappa}^2\hat{\nabla}_T T+\hat{\kappa}''N+\hat{\kappa}'\hat{\nabla}_T N+(\hat{\kappa}\hat{\tau})'B+\hat{\kappa}\hat{\tau}\hat{\nabla}_T B\\ &=-2\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T-\hat{\kappa}^2\left(\hat{\kappa}N\right)+\hat{\kappa}''N+\hat{\kappa}\left(-\hat{\kappa}T+\hat{\tau}B\right)\\ &\quad+\hat{\kappa}'\hat{\tau}B+\hat{\kappa}\hat{\tau}'B+\hat{\kappa}\hat{\tau}\left(-\hat{\tau}N\right)\\ &=-3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T+\left(\hat{\kappa}''-\hat{\kappa}^3-\hat{\kappa}\hat{\tau}^2\right)N+\left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau}+\hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B\end{aligned}$$

buluruz. Böylece (4.9) eşitliği ispatlanmış olur. (4.10) eşitliğini ispatlamak için, (3.19) eşitliğinin normal kısmını alırsak

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}T=\hat{\nabla}_T^{\perp}\left(\hat{\kappa}N\right)=\hat{\kappa}N \tag{4.12}$$

elde ederiz. (4.12) eşitliğini normal demette $\widehat{\nabla}^{\perp}$ koneksiyonuna göre türevler ve (3.20) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{\nabla}_T^{\perp}T &= \widehat{\nabla}_T^{\perp}\left(\widehat{\nabla}_T^{\perp}T\right) = \widehat{\nabla}_T^{\perp}\left(\widehat{\kappa}N\right) = \widehat{\kappa}'N + \widehat{\kappa}\widehat{\nabla}_T^{\perp}N \\ &= \widehat{\kappa}'N + \widehat{\kappa}\left(\widehat{\nabla}_T N\right)^{\perp} \\ &= \widehat{\kappa}'N + \widehat{\kappa}\left(-\widehat{\kappa}T + \widehat{\tau}B\right)^{\perp} \\ &= \widehat{\kappa}'N + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}B\end{aligned}$$

eşitliğine varırız. Yani kısaca

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{\nabla}_T^{\perp}T = \widehat{\kappa}'N + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}B \qquad (4.13)$$

dir. (4.13) eşitliğinin normal demette $\widehat{\nabla}^{\perp}$ koneksiyonuna göre tekrar türevini alır ve (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{\nabla}_T^{\perp}T &= \widehat{\nabla}_T^{\perp}\left(\widehat{\nabla}_T^{\perp}\widehat{\nabla}_T^{\perp}T\right) = \widehat{\nabla}_T^{\perp}\left(\widehat{\kappa}'N + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}B\right) \\ &= \widehat{\kappa}''N + \widehat{\kappa}'\widehat{\nabla}_T^{\perp}N + (\widehat{\kappa}\widehat{\tau})'N + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}\widehat{\nabla}_T^{\perp}B \\ &= \widehat{\kappa}''N + \widehat{\kappa}'\left(-\widehat{\kappa}T + \widehat{\tau}B\right)^{\perp} + \widehat{\kappa}'\widehat{\tau}B + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}'B + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}\left(-\widehat{\tau}N\right)^{\perp} \\ &= \widehat{\kappa}''N + \widehat{\kappa}'\widehat{\tau}B + \widehat{\kappa}'\widehat{\tau}B + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}'B - \widehat{\kappa}\widehat{\tau}^2N \\ &= \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}\widehat{\tau}^2\right)N + \left(2\widehat{\kappa}'\widehat{\tau} + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}'\right)B\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Böylece (4.10) eşitliği de ispatlanmış olur. ■

(3.34), (3.35), (4.9) ve (4.10) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.7. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel ortalama eğrilik vektör alanının (tanjant demette) Laplas'ı

$$\hat{\Delta}\widehat{H} = 3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T + \left(\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}''\right)N - \left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau} + \hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B \tag{4.14}$$

ve normal demette Laplas'ı

$$\hat{\Delta}^{\perp}\widehat{H} = \left(\hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}''\right)N - \left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau} + \hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B \tag{4.15}$$

dir [22].

Teorem 4.8. $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri olsun. γ nın yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ eğrisinin $\lambda = \hat{\kappa}^2$ eşitliğini sağlayan bir yarı-Hermitsel çember veya $\lambda = \hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2$ eşitliğini sağlayan bir yarı-Hermitsel helis olmasıdır [22].

İspat: Gereklilik: γ yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. O halde Tanım 3.8 (i) gereği $\hat{\Delta}\widehat{H} = \lambda\widehat{H}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. (3.28) ve (4.14) eşitliklerinden

$$3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T + \left(\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}''\right)N - \left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau} + \hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B = \lambda\hat{\kappa}N \tag{4.16}$$

elde edilir. $T,\ N$ ve B vektör alanları lineer bağımsız olduğundan

$$3\hat{\kappa}\hat{\kappa}' = 0, \tag{4.17}$$

$$\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}'' = \lambda\hat{\kappa}, \tag{4.18}$$

$$2\hat{\kappa}'\hat{\tau} + \hat{\kappa}\hat{\tau}' = 0 \tag{4.19}$$

eşitliklerine ulaşılır. γ eğrisi yarı-Hermitsel geodezik olmadığından $\hat{\kappa} \neq 0$ dır. Böylece (4.17) eşitliğini kullanarak $\hat{\kappa}' = 0$ elde ederiz. Yani $\hat{\kappa} \neq 0$ sabittir. Ayrıca (4.19) eşitliğinde $\hat{\kappa}' = 0$ yazarsak $\hat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\hat{\tau}' = 0$ buluruz. Yani $\hat{\tau}$ sabittir. Eğer $\hat{\tau} = 0$ ise, $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit olduğundan (3.23) gereği γ yarı-Hermitsel çemberdir ve (4.18) eşitliğinden $\lambda = \hat{\kappa}^2$ dir. Eğer $\hat{\tau} \neq 0$ sabit ise, yine $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit olduğundan

(3.22) gereği γ yarı-Hermitsel helistir ve (4.18) eşitliğinden $\lambda = \hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2$ dir. Gerçekten, her iki durumda da $\hat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ dır.

Yeterlilik: γ eğrisi bir yarı-Hermitsel çember veya bir yarı-Hermitsel helis olsun.

(i) γ eğrisi bir yarı-Hermitsel çember olduğunda, (3.23) gereği $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\hat{\tau} = 0$ dır. O halde $\hat{\kappa}' = \hat{\kappa}'' = 0$ ve $\hat{\tau} = \hat{\tau}' = 0$ yazabiliriz. Şimdi $\lambda : I \to \mathbb{R},\ \lambda = \hat{\kappa}^2$ seçelim. $\hat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ dır. Böylece (4.14) ve (3.28) eşitliklerini kullanarak

$$\hat{\Delta}\widehat{H} = 3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T + \left(\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}''\right)N - \left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau} + \hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B$$

$$= 3.\hat{\kappa}.0.T + \left(\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}.0^2 - 0\right)N - \left(2.0.0 - \hat{\kappa}.0\right)B$$

$$= \hat{\kappa}^3 N = (\hat{\kappa}^2).\left(\hat{\kappa}N\right)$$

$$= \lambda \widehat{H}$$

buluruz. Tanım 3.8 (i) gereği γ yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğridir.

(ii) γ eğrisi bir yarı-Hermitsel helis olduğunda, (3.22) den $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\hat{\tau} \neq 0$ sabittir. Yani $\hat{\kappa}' = \hat{\kappa}'' = 0$ ve $\hat{\tau}' = 0$ dır. Bu durumda $\lambda : I \to \mathbb{R},\ \lambda = \hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2$ seçebiliriz. $\hat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ olmak zorundadır. Böylece (4.14) ve (3.28) eşitlikleri yardımı ile

$$\hat{\Delta}\widehat{H} = 3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T + \left(\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}''\right)N - \left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau} + \hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B$$

$$= 3.\hat{\kappa}.0.T + \left(\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - 0\right)N - \left(2.0.\hat{\tau} - \hat{\kappa}.0\right)B$$

$$= \left(\hat{\kappa}^3 + \hat{\kappa}\hat{\tau}^2\right)N = \left(\hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2\right).\left(\hat{\kappa}N\right)$$

$$= \lambda \widehat{H}$$

elde ederiz. Burada Tanım 3.8 (i) kullanıldığında ispat tamamlanmış olur. ■

γ eğrisi $\widehat{\nabla}$-geodezik olmayan bir slant eğri olduğunda aşağıdaki sonuç geçerlidir:

Sonuç 4.9. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. Bu takdirde γ nın yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın bir yarı-Hermitsel Legendre çember veya yarı-Hermitsel slant helis olmasıdır. Her iki durumda da $\lambda=\hat{\kappa}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha_0$ dır [22].

İspat: Gereklilik: γ yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olsun. Teorem 4.8 gereği γ bir yarı-Hermitsel çember veya yarı-Hermitsel helistir.

(i) Eğer γ eğrisi bir yarı-Hermitsel çember ise, $\hat{\tau}=0$ dır. γ eğrisi geodezik olmayan bir slant eğri olduğundan Önerme 4.3 gereği bir Legendre eğrisidir ve Tanım 3.2 den $\alpha_0=\dfrac{\pi}{2}$ dir. Kısaca γ eğrisi bir yarı-Hermitsel Legendre çemberdir. Ayrıca Teorem 4.8 dan $\lambda=\hat{\kappa}^2$ dir. $\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{2}=1$ olduğundan $\lambda=\hat{\kappa}^2=\hat{\kappa}^2\operatorname{cosec}^2\alpha_0$ eşitliği geçerlidir.

(ii) γ eğrisi bir yarı-Hermitsel helis olsun. γ eğrisi bir slant eğri olduğundan yarı-Hermitsel slant helistir. Teorem 4.8 dan $\lambda=\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2$ yazabiliriz. (4.5) gereği $\hat{\tau}=\hat{\kappa}\cot\alpha_0$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\lambda=\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2=\hat{\kappa}^2+\left(\hat{\kappa}\cot\alpha_0\right)^2=\hat{\kappa}^2\left(1+\cot^2\alpha_0\right)=\hat{\kappa}^2\operatorname{cosec}^2\alpha_0$$

elde ederiz.

Yeterlilik: Önerme 4.3 ve (4.5) eşitliği, Teorem 4.8 ile birlikte düşünüldüğünde ispat açıktır. ■

Sonuç 4.10. 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde $\widehat{\nabla}$-geodezik olmayan ve yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri yoktur [22].

İspat: γ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde $\widehat{\nabla}$-geodezik olmayan bir eğri olsun. γ nın yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olduğunu varsayalım. Tanım 3.8 (ii) ve (4.14) eşitliğini kullanırsak

$$3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'T+\left(\hat{\kappa}^3+\hat{\kappa}\hat{\tau}^2-\hat{\kappa}''\right)N-\left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau}+\hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B=0$$

elde ederiz. Teorem 4.8 in ispatındaki gibi devam edersek $\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2=0$ buluruz. Ayrıca γ eğrisi $\widehat{\nabla}$-geodezik olmadığından $\hat{\kappa}\neq 0$ dır. Sonuç olarak $\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2=0$ ve $\hat{\kappa}\neq 0$ çelişkisine ulaşırız. O halde varsayım yanlıştır. Böyle bir γ eğrisi yoktur. ■

Şimdi, 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde normal demette yarı-Hermitsel has veya harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip slant eğrileri inceleyeceğiz.

Teorem 4.11. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin normal demette yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\lambda=-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}},\quad \hat{\kappa}(s)\neq as+b,\ (a \text{ ve } b \text{ sabit})$$

eşitliğini sağlayan bir Legendre eğrisi veya $\lambda=\hat{\tau}^2$ eşitliğini sağlayan bir yarı-Hermitsel slant helis olmasıdır [22].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi normal demette yarı-Hermitsel has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. Tanım 3.8 (iii) gereği $\hat{\Delta}^{\perp}\widehat{H}=\lambda\widehat{H}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. (3.28) ve (4.15) eşitliklerinden

$$\left(\hat{\kappa}\hat{\tau}^2-\hat{\kappa}''\right)N-\left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau}+\hat{\kappa}\hat{\tau}'\right)B=\lambda\hat{\kappa}N \tag{4.20}$$

elde ederiz. N ve B vektör alanları lineer bağımsız olduğundan

$$\hat{\kappa}\hat{\tau}^2 - \hat{\kappa}'' = \lambda\hat{\kappa}, \tag{4.21}$$

$$-\left(2\hat{\kappa}'\hat{\tau} + \hat{\kappa}\hat{\tau}'\right) = 0 \tag{4.22}$$

eşitliklerine ulaşırız. (4.5) gereği $\hat{\tau} = \hat{\kappa}\cot\alpha_0$ olduğunu göz önüne alırsak (4.21) ve (4.22) eşitliklerini

$$\hat{\kappa}^3 \cot^2\alpha_0 - \hat{\kappa}'' = \lambda\hat{\kappa}, \tag{4.23}$$

$$-3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'\cot\alpha_0 = 0 \tag{4.24}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Bu son eşitlikleri iki durumda inceleyelim:

(i) Eğer $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ise, bu durumda γ bir Legendre eğrisidir ve $\cot\alpha_0 = 0$ dır. Böylece (4.23) eşitliği $-\hat{\kappa}'' = \lambda\hat{\kappa}$ şekline dönüşür. $\lambda \neq 0$ ve $\hat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\hat{\kappa}'' \neq 0$ dır. O halde

$$\lambda = -\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}}, \quad \hat{\kappa}(s) \neq as + b, \ (a \text{ ve } b \text{ sabit})$$

sonucuna ulaşırız.

(ii) Eğer $\alpha_0 \neq \frac{\pi}{2}$ ise $\cot\alpha_0 \neq 0$ dır. Burada (4.24) eşitliğinden $\hat{\kappa} \neq 0$ yarı-Hermitsel eğriliğinin sabit olduğunu görürüz. O halde $\hat{\kappa}'' = 0$ dır. Böylece (4.5) ve (4.23) eşitlikleri yardımıyla $\lambda = \hat{\kappa}^2 \cot^2\alpha_0 = \hat{\tau}^2$ elde ederiz. Ayrıca $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\cot\alpha_0$ sabit olduğundan, (4.5) eşitliği gereği $\hat{\tau} \neq 0$ sabittir. Böylece (3.22) den γ eğrisi bir yarı-Hermitsel helistir. γ bir slant eğri olduğundan, bir yarı-Hermitsel slant helistir.

Yeterlilik: Tersine, γ eğrisi

$$\lambda = -\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}}, \quad \hat{\kappa}(s) \neq as + b, \ (a \text{ ve } b \text{ sabit})$$

eşitliğini sağlayan bir Legendre eğrisi veya $\lambda = \hat{\tau}^2$ eşitliğini sağlayan bir yarı-Hermitsel helis olsun. Her iki durumda da (4.20) eşitliği sağlanır. Böylece Tanım 3.8 (iii), (3.28) ve (4.15) eşitlikleri ile birlikte kullanıldığında ispat tamamlanmış olur. ■

Dikkat edilirse, yukarıdaki teorem Teorem 3.13 ün $\widehat{\nabla}$-geodezik olmayan slant eğrilere genellenmiş halidir. Yani, Teorem 4.11 de özel olarak $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\lambda > 0$ sabit alınırsa Teorem 3.13 deki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.12. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\widehat{\kappa}(s) = as + b, \ (a \text{ ve } b \text{ sabit})$$

eşitliğini sağlayan bir Legendre eğrisi olmasıdır [22].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. Tanım 3.8 (iv) gereği $\widehat{\Delta}^{\perp} \widehat{H} = 0$ dır. (4.15) eşitliğinden

$$\left(\widehat{\kappa}\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}''\right) N - \left(2\widehat{\kappa}'\widehat{\tau} + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}'\right) B = 0 \tag{4.25}$$

elde ederiz. N ve B vektör alanları lineer bağımsız olduğundan

$$\widehat{\kappa}\widehat{\tau}^2 - \widehat{\kappa}'' = 0, \tag{4.26}$$

$$-\left(2\widehat{\kappa}'\widehat{\tau} + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}'\right) = 0 \tag{4.27}$$

eşitliklerine ulaşırız. (4.5) gereği $\widehat{\tau} = \widehat{\kappa} \cot \alpha_0$ olduğunu göz önüne alırsak (4.26) ve (4.27) eşitliklerini

$$\widehat{\kappa}^3 \cot^2 \alpha_0 - \widehat{\kappa}'' = 0, \tag{4.28}$$

$$-3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}' \cot \alpha_0 = 0 \tag{4.29}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. (4.29) eşitliğinde, $\widehat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\widehat{\kappa}' = 0$ dır. Dolayısıyla $\widehat{\kappa} \neq 0$ sabittir. O halde $\widehat{\kappa}'' = 0$ olur. Buradan (4.28) eşitliği gereği

$\cot\alpha_0 = 0$ elde ederiz. Yani $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ dir. Böylece Tanım 3.2 den γ bir Legendre eğrisidir. Ayrıca $\hat{\kappa}'' = 0$ olduğundan, $\hat{\kappa}(s) = as + b$ (a ve b sabit) yazılabilir. ■

Yeterlilik: γ eğrisi , $\hat{\kappa}(s) = as + b$ (a ve b sabit) eşitliğini sağlayan bir Legendre eğrisi olsun. O halde $\hat{\kappa}'' = 0$ buluruz. Ayrıca Tanım 3.2 den $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ve Önerme 3.4 den $\hat{\tau} = 0$ dır. Bu değerleri (4.15) eşitliğinde yerine yazarsak $\hat{\Delta}^{\perp}\widehat{H} = 0$ sonucuna ulaşırız. Böylece Tanım 3.8 (iv) kullanıldığında ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.11 ve Sonuç 4.12 birlikte değerlendirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.13. 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldunda Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan ve normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir yarı-Hermitsel slant helis yoktur [22].

İspat: 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerindeki bir γ eğrisinin $\widehat{\nabla}$-geodezik olmayan ve normal demette yarı-Hermitsel harmonik ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir slant helis olduğunu varsayalım. O halde (3.22) gereği $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\hat{\tau} \neq 0$ sabittir. Buradan $\hat{\kappa}' = \hat{\kappa}'' = 0$ ve $\hat{\tau}' = 0$ elde ederiz. Bu değerleri (4.25) eşitliğinde yerine yazarsak $\hat{\kappa}\hat{\tau}^2 = 0$ çıkar. Bu bir çelişkidir. Çünkü $\hat{\kappa} \neq 0$ ve $\hat{\tau} \neq 0$ idi. O halde varsayımımız yanlıştır. Böyle bir yarı-Hermitsel slant helis yoktur. ■

Şimdi, 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde $\widehat{\nabla}$-geodezik olmayan slant eğrilerin yarı-Hermitsel AW(k)-tipinden olma koşullarını araştıracağız.

$M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan bir slant eğri ve γ eğrisinin değme açısı α_0 olsun. (3.19), (4.11) ve (4.9) eşitlikleri yardımıyla

$$\left(\widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \widehat{\kappa} N, \tag{4.30}$$

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \widehat{\kappa}' N + \widehat{\kappa}\widehat{\tau} B, \tag{4.31}$$

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3 - \widehat{\kappa}\widehat{\tau}^2\right) N + \left(2\widehat{\kappa}'\widehat{\tau} + \widehat{\kappa}\widehat{\tau}'\right) B \tag{4.32}$$

yazılabilir. (4.5) eşitliği gereği $\widehat{\tau} = \widehat{\kappa}\cot\alpha_0$ ve $\widehat{\tau}' = \widehat{\kappa}'\cot\alpha_0$ olduğundan, (4.31) ve (4.32) eşitlikleri

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \widehat{\kappa}' N + \widehat{\kappa}^2 \cot\alpha_0 B, \tag{4.33}$$

$$\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = \left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3 \operatorname{cosec}^2\alpha_0\right) N + 3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\cot\alpha_0 B \tag{4.34}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (4.30), (4.33) ve (4.34) eşitlikleri, bundan sonraki teoremlerin ispatında kilit rol oynayacaktır.

Teorem 4.14. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel *AW*(1)-tipinden olması için gerek ve yeter şart γ nın $\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3 = 0$ diferensiyel denklemini sağlayan yarı-Hermitsel eğriliğe sahip bir Legendre eğrisi olmasıdır [22].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi yarı-Hermitsel *AW*(1)-tipinden olsun. Bu durumda Tanım 3.15 (i) gereği $\left(\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ dır. Burada (4.34) eşitliği kullanıldığında

$$\left(\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3 \operatorname{cosec}^2\alpha_0\right) N + 3\widehat{\kappa}\widehat{\kappa}'\cot\alpha_0 B = 0 \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35) eşitliğinde, *N* ve *B* vektör alanları lineer bağımsız olduğundan

$$\widehat{\kappa}'' - \widehat{\kappa}^3 \operatorname{cosec}^2\alpha_0 = 0, \tag{4.36}$$

$$3\hat{\kappa}\hat{\kappa}'\cot\alpha_0 = 0 \tag{4.37}$$

olmak zorundadır. γ eğrisi $\hat{\nabla}$-geodezik olmadığından $\hat{\kappa} \neq 0$ dır. O halde (4.37) eşitliğinden $\hat{\kappa}' = 0$ veya $\cot\alpha_0 = 0$ bulunur. $\cot\alpha_0 \neq 0$ olduğunu varsayalım. Böylece $\hat{\kappa}' = 0$ olduğundan $\hat{\kappa} \neq 0$ sabittir. Buradan $\hat{\kappa}'' = 0$ dır. Bu değer (4.36) eşitliğinde yerine yazılır ve eşitlik $\operatorname{cosec}^2\alpha_0$ ile sadeleştirilirse (her zaman $\operatorname{cosec}^2\alpha_0 > 0$ dır), $\hat{\kappa} = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir; çünkü, $\hat{\kappa} \neq 0$ idi. O halde varsayım yanlıştır; $\cot\alpha_0 = 0$ olmalıdır. Yani $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ dir. Böylece Tanım 3.2 gereği γ bir Legendre eğrisidir. Bu durumda $\operatorname{cosec}\alpha_0 = 1$ dir. Sonuçta (4.36) eşitliği gereği, γ nın yarı-Hermitsel eğriliği $\hat{\kappa}'' - \hat{\kappa}^3 = 0$ diferensiyel denklemini sağlar.

Yeterlilik: γ eğrisi, $\hat{\kappa}'' - \hat{\kappa}^3 = 0$ diferensiyel denklemini sağlayan yarı-Hermitsel eğriliğe sahip bir Legendre eğrisi olsun. Bu durumda Tanım 3.2 den $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ dir. O halde $\operatorname{cosec}\alpha_0 = 1$, $\cot\alpha_0 = 0$ ve $\hat{\kappa}'' - \hat{\kappa}^3 = 0$ olduğundan, bu değerler (4.34) eşitliği ile birlikte kullanıldığında $\left(\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ bulunur. Böylece Tanım 3.15 (i) gereği γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(1)$-tipindendir. ■

Uyarı 4.15. Teorem 4.14, Önerme 3.16 (i) nin genellenmiş halidir. Teorem 4.14 de, özel olarak yarı-Hermitsel eğriliği $\hat{\kappa}(s) = \frac{\pm\sqrt{2}}{s+c}$, $c = \text{sabit}$ ve yarı-Hermitsel torsiyonu $\hat{\tau} = 0$ olan bir slant eğri alındığında Önerme 3.16 (i) elde edilir.

Teorem 4.16. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipinden olması için gerek ve yeter şart γ nın

$$\hat{\tau}(s) = \frac{\pm\cos\alpha_0}{\sqrt{-s^2 + as + b}} \tag{4.38}$$

şeklinde bir yarı-Hermitsel torsiyona sahip olmasıdır. Burada a ve b keyfi sabitler, $a^2 + 4b > 0$ ve $s \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)$ dir [22].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipinden olsun. Böylece Tanım 3.15 (ii) den $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} \wedge \left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ yazabiliriz. Yani $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ ve $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ lineer bağımlıdır. O halde (4.33) ve (4.34) eşitliklerinden

$$\begin{vmatrix} \hat{\kappa}'' - \hat{\kappa}^3 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0 & 3\hat{\kappa}\hat{\kappa}' \cot\alpha_0 \\ \hat{\kappa}' & \hat{\kappa}^2 \cot\alpha_0 \end{vmatrix} = 0$$

dir. Buradan

$$\left(\hat{\kappa}'' - \hat{\kappa}^3 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0\right).\left(\hat{\kappa}^2 \cot\alpha_0\right) - \hat{\kappa}'.\left(3\hat{\kappa}\hat{\kappa}' \cot\alpha_0\right) = 0$$

elde ederiz. Bu eşitliği düzenlersek

$$\hat{\kappa}.\cot\alpha_0.\left(\hat{\kappa}\hat{\kappa}'' - 3\left(\hat{\kappa}'\right)^2 - \hat{\kappa}^4 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0\right) = 0 \tag{4.39}$$

eşitliğine ulaşırız. γ eğrisi $\hat{\nabla}$-geodezik olmadığından $\hat{\kappa} \neq 0$ dır. Böylece (4.39) eşitliğinden $\cot\alpha_0 = 0$ veya $\hat{\kappa}\hat{\kappa}'' - 3\left(\hat{\kappa}'\right)^2 = \hat{\kappa}^4 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0$ dir. Eğer $\cot\alpha_0 = 0$ ise, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ olacağından Tanım 3.2 gereği γ bir Legendre eğrisidir. O halde Önerme 3.4 ten $\hat{\tau} = 0$ dır. Bu durumda $\hat{\tau} = \frac{\pm\cos\alpha_0}{\sqrt{-s^2 + as + b}} = 0$ yazabiliriz. Eğer $\hat{\kappa}\hat{\kappa}'' - 3\left(\hat{\kappa}'\right)^2 = \hat{\kappa}^4 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0$ ise, bağımsız değişkeni içermeyen bu diferensiyel denklemin genel çözümü şu şekildedir:

$c = \operatorname{cosec}^2 \alpha_0$ sabit olmak üzere

$$\hat{\kappa}\hat{\kappa}'' - 3\left(\hat{\kappa}'\right)^2 = c\hat{\kappa}^4 \tag{4.40}$$

diferansiyel denklemini düşünelim. Bu denklem, bağımsız değişken içermeyen bir diferensiyel denklemdir. O halde

$$\hat{\kappa}' = p\,, \quad \hat{\kappa}'' = p\frac{dp}{d\hat{\kappa}} \tag{4.41}$$

eşitliklerini (4.40) denkleminde yerine yazarsak

$$\hat{\kappa} p\frac{dp}{d\hat{\kappa}} - 3p^2 = c\hat{\kappa}^4$$

ve dolayısıyla

$$\hat{\kappa} p dp + (-3p^2 - c\hat{\kappa}^4)d\hat{\kappa} = 0 \tag{4.42}$$

elde ederiz. Burada

$$M(\hat{\kappa}, p) = \hat{\kappa} p\,,$$

$$N(\hat{\kappa}, p) = -3p^2 - c\hat{\kappa}^4$$

olarak alırsak

$$\frac{\partial N}{\partial p} = -6p\,,$$

$$\frac{\partial M}{\partial \hat{\kappa}} = p$$

buluruz. $\dfrac{\partial N}{\partial p} \neq \dfrac{\partial M}{\partial \hat{\kappa}}$ olduğundan (4.42) diferensiyel denklemi tam değildir. Bu denklemi tam hale getirebilmek için bir integral çarpanı arıyoruz.

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial p} - \dfrac{\partial M}{\partial \hat{\kappa}}}{M} = \frac{-6p - p}{\hat{\kappa} p} = \frac{-7}{\hat{\kappa}}$$

ifadesi p yi içermediğinden integral çarpanı

$$K = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial \hat{\kappa}}}{M} d\hat{\kappa}} = e^{\int \frac{-7}{\hat{\kappa}} d\hat{\kappa}} = \frac{1}{\hat{\kappa}^7} \tag{4.43}$$

dir. (4.42) diferensiyel denklemini K ile çarparsak

$$\frac{p}{\hat{\kappa}^6}dp + \left(-\frac{3p^2}{\hat{\kappa}^7} - \frac{c}{\hat{\kappa}^3} \right) d\hat{\kappa} = 0 \tag{4.44}$$

diferensiyel denklemine ulaşırız. Burada

$$M^*(\hat{\kappa}, p) = \frac{p}{\hat{\kappa}^6}\,,\ N^*(\hat{\kappa}, p) = -\frac{3p^2}{\hat{\kappa}^7} - \frac{c}{\hat{\kappa}^3}$$

olarak tanımlarsak

$$\frac{\partial N^*}{\partial p} = \frac{\partial M^*}{\partial \hat{\kappa}} = \frac{-6p}{\hat{\kappa}^7}$$

olduğundan (4.44) diferensiyel denklemi bir tam diferensiyel denklemdir. Bu diferensiyel denklemin çözümü

$$u(\hat{\kappa}, p) = \int M^*(\hat{\kappa}, p)dp = 0$$

şeklindedir. O halde

$$u(\hat{\kappa}, p) = \int \frac{p}{\hat{\kappa}^6} dp = \frac{p^2}{2\hat{\kappa}^6} + f\left(\hat{\kappa}\right) = 0 \tag{4.45}$$

dır. $\hat{\kappa}$ ya göre kısmi türev alırsak

$$\frac{\partial u\left(\hat{\kappa}, p\right)}{\partial \hat{\kappa}} = -\frac{3p^2}{\hat{\kappa}^7} + f'\left(\hat{\kappa}\right) = N^*\left(\hat{\kappa}, p\right) = -\frac{3p^2}{\hat{\kappa}^7} - \frac{c}{\hat{\kappa}^3}$$

ve

$$f\left(\hat{\kappa}\right) = \frac{c}{2\hat{\kappa}^2} + c_1$$

elde ederiz. Burada c_1 bir keyfi sabittir. Böylece (4.45) denklemi

$$u(\hat{\kappa}, p) = \frac{p^2}{2\hat{\kappa}^6} + \frac{c}{2\hat{\kappa}^2} + c_1 = 0$$

haline gelir. Bu denklemi düzenler ve (4.41) i kullanırsak

$$\left(\hat{\kappa}'\right)^2 + c\hat{\kappa}^4 + 2c_1\hat{\kappa}^6 = 0$$

yazabiliriz. Buradan

$$\hat{\kappa}' = \frac{d\hat{\kappa}}{ds} = \pm\hat{\kappa}^2\sqrt{-c - 2c_1\hat{\kappa}^2}$$

dir. Bu son denklem, değişkenlerine ayrılabilir bir diferensiyel denklemdir. Bu denklemin genel çözümünü elde etmek için

$$\int \frac{d\hat{\kappa}}{\hat{\kappa}^2\sqrt{-c - 2c_1\hat{\kappa}^2}} = \pm\int ds$$

integrallerini hesapladığımızda

$$\frac{\sqrt{-c - 2c_1\hat{\kappa}^2}}{c\hat{\kappa}} = \pm s + c_2$$

buluruz. Burada c_2 de bir keyfi sabittir. Son denklemde her iki tarafın karesini alır ve gerekli işlemleri yaparsak

$$\hat{\kappa} = \pm \frac{1/\sqrt{c}}{\sqrt{-s^2 \pm 2c_2 s - \left(c_2^2 + 2\frac{c_1}{c^2}\right)}} \tag{4.46}$$

dir. Daha sade görünmesi açısından keyfi sabitleri değiştirebiliriz.

$$a = \pm 2c_2, \; b = -\left(c_2^2 + 2\frac{c_1}{c^2}\right)$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca $c = \operatorname{cosec}^2 \alpha_0$ olduğunu da göz önüne alırsak

$$\hat{\kappa}(s) = \frac{\pm \sin \alpha_0}{\sqrt{-s^2 + as + b}} \tag{4.47}$$

elde ederiz. $\hat{\kappa}$ nın tanımlı olması için $-s^2 + as + b > 0$ olmalıdır. Bu da ancak $a^2 + 4b > 0$ ve $s \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}\right)$ olduğunda mümkündür. Sonuç olarak (4.47) ve (4.5) eşitliği gereği $\hat{\tau}(s) = \hat{\kappa}(s) \cot \alpha_0 = \dfrac{\pm \cos \alpha_0}{\sqrt{-s^2 + as + b}}$ dir.

Yeterlilik: γ eğrisinin yarı-Hermitsel torsiyonu $\hat{\tau}(s) = \dfrac{\pm \cos \alpha_0}{\sqrt{-s^2 + as + b}}$ olsun. Bu durumda (4.39) eşitliği sağlanacağından $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ ve $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ lineer bağımlıdır. Böylece $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} \wedge \left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ dır. O halde Tanım 3.15 (ii) gereği γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipindendir. ■

Uyarı 4.17. Teorem 4.14 ün ifadesine dikkat edilirse, $\hat{\nabla}$-geodezik olmayan her Legendre eğrisi için $\hat{\tau} = 0$ ve $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan $\hat{\tau}(s) = \dfrac{\pm \cos \alpha_0}{\sqrt{-s^2 + as + b}}$ formunda yazılabilir. Bu da Önerme 3.16 (ii) yi destekler. Yani bir Legendre eğrisi her zaman yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipindendir.

Yarı-Hermitsel slant helisler için Teorem 4.14 yardımıyla aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

Sonuç 4.18. 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldunda yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipinden yarı-Hermitsel slant helis yoktur [22].

İspat: $M = \{M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı bir yarı-Hermitsel slant helis ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipinden olduğunu varsayalım. Öncelikle γ bir yarı-Hermitsel slant helis olduğundan (3.22) gereği $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\hat{\tau} \neq 0$ sabittir. Ayrıca Teorem 4.14 gereği a ve b keyfi sabitler, $a^2 + 4b > 0$ ve $s \in \left(\dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)$ olmak üzere $\hat{\tau}(s) = \dfrac{\pm \cos \alpha_0}{\sqrt{-s^2 + as + b}}$ olarak yazılabilmelidir. Burada $\hat{\tau} \neq 0$ sabit olduğundan

$$\hat{\tau}'(s) = \frac{\mp \cos \alpha_0 \left(-2s + a\right)}{2\left(-s^2 + as + b\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikten $\cos \alpha_0 = 0$ bulunur. Yani $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ dir. Bu durumda Tanım 3.2 gereği γ bir Legendre eğrisidir. O halde Önerme 3.4 gereği, $\hat{\tau} = 0$ dır. $\hat{\tau} \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu durumda varsayımımız yanlıştır. M deki bir yarı-Hermitsel slant helis, yarı-Hermitsel $AW(2)$-tipinden olamaz. ■

Son olarak, yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipinden slant eğriler için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.19. $M = \left(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g\right)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipinden olması için gerek ve yeter şart sabit yarı-Hermitsel torsiyona sahip olmasıdır [22].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipinden bir eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. Tanım 3.15 (iii) gereği $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} \wedge \left(\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ dır. Yani $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ ve $\left(\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ vektör alanları lineer bağımlıdır. O halde (4.30) ve (4.34) eşitliklerinden

$$\begin{vmatrix} \hat{\kappa}'' - \hat{\kappa}^3 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0 & 3\hat{\kappa}\hat{\kappa}' \cot \alpha_0 \\ \hat{\kappa} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

yazılabilir. Buradan

$$3\hat{\kappa}^2 \hat{\kappa}' \cot \alpha_0 = 0 \tag{4.48}$$

elde edilir. γ eğrisi $\hat{\nabla}$-geodezik olmadığından $\hat{\kappa} \neq 0$ dır. Böylece (4.48) eşitliğinden $\hat{\kappa}' = 0$ veya $\cot \alpha_0 = 0$ çıkar. Eğer $\cot \alpha_0 = 0$ ise, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ dir. Bu durumda Tanım 3.2 gereği γ bir Legendre eğrisidir. O halde Önerme 3.4 gereği, $\hat{\tau} = 0$ dır ve sabittir. Eğer $\hat{\kappa}' = 0$ ise, $\hat{\kappa} \neq 0$ sabittir. Ayrıca γ eğrisi slant olduğundan Tanım 3.2 den α_0 değme açısı da sabittir. Böylece (4.5) eşitliği gereği $\hat{\tau} = \hat{\kappa} \cot \alpha_0 = \text{sabit}$ elde edilir.

Yeterlilik: $\hat{\tau} = \text{sabit}$ olsun. O halde $\hat{\tau}' = 0$ dır. (4.5) eşitliğinde $\hat{\tau} = \hat{\kappa} \cot \alpha_0$ olduğundan $\hat{\tau}' = \hat{\kappa}' \cot \alpha_0 = 0$ elde edilir. Böylece (4.48) eşitliği sağlanır. Determinant sıfıra eşit olacağından $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ ve $\left(\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp}$ vektör alanları lineer bağımlıdır ve dolayısıyla $\left(\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} \wedge \left(\hat{\nabla}_T T\right)^{\perp} = 0$ dır. Böylece Tanım 3.15 (iii) gereği γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipindendir. ■

Önerme 4.3, Teorem 4.19 ve (4.5) birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.20. $M = \left(M, \varphi, \xi, \eta, g\right)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri olsun. γ eğrisinin yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipinden olması için gerek ve yeter şart bir Legendre eğrisi veya yarı-Hermitsel slant helis olmasıdır [22].

İspat: Gereklilik: γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipinden olsun. Bu durumda Teorem 4.19 gereği $\hat{\tau}$ sabittir. Eğer $\hat{\tau} = 0$ ise, Önerme 4.3 den γ bir Legendre eğrisidir. Eğer $\hat{\tau} \neq 0$ sabit ise, (4.5) eşitliği gereği $\dfrac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} = \cot \alpha_0$ olduğundan $\hat{\kappa} \neq 0$ sabittir. O halde (3.22) den γ eğrisi bir yarı-Hermitsel helistir. Burada γ bir slant eğri olduğundan, bir yarı-Hermitsel slant helistir.

Yeterlilik: γ eğrisi bir Legendre eğrisi veya yarı-Hermitsel slant helis olsun. Her iki durumda da $\hat{\tau}$ nun sabit olduğu açıktır. Sonuçta, Teorem 4.19 gereği γ eğrisi yarı-Hermitsel $AW(3)$-tipindendir. ■

5. YARI-HERMİTSEL GEOMETRİDE SLANT EĞRİLER İÇİN GENEL BİR KARAKTERİZASYON VE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde, 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldunda Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğrileri karakterize eden diferensiyel denklem elde edilecek ve slant eğrilerin özellikleri kullanılarak bazı sonuçlara ulaşılacaktır.

Teorem 5.1. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri ve $\hat{\tau}\neq 0$ olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem

$$\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T+\lambda_1\hat{\nabla}_T\hat{\nabla}_T T+\lambda_2\hat{\nabla}_T T+\lambda_3 T=0 \tag{5.1}$$

olup, burada λ_1, λ_2 ve λ_3 değerleri için

$$\lambda_1=-\left(2\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}+\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}\right), \tag{5.2}$$

$$\lambda_2=-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}}+\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}+2\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2+\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2, \tag{5.3}$$

$$\lambda_3=\hat{\kappa}\hat{\tau}\left(\frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}}\right)' \tag{5.4}$$

dır.

İspat: $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu değme Riemann manifoldunda, Tanaka-Webster koneksiyonuna göre birim hızlı bir γ eğrisinin Frenet formülleri,

$$\widehat{\nabla}_T T = \hat{\kappa} N , \tag{5.5}$$

$$\widehat{\nabla}_T N = -\hat{\kappa} T + \hat{\tau} B , \tag{5.6}$$

$$\widehat{\nabla}_T B = -\hat{\tau} N \tag{5.7}$$

şeklindedir. (5.5) eşitliğinde her iki tarafın $\widehat{\nabla}$ koneksiyonuna göre türevi alınırsa

$$\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T = -\hat{\kappa}^2 T + \hat{\kappa}' N + \hat{\kappa}\hat{\tau} B \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.8) in her iki tarafının $\widehat{\nabla}$ koneksiyonuna göre türevi alınırsa

$$\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T = -2\hat{\kappa}\hat{\kappa}' T - \hat{\kappa}^2 \widehat{\nabla}_T T + \hat{\kappa}'' N + \hat{\kappa}' \widehat{\nabla}_T N + (\hat{\kappa}\hat{\tau})' B + \hat{\kappa}\hat{\tau} \widehat{\nabla}_T B \tag{5.9}$$

olur. $\hat{\tau} \neq 0$ olduğundan (5.6) gereği

$$B = \frac{1}{\hat{\tau}} \widehat{\nabla}_T N + \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}} T \tag{5.10}$$

ve (5.5) den

$$N = \frac{1}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T T \tag{5.11}$$

elde edilir. (5.11) ifadesi (5.10) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\hat{\tau}} \widehat{\nabla}_T \left(\frac{1}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T T \right) + \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}} T \\ &= \frac{1}{\hat{\tau}} \left(-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}^2} \widehat{\nabla}_T T + \frac{1}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T \right) + \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}} T \end{aligned}$$

$$B = -\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2} \widehat{\nabla}_T T + \frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}} \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}} T \tag{5.12}$$

bulunur. (5.12) nin her iki tarafının $\widehat{\nabla}$ koneksiyonuna göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_T B = &-\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2} \right)' \widehat{\nabla}_T T - \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2} \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \left(\frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}} \right)' \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T \\ &+ \frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}} \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \left(\frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}} \right)' T + \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}} \widehat{\nabla}_T T \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.11) eşitliği (5.7) de yerine yazılırsa

$$\widehat{\nabla}_T B = -\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T T \tag{5.14}$$

bulunur. (5.14) eşitliği (5.13) eşitliğinde yerine yazılır ve denklem $\hat{\kappa}\hat{\tau}$ ile çarpılırsa

$$\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T T+\hat{\kappa}\hat{\tau}\left[\left(\frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}}\right)'-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right]\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T T+\hat{\kappa}\hat{\tau}\left[-\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right)'+\frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}}+\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}}\right]\widehat{\nabla}_T T+\hat{\kappa}\hat{\tau}\left(\frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}}\right)'T=0$$

olur. Bu son denklemde $\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T T$, $\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T T$ ve $\widehat{\nabla}_T T$ terimlerinin katsayıları sırasıyla λ_1, λ_2 ve λ_3 olsun. Bu katsayılar sadeleştirilirse

$$\lambda_1=\hat{\kappa}\hat{\tau}\left[\left(\frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}}\right)'-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right]=\hat{\kappa}\hat{\tau}\left[\frac{-\left(\hat{\kappa}\hat{\tau}\right)'}{\left(\hat{\kappa}\hat{\tau}\right)^2}-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right]=\hat{\kappa}\hat{\tau}\left[\frac{-\hat{\kappa}'\hat{\tau}-\hat{\kappa}\hat{\tau}'}{\left(\hat{\kappa}\hat{\tau}\right)^2}-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right]$$

$$=-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}-\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}=-\left(2\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}+\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}\right),$$

$$\lambda_2=\hat{\kappa}\hat{\tau}\left[-\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right)'+\frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}}+\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}}\right]=-\hat{\kappa}\hat{\tau}\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right)'+\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2$$

$$=-\hat{\kappa}\hat{\tau}\left[\frac{\hat{\kappa}''\hat{\tau}\hat{\kappa}^2-\hat{\kappa}'\left(\hat{\tau}'\hat{\kappa}^2+2\hat{\kappa}\hat{\kappa}'\hat{\tau}\right)}{\left(\hat{\kappa}^2\hat{\tau}\right)^2}\right]+\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2$$

$$=-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}}+\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}+2\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2+\hat{\kappa}^2+\hat{\tau}^2$$

ve

$$\lambda_3=\hat{\kappa}\hat{\tau}\left(\frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}}\right)'$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.2. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri ve $\hat{\tau}=0$ olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem

$$\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T T+\lambda\widehat{\nabla}_T\widehat{\nabla}_T T+\mu\widehat{\nabla}_T T=0 \tag{5.15}$$

olup, burada λ ve μ değerleri için

$$\lambda = -3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}, \;\; \mu = -\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} + 3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2 + \hat{\kappa}^2 \tag{5.16}$$

dır.

İspat: $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu değme Riemann manifoldunda, birim hızlı bir γ eğrisi için $\hat{\tau} = 0$ olduğunda Tanaka-Webster koneksiyonuna göre Frenet formülleri yardımıyla

$$\hat{\nabla}_T T = \hat{\kappa} N, \tag{5.17}$$

$$\hat{\nabla}_T N = -\hat{\kappa} T, \tag{5.18}$$

$$\hat{\nabla}_T B = 0 \tag{5.19}$$

yazılabilir. (5.17) de her iki tarafın $\hat{\nabla}$ koneksiyonuna göre türevi alınırsa

$$\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T = -\hat{\kappa}^2 T + \hat{\kappa}' N \tag{5.20}$$

bulunur. $\hat{\nabla}$ koneksiyonuna göre tekrar türevi alınarak

$$\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T = -2\hat{\kappa}\hat{\kappa}' T - \hat{\kappa}^2 \hat{\nabla}_T T + \hat{\kappa}'' N + \hat{\kappa}' \hat{\nabla}_T N \tag{5.21}$$

elde edilir. (5.17) eşitliği gereği

$$N = \frac{1}{\hat{\kappa}} \hat{\nabla}_T T \tag{5.22}$$

dir. (5.22) denkleminin her iki tarafı $\hat{\nabla}$ koneksiyonuna göre türevlenirse

$$\hat{\nabla}_T N = \frac{1}{\hat{\kappa}} \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T - \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}^2} \hat{\nabla}_T T \tag{5.23}$$

yazılabilir. Ayrıca (5.18) ve (5.23) birlikte kullanılarak

$$T = -\frac{1}{\hat{\kappa}} \hat{\nabla}_T N = -\frac{1}{\hat{\kappa}}\left(\frac{1}{\hat{\kappa}} \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T - \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}^2} \hat{\nabla}_T T\right) = -\frac{1}{\hat{\kappa}^2} \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T + \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}^3} \hat{\nabla}_T T \tag{5.24}$$

bulunur. (5.22), (5.23) ve (5.24) eşitlikleri (5.21) de yerlerine yazılırsa

$$\hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T = -2\hat{\kappa}\hat{\kappa}'\left(-\frac{1}{\hat{\kappa}^2} \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T + \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}^3} \hat{\nabla}_T T\right) - \hat{\kappa}^2 \hat{\nabla}_T T$$
$$+ \hat{\kappa}''\left(\frac{1}{\hat{\kappa}} \hat{\nabla}_T T\right) + \hat{\kappa}'\left(\frac{1}{\hat{\kappa}} \hat{\nabla}_T \hat{\nabla}_T T - \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}^2} \hat{\nabla}_T T\right)$$

sonucuna ulaşılır. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T - 3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \left[-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} + 3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2 + \hat{\kappa}^2 \right] \widehat{\nabla}_T T = 0$$

elde edilir. $\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T$ ve $\widehat{\nabla}_T T$ ifadelerinin katsayılarına sırasıyla λ ve μ denirse ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.1, Teorem 5.2, Önerme 4.3 ve (4.5) eşitliği beraber düşünüldüğünde, slant eğriler için aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 5.3. $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem

$$\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \lambda \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \mu \widehat{\nabla}_T T = 0 \qquad (5.25)$$

olup, burada λ ve μ değerleri

$$\lambda = -3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}, \qquad \mu = -\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} + 3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2 + \hat{\kappa}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0$$

şeklindedir.

İspat: $M = (M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun.

i) $\hat{\tau} \neq 0$ ise (4.5) eşitliği gereği $\dfrac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}} = \tan \alpha_0 = \text{sabit}$ olduğundan $\left(\dfrac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}}\right)' = 0$ dır.

Buradan $\dfrac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}} = \dfrac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}$ olup bu değerler (5.1) diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T - 3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \left[-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} + 3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2 + \hat{\kappa}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0 \right] \widehat{\nabla}_T T = 0$$

elde edilir. Burada $\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T$ ve $\widehat{\nabla}_T T$ terimlerinin katsayılarına sırasıyla λ ve μ denirse, (5.25) deki diferensiyel denklem elde edilir.

ii) $\hat{\tau} = 0$ ise Önerme 4.3 gereği γ eğrisi bir Legendre eğrisidir ve $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ dir. Bu durumda Teorem 5.2 geçerlidir. Ayrıca $\operatorname{cosec}^2 \alpha_0 = 1$ olduğundan ispat biter. ■

Sonuç 5.4. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisini karakterize eden diğer bir diferensiyel denklem

$$\widehat{\Delta} \widehat{H} + \lambda \widehat{\nabla}_T \widehat{H} + \mu \widehat{H} = 0 \tag{5.26}$$

olup, burada λ ve μ değerleri

$$\lambda = 3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}, \qquad \mu = \frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} - 3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2 - \hat{\kappa}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha_0$$

şeklindedir.

İspat: (3.28) ve (3.34) eşitlikleri, Sonuç 5.3 ile birlikte düşünüldüğünde ispat açıktır. ■

Sonuç 5.5. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi birim hızlı bir yarı-Hermitsel helis olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem

$$\widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T \widehat{\nabla}_T T + \lambda \widehat{\nabla}_T T = 0 \tag{5.27}$$

olup, burada $\lambda = \hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2$ dir.

İspat: γ eğrisi bir yarı Hermitsel helis olduğundan (3.22) gereği $\hat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\hat{\tau} \neq 0$ sabittir. O halde $\hat{\kappa}' = \hat{\kappa}'' = 0$, ve $\hat{\tau}' = 0$ dır. Bu değerler (5.2), (5.3) ve (5.4) eşitliklerinde yerine yazılırsa $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2$ ve $\lambda_3 = 0$ elde edilir.

Böylece $\lambda_2 = \lambda$ denilirse, (5.1) diferensiyel denklemi (5.27) diferensiyel denklemine dönüşür ve ispat biter. ■

Sonuç 5.6. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi birim hızlı bir yarı-Hermitsel helis olsun. γ eğrisini karakterize eden diğer bir diferensiyel denklem

$$\hat{\Delta}\widehat{H} + \lambda\widehat{H} = 0 \tag{5.28}$$

olup, burada $\lambda = -\left(\hat{\kappa}^2 + \hat{\tau}^2\right)$ dir.

İspat: (3.28) ve (3.34) eşitlikleri, Sonuç 5.6 ile birlikte düşünüldüğünde ispat açıktır. ■

Şimdi, normal demette Tanaka-Webster koneksiyonuna göre Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 dekine benzer şekilde bir karakterizasyon elde edeceğiz.

Teorem 5.7. $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri ve $\hat{\tau} \neq 0$ olsun. γ eğrisini normal demette $\hat{\nabla}^{\perp}$ koneksiyonuna göre karakterize eden diferensiyel denklem

$$\hat{\nabla}^{\perp}_T \hat{\nabla}^{\perp}_T \hat{\nabla}^{\perp}_T T + \lambda \hat{\nabla}^{\perp}_T \hat{\nabla}^{\perp}_T T + \mu \hat{\nabla}^{\perp}_T T = 0 \tag{5.29}$$

olup, burada λ ve μ değerleri için

$$\lambda = -\left(2\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}} + \frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}\right) \tag{5.30}$$

ve

$$\mu = -\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} + \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}} + 2\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2 + \hat{\tau}^2 \tag{5.31}$$

dir.

İspat: (5.5), (5.6) ve (5.7) eşitliklerinden

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp} T = \hat{\kappa} N, \tag{5.32}$$

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp} N = \hat{\tau} B, \tag{5.33}$$

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp} B = -\hat{\tau} N \tag{5.34}$$

bulunur. (5.32) gereği

$$N = \frac{1}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T \tag{5.35}$$

elde edilir. Bu değer (5.33) de yerine yazılırsa

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp}\left(\frac{1}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T\right) = \hat{\tau} B$$

olur ve $\hat{\tau} \neq 0$ olduğundan

$$B = -\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T + \frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}} \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T \tag{5.36}$$

bulunur. (5.35) ve (5.36) eşitlikleri (5.34) de yerlerine yazılırsa

$$\left(-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right)' \widehat{\nabla}_T^{\perp} T - \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2} \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T + \left(\frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}}\right)' \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T + \frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}} \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T + \frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T = 0 \tag{5.37}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $\widehat{\nabla}_T^{\perp} T$ ve $\widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T$ terimlerinin katsayıları sadeleştirildiğinde

$$\left(-\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}\right)' = \frac{\hat{\kappa}'\hat{\tau}'\hat{\kappa}^2 + 2\hat{\kappa}\hat{\tau}\left(\hat{\kappa}'\right)^2 - \hat{\kappa}''\hat{\tau}\hat{\kappa}^2}{\hat{\tau}^2\hat{\kappa}^4}$$

ve

$$\left(\frac{1}{\hat{\kappa}\hat{\tau}}\right)' = \frac{-\hat{\kappa}'\hat{\tau} - \hat{\kappa}\hat{\tau}'}{\hat{\kappa}^2\hat{\tau}^2}$$

dir. Bu değerler (5.37) de yerlerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T - \left(2\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}} + \frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}\right) \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T + \left(-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} + \frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}} + 2\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2 + \hat{\tau}^2\right) \widehat{\nabla}_T^{\perp} T = 0$$

olur. Bu denklemde $\widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T$ ve $\widehat{\nabla}_T^{\perp} T$ katsayılarına sırasıyla λ ve μ denirse (5.29) diferensiyel denklemi elde edilmiş olur ve ispat biter. ■

Teorem 5.8. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri ve $\hat{\tau}=0$ olsun. γ eğrisini normal demette $\hat{\nabla}^{\perp}$ koneksiyonuna göre karakterize eden diferensiyel denklem

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T+\lambda\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T+\mu\hat{\nabla}_T^{\perp}T=0 \tag{5.38}$$

olup, burada λ ve μ değerleri için

$$\lambda=-3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}},\ \ \mu=3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}} \tag{5.39}$$

dir.

İspat: $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir eğri ve $\hat{\tau}=0$ olsun. (5.5), (5.6) ve (5.7) eşitliklerinden

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}T=\hat{\kappa}N, \tag{5.40}$$

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}N=0, \tag{5.41}$$

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}B=0 \tag{5.42}$$

bulunur. (5.40) eşitliğinin her iki tarafında $\hat{\nabla}^{\perp}$ koneksiyonuna göre türev alınır ve (5.41) ile (5.42) eşitlikleri kullanılırsa

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T=\hat{\kappa}'N \tag{5.43}$$

ve

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T=\hat{\kappa}''N \tag{5.44}$$

elde edilir. $\hat{\kappa}\neq 0$ olduğundan, (5.40) ve (5.44) eşitliklerinden

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T=\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}}\hat{\nabla}_T^{\perp}T \tag{5.45}$$

yazılabilir. Ayrıca (5.40) ve (5.43) eşitlikleri gereği

$$-3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T=-3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2\hat{\nabla}_T^{\perp}T \tag{5.46}$$

dir. Son olarak (5.45) ve (5.46) denklemleri taraf tarafa toplanırsa ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.7, Teorem 5.8, Önerme 4.3 ve (4.5) eşitliği beraber düşünüldüğünde, slant eğriler için aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 5.9. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma: I\subset\mathbb{R}\rightarrow M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisini normal demette karakterize eden diferensiyel denklem

$$\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T+\lambda\hat{\nabla}_T^{\perp}\hat{\nabla}_T^{\perp}T+\mu\hat{\nabla}_T^{\perp}T=0 \tag{5.47}$$

olup, burada λ ve μ değerleri için

$$\lambda=-3\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}},\quad \mu=3\left(\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}\right)^2-\frac{\hat{\kappa}''}{\hat{\kappa}}+\hat{\kappa}^2\cot^2\alpha_0 \tag{5.48}$$

dır.

İspat: $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma: I\subset\mathbb{R}\rightarrow M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun.

i) $\hat{\tau}\neq 0$ durumunda (4.5) eşitliği gereği $\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}}=\cot\alpha_0=\text{sabit}$, $\left(\frac{\hat{\tau}}{\hat{\kappa}}\right)'=0$ ve dolayısıyla $\frac{\hat{\kappa}'}{\hat{\kappa}}=\frac{\hat{\tau}'}{\hat{\tau}}$ bulunur. Bu değerler (5.29) diferensiyel denkleminde yerlerine yazılırsa (5.47) diferensiyel denklemi elde edilir.

ii) $\hat{\tau}=0$ durumunda Önerme 4.3 gereği γ eğrisi bir Legendre eğrisidir ve $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$ dir. Böylece $\cot\alpha_0=0$ olduğu göz önüne alındığında, Teorem 5.8 kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.10. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan birim hızlı bir slant eğri ve γ nın değme açısı α_0 olsun. γ eğrisini normal demette karakterize eden diğer bir diferensiyel denklem

$$\widehat{\Delta}^{\perp} \widehat{H} + \lambda \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{H} + \mu \widehat{H} = 0 \tag{5.49}$$

olup, burada λ ve μ değerleri

$$\lambda = 3\frac{\widehat{\kappa}'}{\widehat{\kappa}}, \qquad \mu = \frac{\widehat{\kappa}''}{\widehat{\kappa}} - 3\left(\frac{\widehat{\kappa}'}{\widehat{\kappa}}\right)^2 - \widehat{\kappa}^2 \cot^2 \alpha_0$$

şeklindedir.

İspat: (3.28) ve (3.35) eşitlikleri, Sonuç 5.9 ile birlikte düşünüldüğünde ispat açıktır. ■

Sonuç 5.11. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi birim hızlı bir yarı-Hermitsel helis olsun. γ eğrisini normal demette karakterize eden diferensiyel denklem

$$\widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} \widehat{\nabla}_T^{\perp} T + \lambda \widehat{\nabla}_T^{\perp} T = 0 \tag{5.50}$$

olup, burada $\lambda = \widehat{\tau}^2$ dir.

İspat: γ eğrisi bir yarı-Hermitsel helis olduğundan (3.22) gereği $\widehat{\kappa} \neq 0$ sabit ve $\widehat{\tau} \neq 0$ sabittir. Böylece $\widehat{\kappa}' = \widehat{\kappa}'' = 0$ ve $\widehat{\tau}' = 0$ elde edilir. Bu değerler (5.29) daki diferensiyel denklemde yerlerine yazılırsa (5.50) diferensiyel denklemi elde edilir ve ispat biter. ■

Sonuç 5.12. $M=(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu ve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eğrisi birim hızlı bir yarı-Hermitsel helis olsun. γ eğrisini normal demette karakterize eden diğer bir diferensiyel denklem

$$\widehat{\Delta}^{\perp} \widehat{H} + \lambda \widehat{H} = 0 \tag{5.51}$$

olup, burada $\lambda = -\hat{\tau}^2$ dir.

İspat: (3.28) ve (3.35) eşitlikleri, Sonuç 5.11 ile birlikte düşünüldüğünde ispat açıktır. ■

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

4. bölümde, 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde bulunan ve Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğriler için yarı-Hermitsel ortalama eğrilik vektör alanı hesaplanmış ve bu vektör alanının yarı-Hermitsel paralel, tanjant veya normal demette yarı-Hermitsel has veya yarı-Hermitsel harmonik olma koşulları belirlenmiş olup Önerme 4.3, Teorem 4.4, Önerme 4.6, Teorem 4.8, Teorem 4.11, Teorem 4.14, Teorem 4.16 ve Teorem 4.19 ispatlanmıştır.

Son bölüm olan 5. bölümde, 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu üzerinde bulunan ve Tanaka-Webster koneksiyonuna göre geodezik olmayan slant eğrileri karakterize eden diferensiyel denklemler elde edilmiş; Teorem 5.1, Teorem 5.2, Teorem 5.7, Teorem 5.8 ve bu teoremlerin sonuçları ispatlanmıştır.

7. KAYNAKLAR

[1] Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (1996).

[2] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Academic Press, New York-London (1996).

[3] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[4] Ferus, D., Schirrmacher, S., "Submanifolds in Euclidean Space with simple geodesics", *Math Ann.* **260**, no. 1, (1982), 57-62.

[5] Arslan, K., Özgür, C., "Curves and surfaces of AW(k) type", *Geometry and Topology of Submanifolds*, **IX** *(Valenciennes/Lyon/Leuven, 1997)* , World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1999), 21-26.

[6] Arslan, K., West, A., "Product submanifolds with pointwise 3-planar normal sections", *Glasgow Math. J.* **37,** no. 1, (1995), 73-81.

[7] Kenmotsu, K., "A class of almost contact Riemannian manifolds", *Tohoku Math. Journ.*, **24**, (1972), 93-103.

[8] Blair, D. E., Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds Second Edition, Progress in Mathematics, **203**. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, (2010).

[9] Chen, B. Y., δ-invariants, Inequalities of Submanifolds and Their Application, in Topics in Differential Geometry, Eds. A. Mihai, I. Mihai, R. Miron, *Editura Academiei Pomane Bucuresti*, (2008), 29-156.

[10] Arroyo, J., Barros, M. and Garay, O.J., "A characterisation of Helices and Cornu spirals in real space forms", *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **56**, (1997), 37-49.

[11] Yano, K. and Kon, M., Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, (1984).

[12] Kocayiğit, H., ''Lorentz 3-Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontakt Geometri'', Doktora Tezi, (2004).

[13] Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., Riemannian Geometry, 3rd ed., (2004).

[14] Chinea, D., Gonzalez, C., "A classification of almost contact metric manifolds", Annali di Matematica pura ed applicata, **156(4)**, (1990), 15-36.

[15] Yano, K. and Kon, M., Anti-invariant submanifolds, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, no. **21**. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, (1976).

[16] Koboyashi, S. and Nomizu K., Fundations of Differential Geometry, (1963).

[17] Tanno, S., "Variational problems on contact Riemannian manifolds", *Trans. Amer. Math. Soc*. **314**, no. 1, (1989), 349-379.

[18] Cho, J. T. and Lee, J. E., "Slant curves in contact pseudo-Hermitian 3-manifolds", *Bull. Aust. Math. Soc.* **78**, no. 3, (2008), 383-396.

[19] Lee, J. E., "On Legendre curves in contact pseudo-Hermitian 3-manifolds", *Bull. Aust. Math. Soc.* **81**, no. 1, (2010), 156-164.

[20] Tanaka, N., "On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections", *Japan. J. Math. (N.S.)* **2**, no. 1, (1976), 131-190.

[21] Webster, S. M., "Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface", *J. Differential Geom.* **13**, no. 1, (1978), 25-41.

[22] Özgür, C., Güvenç, Ş., "On some types of slant curves in contact pseudo-Hermitian 3-manifolds", *Annales Polonici Mathematici*, baskıda, (2011).