# EĞRİLİK TENSÖRÜNÜN AYRIŞIMLARI

**Yüksek Lisans Tezi**

**Sümeyye Büşra KARTAL**

**Eskişehir, 2019**

**EĞRİLİK TENSÖRÜNÜN AYRIŞIMLARI**

**SÜMEYYE BÜŞRA KARTAL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Tezli Yüksek Lisans Programı**
**Matematik Anabilim Dalı**
**Danışman: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ**

**Eskişehir**
**Eskişehir Teknik Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Ocak, 2019**

*Bu tez çalışması BAP komisyonunca kabul edilen 1804F099 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.*

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Sümeyye Büşra KARTAL'ın "Eğrilik Tensörünün Ayrışımları" başlıklı tezi 17/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

| | | Unvanı Adı-Soyadı | İmza |
|---|---|---|---|
| Üye (Tez Danışmanı) | : | Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ | ................ |
| Üye | : | Prof. Dr. Cumali EKİCİ | ................ |
| Üye | : | Prof. Dr. Nülifer ÖZDEMİR | ................ |

Prof. Dr. Ersin YÜCEL
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

# ÖZET

EĞRİLİK TENSÖRÜNÜN AYRIŞIMLARI



Sümeyye Büşra KARTAL
Matematik Anabilim Dalı
Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak, 2019

Danışman : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ



Bilindiği gibi Riemann eğrilik tensörü ve buna bağlı tanımlanan Ricci eğriliği, skaler eğrilik, kesitsel eğrilik gibi diğer eğrilikler, bir manifoldun geometrisini ve topolojisini incelemekte kullanılan temel araçlardır. Bu çalışmada öncelikle bu eğrilikler tanıtılmıştır. Riemann eğrilik tensörünün sahip olduğu cebirsel özelliklere sahip $(0,4)-$tipindeki tensörlerin uzayı, Eğrilik gibi tensörlerin uzayı olarak adlandırılır. Bu tezde bir Riemann manifoldu üzerindeki Eğrilik gibi tensörlerin uzayının ayrışımları incelenmiştir. Bu ayrışıma bağlı olarak $(0,4)-$tipindeki Riemann eğrilik tensörünün $Rm = Um + Zm + Wm$ şeklinde ayrışımı elde edilmiştir. Bu ayrışımdaki $Wm$ parçası Weyl Tensörü olarak adlandırılmıştır. Riemann eğrilik tensörünün bu ayrışımdaki parçaları ile ilgili bazı eşitlik ve teoremler verilmiştir. Son olarak Weyl tensörünün konformal invaryantlığı gösterilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Riemann eğrilik tensörü, Rm Riemann eğrilik tensörü, Ricci eğriliği, Weyl tensörü, Eğrilik gibi tensörlerin uzayı, Konformal invaryantlık, Tensörlerin ayrışımı.

## ABSTRACT

DECOMPOSITIONS OF CURVATURE TENSOR



Sümeyye Büşra KARTAL
Mathematics Department
Eskişehir Technical University, Graduate School of Sciences, January, 2019

Supervisor : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ



It is known that Riemann curvature tensor and the other related curvatures such as Ricci curvature, scalar curvature and sectional curvature are fundamental tools while studying the geometry and topology of a manifold. Firstly we introduce these curvatures in this study. The space of tensors of type $(0,4)$ whose elements have same algebraic symmetry properties of the Riemann curvature tensor is called Space of Curvature Like Tensors. In this thesis the decompositions of the Space of Curvature Like Tensors on a Riemann manifold is investigated. According to the decomposition of Space of Curvature Like Tensors, the Riemann curvature tensor is decomposed as $Rm = Um + Zm + Wm$. The part Wm in this decomposition is called Weyl Tensor. Some equalities and Theorems related to the parts of the decomposition of Riemann curvature tensor are given. Lastly, it is shown that the Weyl Tensor is conformally invariant.



**Keywords:** Riemann curvature tensor, Rm curvature tensor, Ricci curvature, Weyl tensor, Space of curvature like tensors, Conformally invariant, Decompositions of curvature tensor.

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana her türlü destek olan değerli danışmanım Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ hocama ve bütün sıkıntılarımda her daim yanımda olan saygıdeğer Prof. Dr. Cumali EKİCİ hocama sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca beni bugünüme hazırlayan sevgi dolu annem Leyla KARTAL ile bir o kadar yardımsever babam Prof. Dr. Ahmet KARTAL'a teşekkürlerimi iletmekten kıvanç duyuyorum.

Sümeyye Büşra KARTAL
Ocak, 2019

17/01/2019

## ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz etme ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda, bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Sümeyye Büşra KARTAL

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | | |
|---|---|---|
| $T_pM$ | : | $M$ manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı |
| $\chi(M)$ | : | $M$ manifoldu üzerinde tanımlı vektör alanlarının kümesi |
| $C^{\infty}(M)$ | : | $M$ manifoldu üzerinde her mertebeden türevi var olan fonksiyonların kümesi |
| $\mathbf{C}$ | : | Kontraksiyon (büzülme) operatörü |
| $g$ | : | Riemann metrik tensörü |
| $\nabla_V W$ | : | $W$ vektör alanının $V$ vektör alanına göre kovaryant türevi |
| $R$ | : | $(1,3)-$ tipinden Riemann eğriliği |
| $Rm$ | : | $(0,4)-$ tipinden Riemann eğriliği |
| $S$ | : | Skaler eğrilik |
| $K_\sigma$ | : | Kesitsel eğrilik |
| $\mathcal{R}$ | : | $(1,3)-$ tipindeki tensörlerin uzayı |
| $\mathcal{R}m$ | : | $(0,4)-$ tipindeki tensörlerin uzayı |
| $Wm$ | : | Weyl tensörü |
| $C$ | : | Shouten tensörü |
| $G$ | : | Einstein tensörü |
| $\mathrm{div}(f)$ | : | $f$ fonksiyonunun Diverjans operatörü |
| $\nabla^2 f$ | : | $f$ fonksiyonunun Hessiyen operatörü |
| $\Delta f$ | : | $f$ fonksiyonunun Laplasyen operatörü |
| $\mathrm{grad}(f)$ | : | $f$ fonksiyonunun Gradyant operatörü |
| $Ric$ | : | Ricci eğrilik tensörü |

# 1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

## 1.1 Vektör Alanları

**Tanım 1.1.1**

$M$, $n$-boyutlu $C^{\infty}(M)$ manifold olsun.

$$TM = \bigsqcup_{x\in M} T_x M$$

ayrık birleşim kümesine, $M$ manifoldunun tanjant demeti denir. $v \in TM$ için, $v \in T_x M$ olacak şekilde $x \in M$ vardır.

$$\begin{array}{rccl} \Pi : & TM & \to & M \\ & v & \longmapsto & \Pi(v) = x, \ (v \in T_x M \text{ ise}) \end{array}$$

$\Pi$ fonksiyonuna, doğal izdüşüm fonksiyonu denir.

Bilindiği üzere, $M$ manifoldunun, bir $p$ noktasındaki $T_pM$ tanjant uzayı, $n-$boyutlu bir reel vektör uzayıdır. Ancak $TM = \bigsqcup_{x\in M} T_x M$ tanjant demeti, bir vektör uzayı değildir (Bakınız, [3]).

**Tanım 1.1.2**

$M$ manifoldunun, her bir $p$ noktasına $V(p) \in T_pM$ şeklinde bir tanjant vektörü yapıştıran dönüşüme, $M$ manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir. Başka bir deyişle $M$ manifoldu üzerindeki $V$ vektör alanı,

$$V : M \to TM$$

olarak tanımlı ve

$$\Pi \circ V = Id_M$$

koşulunu sağlar. Yani, her $p \in M$ için, $\Pi(V(p)) = p$ olan bir fonksiyondur. Her $p \in M$ için,

$$\Pi^{-1}(p) = T_pM$$

olup $T_pM$ tanjant uzayına, $\Pi$ nin $p$ noktasına karşılık gelen lifi denir (Bakınız; [3], [7]).

**Tanım 1.1.3**

$M$, $n$-boyutlu $C^{\infty}(M)$ manifold olsun. $M$ manifoldunun, $(U,\phi)$ kartını alalım. $U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde;

$$\begin{array}{rccl} \frac{\partial}{\partial x_1}: & U & \to & TU \\ & p & \mapsto & \frac{\partial}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_p \end{array}$$

fonksiyonu, bir vektör alanıdır. Buna, $(U,\phi)$ kartında karşılık gelen 1. koordinat vektör alanı denir.

Benzer şekilde, $U$ açığı üzerinde $\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ vektör alanları vardır.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ kümesine, $M$ manifoldunun $U$ açığı üzerinde koordinat çatısı denir.

$V$, $M$ manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. $p \in U$ için,

$$V(p) \in T_pM = Span\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\right\}$$

şeklindedir. O hâlde,

$$V(p) = V_p = a_1\frac{\partial}{\partial x_1}|_p + a_2\frac{\partial}{\partial x_2}|_p + ... + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}|_p$$

olacak şekilde $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sabitleri vardır. Aldığımız her $p$ noktası, $U$ açığı üzerinde değiştiğinde, $a_1, a_2, ..., a_n$ katsayıları da değişir. Bu nedenle, $p \in U$ için,

$$V(p) = v^1(p)\frac{\partial}{\partial x_1}|_p + v^2(p)\frac{\partial}{\partial x_2}|_p + ... + v^n(p)\frac{\partial}{\partial x_n}|_p$$

olacak şekilde,

$$v^i : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Bu fonksiyonlara, $V$ vektör alanının $(U,\varphi)$ kartına göre bileşenleri ya da lokal koordinat fonksiyonları denir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$V(p) = v_p = \sum_{i=1}^{n} v^i(p)\frac{\partial}{\partial xi}|_p.$$

Eğer $v^i : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ise $V$ vektör alanına $(U,\varphi)$ kartına göre süreklidir denir. Eğer $v^i : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonları türevlenebilir ise $V$ vektör alanına $(U,\varphi)$ kartına göre türevlenebilirdir denir. $V$ vektör alanının, $M$ manifoldu üzerindeki tüm kartlara göre koordinat fonksiyonları sürekli ise $V$ vektör alanına $M$ manifoldu üzerinde sürekli denir. $V$ vektör alanının, $M$ manifoldu üzerindeki tüm kartlara göre koordinat fonksiyonları $C^\infty$ ise $V$ vektör alanına, $M$ manifoldu üzerinde $C^\infty$ denir (Bakınız; [3], [8]).

**Tanım 1.1.4**

$M$ manifoldu üzerindeki tüm $C^\infty(M)$ vektör alanlarının kümesi, $\chi(M)$ ile gösterilir.

$$\chi(M) = \{V \mid V,\ M \text{ manifoldu üzerinde } C^\infty \text{ vektör alanı}\}$$

şeklinde tanımlanır. $\chi(M)$ üzerinde aşağıdaki cebirsel işlemler vardır:

**i**) $p \in M$, ve $V, W \in \chi(M)$ için,

$$(V+W)(p) = V(p) + W(p)$$

olup, $(V+W) \in \chi(M)$ dir.

**ii**) $p \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$(\lambda V)(p) = \lambda V(p)$$

olup, $\lambda V \in \chi(M)$ dir.

**iii**) $p \in M$, $f \in C^\infty(M)$ için,

$$(f \cdot V)(p) = f(p) \cdot V(p)$$

olup, $f \cdot V \in \chi(M)$ dir. $\chi(M)$ burada ilk iki işleme göre sonsuz boyutlu reel vektör uzayı yapısına sahiptir. Ayrıca, 3. işleme göre $C^\infty(M)$ halkası üzerinde bir modüldür.

**Not 1.1.5 (Derivasyon)**

$$\begin{array}{rccc} V: & C^\infty(M) & \to & C^\infty(M) \\ & f & \mapsto & V(f) \end{array}$$

dönüşümü, lineer ve Leibnitz şartını sağlar ise, bir derivasyondur. Yani,

**i**) $f, g \in C^\infty(M)$ olsun.

$$V(f+g) = V(f) + V(g)$$

**ii**) $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $f \in C^\infty(M)$ olsun.

$$V(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot V(f)$$

**iii**) $f, g \in C^\infty(M)$ olsun.

$$V(f \cdot g) = V(f) \cdot g + f \cdot V(g)$$

olur (Leibnitz koşulu).

Ayrıca, $M$ manifoldu üzerindeki her bir vektör alanı, bir derivasyon belirlerken, tersine her bir derivasyon da, $C^\infty$ vektör alanı belirler.

**Tanım 1.1.6 (Lie Braketi)**

$M$ manifoldu üzerinde $V, W$, $C^\infty$ vektör alanları ve $f \in C^\infty(M)$ fonksiyon iken,

$$\begin{array}{rccc} [V,W]: & C^\infty(M) & \rightarrow & C^\infty(M) \\ & f & \mapsto & [V,W](f) \end{array}$$

fonksiyonu,

$$[V,W](f) = V(W(f)) - W(V(f))$$

eşitiliği ile tanımlanır ve bir vektör alanıdır (aynı zamanda derivasyondur). Burada $[V, W]$ terimine $V$ ve $W$ vektör alanlarının Lie Braketi denir (Bakınız; [3], [8]).

**Teorem 1.1.7**

Lie Braketi aşağıdaki özellikleri sağlar:

**i**) $V_1, V_2, W_1, W_2, V, W \in \chi(M)$ olsun.

$$[V_1 + V_2, W] = [V_1, W] + [V_2, W]$$

$$[V, W_1 + W_2] = [V, W_1] + [V, W_2]$$

**ii**) $V, W \in \chi(M)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

$$[\lambda V, W] = \lambda[V, W]$$

$$[V, \lambda W] = \lambda[V, W]$$

Bu özellik, *bi-lineer* olarak adlandırılır.

**iii**) $V, W \in \chi(M)$ olsun.

$$[V, W] = -[W, V]$$

**iv**) $V, W, Z \in \chi(M)$ olsun.

$$[V, [W, Z]] + [W, [Z, V]] + [Z, [V, W]] = 0$$

Bu özellik, *Jakobi özdeşliği* olarak adlandırılır (Bakınız; [3], [8]).

## 1.2 Tensör Alanları

**Tanım 1.2.1**

$r \geq 0, s \geq 0$ tamsayılar ve $V$ bir vektör uzayı olmak üzere,

$$A : (V^*)^r \times V^s \to \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\mathbb{R}-$multi lineer ise tanımlanan $A$ fonksiyonuna, $V$ vektör uzayı üzerinde $(r, s)-$tipinde bir tensör denir. $I_s^r(V)$ ile gösterilir ve

$$I_s^r(V) = \{A : A, V \text{ vektör uzayı üzerinde } (r, s) - \text{tipinde tensör}\}$$

şeklinde tanımlanır. $I_s^r(V)$, bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}-$üzerinde bir reel vektör uzayıdır.

$M$, $n-$boyutlu bir $C^\infty(M)$ manifold olsun. $p \in M$ noktası için, $V = T_pM$ alınırsa,

$$A : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}-$multi lineer dönüşümüne, $T_pM$ tanjant uzayı üzerinde $(r, s)-$tipinde tensör denir.

$$I_s^r(M) = \bigsqcup_{x \in M} I_s^r(T_xM)$$

ayrık birleşimine, tensör demeti denir. $A \in I_s^r(M)$ olsun. En az bir $p \in M$ için $A \in I_s^r(T_pM)$ olur. $\Pi(A) = p$ olarak tanımlanan $\Pi$ dönüşümüne, doğal izdüşüm dönüşümü denir.

**Tanım 1.2.2**

$M$, $n-$boyutlu bir $C^\infty(M)$ manifold olsun. $M$ manifoldu üzerindeki, $(r, s)-$ tipindeki tensör alanı, her $p \in M$ noktasına, $(r, s)-$tipinde tensör yapıştıran dönüşümdür.

$$\begin{array}{rcl} A \ : \ M & \rightarrow & I_s^r(M) \\ p & \mapsto & A(p) := A_p \end{array}$$

ve

$$A_p : \ (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}-$multi lineer dönüşümdür.

$M$ manifoldu üzerinde, bir $(U, \varphi)$ kartı alalım. Alınan bu karta göre, yukarıda tanımladığımız $A$ fonksiyonunun, bileşen fonksiyonlarını elde edelim. Burada, $T_pM$ tanjant ve $T_p^*M$ kotanjant uzaylarının tabanları,

$$T_pM = Span\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_s}|_p\right\}$$

$$T_p^*M = Span\{dx^1|_p, dx^2|_p, ..., dx^r|_p\}$$

şeklindedir. Hatta, $dx^i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p\right) = \delta ij$ olur. $p \in U$ iken, $A_p = A|_U(p) \in I_s^r(T_pM)$ dir. O hâlde, $I_s^r(T_pM)$ nin tabanı,

$$I_s^r(T_pM) = Span\left\{dx^{i_1}|_p \otimes dx^{i_2}|_p \otimes ... \otimes dx^{i_r}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_2}}|_p, ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}|_p\right\}$$

olup,

$$A_p = \sum A^{i_1 i_2 ... i_r}_{j_1 j_2 ... j_s}(p) \cdot dx^{i_1}|_p \otimes dx^{i_2}|_p \otimes ... \otimes dx^{i_r}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_2}}|_p, ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}|_p$$

şeklinde yazılır. Böylece $(U, \varphi)$ kartına göre,

$$A^{i_1 i_2 ... i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunu tanımlarız. Tanımlanan bu fonksiyonlara, $(r, s)-$tipindeki $A$ tensör alanının koordinat fonksiyonu denir. Eğer buradaki tüm koordinat fonksiyonları, $C^\infty$ fonksiyon ise buradaki $A$ tensör alanına, $C^\infty$ ya da düzgün tensör alanı denir. O hâlde $M$ manifoldu üzerindeki tüm $(r, s)-$tipindeki düzgün tensör alanlarının kümesi, $\Im_s^r(M)$ ile gösterilir ve

$$\Im_s^r(M) = \{A : A, M \text{ manifoldu üzerinde } C^\infty(\text{düzgün}) \ (r, s) - \text{tipinde tensör alanı}\}$$

şeklinde tanımlanır. $\Im_s^r(M)$ kümesi, sonsuz boyutlu bir reel vektör uzayıdır. Diğer yandan, her bir $p \in M$ için, $I_s^r(T_pM)$ kümesi, $n^{r+s}$ boyutlu reel vektör uzayıdır. Ancak $I_s^r(M) = \bigsqcup_{x\in M} I_s^r(T_xM)$ tensör demeti, bir vektör uzayı değildir (Bakınız; [3], [4], [5]).

**Not 1.2.3**

$M$ manifoldu üzerinde $(r,s)-$tipindeki $C^\infty$ tensör alanı için farklı bir yorumlama yapmak mümkündür. Bu yaklaşıma göre,

$$A: \quad \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \quad \to \quad C^\infty(M)$$

şeklinde tanımlı her bir birleşene göre $C^\infty(M)-$lineer dönüşümüne, $M$ manifoldu üzerinde $(r,s)-$tipinde bir tensör alanı olarak bakmak mümkündür (Bakınız; [3], [4], [5]).

**Not 1.2.4 (Tensör Alanlarının Yorumlanması)**

Biz, çalışmalarımızda genel olarak, $(0,s)$ ya da $(1,s)-$tipinde olan tensör alanları ile ilgileneceğiz. Bu durumda, $(1,s)-$tipinde olan tensör alanları içinde farklı bir yorumlama yapmak mümkündür. Özel olarak;

$$\bar{A} : \chi(M) \to \chi(M)$$

$C^\infty(M)-$lineer dönüşümü verildiğinde, buna karşılık tek türlü belirli,

$$A : \chi^*(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$$

$(1,1)-$tipinde tensör alanı, her $\theta \in \chi^*(M)$ ve her $V \in \chi(M)$ için,

$$A(\theta, V) := \theta(\bar{A}(V)) \quad ....... \ (*)$$

eşitliği ile tanımlanır. Tersine $M$ manifoldu üzerinde, $(1,1)-$tipinde bir tensör alanı verildiğinde, $(*)$ eşitliği yardımıyla buna karşılık,

$$\bar{A} : \chi(M)^s \to \chi(M)$$

$C^\infty(M)-$lineer dönüşümü tanımlanabilir.

Daha genel olarak, $(1,s)-$tipinde,

$$A : \chi^*(M) \times \chi(M)^s \to C^\infty(M)$$

tensör alanı verildiğinde, buna karşılık tek türlü belirli $(0, s+1)-$tipinde,

$$\bar{A} : \chi(M)^s \to \chi(M)$$

$C^\infty(M)-$multi-lineer dönüşümü karşılık gelir. Bunun tersi de doğrudur. Yani,

$$\bar{A} : \chi(M) \to \chi(M)$$

$C^\infty(M)-$lineer dönüşümü verildiğinde,

$$A : \chi^*(M) \times \chi(M)^s \to C^\infty(M)$$

$(1, s)-$tipinde tensör alanı karşılık gelir (Bakınız; [5], [7]).

**Tanım 1.2.5 (Riemann Metriği)**

$M$ düzgün manifoldu üzerinde, $g \in \Im_2^0(M)$ tipinde tensör alanı verilsin.

$$\begin{array}{rccc} g: & \chi(M) \times \chi(M) & \to & C^\infty(M) \\ & (X,\ Y) & \mapsto & g(X, Y) \end{array}$$

Eğer $g$ metrik tensörü, her $p \in M$ noktasında pozitif tanımlı ve simetrik ise $g$ tensörüne, $M$ manifoldu üzerinde Riemann metriği denir. Buna göre, her $p \in M$ noktası için, $g$ metriğinin belirlediği,

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu,

**i)** $\forall v_p \neq 0$, $\forall v_p \in T_pM$ için,

$$g_p(v_p, v_p) > 0 \text{ (pozitif tanımlılık)}$$

**ii)** $\forall v_p, w_p \in T_pM$ için,

$$g_p(v_p, w_p) = g_p(w_p, v_p) \text{ (simetri)}$$

özelliklerini sağlar. Burada $(T_pM, g)$ ikilisi, bir iç çarpım uzayıdır.

$M$, bir manifold olsun. $M$ manifoldu üzerinde, $g$ Riemann metriği verilsin. Bu durumda, $(M, g)$ ikilisine, Riemann manifoldu denir (Bakınız; [2], [3]).

**Tanım 1.2.6**

$(M, g)$, Riemann manifoldu olsun. $M$ manifoldu üzerinde, başka bir $\tilde{g}$ Riemann metriği verildiğinde, $\tilde{g} = \lambda^2 g$ olacak şekilde,

$$\lambda : M \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu mevcut ise $g$ ve $\tilde{g}$ metriklerine, konformal denk metrikler denir.

## 1.3 Levi-Civita Konneksiyonu

**Tanım1.3.1**

$M$ düzgün manifold olsun ve

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (V, W) & \mapsto & \nabla(V, W) = \nabla_V W \end{array}$$

dönüşümü verilsin. Burada, $\nabla_V W$ ifadesine $W$ vektör alanının $V$ vektör alanı yönündeki kovaryant türevi denir. Bu durumda,

**D1)** $\nabla_V W$ ifadesi, $V$ vektör alanına göre $C^\infty(M)$ lineerdir. Yani,

her $f, g \in C^\infty(M)$, $V_1, V_2 \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_{fV_1 + gV_2} W = f\nabla_{V_1} W + g\nabla_{V_2} W$$

olur.

**D2)** $\nabla_V W$ ifadesi, $W$ vektör alanına göre $\mathbb{R}-$lineerdir.

Yani, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $W_1, W_2 \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_V(\lambda W_1) + \nabla_V(\mu W_2) = \lambda\nabla_V W_1 + \mu\nabla_V W_2$$

olur.

**D3)** $\nabla_V W$ ifadesi, $f \in C^\infty(M)$ için,

$$\nabla_V(f \cdot W) = (Vf)W + f\nabla_V W$$

koşulları sağlanıyorsa, $\nabla$ dönüşümüne, $M$ manifoldu üzerinde bir konneksiyon denir (Bakınız; [1], [5]).

**Teorem 1.3.2**

$(M, g)$, Riemann manifoldu üzerinde, aşağıdaki özellikleri sağlayan tek türlü belirli bir $\nabla$ konneksiyonu vardır. Her $V, W, X \in \chi(M)$ için, aşağıdaki özellikleri sağlar:

**D4)**

$$[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V \quad (Torsion - Free)$$

**D5)**

$$X < V, W > = < \nabla_X V, W > + < V, \nabla_X W > \qquad \text{(Metrik Uyumluluk)}$$

Bu tek türlü belirli $\nabla$ konneksiyonuna, $M$ manifoldu üzerinde *Levi-Civita konneksiyonu* denir (Bakınız; [1], [5]).

**Not 1.3.3**

$$\begin{array}{rccl} T: & \chi(M) \times \chi(M) & \longrightarrow & \chi(M) \\ & (V, W) & \mapsto & T(V, W) \end{array}$$

dönüşümü verilsin. Buradaki, $T(V, W)$ ifadesi,

$$T(V, W) = [V, W] - \nabla_V W + \nabla_W V$$

şeklinde tanımlanır. $T(V, W)$, $(1, 2)-$tipinde bir tensör alanıdır ve bu tensör alanına torsiyon tensör denir.

## 1.4 Kovaryant Türev

**Tanım 1.4.1 (Tensör Alanının Kovaryant Türevi)**

$A$, $(0, 2)-$tipinde bir tensör alanı olsun. Bu tensör alanının kovaryant türevi,

$$\nabla A : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

şeklinde bir dönüşüm olup, keyfi $X \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X A)(Y_1, Y_2) = \nabla_X(A(Y_1, Y_2)) - A(\nabla_X Y_1, Y_2) - A(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

şeklinde tanımlanır. Eşitliğin sağ tarafında bulunan ilk ifade, $\nabla_X$, $X$ yönünde türevdir. Yani,

$$(\nabla_X A)(Y_1, Y_2) = X(A(Y_1, Y_2)) - A(\nabla_X Y_1, Y_2) - A(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

olarak yazarız. Burada, bir an için $A = g$ alırsak,

$$(\nabla_X g)(Y_1, Y_2) = X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

eşitliği elde edilir. $\nabla$, Levi-Civita konneksiyonunun metrik uyumluluk özelliği,

$$X(g(Y_1, Y_2)) = g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

kullanılırsa, $\nabla_X g = 0$ elde edilir. Bu eşitlik bize, metrik uyumluluğun başka bir ifadesini verir.

Şimdi bu tanımı, biraz daha genelleştirelim. $A$, $(0, s)-$tipinde tensör alanı olsun. Keyfi, $X \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X A(Y_1, Y_2, ..., Y_s) := X(A(Y_1, Y_2, ..., Y_s)) - \sum_{i=1}^{s} A(Y_1, Y_2, ..., Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, .., Y_s)$$

şeklindedir.

$A$, $(1, s)-$tipinde tensör alanı olsun.

$$A : \chi(M)^s \to \chi(M)$$

$C^\infty(M)-$multi lineer fonksiyondur. Keyfi $X \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X A(Y_1, Y_2, ..., Y_s) := X(A(Y_1, Y_2, ..., Y_s)) - \sum_{i=1}^{s} A(Y_1, Y_2, ..., Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, .., Y_s)$$

olarak tanımlanır. Burada $\nabla_X$,

$$\nabla_X : \Im_s^1(M) \to \Im_s^1(M)$$

şeklinde dönüşümdür.

Şimdi $\nabla A$ dönüşümünü tanımlayalım. Burada, $A$, $(0,s)-$tipinde tensör alanı olsun. Keyfi, $X \in \chi(M)$ alalım.

$$(\nabla A)(X, Y_1, Y_2, ..., Y_s) := (\nabla_X A)(Y_1, Y_2, ..., Y_s) \in C^\infty(M)$$

olur. Buna göre,

$$\nabla A : \chi(M)^{s+1} \to C^\infty(M)$$

dönüşümü, $C^\infty(M)-$multi lineerdir. O hâlde, yukarıdaki eşitlik ile tanımlanan $\nabla A$, $(0, s+1)-$tipinde tensör alanıdır.

Şimdi de benzer şekilde, $A$, $(1,s)-$tipinde tensör alanı olsun.

$$(\nabla A)(X, Y_1, Y_2, ..., Y_s) := (\nabla_X A)(Y_1, Y_2, ..., Y_s) \in C^\infty(M)$$

olur. Buna göre,

$$\nabla A : \chi(M)^{s+1} \to C^\infty(M)$$

dönüşümü, $C^\infty(M)-$multi lineerdir. O hâlde, yukarıdaki eşitlik ile tanımlanan $\nabla A$, $(1, s+1)-$tipinde tensör alanıdır (Bakınız; [5]).

**Not 1.4.2**

$A$, $(0,2)-$tipinde bir simetrik tensör alanı iken, $(\nabla_X A)$ tensör alanı da simetriktir. Yani,

$$\begin{array}{rccc} \nabla_X : & \Im_2^0(M) & \to & \Im_2^0(M) \\ & A & \mapsto & \nabla_X A \end{array}$$

şeklindeki dönüşüm için,

$$(\nabla_X A)(V, W) = X(A(V, W)) - A(\nabla_X V, W) - A(V, \nabla_X W)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde, $(\nabla_X A)(W, V)$ teriminin eşitini yazalım.

$$(\nabla_X A)(W, V) = X(A(W, V)) - A(\nabla_X W, V) - A(W, \nabla_X V)$$

olup,

$$(\nabla_X A)(V, W) = (\nabla_X A)(W, V)$$

şeklindedir.

## 1.5 Riemann Manifoldu Üzerinde Bazı Diferansiyel Operatörler

Bir manifold üzerinde, yönlü türev almanın birçok yolu vardır.

$f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyou ve $M$ manifoldu üzerinde, bir $Y$ vektör alanı verildiği zaman,

$$\nabla_Y f := df(Y) = Y(f)$$

gösterimi kullanılır. $(M, g)$, Riemann manifoldu ve $\nabla$, $M$ manifoldu üzerinde, Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda, $M$ manifoldu üzerinde, başka türev operatörleri de tanımlamak mümkündür. Dikkat edilirse,

$$df : \chi(M) \to C^{\infty}(M)$$

$(0,1)-$tipinden tensör alanıdır.

**Tanım 1.5.1 (Gradyant)**

$M$ manifoldu üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon, $f : M \to \mathbb{R}$ olsun. $f$ fonksiyonu adına, gradyant vektör alanı denilen ve $\mathrm{grad} f = \nabla f$ şeklinde gösterilen bir vektör alanı karşılık getirir. Her $X \in \chi(M)$ için,

$$g(\nabla f, X) = X(f)$$

olarak yazılır. Burada $X(f) = df(X)$ olduğunu ifade etmiştik (Bakınız; [1], [5], [6]).

**Tanım 1.5.2 (Hessiyen)**

$f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyounu için, $(0,2)-$tipinde adına $f$ fonksiyonunun Hessiyeni denilen ve $\nabla^2 f$ ile gösterilen tensör alanı, aşağıdaki gibi tanımlanır.

Her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)(X,Y) &:= \nabla_X(Y(f)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f \end{aligned}$$

şeklindedir (Bakınız; [1], [5], [6]).

**Teorem 1.5.4**

Hessiyen tensör alanı, $\nabla^2 f$ simetriktir (Bakınız; [1], [5], [6]).

**İspat 1.5.4**

$$(\nabla^2 f)(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$$

$$(\nabla^2 f)(Y,X) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f$$

yazdığımız bu iki eşitliği, taraf tarafa çıkaralım:

$$(\nabla^2 f)(X,Y) - (\nabla^2 f)(Y,X) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f - Y(X(f)) + (\nabla_Y X)f$$

Burada, Torsion-Free özelliğini kullanırsak;

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X,Y]f$$

$$(\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f = [X,Y]f$$

olur. Bu iki ifadeyi eşitlikte yerlerine yazalım.

$$\begin{aligned}(\nabla^2 f)(X,Y) - (\nabla^2 f)(Y,X) &= [X,Y]f - [X,Y]f \\ &= 0\end{aligned}$$

olup,

$$(\nabla^2 f)(X,Y) = (\nabla^2 f)(Y,X)$$

$(\nabla^2 f)$ simetriktir.

**Lemma 1.5.5**

Gradyant ve Hessiyen arasında,

$$g(\nabla_X \mathrm{grad} f, Y) = (\nabla^2 f)(X,Y)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

**İspat 1.5.5**

Bu eşitliğin sağlandığını görelim.

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \text{grad} f, Y) &= \nabla_X g(\text{grad} f, Y) - (\nabla_X Y)f \\ &= X(g(\text{grad} f, Y)) - (\nabla_X Y)f \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f \\ &= (\nabla^2 f)(X, Y) \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

**Tanım 1.5.6**

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \Im_0^1(M) & \to & \Im_1^1(M) \\ & X & \mapsto & \nabla X \end{array}$$

dönüşümü, $V \in \chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{array}{rccc} \nabla X : & \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & V & \mapsto & (\nabla X)(V) = \nabla_V X \end{array}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda, $\nabla X$, $(1,1)-$tipinde bir tensör alanıdır.

**Tanım 1.5.7**

$(M, g)$, Riemann manifoldu ve $A$, $(1,1)-$tipinde tensör alanı olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatı olmak üzere, aldığımız $A$ tensör alanının izi,

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} g(Ae_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A$, $(1,1)-$tipinde tensör alanı yerine yine $(1,1)-$tipinde tensör alanı olan $\nabla X$ için iz,

$$\begin{aligned} tr(\nabla X) &= \sum_{i=1}^{n} g((\nabla X)(e_i), e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} X, e_i) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 1.5.8**

$(M, g)$, Riemann manifoldu olsun. $A$, $(0,2)-$tipinde tensör alanı ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatı olsun. Aldığımız $A$ tensör alanı için iz,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A(e_i, e_i)$$

şeklindedir.

$A$, $(0,2)-$tipindeki tensör alanına, her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$A(X,Y) = g(A^{\#}X, Y)$$

eşitliği ile $(1,1)-$tipinde olan $A^{\#}$ tensör alanı karşılık gelir ve bunların izleri, eşit olur. Yani,

$$tr_g(A) := tr_g(A^{\#})$$

dir. O hâlde,

$$tr_g(A^{\#}) = \sum_{i=1}^{n} g(A^{\#}e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} A(e_i, e_i)$$

olur.

**Tanım 1.5.9 (Diverjans)**

$(M, g)$, Riemann manifoldu ve $X \in \chi(M)$ olsun. Aldığımız bu vektör alanının diverjansı, div$X$ şeklinde gösterilen bir fonksiyondur. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal bir çatı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \text{div}X &= tr(\nabla X) \\ \text{div}X &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} X, e_i). \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Bakınız; [1], [5], [6]).

**Tanım 1.5.10 (Laplasyen)**

$f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun laplasyeni denilen ve $\triangle f$ şeklinde gösterilen Laplasyen dönüşümü, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatısı yardımıyla,

$$\begin{aligned}\triangle f &= tr(\nabla^2 f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Bakınız; [1], [5], [6]).

**Not 1.5.11**

Yukarıda, $(1,1)$ ve $(0,2)-$tipinden tensör alanlarının izlerini tanımladık. İz dönüşümü, aslında adına kontraksiyon denilen daha genel bir operatörün özel hâlidir. Bu iz tanımı yardımı ile $(1,s)-$tipindeki tensör alanlarının kontraksiyonunu tanımlayabiliriz.

**Tanım 1.5.12**

**i)** $A$, $(1,1)-$tipinden tensör alanı olsun. $p \in M$ için,

$$A_p : T_pM \to T_pM$$

fonksiyonu şeklinde tanımlansın. $A$ tensör alanının kontraksiyonu, $\mathbf{C}A$ ile gösterilir. Her $p \in M$ için, $T_pM = Span\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal taban olsun. O hâlde, $A$ tensör alanının kontraksiyonu,

$$\mathbf{C}A \mid_p = tr(A_p) = \sum_i g(A_p e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır (Bakınız; [5]).

**ii)** $A$, $(1,s)-$tipinden tensör alanı olsun. Her $p \in M$ için,

$T_pM = Span\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal taban olsun. Her $i \in \{1, 2, ..., s\}$ ve sabit vektörler $X_j$ iken $j \neq i$ olmak üzere,

$$A(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, -, X_{i+1}, ..., X_s)$$

$(1,1)-$tensör alanıdır. $\mathbf{C}_i A$ ile gösterilen kontraksiyon,

$$\mathbf{C}_i A(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_s) = \sum_{j=1}^{n} g(A(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, e_j, X_{i+1}, ..., X_s), e_j)$$

olup, $\mathbf{C}_i A$, $(0, s-1)-$tipinden tensör alanıdır.

**iii**) $Y$ vektör alanının diverjansının kontraksiyonla ifadesi,

$$\text{div}Y = tr(\nabla Y) = \mathbf{C}(\nabla Y) = \sum_i g(\nabla_{e_i} Y, e_i)$$

şeklindedir.

**iv**) $A$, $(0,2)-$tipinden simetrik tensör alanının diverjansı,

$$(\text{div}A)(X) = \sum_i (\nabla_{e_i} A)(X, e_i)$$

olur (Bakınız; [5]).

# 2 EĞRİLİKLER

Bu bölümde, kullanılacak bazı eğriliklerin tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

## 2.1 Riemann Eğrilik Tensörü

**Lemma 2.1.1**

$(M, g)$, Riemann manifoldu ve $M$ manifoldu üzerinde, $\nabla$, Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$\begin{aligned} R: \ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \ &\longrightarrow \ \chi(M) \\ (X, Y, Z) \ &\mapsto \ R(X, Y, Z) \end{aligned}$$

fonksiyonu,

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlıdır. $R$ fonksiyonu, $(1, 3)-$tipinde tensör alanı olup, $R$ fonksiyonuna, Riemann eğrilik tensörü denir (Bakınız; [2], [6]).

**Lemma 2.1.2**

Keyfi $X, Y, Z, V \in \chi(M)$ için, $R$ eğrilik tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

**1)** $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;

**2)** $g(R(X, Y)Z, V) = -g(R(X, Y)V, Z)$;

**3)** $g(R(X, Y)Z, V) = g(R(Z, V)X, Y)$;

**4)** $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (1. Bianchi Eşitliği);

**5)** $(\nabla_X R)(Y, Z)V + (\nabla_Y R)(Z, X)V + (\nabla_Z R)(X, Y)V = 0$ (2. Bianchi Eşitliği) (Bakınız; [2], [6]).

**İspat 2.1.2**

**1)** $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ olduğunu gösterelim. Bunun için önce, $R(X, Y)Z$ ifadesinin eşitini yazarak başlayalım.

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

olduğunu biliyoruz. Burada, ilk iki terimin yerini değiştirelim:

$$R(X,Y)Z = -\nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Şimdi hepsini eksi parantezine alalım:

$$R(X,Y)Z = -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z)$$

Lie braketinin özelliğinden; $\nabla_{[X,Y]} Z = -\nabla_{[Y,X]} Z$ şeklinde yazarız. Bu ifadeyi eşitlikte yerine yazalım:

$$R(X,Y)Z = -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z)$$

Parantez içindeki ifadenin, kapalı halini yazarsak,

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

istenilen elde edilir.

**2**. ve **3**. özelliklerin sağlandığı kolaylıkla görülür.

**4)** $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ olduğunu gösterelim:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği kullanarak, $R(Y,Z)X$ ve $R(Z,X)Y$ ifadelerini sırası ile,

$$\begin{aligned} R(Y,Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\ R(Z,X)Z &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \end{aligned}$$

yazarız. Şimdi bu üç terimi taraf tarafa toplayalım:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$+\nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y$$

Bu eşitlikte gerekli paranteze alma işlemi yapalım:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)$$

$$+\nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$-\nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y$$

Burada, parantez içindeki ifadeler için, Torison-Free özelliğini kullanırsak,

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Z = \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X]$$

$$+\nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y$$

elde edilir. Tekrar Torsion-Free özelliğinden,

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Z = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]$$

olur. Burada,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \text{(Jakobi özdeşiliği)}$$

olduğunu biliyoruz. Eşitlikte yerine yazarsak:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Z = 0$$

İstenilen elde edilir.

**5)** $(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0$

olduğunu gösterelim. Burada,

$(\nabla_X R)(Y,Z)V$, $(\nabla_Y R)(Z,X)V$, $(\nabla_Z R)(X,Y)V$

ifadelerinin eşitini yazmak için kovaryant türevin tanımını kullanalım:

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y,Z)V &= \nabla_X(R(Y,Z)V) - R(\nabla_X Y,Z)V - R(Y,\nabla_X Z)V \\ &\quad -R(Y,Z)\nabla_X V\end{aligned}$$

Torsion-Free özelliğinden;

$$\nabla_X(R(Y,Z)V) - R(Y,Z)\nabla_X V = [\nabla_X, R(Y,Z)]V$$

olur. Eşitlikte yerine yazarsak;

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V = [\nabla_X, R(Y,Z)]V - R(\nabla_X Y,Z)V - R(Y,\nabla_X Z)V$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak, $(\nabla_Y R)(Z,X)V$ ve $(\nabla_Z R)(X,Y)V$ terimlerinin eşitini sırası ile yazalım:

$$\begin{aligned}(\nabla_Y R)(Z,X)V &= \nabla_Y(R(Z,X)V) - R(\nabla_Y Z,X)V - R(Z,\nabla_Y X)V \\ &\quad -R(Z,X)\nabla_Y V \\ &= [\nabla_Y, R(Z,X)]V - R(\nabla_Y Z,X)V - R(Z,\nabla_Y X)V\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\nabla_Z R)(X,Y)V &= \nabla_Z(R(X,Y)V) - R(\nabla_Z X,Y)V - R(X,\nabla_Z Y)V \\ &\quad -R(X,Y)\nabla_Z V \\ &= [\nabla_Z, R(X,Y)]V - R(\nabla_Z X,Y)V - R(X,\nabla_Z Y)V\end{aligned}$$

dir. Bulduğumuz üç eşitliği taraf tarafa toplayalım:

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = [\nabla_X, R(Y,Z)]V$$

$$-R(\nabla_X Y,Z)V - R(Y,\nabla_X Z)V + [\nabla_Y, R(Z,X)]V - R(\nabla_Y Z,X)V$$

$$-R(Z,\nabla_Y X)V + [\nabla_Z, R(X,Y)]V - R(\nabla_Z X,Y)V - R(X,\nabla_Z Y)V$$

Şimdi, Lie braketinin ve konneksiyonun özelliklerini kullanarak eşitliği düzenleyelim:

$$\begin{aligned}-R(Y,\nabla_X Z)V - R(\nabla_Z X,Y)V &= R(\nabla_X Z,Y)V - R(\nabla_Z X,Y)V \\ &= R(\nabla_X Z - \nabla_Z X,Y)V \\ &= R([X,Z],Y)V; \quad \text{(Torsion-Free özelliğinden)}\end{aligned}$$

$$-R(Z,\nabla_Y X)V - R(\nabla_X Y,Z)V = R([Y,X],Z)V;$$

$$-R(X,\nabla_Z Y)V - R(\nabla_Y Z,X)V = R([Z,Y],X)V;$$

olarak elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeleri eşitlikte yerine yazalım:

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = [\nabla_X, R(Y,Z)]V$$

$$+[\nabla_Y, R(Z,X)]V + [\nabla_Z, R(X,Y)]V + R([X,Z],Y)V$$

$$+R([Z,Y],X)V + R([Y,X],Z)V$$

Torsion-Free özelliğinden,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = [\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]]V$$

$$+[\nabla_Y, [\nabla_Z, \nabla_X]]V + [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]]V$$

olup, Lie brakatenin Jakobi özdeşliğinden dolayı;

$$[\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]]V + [\nabla_Y, [\nabla_Z, \nabla_X]]V + [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]]V = 0$$

bulunur. O hâlde,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0$$

dır. İstenilen elde edilir.

## 2.2 (0,4)-tipindeki Riemann Eğrilik Tensörü

**Not 2.2.1 (Metrik Yardımıyla Tensör Tipini Değiştirme)**

Yukarıda $(1,3)-$tipindeki $R$ Riemann eğrilik tensöründen, metrik yardımıyla $(0,4)-$tipindeki $Rm$ eğrilik tensörüne geçiş yapmak mümkündür. Bu geçiş, benzer tipteki tüm tensör alanları için de yapılabilir. Yani burada, $\Im_3^1(M)$ uzayı ile $\Im_4^0(M)$ uzayını eşlemek mümkündür. $T \in \Im_3^1(M)$ ve

$$\begin{array}{rccl} T: & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y,Z) & \mapsto & T(X,Y,Z) \end{array}$$

fonksiyonu verildiğinde,

$$T^{'}(X,Y,Z,V) := g(T(X,Y,Z),V)$$

eşitliği ile,

$$\begin{array}{rccl} T^{'}: & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \to & C^{\infty}(M) \\ & (X,Y,Z,T) & \mapsto & T^{'}(X,Y,Z,T) \end{array}$$

$(0,4)-$tipinde tensör alanı tanımlanır. Bu şekilde verilen,

$$\Im_3^1(M) \longrightarrow \Im_4^0(M)$$

eşlemesi, birebir ve örtendir (Bakınız; [6]).

**Tanım 2.2.2**

$g$ Riemann metriği kullanılarak, $(1,3)-$tipindeki $R$ Riemann eğrilik tensörü, metrik yardımı ile $(0,4)-$tipinde tensör alanına geçiş yapalım. $(0,4)-$tipindeki tensör alanını, $Rm$ ile gösterelim. Bu tensör alanı,

$$\begin{array}{rcl} Rm: & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \to C^{\infty}(M) \\ & (X,Y,Z,V) & \mapsto Rm(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır (Bakınız; [2], [6]).

**Teorem 2.2.3**

Riemann eğrilik tensörü $Rm$; aşağıdaki özellikleri sağlar

**i**) $X, Y, Z, V \in \chi(M)$ için, $Rm$ ilk iki ve son iki terimine göre alternedir.

$$Rm(X, Y, Z, V) = -Rm(Y, X, Z, V)$$

$$Rm(X, Y, Z, V) = -Rm(X, Y, V, Z)$$

**ii**) $X, Y, Z, V \in \chi(M)$ için, $Rm$ ilk iki ve son iki terimine göre simetriktir.

$$Rm(X, Y, Z, V) = Rm(Z, V, X, Y)$$

**iii**) $X, Y, Z, V \in \chi(M)$ için,

$$Rm(X, Y, Z, V) + Rm(Y, Z, X, V) + Rm(Z, X, Y, V) = 0$$

olacak şekilde, 1.Bianchi özelliğini sağlar (Bakınız; [2], [6]).

**Not 2.2.4**

$Rm$, eğrilik tensörünün yukarıda verilen özelliklerini sağlayan $(0, 4)-$tipinde, başka tensör alanları da mevcuttur. Bunlara eğrilik gibi tensörler denir. Bu tip tensör alanlarını, ileride ele alacağız.

## 2.3 Kesitsel Eğrilik

**Tanım 2.3.1**

$(M, g)$, Riemann manifoldu olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} R_1: & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,\ Y,\ Z) & \mapsto & R_1(X, Y, Z) \end{array}$$

şeklinde verilen ve

$$R_1(X, Y, Z) = R_1(X, Y)Z := g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

ile tanımlanan $R_1$ fonksiyonu, $(1, 3)-$tipinde tensör alanıdır. Bu tensör alanına, standart eğrilik tensörü denir (Bakınız; [2]).

**Tanım 2.3.2**

$$\kappa_1(X,Y) :=< R_1(X,Y)Y, X >= g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2;$$

$$\kappa(X,Y) := g(R(X,Y)Y, X).$$

$\sigma \subset T_pM$, $\sigma = Span\{X,Y\}$, $2-$boyutlu alt-uzay olsun. Ayrıca burada verilen $X$ ve $Y$ ortogonaldir.

$$K_\sigma(X,Y) := \frac{\kappa(X,Y)}{\kappa_1(X,Y)}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğine, $\sigma$ düzlemine göre, Riemann manifoldunun kesitsel eğriliği denir. Ayrıca, $K_\sigma$ kesitsel eğriliğini, başka türlü de ifade edebiliriz. Aldığımız $X,Y$ ortonormal ise,

$$K_\sigma(X,Y) = g(R(X,Y)Y, X)$$

olur (Bakınız; [2]).

**Not 2.3.3**

$K_\sigma$ kesitsel eğriliğinin, $\sigma \subset T_pM$ düzleminin seçiminden bağımsız, sadece $p$ noktasının seçimine bağlı olması durumunda,

$$K : M \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu mevcuttur ve bu fonksiyon,

$$R = K \cdot R_1$$

eşitliğini sağlar (Bakınız; [2]).

**Tanım 2.3.4**

$K_\sigma$ kesitsel eğriliği, sabit ise ya da $R = K \cdot R_1$ olacak şekilde $K \in \mathbb{R}$ sabiti varsa, manifold *sabit eğrilikli uzay* olarak adlandırılır (Bakınız; [2]).

## 2.4 Ricci Tensörü ve Einstein Tensörü

**Tanım 2.4.1**

Burada, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal ortonormal çatı olsun. $(1,3)-$tipindeki $R$, Riemann eğrilik tensörünün ilk kontraksiyonu,

$$\begin{aligned}(\mathbf{C}_1 R)(Y,Z) &= tr(X \mapsto R(X,Y)Z) \\ &= \sum_i g(R(e_i,Y)Z, e_i)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{C}_1 R$ kontraksiyonu, $(0,2)-$tipinde bir tensör alanı olup Ricci tensörü olarak adlandırılır ve

$$Ric = \mathbf{C}_1 R$$

olarak gösterilir.

O hâlde, $Ric$ eğriliği, $(1,3)-$tipindeki $R$, Riemann eğrilik tensörünün izi demektir.

$$Ric : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$$

tensörü, $R$, Riemann eğriliğinin simetri özelliklerinden dolayı,

$$\begin{aligned}Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(X,e_i)e_i, Y)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Verilen eşitlikten de anlaşılacağı üzere, Ricci tensörü, $Ric$ simetriktir. Yani,

$$Ric(Y,Z) = Ric(Z,Y)$$

dir. Burada, $Ric$ tensörüne, $(1,1)-$tipindeki,

$$ric : \chi(M) \to \chi(M)$$

$$ric(v) = \sum_{i=1}^{n} R(v, e_i)e_i$$

tensör alanı karşılık getirilebilir (Bakınız; [2], [6]).

**Lemma 2.4.2**

Her $(1, s)-$tipindeki $A$ tensör alanı için,

$$\mathbf{C}_i : \Im_s^1(M) \to \Im_{s-1}^0(M)$$

fonksiyonu,

$$\mathbf{C}_i(\nabla_X A) = \nabla_X(\mathbf{C}_i A)$$

olarak yazılır (Bakınız; [2]).

**Tanım 2.4.3**

Ricci tensörün izi, skaler eğrilik olarak adlandırılır.

$$scal = S = trRic$$

şeklinde gösterilir ve

$$S = \sum_{i,j} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

olarak tanımlanır (Bakınız; [2], [4], [6]).

**Tanım 2.4.4 (Einstein Manifoldu)**

$(M, g)$, Riemann manifoldu olsun. Eğer Ricci tensörü $Ric$, $g$ metriğinin bir katı ise, yani her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$Ric(X, Y) = \lambda \cdot g(X, Y)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde, $\lambda : M \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu varsa, $g$ metriğine Einstein metrik denir. Bu durumda, $M$ manifolduna, Einstein manifoldu denir. Dikkat edilirse,

$$Ric(X, Y) = \lambda \cdot g(X, Y)$$

eşitliğinin izi alındığında,

$$\begin{aligned} tr(Ric) &= tr(\lambda \cdot g) \\ S &= \lambda \cdot tr(g) \\ &= \lambda n \end{aligned}$$

elde edilir (Bakınız; [1], [2]).

**Lemma 2.4.5**

$(1,3)-$tipindeki $R$, Riemann eğrilik tensörünün kovaryant türevi ile igili aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

**1)** $(\nabla_X R)(Y,Z)V = -(\nabla_X R)(Z,Y)V$;

**2)** $g((\nabla_X R)(Y,Z)V,U) = -g((\nabla_X R)(Y,Z)U,V)$;

**3)** $g((\nabla_X R)(Y,Z)V,U) = g((\nabla_X R)(V,U)Y,Z)$.

Dahası $\forall X$ için,

$$tr(\nabla_X Ric) = 2 \cdot \mathrm{div}(Ric)(X)$$

eşitliği vardır.

**İspat 2.4.5**

Burada,

$$tr(\nabla_X Ric) = 2 \cdot \mathrm{div}(Ric)(X)$$

eşitliğinin sağlandığını görelim. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatı olsun.

$$Ric = \mathbf{C}_1 R$$

olduğunu biliyoruz. Burada, her iki tarafın $X$ yönünde kovaryant türevi alınırsa;

$$\nabla_X Ric = \nabla_X(\mathbf{C}_1 R)$$

olur. Şimdi her iki tarafın izini alalım:

$$tr(\nabla_X Ric) = tr(\nabla_X(\mathbf{C}_1 R))$$

Burada,

$$\mathbf{C}_1(\nabla_X R) = \nabla_X(\mathbf{C}_1 R)$$

olduğunu biliyoruz. Eşitlikte yerine yazalım:

$$tr(\nabla_X Ric) = tr(\mathbf{C}_1(\nabla_X R))$$

$\mathbf{C}_1(\nabla_X R)$ ifadesi için, Ricci tensörünün tanımındaki eşitlik kullanılırsa,

$$tr(\nabla_X Ric) = \sum_{i,j} g((\nabla_X R)(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

elde edilir. Burada, eğrilik tensörünün özelliği olan 2. Bianchi Özdeşiliğini kullanalım:

$$(\nabla_X R)(e_i, e_j)e_j + (\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_j + (\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_j = 0$$

İkinci ve üçüncü terimi, eşitliğin sağ tarafına atalım:

$$(\nabla_X R)(e_i, e_j)e_j = -(\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_j - (\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_j$$

Bu ifadeyi, $tr(\nabla_X Ric)$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} tr(\nabla_X Ric) &= \sum_{i,j} g(-(\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_j - (\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_j, e_i) \\ &= \sum_{i,j} g(-(\nabla_{e_i} R)(e_j, X)e_j, e_i) + \sum_{i,j} g(-(\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_j, e_i) \end{aligned}$$

Eşitliğin sağındaki ilk terimde yer değiştirme yapalım:

$$tr(\nabla_X Ric) = \sum_{i,j} g((\nabla_{e_i} R)(X, e_j)e_j, e_i) + \sum_{i,j} g(-(\nabla_{e_j} R)(X, e_i)e_j, e_i)$$

İkinci terimde, indis değişikliği yapalım:

$$tr(\nabla_X Ric) = \sum_{i,j} g((\nabla_{e_i} R)(X, e_j)e_j, e_i) + \sum_{i,j} g(-(\nabla_{e_i} R)(X, e_j)e_i, e_j)$$

İkinci terim için yer değiştirme yapalım:

$$\begin{aligned} tr(\nabla_X Ric) &= \sum_{i,j} g((\nabla_{e_i} R)(X, e_j)e_j, e_i) + \sum_{i,j} g((\nabla_{e_i} R)(X, e_j)e_j, e_i) \\ &= 2\sum_{i,j} g((\nabla_{e_i} R)(X, e_j)e_j, e_i) \end{aligned}$$

Buradan kontraksiyona geçelim:

$$\begin{aligned} tr(\nabla_X Ric) &= 2\sum_i \mathbf{C}_1(\nabla_{e_i} R)(X, e_i) \\ &= 2\sum_i \nabla_{e_i}(\mathbf{C}_1 R)(X, e_i) \\ &= 2\sum_i (\nabla_{e_i} Ric)(X, e_i) \end{aligned}$$

Diverjans tanımını kullanalım:

$$tr(\nabla_X Ric) = 2\mathrm{div}(Ric)(X)$$

İstenilen elde edilir.

**Teorem 2.4.6 (Einstein Tensörü)**

$(M, g)$, Riemann manifoldu olsun.

$$G = Ric - \frac{S}{2}g$$

fonksiyonu, $M$ manifoldu üzerinde, $(0, 2)-$tipinde tensör alanıdır. Bu $G$ tensör alanına, Einstein tensörü denir. Keyfi bir Riemann manifoldu için, Einstein tensörünün diverjansı,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(G) &= 0 \\ \mathrm{div}(Ric) &= \mathrm{div}\left(\frac{S}{2}g\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

**İspat 2.4.6**

Lemma 2.4.5 de verilen, $tr(\nabla_X Ric) = 2{\cdot}\mathrm{div}(Ric)(X)$ eşitliğini ele alalım. Burada, $\mathrm{div}(Ric)(X)$ terimini yalnız bırakalım:

$$\mathrm{div}(Ric)(X) = \frac{1}{2}tr(\nabla_X Ric)$$

Burada, $\nabla_X$ dışarı çıkar:

$$\mathrm{div}(Ric)(X) = \frac{1}{2}\nabla_X(tr(Ric))$$

$tr(Ric) = S$ olduğunu biliyoruz. Eşitlikte yerine yazalım:

$$\mathrm{div}(Ric)(X) = \frac{1}{2}\nabla_X(S)$$

Burada, $S$ skaler eğriliğinin tanımını yerine yazalım:

$$\mathrm{div}(Ric)(X) = \frac{1}{2}\sum_i(\nabla_{e_i}S)g(X, e_i)$$

Şimdi, dağıtma işlemini yapalım:

$$\mathrm{div}(Ric)(X) = \frac{1}{2}\sum_i (\nabla_{e_i}(Sg)(X, e_i) - S(\nabla_{e_i} g)(X, e_i))$$

Burada, $S(\nabla_{e_i} g)(X, e_i)$ ifadesindeki $(\nabla_{e_i} g)$ terimi, metrik uyumluluktan dolayı sıfırdır. Eşitlikte yerine yazalım:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(Ric)(X) &= \frac{1}{2}\sum_i (\nabla_{e_i}(Sg)(X, e_i) - 0) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \nabla_{e_i}(Sg)(X, e_i) \end{aligned}$$

Diverjans tanımını kullanalım:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(Ric)(X) &= \frac{1}{2}\mathrm{div}(Sg)(X) \\ &= \mathrm{div}\left(\frac{S}{2} g\right)(X) \end{aligned}$$

Eşitlik her $X$ için sağlandığından, eşitliğin her iki tarafından kaldıralım:

$$\mathrm{div}(Ric) = \mathrm{div}\left(\frac{S}{2} g\right)$$

İstenilen eşitlik elde edilir.

# 3 EĞRİLİK GİBİ TENSÖRLERİN UZAYI

Bu bölümde, Eğrilik gibi tensör alanlarının uzaylarını tanımlayıp bu tanımlara bağlı bazı teoremlerin üzerinde durulmuştur.

## 3.1 Özel Bir Örnek

Vektör uzayının bir dekompozisyonu yani ayrışması, tercihen uygun bir iç çarpıma göre, ortogonal olan alt alanlara doğrudan toplam ayrıştırma yoluyla verilir. Öncelikle $2 \times 2$ tipinden simetrik matrislerin bilinen durumunu ele alalım. Bu durumda, alınan matris, traceless(izsiz) ve trace(iz) parçalarına ayrışır.

**Not 3.1.1**

$2 \times 2$ tipindeki simetrik matrislerin oluşturduğu,

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

uzayını ele alalım. $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ simetrik matrisinin izsiz kısmı, $Z$ olsun. Bu durumda,

$$Z = A - \frac{1}{n} trA \cdot I$$

oluduğu için,

$Z = \begin{pmatrix} \frac{x-z}{2} & y \\ y & \frac{z-x}{2} \end{pmatrix}$ elde edilir. $A$, simetrik matrisinin izi, $U = \begin{pmatrix} \frac{x+z}{2} & 0 \\ 0 & \frac{x+z}{2} \end{pmatrix}$ olarak alınırsa,

$$A = U + Z$$

şeklinde ayrışır. Burada, $U$ vektörü, $\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ uzayına aittir.

$Z$ vektörü, $\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ uzayına aittir.

Üstelik bu ayrışım, tüm kare matrislerin üzerinde tanımlanmış olan,

$$< U, Z >:= tr(U \cdot Z) = 0$$

iz iç çarpımına göre ortogonaldir. Yani, matrisler, birbirine diktir. Bu durumda, $\mathcal{S} = \mathcal{U} + \mathcal{Z}$ olacak şekilde ayrışım söz konusudur.

$(M, g)$, Riemann manifoldundaki, $(0, 2)-$tipinde tensör alanları için de aynı şekilde ayrışım yapılabilir. Örneğin;

$$Ric = \frac{S}{n} g + \left( Ric - \frac{S}{n} g \right)$$

olup, burada izsiz kısım olan,

$$tr \left( Ric - \frac{S}{n} g \right) = 0$$

olur.

## 3.2 $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}m$ Uzayları

**Tanım 3.2.1**

$\mathcal{R} \subset \Im_3^1(M)$ alt-uzayını aşağıdaki gibi tanımlarız.

$\mathcal{R} = \{T \in \Im_3^1(M) \mid T$ tensör alanı, $R$, Riemann eğriliğinin 4 özelliğini sağlar$\}$

Buna göre, $T \in \mathcal{R}$ iken, her $X, Y, Z, V \in \chi(M)$ için,

**1)** $T(X, Y, Z) = -T(Y, X, Z)$

**2)** $g(T(X, Y, Z), V) = -g(T(X, Y, V), Z)$

**3)** $g(T(X, Y, Z), V) = g(T(Z, V, X), Y)$

**4)** $T(X, Y, Z) + T(Y, Z, X) + T(Z, X, Y) = 0$

özelliklerini sağlar. $\mathcal{R} \subset \Im_3^1(M)$ bir alt uzaydır. Özel olarak, $R \in \mathcal{R}$ alınabilir.

Şimdi daha önce de işaret ettiğimiz gibi $M$ manifoldu üzerinde, $(0, 4)-$tipinden eğrilik gibi tensör alanlarının uzayı,

$$\mathcal{R}m = \{T \in \Im_4^0(M) \mid T \text{ tensör alanı, } Rm \text{ eğrilik tensörünün 3 özelliğini sağlar}\}$$

ele alalım. Buna göre, $T \in \mathcal{R}m$ iken, her $X, Y, Z, V \in \chi(M)$ için,

**1)** $T(X, Y, Z, V) = -T(Y, X, Z, V)$

**2)** $T(X, Y, Z, V) = T(Z, V, X, Y)$

**3)** $T(X, Y, Z, V) + T(Y, Z, X, V) + T(Z, X, Y, V) = 0$

özelliklerini sağlar. $\mathcal{R}m \subset \Im_4^0(M)$ bir alt-uzaydır. Özel olarak, $Rm \in \mathcal{R}m$ alabiliriz. Bizim asıl amacımız, $\mathcal{R}m$ eğrilik gibi tensörlerin uzayının ortogonal ayrışımını vermektir. Bunun için, $(0,2)-$tipindeki simetrik tensör alanlarının, özel bir çarpımına ihtiyacımız var.

**Tanım 3.2.2 (Kulkarni-Nomizu Çarpımı)**

$A$ ve $B$, simetrik $(0,2)-$tipinde tensör alanları olsun. Kulkarni-Nomizu çarpımı, $(A \bullet B) \in \mathcal{R}m$ iken,

$$\begin{aligned} (A \bullet B)(X, Y, Z, T) := \;& A(X, Z)B(Y, T) + A(Y, T)B(X, Z) \\ & -A(X, T)B(Y, Z) - A(Y, Z)B(X, T) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada anlaşılacağı üzere, $(A \bullet B)$ çarpımı, $(0,4)-$tipinden tensör alanıdır (Bakınız; [2]).

**Lemma 3.2.3**

Kulkarni-Nomizu çarpımı, her $A, A', B \in \Im_2^0(M)$ ve $\lambda \in C^\infty(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

**1)** $A \bullet B \in \mathcal{R}m$;

**2)** $(A + A') \bullet B = A \bullet B + A' \bullet B$;

**3)** $(\lambda A) \bullet B = \lambda(A \bullet B)$;

**4)** $A \bullet B = B \bullet A$;

**5)** $\nabla_X(A \bullet B) = (\nabla_X A) \bullet B + A \bullet (\nabla_X B)$.

**İspat 3.2.3**

**1)** Her bir bileşene göre, $C^\infty(M)-$lineer olduğunu ve $\mathcal{R}m$'ye ait 3 özelliği sağladığını görmek yeterlidir.

**2.** ve **3.** özelliklerin sağlandığı kolaylıkla görülür.

**4)** $A \bullet B = B \bullet A$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}(A \bullet B)(X,Y,Z,T) &= A(X,Z)B(Y,T) + A(Y,T)B(X,Z) - A(X,T)B(Y,Z) \\ &\quad -A(Y,Z)B(X,T) \\ &= B(X,Z)A(Y,T) + B(Y,T)A(X,Z) - B(X,T)A(Y,Z) \\ &\quad -B(Y,Z)A(X,T)\end{aligned}$$

şeklindeki eşitlikte,

$$(A \bullet B)(X,Y,Z,T) = (B \bullet A)(X,Y,Z,T)$$

olduğu kolayca görülür. Bu eşitlik, her $X,Y,Z,T \in \chi(M)$ için sağlandığından, eşitliğin her iki tarafından kaldırılır. O hâlde,

$$A \bullet B = B \bullet A$$

bulunur.

**5)** $\nabla_X(A \bullet B) = (\nabla_X A) \bullet B + A \bullet (\nabla_X B)$ olduğunu görelim.

$(\nabla_X(A \bullet B))(X,Y,Z,T) = \nabla_X((A \bullet B)(X,Y,Z,T))$

Kovaryant türev tanımını kullanalım:

$$\begin{aligned}&(\nabla_X(A \bullet B))(X,Y,Z,T) = \nabla_X(A(X,Z)B(Y,T) \\ &+A(Y,T)B(X,Z) - A(X,T)B(Y,Z) - A(Y,Z)B(X,T))\end{aligned}$$

Şimdi, $\nabla_X$ kovaryant türevini dağıtalım:

$$\begin{aligned}(\nabla_X(A \bullet B))(X,Y,Z,T) &= \nabla_X(A(X,Z)B(Y,T)) + \nabla_X(A(Y,T)B(X,Z)) \\ &\quad -\nabla_X(A(X,T)B(Y,Z)) - \nabla_X(A(Y,Z)B(X,T)) \\ &= \nabla_X A(X,Z)B(Y,T) + \nabla_X B(Y,T)A(X,Z) \\ &\quad +\nabla_X A(Y,T)B(X,Z) + \nabla_X B(X,Z)A(Y,T) \\ &\quad -\nabla_X A(X,T)B(Y,Z) - \nabla_X B(Y,Z)A(X,T) \\ &\quad -\nabla_X A(Y,Z)B(X,T) - \nabla_X B(X,T)A(Y,Z)\end{aligned}$$

Bu eşitlikte, $A$ tensörü ve $B$ tensörü ile başlayan ifadeleri, bir arada yazalım:

$$\begin{aligned}&(\nabla_X(A \bullet B))(X,Y,Z,T) = \nabla_X A(X,Z)B(Y,T) + \nabla_X A(Y,T)B(X,Z) \\ &-\nabla_X A(X,T)B(Y,Z) - \nabla_X A(Y,Z)B(X,T) + \nabla_X B(Y,T)A(X,Z) \\ &+\nabla_X B(X,Z)A(Y,T) - \nabla_X B(Y,Z)A(X,T) - \nabla_X B(X,T)A(Y,Z)\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafında, açık olarak yazılmış Kulkarni-Nomizu çarpımını, kapalı olarak yazalım:

$$(\nabla_X(A \bullet B))(X,Y,Z,T) = (\nabla_X A) \bullet B(X,Y,Z,T) + A \bullet (\nabla_X B)(X,Y,Z,T)$$

Bu çarpım, her $X, Y, Z, T$ için sağlandığından, eşitliğin her iki tarafından kaldırılır. O hâlde,

$$\nabla_X(A \bullet B) = (\nabla_X A) \bullet B + A \bullet (\nabla_X B)$$

İstenilen elde edilir.

**Not 3.2.4**

Kulkarni çarpımını, $g$ metriğine de uygulayalım:

$$\begin{aligned}g \bullet g(X,Y,Z,T) = &\; g(X,Z)g(Y,T) + g(Y,T)g(X,Z) \\ &-g(X,T)g(Y,Z) - g(Y,Z)g(X,T)\end{aligned}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} g \bullet g(X,Y,Z,T) = \;& 2g(X,Z)g(Y,T) - 2g(X,T)g(Y,Z) \\ & 2(g(X,Z)g(Y,T) - g(X,T)g(Y,Z)) \\ = \;& 2g(Rm_1(X,Y)T,Z) \\ = \;& 2Rm_1(X,Y,Z,T) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, her $X,Y,Z,T \in \chi(M)$ için eşitlik sağlandığından, eşitliğin her iki tarafından kaldırılır. O hâlde, $g \bullet g = 2Rm_1$ eşitliği elde edilir. Burada,

$$\begin{array}{rrcl} Rm_1: & \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ & (X,\ Y,\ Z,\ T) & \mapsto & Rm_1(X,Y,Z,T) \end{array}$$

fonsiyonu,

$$Rm_1(X,Y,Z,T) := g(X,Z)g(Y,T) - g(X,T)g(Y,Z)$$

şeklinde tanımlanır.

**Not 3.2.5 (Tensör Alanlarında İç Çarpım)**

$g$ Riemann metriği, $(r,s)-$tipindeki tensör alanlarına, aşağıdaki gibi genişletilir:

$$\begin{array}{rrcl} g: & \Im_2^0(M)\times\Im_2^0(M) & \rightarrow & C^\infty(M) \\ & (A,\ B) & \mapsto & g(A,B) \end{array}$$

$TM$ tanjant demeti için, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal bir ortonormal taban olsun. $(0,2)-$tipindeki, 2 tane tensör alanının iç çarpımı,

$$g(A,B) = \sum_{i,j} A(e_i,e_j)\cdot B(e_i,e_j)$$

eşitliği ile tanımlanır. Benzer şekilde,

$$\begin{array}{rrcl} g: & \Im_4^0(M)\times\Im_4^0(M) & \rightarrow & C^\infty(M) \\ & (A,\ B) & \mapsto & g(A,B) \end{array}$$

$TM$ tanjant demeti için, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal bir ortonormal taban olsun.

$(0,4)-$tipindeki, 2 tane tensör alanının iç çarpımı,

$$g(A,B)=\sum_{i,j,k,l} A(e_i,e_j,e_k,e_l)\cdot B(e_i,e_j,e_k,e_l)$$

eşitliği ile tanımlanır. Genel durumda,

$$\begin{array}{rcl} g: \ \Im_s^0(M)\times\Im_s^0(M) & \rightarrow & C^\infty(M) \\ (A,\ B) & \mapsto & g(A,B) \end{array}$$

$TM$ tanjant demeti için, $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ lokal bir ortonormal taban olsun. $(0,s)-$tipindeki, 2 tane tensör alanının iç çarpımı,

$$g(A,B)=\sum_{i_1,i_2,...i_s} A(e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_s})\cdot B(e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_s})$$

eşitliği ile tanımlanır. En genel durumda,

$$\begin{array}{rcl} g: \ \Im_s^r(M)\times\Im_s^r(M) & \rightarrow & C^\infty(M) \\ (A,\ B) & \mapsto & g(A,B) \end{array}$$

$TM$ tanjant demeti için, $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ ve $T^*M$ kotanjant demeti için, $\{e_1^*,e_2^*,...,e_n^*\}$ lokal ortonormal tabanlar olsun. $(r,s)-$tipindeki, 2 tane tensör alanının iç çarpımı,

$$\begin{aligned} g(A,B)=\sum_{i_1,i_2,...i_s,j_1,j_2,...,j_r} & A(e_{j_1}^*,e_{j_2}^*,...,e_{j_r}^*,e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_s}) \\ & \cdot B(e_{j_1}^*,e_{j_2}^*,...,e_{j_r}^*,e_{i_1},e_{i_2},...,e_{i_s}) \end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlanır.

**Lemma 3.2.6**

**1)** $\mathcal{Z}m=\{A\bullet g \mid A\in\Im_2^0(M)$ tensör alanı, simetrik ve $trA=0\}$ kümesi, $\mathcal{R}m$ uzayının bir alt-uzayıdır.

**2)** $\mathcal{U}m=<g\bullet g>=Span\{g\bullet g\}$ kümesi, $\mathcal{R}m$ uzayının bir alt-uzayıdır.

Her, $U\in\mathcal{U}m$ için, $U=h\cdot(g\bullet g)$, $h\in C^\infty(M)$ fonksiyonu vardır.

**3)** $\mathcal{R}m$ uzayının $\mathcal{Z}m$ ve $\mathcal{U}m$ alt-uzayları, ortogonaldir. Yani, her $Um\in\mathcal{U}m$ ve $Zm\in\mathcal{Z}m$ için,

$$g(Um,Zm)=0$$

olur.

**İspat 3.2.6**

**3)** $g(Um, Zm) = 0$ eşitliğini gösterelim:

$$g(Um, Zm) = g(g \bullet g, A \bullet g)$$

olarak yazarız. $(0,2)-$tipinden aldığımız $A$ tensör alanı simetrik ve izsizdir. $g$ ise Riemann metriğidir. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatı olsun. $(0,4)-$tipindeki 2 tane tensör alanının iç çarpımından,

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = \sum_{i,j,k,l} (g \bullet g)(e_i, e_j, e_k, e_l) \cdot (A \bullet g)(e_i, e_j, e_k, e_l)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi Kulkarni çarpımından,

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = \sum_{i,j,k,l} ((g(e_i, e_k)g(e_j, e_l) + g(e_j, e_l)g(e_i, e_k)$$

$$-g(e_i, e_l)g(e_j, e_k) - g(e_j, e_k)g(e_i, e_l)) \cdot (A(e_i, e_k)g(e_j, e_l)$$

$$+A(e_j, e_l)g(e_i, e_k) - A(e_i, e_l)g(e_j, e_k) - A(e_j, e_k)g(e_i, e_l))$$

olur. Burada,

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = \sum_{i,j,k,l} ((2g(e_i, e_k)g(e_j, e_l) - 2g(e_i, e_l)g(e_j, e_k))$$

$$\cdot (A(e_i, e_k)g(e_j, e_l) + A(e_j, e_l)g(e_i, e_k)$$

$$- A(e_i, e_l)g(e_j, e_k) - A(e_j, e_k)g(e_i, e_l))$$

olur. Şimdi, ifadeleri sırası ile çarpalım. Hepsinin katsayısı 2 geldiği için, 2 parantezinde yazalım,

$$\begin{aligned} g(g \bullet g, A \bullet g) \;&=\; 2 \sum_{i,j,k,l} (A(e_i, e_k)g(e_i, e_k)g(e_j, e_l)g(e_j, e_l) \\ &+A(e_j, e_l)g(e_i, e_k)g(e_j, e_l)g(e_i, e_k) \\ &-A(e_i, e_l)g(e_i, e_k)g(e_j, e_l)g(e_j, e_k) \\ &-A(e_j, e_k)g(e_i, e_k)g(e_j, e_l)g(e_i, e_l) \\ &-A(e_i, e_k)g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l) \\ &-A(e_j, e_l)g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_i, e_k) \\ &+A(e_i, e_l)g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_k) \\ &-A(e_j, e_k)g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_i, e_l)) \end{aligned}$$

olur. Burada, $A$ tensör alanı için ortak paranteze alma işlemi uygularsak,

$$\begin{aligned} g(g \bullet g, A \bullet g) = 2 \sum_{i,j,k,l} &((A(e_i, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l)\text{-}g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l)) \\ &+ (A(e_j, e_l)(g(e_j, e_l)g^2(e_i, e_k) - g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_i, e_k)) \\ &+ (-A(e_i, e_l)(g(e_i, e_k)g(e_j, e_l)g(e_j, e_k) - g(e_i, e_l)g^2(e_j, e_k)) \\ &+ (-A(e_j, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l) - g^2(e_i, e_l)g(e_j, e_k))) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, $A$ tensör alanı içindeki ortonormal tabanların indisleri değiştirilirse, eşitliğin sağ tarafında bulunan 4 terim de aynı gelir. Yapacağımız bütün indis değişikliğini, eşitliğin sağ tarafında bulunan ilk terim için düzenleyeceğiz. Bütün terimleri, ilk terim haline getirelim:

$$A(e_j, e_l)(g(e_j, e_l)g^2(e_i, e_k) - g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_i, e_k))$$

ifadesi için, $j = i$ ve $l = k$ alalım:

$$A(e_i, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l) - g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l))$$

Benzer şekilde,

$$A(e_i, e_l)(g(e_i, e_k)g(e_j, e_l)g(e_j, e_k) - g(e_i, e_l)g^2(e_j, e_k))$$

ifadesi için, $j = i$ ve $l = k$ alalım:

$$A(e_i, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l) - g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l))$$

Aynı şekilde,

$$A(e_j, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l) - g^2(e_i, e_l)g(e_j, e_k))$$

ifadesi için, $j = i$ ve $l = k$ alalım:

$$A(e_i, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l) - g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l))$$

O hâlde, bulduğumuz bu ifadeleri, $g(g \bullet g, A \bullet g)$ eşitinde yerine yazalım:

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = 2 \sum_{i,j,k,l} 4 \cdot A(e_i, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l)$$

$$-g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l))$$

olup,

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_k)(g(e_i, e_k)g^2(e_j, e_l)$$

$$- g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l)) \text{ ............}(**)$$

elde edilir. Şimdi, $\delta_{ik}$ durumunda $i \neq k$ durumunu kabul edip $(**)$ eşitliğinde yerine yazalım. Bu durumda, $g(e_i, e_k) = 0$ olur.

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_k)(0 - g(e_i, e_l)g(e_j, e_k)g(e_j, e_l))$$

$\delta_{jl}$ durumunda, $j = l$ kabul edip yukarıdaki eşitlikte yerine yazalım:

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_k)(-g(e_i, e_j)g(e_j, e_k)g(e_j, e_j))$$

Burada, $g(e_j, e_j) = 1$ olur.

$$\begin{aligned} g(g \bullet g, A \bullet g) &= 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_k)(-g(e_i, e_j)g(e_j, e_k)) \\ &= 8 \sum_{i,j,k,l} -A(e_i, e_k) \cdot g(e_i, e_j) \cdot g(e_j, e_k) \end{aligned}$$

$A(e_i, e_k)$ teriminin yalnız kalabilmesi için, $i = j$ ve $j = k$ alınması gerek. Bu ise mümkün değildir, çünkü baştaki kabulümüz $i \neq k$ idi. O hâlde, $g(g \bullet g, A \bullet g) = 0$ bulunur.

Diğer traftan, $\delta_{ik}$ durumunda $i = k$ durumunu kabul edip yukarıdaki $(**)$ eşitliğinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} g(g \bullet g, A \bullet g) &= 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_i)(g(e_i, e_i)g^2(e_j, e_l) - g(e_i, e_l)g(e_j, e_i)g(e_j, e_l)) \\ &= 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_i)(g^2(e_j, e_l) - g(e_i, e_l)g(e_j, e_i)g(e_j, e_l)) \end{aligned}$$

Şimdi, $\delta_{jl}$ durumunda, $j = l$ kabul edip eşitlikte yerine yazalım.

$$\begin{aligned} g(g \bullet g, A \bullet g) &= 8 \sum_{i,j,k,l} 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_i)(g^2(e_j, e_j) - g(e_i, e_j)g(e_j, e_i)g(e_j, e_j)) \\ &= 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_i)(1 - g^2(e_i, e_j)) \end{aligned}$$

Burada, $i = j$ durumunda ifade direkt sıfır gelir. $i \neq j$ durumunda, $A(e_i, e_i)$ ifadesi gelir. Diyelim ki, $i \neq j$ olsun. Bu durumda $g(e_i, e_j) = 0$ dır.

$$\begin{aligned} g(g \bullet g, A \bullet g) &= 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_i)(1 - 0) \\ &= 8 \sum_{i,j,k,l} A(e_i, e_i) \\ &= 8 \cdot trA \end{aligned}$$

bulunur. Burada, $A$ simetrik ve izsiz olduğu için,

$$g(g \bullet g, A \bullet g) = 0$$

olup, istenilen eşitlik elde edilir.

**Not 3.2.7**

$\mathcal{Z}m$ ve $\mathcal{U}m$ alt uzaylarının direkt toplamı, $\mathcal{Z}m \oplus \mathcal{U}m \subset \mathcal{R}m$ alt-uzaydır. Bu alt-uzayın dik tümleyeni olan $(\mathcal{Z}m \oplus \mathcal{U}m)^{\perp}$ kümesi de $\mathcal{R}m$ nin bir alt-uzayıdır. Bu alt-uzay, $\mathcal{W}m = (\mathcal{Z}m \oplus \mathcal{U}m)^{\perp}$ şeklide gösterilir.

**Teorem 3.2.8**

$\mathcal{R}m = \mathcal{Z}m + \mathcal{U}m + \mathcal{W}m$ şeklinde dik ayrışıma sahiptir. Bu durumda, keyfi $T \in \mathcal{R}m$ aldığımızda,

$$T = Um + Zm + Wm$$

şeklinde 3 parçaya ayrışır. Özel olarak, $T = Rm$ alırsak,

$$Rm = Um + Zm + Wm$$

ayrışımı elde edilir. (Bu yazılımdaki $Wm$ parçası, $(M, g)$, Riemann manifoldunun Weyl tensörü olarak adlandırılır. Bu parçaya daha sonra değineceğiz.)

Bundan sonraki amacımız, $(0,4)-$tipindeki Riemann eğrilik tensörünün,

$$Rm = Um + Zm + Wm$$

şeklindeki ayrışımında bulunan her bir parçayı tek tek irdelemektir.

**Teorem 3.2.9 ((0,2)-Tipindeki Tensör Alanlarının Ayrışmı)**

$\mathcal{A} = \{A \in \Im_2^0(M) \mid A, \text{simetrik tensör alanı}\}$ kümesi $\Im_2^0(M)$ tensör uzayının bir alt-uzayıdır.

$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} \mid trA = 0\}$ olsun.

$\mathcal{A}' = \{g \in \mathcal{A} \mid \lambda g, \lambda \in C^{\infty}(M)\} = Span\{g\}$ olsun.

**1)** $\mathcal{A}_0$ ve $\mathcal{A}'$ kümeleri $\mathcal{A}$ kümesinin bir alt-uzayıdır.

**2)** $\mathcal{A}_0$ ve $\mathcal{A}'$ alt-uzayları diktir.

**3)** $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}'$ şeklinde dik olarak ayrışır.

**İspat 3.2.9**

**1)** Alt-uzay oldukları açıkça görülür.

**2)** $\mathcal{A}_0$ ve $\mathcal{A}^{'}$ nün dik olması demek, iç çarpımlarının sıfır olması demektir. $A_0 \in \mathcal{A}_0$, $A^{'} \in \mathcal{A}^{'}$ ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatı olsun.

$$g(A_0, A^{'}) = \sum_{i,j} A_0(e_i, e_j) \cdot A^{'}(e_i, e_j)$$

Burada, tanım gereği,

$$A^{'}(e_i, e_j) = \lambda g(e_i, e_j) = \lambda \delta_{ij}$$

şeklindedir. O hâlde, $i = j$ alırsak;

$$\begin{aligned} g(A_0, A^{'}) &= \sum_i A_0(e_i, e_i) \cdot \lambda \\ &= \lambda \sum_i A_0(e_i, e_i) \\ &= \lambda tr(A_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup, $\mathcal{A}_0$ ve $\mathcal{A}^{'}$ parçalarının dik olduğu görülür.

**3)** Keyfi, $T \in \mathcal{A}$, $(0,2)-$tipinde simetrik tensör alanı olsun.

$$T = \left(T - \frac{1}{n} tr(T) g\right) + \frac{1}{n} tr(T) g$$

şeklinde yazılır.

$$T_0 = \left(T - \frac{1}{n} tr(T) g\right) \in \mathcal{A}_0$$

ve

$$T = \frac{1}{n} tr(T) g \in \mathcal{A}^{'}$$

olduğundan dik ayrışımdır. O hâlde,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}^{'}$$

olacak şekilde, $\mathcal{A}$ kümesi birbirine dik olan $\mathcal{A}_0$ ve $\mathcal{A}^{'}$ parçalarının dik toplamı şeklinde yazılır.

**Teorem 3.2.10**

**1)** $\mathcal{A} = \{A \in \Im_2^0(M) \mid A$, simetrik tensör alanı$\}$ kümesi $\Im_2^0(M)$ tensör uzayının bir alt-uzayıdır.

**2)** $\mathcal{A}$ üzerinde,

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{R}m \\ & A & \mapsto & \Psi(A) = A \bullet g \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\Psi$ dönüşümü, lineer dönüşümdür. Üstelik $\Psi(A) \in \mathcal{U}m + \mathcal{Z}m$ şeklindedir.

**3)**

$$\begin{array}{rccl} \Psi^* : & \mathcal{R}m & \to & \mathcal{A} \\ & T & \mapsto & \Psi^*(T) \end{array}$$

dönüşümü, ilgili iç çarpımlara göre $\Psi$ dönüşümünün adjointi olsun. Yani, her $T \in \mathcal{R}m$ ve $A \in \mathcal{A}$ için,

$$g(A, \Psi^*(T))_{\Im_2^0} = g(\Psi(A), T)_{\Im_4^0}$$

eşitliğini sağlayan dönüşüm olsun.

$$C_{Ric}Rm(X, Y) := \sum_i Rm(e_i, X, e_i, Y) \ (= Ric(X, Y))$$

vardır. Burada,

$$\Psi^*(Rm) = 4C_{Ric}Rm$$

dir.

**İspat 3.2.10**

**1.** ve **2.** şıkların ispatı doğrudan elde edilir.

**3)** $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal çatı olsun. $g(\Psi(A), T)$ iç çarpımı,

$$g(\Psi(A), T) = \sum_{i,j,k,l} (A \bullet g)(e_i, e_j, e_k, e_l) \cdot T(e_i, e_j, e_k, e_l)$$

olarak yazılır. Burada, $T = Rm$ alalım:

$$g(\Psi(A), T) = \sum_{i,j,k,l} (A \bullet g)(e_i, e_j, e_k, e_l) \cdot Rm(e_i, e_j, e_k, e_l)$$

Bu eşitlikte, Kulkarni çarpımını kullanarak ifadeyi açalım:

$$g(\Psi(A),T) = \sum_{i,j,k,l} (A(e_i,e_k)g(e_j,e_l) + A(e_j,e_l)g(e_i,e_k)$$

$$-A(e_i,e_l)g(e_j,e_k) - A(e_j,e_k)g(e_i,e_l)) \cdot Rm(e_i,e_j,e_k,e_l)$$

Burada kullandığımız $g$ metriği yerine kronecker delta yazalım:

$$\begin{aligned} g(\Psi(A),T) &= \sum_{i,j,k,l} (A(e_i,e_k)\delta_{jl} + A(e_j,e_l)\delta_{ik} - A(e_i,e_l)\delta_{jk} \\ &\quad -A(e_j,e_k)\delta_{il}) \cdot Rm_{ijkl} \\ &= \sum_{i,j,k,l} (A(e_i,e_k)\delta_{jl}Rm_{ijkl} + A(e_j,e_l)\delta_{ik}Rm_{ijkl} \\ &\quad -A(e_i,e_l)\delta_{jk}Rm_{ijkl} - A(e_j,e_k)\delta_{il}Rm_{ijkl}) \end{aligned}$$

Şimdi, kronecker deltasının tanımını kullanalım ve toplam sembolünü dağıtalım:

$$g(\Psi(A),T) = \sum_{i,j,k} A(e_i,e_k)Rm_{ijkj} + \sum_{i,j,l} A(e_j,e_l)Rm_{ijil}$$

$$-\sum_{i,j,l} A(e_i,e_l)Rm_{ijjl} - \sum_{i,j,k} A(e_j,e_k)Rm_{ijki}$$

Yukarıda tanımı verilen $C_{Ric}Rm$ ifadesinin tanımından,

$$\sum_{i,j,k} A(e_i,e_k)Rm_{ijkj} = \sum_{i,j,k} A(e_i,e_k)Rm_{jijk} = (C_{Ric}Rm)(e_i,e_k)\sum_{i,k} A(e_i,e_k);$$

$$\sum_{i,j,l} A(e_j,e_l)Rm_{ijil} = (C_{Ric}Rm)(e_j,e_l)\sum_{,j,l} A(e_j,e_l);$$

$$-\sum_{i,j,l} A(e_i,e_l)Rm_{ijjl} = \sum_{i,j,l} A(e_i,e_l)Rm_{jijl} = (C_{Ric}Rm)(e_i,e_l)\sum_{i,l} A(e_i,e_l);$$

$$-\sum_{i,j,k} A(e_j,e_k)Rm_{ijki} = \sum_{i,j,k} A(e_j,e_k)Rm_{ijik} = (C_{Ric}Rm)(e_j,e_k)\sum_{j,k} A(e_j,e_k)$$

eşitlikleri elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeleri $g(\Psi(A),Rm)$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} g(\Psi(A),T) &= (C_{Ric}Rm)(e_i,e_k)\sum_{i,k}A(e_i,e_k) \\ &+(C_{Ric}Rm)(e_j,e_l)\sum_{j,l}A(e_j,e_l) \\ &+(C_{Ric}Rm)(e_i,e_l)\sum_{i,l}A(e_i,e_l) \\ &+(C_{Ric}Rm)(e_j,e_k)\sum_{j,k}A(e_j,e_k) \end{aligned}$$

Burada, indisler değiştirilirse, 4 tane aynı ifadeyi elde ederiz. İndis değiştirerek bütün terimleri ilk terim gibi elde ederiz.

$$g(\Psi(A),T) = 4\cdot C_{Ric}Rm(e_i,e_k)\sum_{i,k}A(e_i,e_k)$$

elde edilir. Şimdi ifadeyi biraz düzenlersek,

$$\begin{aligned} g(\Psi(A),T) &= 4\cdot C_{Ric}Rm(e_i,e_k)\sum_{i,k}A(e_i,e_k) \\ &= g(A,4\cdot C_{Ric}Rm) \\ \Psi^*(Rm) &= 4\cdot C_{Ric}Rm \end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$g.(\Psi(A),Rm) = g(A,4\Psi^*(Rm))$$

eşitliği bulunur.

**Teorem 3.2.11**

**1)** $\mathcal{W}m$ terimi, bir önceki teoremde tanımlamış olduğumuz $\Psi^*$ dönüşümünün çekirdeğidir. Dolayısıyla, $Rm$ eğriliğinin $Wm$ parçası için, $C_{Ric}(Wm)=0$ olur.

**2)** $Rm = Um + Zm + Wm$ yazılımındaki $Um+Zm$ parçası için,

$$C = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{2(n-1)}g\right)$$

olmak üzere,

$$Um + Zm = C \bullet g$$

eşitliği geçerlidir. Burada verilen $C$ tensörü, Schouten tensörü olarak adlandırılır.

**İspat 3.2.11**

**1)** $\mathcal{W}m = Ker(\Psi^*)$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{W}m = (\mathcal{U}m + \mathcal{Z}m)^{\perp}$ olduğunu biliyoruz. $(0,4)-$tipindeki keyfi $T \in \mathcal{W}m$ elemanı ve $(0,2)-$tipindeki keyfi, $A \in \mathcal{A}$ elemanı için,

$$g(T, \Psi(A)) = g(T, A \bullet g) = 0 \quad (\Psi(A) \in \mathcal{U}m + \mathcal{Z}m \text{ olduğu için})$$

ve

$$g(\Psi^*(T), A) = g(T, \Psi(A))$$

eşitlikleri vardır. O hâlde,

$$\Psi^*(T) = 0$$

olup $T \in Ker(\Psi^*)$ olur.

**2)** $\mathcal{U}m \oplus \mathcal{Z}m$ uzayına ait her $T$ elemanı için, $T = A \bullet g$ olacak şekilde, $A \in \mathcal{A}$ elemanı vardır. Bu nedenle,

$$Um + Zm = A \bullet g$$

olacak şekilde, $A$ simetrik tensör alanı vardır. Bu ifadeyi, $Rm = Um + Zm + Wm$ ayrışımında yerine yazarsak,

$$Rm = A \bullet g + Wm$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi, birkaç hatırlatmada bulunalım. $\{e_{1,}e_2, ..., e_n\}$ lokal ortonormal çatı olmak üzere;

$$\begin{aligned} X &= \sum_i X_i e_i \\ Y &= \sum_i Y_i e_i \\ g(e_i, Y) &= Y_i \\ g(e_i, X) &= X_i \\ g(X, Y) &= \sum_i X_i Y_i \\ Ric &= C_{Ric} Rm \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi, yukarıda $Ric = C_{Ric}Rm$ eşitliğini, $Rm$ için kullanalım.

$$Rm = A \bullet g + Wm$$

eşitliğinde, her iki tarafını $C_{Ric}$ ile işleme sokalım:

$$C_{Ric}(Rm) = C_{Ric}(A \bullet g + Wm)$$

Burada, $C_{Ric}(Rm) = Ric$ olduğu biliniyor. Eşitlikte yerine yazalım:

$$Ric = C_{Ric}(A \bullet g + Wm)$$

$C_{Ric}$ ifadesini dağıtalım:

$$Ric = C_{Ric}(A \bullet g) + (C_{Ric}Wm)$$

Teoremde ki ilk maddeden dolayı, $C_{Ric}Wm = 0$ olduğu biliniyor. O hâlde,

$$Ric = C_{Ric}(A \bullet g)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $Ric$ ifadesinin tanımını kullanabilmek için, bize $X, Y$ vektör alanları gerekli.

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= C_{Ric}(A \bullet g)(X,Y) \\ &= \sum_i (A \bullet g)(e_i, X, e_i, Y) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte, Kulkarni çarpımının açılımını kullanalım:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) = \sum_i (&A(e_i,e_i)g(X,Y) + A(X,Y)g(e_i,e_i) \\ &- A(e_i,Y)g(X,e_i) - A(X,e_i)g(e_i,Y)) \end{aligned}$$

Toplam sembolünü dağıtalım:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) = &\sum_i (A(e_i,e_i)g(X,Y)) + \sum_i (A(X,Y)g(e_i,e_i)) \\ &- \sum_i (A(e_i,Y)g(X,e_i)) - \sum_i (A(X,e_i)g(e_i,Y)) \end{aligned}$$

Bu eşitlikte,

$$\sum_i g(e_i,e_i) = trg = n$$

ve

$$\sum_i A(e_i, e_i) = trA$$

şeklindedir. Bu iki ifadeyi eşitlikte yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= trA \cdot g(X,Y) + n \cdot A(X,Y) \\ &\quad - \sum_i (A(e_i,Y)g(X,e_i)) - \sum_i (A(X,e_i)g(e_i,Y)) \end{aligned}$$

Alt satırda bulunan terimleri yan yana getirirsek,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= trA \cdot g(X,Y) + n \cdot A(X,Y) \\ &\quad - \sum_i (A(e_i,Y)g(X,e_i) + A(X,e_i)g(e_i,Y)) \\ &= trA \cdot g(X,Y) + n \cdot A(X,Y) - 2A(X,Y) \\ &= trA \cdot g(X,Y) + (n-2)A(X,Y) \end{aligned}$$

olup, bu eşitlik her $X, Y$ için sağlandığından, eşitliğin her iki tarafından kaldıralım:

$$Ric = trA \cdot g + (n-2)A$$

Burada, $A$ tensörünü yalnız bırakalım:

$$A = \frac{1}{n-2}(Ric - trA \cdot g)$$

Her iki tarafın izini alalım:

$$tr(A) = tr\left(\frac{1}{n-2}(Ric - trA \cdot g)\right)$$

İzi dağıtalım:

$$tr(A) = \frac{1}{n-2}(tr(Ric) - tr(A) \cdot tr(g))$$

Burada, $tr(Ric) = S$ ve $tr(g) = n$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, $trA$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$\begin{aligned} tr(A) &= \frac{1}{n-2}(S - tr(A) \cdot n) \\ &= \frac{S}{n-2} - \frac{n \cdot tr(A)}{n-2} \end{aligned}$$

Burada $\dfrac{S}{n-2}$ ifadesini, eşitliğin sağında yalnız bırakalım:

$$
\begin{aligned}
\frac{S}{n-2} &= tr(A) + \frac{n \cdot tr(A)}{n-2} \\
&= \frac{(n-2)tr(A) + ntr(A)}{n-2} \\
&= \frac{2(n-1)tr(A)}{n-2} \\
\frac{S}{2(n-1)} &= tr(A)
\end{aligned}
$$

Bulduğumuz bu eşitliği, $A$ eşitliğinde yerine yazalım.

$$A = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{2(n-1)} \cdot g\right)$$

Burada, $A = C$ olduğu açıkça görülür.

**Teorem 3.2.12**

$(0,4)-$tipindeki $Rm$ eğrilik tensörünün ayrışımındaki bileşenleri, aşağıdaki gibidir.

**i**) $Um = \dfrac{S}{2n(n-1)} g \bullet g;$

**ii**) $Zm = \dfrac{1}{n-2}\left(Ric - \dfrac{S}{n} g\right) \bullet g;$

**iii**) $Wm = Rm - \dfrac{1}{n-2}\left(Ric - \dfrac{S}{2(n-1)} g\right) \bullet g.$

**İspat 3.2.12**

**i**) $Um \in \mathcal{U}m =< g \bullet g >= Span\{g \bullet g\}$ alalım. O hâlde, $Um = f \cdot (g \bullet g)$ olacak şekilde, $f \in C^{\infty}(M)$ fonksiyonu vardır.

$Zm \in \mathcal{Z}m = \{A \bullet g \mid A \in \Im_2^0(M)$ tensör alanı, simetrik ve $trA = 0\}$ alalım. O hâlde, $Zm = h \cdot (A \bullet g)$ olacak şekilde, $h \in C^{\infty}(M)$ fonksiyonu vardır.

$$
\begin{aligned}
Um + Zm &= f \cdot (g \bullet g) + h \cdot (A \bullet g) \\
&= (f \cdot g + h \cdot A) \bullet g \\
&= B \bullet g
\end{aligned}
$$

olup, burada $(0,2)-$tipindeki $B$ tensör alanı yerine, yine $(0,2)-$tipindeki $C$ Shouten tensörünü yazalım:

$$
\begin{aligned}
Um + Zm &= \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{2(n-1)} \cdot g\right) \bullet g \\
&= \frac{1}{n-2} Ric \bullet g - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} g \bullet g
\end{aligned}
$$

Daha önce, $(0,2)-$tipindeki tensör alanlarının ayrışımını vermiştik. Burada bulunan $Ric$, Ricci eğriliği $(0,2)-$tipinde tensör alanıdır. O hâlde,

$$
Ric = Ric_0 + Ric^{'}
$$

olarak ayrışır.

$$
\begin{aligned}
Ric_0 &= Ric - \frac{1}{n} tr(Ric) g \\
Ric^{'} &= \frac{1}{n} tr(Ric) g
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Şimdi bu terimleri, $Ric$ eşitliğinde yerlerine yazalım:

$$
\begin{aligned}
Ric &= \left(Ric - \frac{1}{n} tr(Ric) g\right) + \frac{1}{n} tr(Ric) g \\
&= \left(Ric - \frac{S}{n} g\right) + \frac{S}{n} g
\end{aligned}
$$

Bulduğumuz bu ifadeyi, $Um + Zm$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} Um + Zm &= \frac{1}{n-2} Ric \bullet g - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} g \bullet g \\ &= \frac{1}{n-2}\left(\left(Ric - \frac{S}{n}g\right) + \frac{S}{n}g\right) \bullet g - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} g \bullet g \\ &= \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{n}g\right) \bullet g + \frac{S}{n(n-2)} g \bullet g - \frac{S}{2(n-1)(n-2)} g \bullet g \\ &= \frac{S}{2n(n-1)} g \bullet g + \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{n}g\right) \bullet g \end{aligned}$$

Eşitlikte bulunan ilk terim, $Um$ parçasına; ikinci terim ise $Zm$ parçasına denk gelir.

**ii**) $Zm$ parçasını, $i$ şıkkında elde ettik.

**iii**) $Rm = Um + Zm + Wm$ olduğunu biliyoruz. Burada, $Wm$ ifadesini yalnız bırakalım:

$$Wm = Rm - (Um + Zm)$$

Burada,

$$Um + Zm = C \bullet g$$

olduğu biliniyor. Eşitlikte yerine yazalım:

$$Wm = Rm - C \bullet g$$

O hâlde,

$$Wm = Rm - \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{2(n-1)}g\right) \bullet g$$

eşitliği elde edilir.

## 3.3 Weyl Tensörü ve Konformal İnvaryantlığı

**Tanım 3.3.1**

$Rm$ eğrilik tensörünün ayrışımındaki $Wm$ parçasına, Weyl tensörü denir. Hatta, bazen konformal eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Weyl tensörü, matematikte ve fizikte pek çok uygulaması olan bir tensör alanıdır.

**Teorem 3.3.2**

$n \geq 3$ olmak üzere, her $n-$boyutlu $(M, g)$, Riemann manifoldu için,

**i**) $g$ metriği, sabit eğriliğe sahiptir. $\Leftrightarrow Zm = Wm = 0$

**ii**) $g$ metriği, Einstein metriktir. $\Leftrightarrow Zm = 0$

**iii**) $g$ metriğinin skaler eğriliği, sıfırdır. $\Leftrightarrow Um = 0$

**iv**) $Ric_g = 0 \Leftrightarrow Um = Zm = 0$.

**İspat 3.3.2**

**i**) $(\Rightarrow)$ $(M, g)$, Riemann manifoldu ve $g$ metriği, sabit eğriliğe sahip olsun. Bu durumda, $R = K \cdot R_1$ olacak şekilde, $K \in \mathbb{R}$ sabiti vardır. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R(X, Y, Z) = K \cdot R_1(X, Y, Z)$$

olur. Keyfi $W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} g(R(X, Y, Z), W) &= g(K \cdot R_1(X, Y, Z), W) \\ &= Kg(g(Y, Z)X - g(Z, X)Y, W) \\ &= K(g(Y, Z)g(X, W) - g(Z, X)g(Y, W)) \end{aligned}$$

olur. Burada, Kulkarni-Nomizu çarpımından,

$$\begin{aligned} g(R(X, Y, Z), W) &= -K(g \bullet g) \\ &= -K \cdot 2Rm_1 \\ &= K^{'} Rm_1 \end{aligned}$$

olup, $Zm$ ve $Wm$ parçaları sıfır olarak bulunur. Bu ifadenin tersinin de doğru olduğu oldukça açıktır.

**ii**) $(\Rightarrow)$ $g$ metriği, Einstein metrik olsun. Yani $Ric = \lambda g$ olacak şekilde,

$\lambda : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu mevcut olsun. Buna göre, her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

olur. Ayrıca,

$$Ric \bullet g = \lambda g \bullet g$$

olur. $Rm$ nin ayrışımında bulunan parçaların eşitleri ile yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned} Rm &= Um + Zm + Wm \\ &= \frac{S}{2n(n-1)} g \bullet g + \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{n} g\right) \bullet g + Wm \end{aligned}$$

$Wm$ ifadesini yalnız bırakalım:

$$Wm = Rm - \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{2(n-1)} g\right) \bullet g$$

Burada, $Ric = \lambda g$ ifadesini eşitlikte yerine yazalım:

$$\begin{aligned} Wm &= Rm - \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{2(n-1)} g\right) \bullet g \\ &= Rm - \frac{1}{n-2}\left(\lambda g - \frac{S}{2(n-1)} g\right) \bullet g \\ Rm &= Wm + \frac{1}{n-2}\left(\lambda - \frac{S}{2(n-1)}\right) g \bullet g \end{aligned}$$

Eşitliğin sağındaki ikinci terim, $Um$ parçasına karşılık gelir. Bu eşitlikte, $Zm$ parçası olmadığından, $Zm = 0$ dır.

($\Leftarrow$) $Zm = 0$ olsun.Yani,

$$Zm = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{n} g\right) \bullet g = 0$$

Burada,

$$Ric - \frac{S}{n} g = 0$$

olup,

$$Ric = \frac{S}{n} g$$

olur. O hâlde, $\lambda = \dfrac{S}{n}$ alınırsa,

$$Ric = \lambda g$$

olup, $g$ Einstein metriktir.

**iii**) ($\Rightarrow$) $g$ metriğinin skaler eğriliği, sıfır olsun. Yani, $S = 0$ olsun. $Rm$

ayrışımında yazalım:

$$\begin{aligned} Rm &= \frac{S}{2n(n-1)} g \bullet g + \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{n-2} g\right) \bullet g + Wm \\ &= 0 + \frac{1}{n-2}(Ric - 0) \bullet g + Wm \end{aligned}$$

olup,

$$Rm = \frac{1}{n-2} Ric \bullet g + Wm$$

Burada, $Um = 0$ olduğu kolayca görülür.

($\Leftarrow$) $Um = 0$ olsun. $Um$ parçasının eşiti,

$$Um = \frac{S}{2n(n-1)} g \bullet g = 0$$

olup burada $g \neq 0$ ve $n \neq 0$ olduğundan $S = 0$ olmalıdır. O hâlde, $g$ metriğinin skaler eğriliği, sıfır olarak bulunur.

**iv**) ($\Rightarrow$) $Ric_g = 0$ olsun. $S = tr(Ric)$ olduğu biliniyor. $Ric = 0$ olduğunda, $S = 0$ olmalıdır. $Rm$ ayrışımında yerine yazalım:

$$\begin{aligned} Rm &= \frac{S}{2n(n-1)} g \bullet g + \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{n-2} g\right) \bullet g + Wm \\ &= Wm \end{aligned}$$

olup, $Um = Zm = 0$ olur.

($\Leftarrow$) $Um = 0$ ve $Zm = 0$ olsun.

$$Um = \frac{S}{2n(n-1)} \cdot g \bullet g = 0$$

Bu durumda $S = 0$ olur.

$$Zm = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{S}{n} g\right) \bullet g = 0$$

Burada $n \neq 0$ ve $g \neq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} Ric - \frac{S}{n} g &= 0 \\ &= \frac{S}{n} g \end{aligned}$$

elde edilir. $S = 0$ olduğundan, $Ric = 0$ olur.

**Not 3.3.3**

$\mathcal{R}m = \mathcal{U}m + \mathcal{Z}m + \mathcal{W}m$ ayrışımındaki parçaların her biri,

$$\Im_4^0(M) = \{A : A, M \text{ manifoldu üzerinde } C^\infty, (0,4) - \text{tipinde tensör alanı}\}$$

uzayının sonsuz boyutlu alt-uzayıdır. Hatırlanacağı üzere, $T \in \mathcal{R}m$ tensör alanı,

$$T : M \to I_4^0(M) = \bigsqcup_{x \in M} I_4^0(T_x M)$$

şeklinde, tüm koordinat fonksiyonları $C^\infty$(düzgün) olan bir dönüşümdür. Yani, $M$ manifoldunun her noktasına, $(0,4)-$tipinde tensör yapıştıran bir dönüşüm olup,

$p \in M$ için $T(p) \in I_4^0(T_p M)$ olur. Buna göre, $T \in \mathcal{R}m$ olduğundan,

$$T(p) : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

multi-lineer dönüşümü, Riemann eğrilik tensörünün sağladığı simetri özelliklerine sahiptir. Bu tip multi-lineer dönüşümlerin uzayı, $I_4^0(T_pM)$ tensör uzayının bir alt-uzayıdır. Bu alt-uzayı, $\mathcal{R}m_p$ ile gösterelim. Buna göre $\mathcal{R}m_p \subset I_4^0(T_pM)$ alt-uzayının boyutu, $n^4$ ten küçük olur. Ayrıca noktasal durumda,

$$\mathcal{R}m_p = \mathcal{U}m_p + \mathcal{Z}m_p + \mathcal{W}m_p$$

ayrışımı söz konusudur. Buradaki ayrışım parçalarının boyutları için bir tablo oluşturalım:

| $n$ | $boyut(\mathcal{R}m_p)$ | $boyut(\mathcal{U}m_p)$ | $boyut(\mathcal{Z}m_p)$ | $boyut(\mathcal{W}m_p)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 6 | 1 | 5 | 0 |
| 4 | 20 | 1 | 9 | 10 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ | 1 | $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ | $boyut(\mathcal{R}m_p) - \frac{1}{2}n(n+1) - 2$ |

**Teorem 3.3.4**

$\tilde{g} = g \cdot e^{-2\varphi}$ şeklinde olan konformal denk metrikler için, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

**i)** $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (X\varphi)Y - (Y\varphi)Z + g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi$

**ii)**

$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y + g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X$

$-g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi + (Y\varphi)(Z\varphi)X - (X\varphi)(Z\varphi)Y$

$-g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi) \cdot R_1(X,Y)Z + ((X\varphi)g(Y,Z) - (Y\varphi)g(X,Z)) \cdot \mathrm{grad}\varphi$

**iii)** $\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})$

**iv)**

$g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) - \dfrac{1}{2}g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)(g \bullet g)(X,Y,Z,T)$

$+(\nabla^2\varphi \bullet g)(X,Y,Z,T) + (\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi) \bullet g(X,Y,Z,T)$

eşitlik her $X,Y,Z,T$ için sağlandığından,her iki taraftan kaldırılır ve

$e^{2\varphi}\tilde{R} = R - \dfrac{1}{2}g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)(g \bullet g) + (\nabla^2\varphi \bullet g) + (\nabla\varphi)^2 \bullet g$

şeklinde yazılır.

**İspat 3.3.4**

**i)** $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (X\varphi)Y - (Y\varphi)Z + g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi$

olduğunu gösterelim. $(U,\varphi)$ bir $C^{\infty}(M)$ kart olsun. $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ konformal denk metrikler olsun.

$$\nabla_X f = D_X f = Xf = df(X)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\varphi : \; M \; \to \; \mathbb{R}$$

$$e^{-2\varphi} : \; M \; \to \; \mathbb{R}$$

fonksiyonları ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial_{x_i}}(e^{-2\varphi}) &:= \frac{\partial}{\partial r_i}(e^{-2\varphi} o \psi^{-1}(r_1, r_2, ..., r_n)) \\ &= -2\frac{\partial}{\partial r_i}|_{\psi(p)}(\varphi o \psi^{-1})e^{-2\varphi o \psi^{-1}(\psi(p))} \\ &= -2\frac{\partial}{\partial x_i}e^{-2\varphi(p)} \end{aligned}$$

eşitliği elimizde mevcuttur.

grad$\varphi \in \chi(M)$ ve her $X \in \chi(M)$ için, $g(\text{grad}\varphi, X) = X(\varphi)$ olsun.

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \nabla_X \tilde{g}(Y, Z) + \nabla_Y \tilde{g}(X, Z) - \nabla_Z \tilde{g}(X, Y)$$

$$-\tilde{g}(X, [Y, Z]) - \tilde{g}(Y, [X, Z]) + \tilde{g}(Z, [X, Y])$$

eşitliği elimizde var (Kozsul formülü). Şimdi, $\tilde{g} = e^{-2\varphi} g$ eşitliğini yerine yazalım:

$$2e^{-2\varphi} g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \nabla_X (e^{-2\varphi} g)(Y, Z) + \nabla_Y (e^{-2\varphi} g)(X, Z)$$

$$-\nabla_Z (e^{-2\varphi} g)(X, Y) - (e^{-2\varphi} g)(X, [Y, Z])$$

$$-(e^{-2\varphi} g)(Y, [X, Z]) + (e^{-2\varphi} g)(Z, [X, Y])$$

Burada, metrik ve katsayısını dağıtalım:

$$2e^{-2\varphi} g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = (\nabla_X e^{-2\varphi}) g(Y, Z) + e^{-2\varphi} \nabla_X g(Y, Z)$$

$$+(\nabla_Y e^{-2\varphi}) g(X, Z) + e^{-2\varphi} \nabla_Y g(X, Z) - (\nabla_Z e^{-2\varphi}) g(X, Y) - e^{-2\varphi} \nabla_Z g(X, Y)$$

$$-e^{-2\varphi} g(X, [Y, Z]) - e^{-2\varphi} g(Y, [X, Z]) + e^{-2\varphi} g(Z, [X, Y])$$

Eşitliğindeki bazı terimlerin karşılığını yazalım:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X e^{-2\varphi}) g(Y, Z) &= -2e^{-2\varphi} \nabla_X \varphi g(Y, Z) \\
(\nabla_Y e^{-2\varphi}) g(X, Z) &= -2e^{-2\varphi} \nabla_Y \varphi g(Y, Z) \\
(\nabla_Z e^{-2\varphi}) g(X, Y) &= -2e^{-2\varphi} \nabla_Z \varphi g(Y, Z)
\end{aligned}$$

Eşitlikte yerlerine yazalım:

$$2e^{-2\varphi} g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = -2e^{-2\varphi} \nabla_X \varphi g(Y, Z) + e^{-2\varphi} \nabla_X (g(Y, Z))$$

$$-2e^{-2\varphi} \nabla_Y \varphi g(X, Z) + e^{-2\varphi} \nabla_Y (g(X, Z)) + 2e^{-2\varphi} \nabla_Z \varphi g(X, Y)$$

$$-e^{-2\varphi} \nabla_Z (g(X, Y)) - e^{-2\varphi} g(X, [Y, Z]) - e^{-2\varphi} g(Y, [X, Z]) + e^{-2\varphi} g(Z, [X, Y])$$

Her iki tarafta ortak olan $e^{-2\varphi}$ katsayısını, sadeleştirelim:

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = -2\nabla_X\varphi g(Y,Z) + \nabla_X(g(Y,Z)) - 2\nabla_Y\varphi g(X,Z) + \nabla_Y(g(X,Z))$$

$$+2\nabla_Z\varphi g(X,Y) - \nabla_Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y])$$

Burada,

$$\begin{aligned}\nabla_X\varphi &= X(\varphi);\\ \nabla_Y\varphi &= Y(\varphi);\\ \nabla_Z\varphi &= Z(\varphi),\end{aligned}$$

olarak alalım. Eşitlikte yerlerine yazalım:

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = -2X(\varphi)g(Y,Z) + \nabla_X(g(Y,Z)) - 2Y(\varphi)g(X,Z) + \nabla_Y(g(X,Z))$$

$$+2Z(\varphi)g(X,Y) - \nabla_Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y])$$

Şimdi, eşitlikteki bazı terimlerin karşılığını yazalım:

$$\begin{aligned}[Y,Z] &= \nabla_Y Z - \nabla_Z Y;\\ [X,Z] &= \nabla_X Z - \nabla_Z X;\\ [X,Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X;\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\nabla_X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z);\\ \nabla_Y(g(X,Z)) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z);\\ -\nabla_Z(g(X,Y)) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)\end{aligned}$$

Eşitlikte yerlerine yazalım:

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = -2X(\varphi)g(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$-2Y(\varphi)g(X,Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) + 2Z(\varphi)g(X,Y)$$

$$-g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) - g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y)$$

$$-g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + g(Z, \nabla_X Y - \nabla_Y X)$$

Son iki satırdaki metrik içindeki ifadeleri dağıtalım:

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = -2X(\varphi)g(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$-2Y(\varphi)g(X, Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) + 2Z(\varphi)g(X, Y)$$

$$-g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) - g(X, \nabla_Y Z) + g(X, \nabla_Z Y)$$

$$-g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, \nabla_Y X)$$

Burada, birbirini götüren terimler mevcuttur. Bunlar,

$$g(\nabla_X Y, Z), g(\nabla_X Z, Y), g(\nabla_Y X, Z), g(\nabla_Z X, Y), g(\nabla_Z Y, X)$$

terimleridir. Bir de aynı olan iki terim mevcuttur. Bu, $g(Z, \nabla_X Y)$ terimidir. Bunlar göz önüne alınarak eşitlikte yerlerine yazalım:

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = -2g(X(\varphi)Y, Z) - 2g(Y(\varphi)X, Z))$$

$$+2g(\nabla_X Y, Z) + 2\nabla_Z \varphi g(X, Y)$$

Eşitliğin sağ tarafında bulunan eksi işaretlerini metrik içine atalım:

$$2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = 2g(-X(\varphi)Y, Z) + 2g(-Y(\varphi)X, Z)$$

$$+2g(\nabla_X Y, Z) + 2\nabla_Z \varphi g(X, Y)$$

Her iki tarafta bulunan, 2 katsayısını sadeleştirelim:

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(-X(\varphi)Y, Z) + g(-Y(\varphi)X, Z)$$

$$+g(\nabla_X Y, Z) + \nabla_Z \varphi g(X, Y)$$

İlk üç terimde ortak olan $Z$ parantezine alalım:

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(-X(\varphi)Y - Y(\varphi)X + \nabla_X Y, Z) + \nabla_Z \varphi g(X, Y)$$

Burada,

$$\nabla_Z \varphi = d\varphi(Z) = g(Z, \nabla\varphi) = g(Z, \mathrm{grad}\varphi)$$

olan ifadesini, eşitlikte yerine yazalım:

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= g(-X(\varphi)Y - Y(\varphi)X + \nabla_X Y, Z) + g(Z, \mathrm{grad}\varphi)g(X,Y) \\ &= g(-X(\varphi)Y - Y(\varphi)X + \nabla_X Y, Z) + g(g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi, Z) \\ &= g(-X(\varphi)Y - Y(\varphi)X + \nabla_X Y + g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik, her $Z$ için sağlanacağından, eşitliğin her iki tarafından kaldırırsak,

$$\tilde{\nabla}_X Y = -X(\varphi)Y - Y(\varphi)X + \nabla_X Y + g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi$$

istenilen eşitlik elde edilir.

**ii**)

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y + g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X$$

$$-g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi + (Y\varphi)(Z\varphi)X - (X\varphi)(Z\varphi)Y$$

$$-g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi) \cdot R_1(X,Y)Z + ((X\varphi)g(Y,Z) - (Y\varphi)g(X,Z)) \cdot \mathrm{grad}\varphi$$

olduğunu gösterelim. Öncelikle, $R$ eğrilik tensörünün eşitini biliyoruz. Bu eşitlik yardımı ile $\tilde{R}$ ifadesinin eşitini yazalım:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

Öncelikle, $\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z$ teriminin eşitini bulalım. Bunun için, $\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y Z)$ olarak düşüp, $\tilde{\nabla}_Y Z$ teriminin eşitini bulmak için, teoremin $(i)$ şıkkından yararlanacağız.

$$\tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z - Y(\varphi)Z - Z(\varphi)Y + g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi$$

Burada, $\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z$ terimindeki $\tilde{\nabla}_Y Z$ ifadesine, $P$ diyelim.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y Z) &= \tilde{\nabla}_X(P) \\ \tilde{\nabla}_X(P) &= \nabla_X P - (X\varphi)P - (P\varphi)X + g(X,P)\mathrm{grad}\varphi \end{aligned}$$

Şimdi, $P$ diye adlandırdığımız terimi yerine yazalım.

$$\tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y Z) = \nabla_X(\tilde{\nabla}_Y Z) - (X\varphi)(\tilde{\nabla}_Y Z) - ((\tilde{\nabla}_Y Z)\varphi)X + g(X, \tilde{\nabla}_Y Z)\mathrm{grad}\varphi$$

Bulduğumuz eşitlikteki terimleri teker teker açalım. İlk olarak, $\nabla_X(\tilde{\nabla}_Y Z)$ teriminden başlayalım. Bu terimi açık olarak yazabilmek için, teoremin $(i)$ şıkkını kullanacağız.

$$\nabla_X(\tilde{\nabla}_Y Z) = \nabla_X(\nabla_Y Z - (Y\varphi)Z - (Z\varphi)Y + g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)$$

Şimdi, $\nabla_X$ ifadesini dağıtalım:

$$\nabla_X(\tilde{\nabla}_Y Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X((Y\varphi)Z) - \nabla_X((Z\varphi)Y) + \nabla_X(g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)$$

Buradaki bazı terimlerin açılımını yazalım:

$$\begin{aligned}
\nabla_X((Y\varphi)Z) &= X(Y\varphi)Z + (Y\varphi)\nabla_X Z;\\
\nabla_X((Z\varphi)Y) &= X(Z\varphi)Y + (Z\varphi)\nabla_X Y;\\
\nabla_X(g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi) &= g(\nabla_X Y, Z)\mathrm{grad}\varphi\\
&\quad + g(Y,\nabla_X Z)\mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi
\end{aligned}$$

Bu ifadeleri, $\nabla_X(\tilde{\nabla}_Y Z)$ eşitliğinde yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\tilde{\nabla}_Y Z) &= \nabla_X\nabla_Y Z - X(Y\varphi)Z - (Y\varphi)\nabla_X Z - X(Z\varphi)Y\\
&\quad -(Z\varphi)\nabla_X Y + g(\nabla_X Y, Z)\mathrm{grad}\varphi + g(Y,\nabla_X Z)\mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi
\end{aligned}$$

Şimdi, ikinci terim olan $(X\varphi)(\tilde{\nabla}_Y Z)$ teriminin açık hâlini yazalım. Terimin önünde eksi işareti olduğundan, kolaylık olsun diye önüne eksi işareti koyarak eşitini bulalım:

$$-(X\varphi)(\tilde{\nabla}_Y Z) = -(X\varphi)(\nabla_Y Z - (Y\varphi)Z - (Z\varphi)Y + g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)$$

Şimdi $(X\varphi)$ terimini dağıtalım:

$$\begin{aligned}
-(X\varphi)(\tilde{\nabla}_Y Z) &= -(X\varphi)(\nabla_Y Z) + (X\varphi)((Y\varphi)Z)\\
&\quad +(X\varphi)((Z\varphi)Y) - (X\varphi)(g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi))
\end{aligned}$$

Şimdi eşitliği biraz daha düzenleyelim:

$$\begin{aligned}
-(X\varphi)(\tilde{\nabla}_Y Z) &= -(X\varphi)\nabla_Y Z + (X\varphi)(Y\varphi)Z\\
&\quad +(X\varphi)(Z\varphi)Y - (X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)
\end{aligned}$$

Şimdi, üçüncü terim olan $((\tilde{\nabla}_Y Z)\varphi)X$ teriminin eşitini bulalım. Burada, terimin önünde eksi işareti olduğundan kolaylık olsun diye önüne eksi işareti koyarak eşitini bulalım:

$$-((\tilde{\nabla}_Y Z)\varphi)X = -((\nabla_Y Z - Y(\varphi)Z - Z(\varphi)Y + g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)\varphi)X$$

Şimdi, eksiyi ve $X$ terimini dağıtalım:

$$-((\tilde{\nabla}_Y Z)\varphi)X = -((\nabla_Y Z)\varphi)X + ((Y(\varphi)Z)\varphi)X$$

$$+((Z(\varphi)Y)\varphi)X - ((g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)\varphi)X$$

Eşitliği biraz daha düzenleyip yazalım:

$$-((\tilde{\nabla}_Y Z)\varphi)X = -(\nabla_Y Z)(\varphi)X + (Y\varphi)(Z\varphi)X$$

$$+(Z\varphi)(Y\varphi)X - (g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)X$$

Son terim olan, $g(X,\tilde{\nabla}_Y Z)\mathrm{grad}\varphi$ teriminin eşitini bulalım:

$$g(X,\tilde{\nabla}_Y Z)\mathrm{grad}\varphi = g(X,\nabla_Y Z - Y(\varphi)Z - Z(\varphi)Y + g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

Şimdi $\mathrm{grad}\varphi$ terimini dağıtalım:

$$g(X,\tilde{\nabla}_Y Z)\mathrm{grad}\varphi = g(X,\nabla_Y Z)\mathrm{grad}\varphi - g(X,Y(\varphi)Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-g(X,Z(\varphi)Y)\mathrm{grad}\varphi + g(X,g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

Eşitiliği biraz daha düzenleyip yazalım:

$$g(X,\tilde{\nabla}_Y Z)\mathrm{grad}\varphi = g(X,\nabla_Y Z)\mathrm{grad}\varphi - Y(\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-Z(\varphi)g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)g(X,\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

Şimdi, bulduğumuz eşitlikleri bir arada yazarak $\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z$ teriminin eşitini yazalım:

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z = \nabla_X\nabla_Y Z - X(Y\varphi)Z - (Y\varphi)\nabla_X Z - X(Z\varphi)Y - (Z\varphi)\nabla_X Y$$

$$+g(\nabla_X Y, Z)\mathrm{grad}\varphi + g(Y, \nabla_X Z)\mathrm{grad}\varphi + g(Y, Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi$$

$$-(X\varphi)\nabla_Y Z + (X\varphi)(Y\varphi)Z + (X\varphi)(Z\varphi)Y - (X\varphi)g(Y, Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-(\nabla_Y Z)(\varphi)X + (Y\varphi)(Z\varphi)X + (Z\varphi)(Y\varphi)X - (g(Y, Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)X$$

$$+g(X, \nabla_Y Z)\mathrm{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X, Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-(Z\varphi)g(X, Y)\mathrm{grad}\varphi + g(Y, Z)g(X, \mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

$\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z$ ifadesinden, $\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z$ ifadesinin eşitini yazalım:

$$\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z - Y(X\varphi)Z - (X\varphi)\nabla_Y Z - Y(Z\varphi)X - (Z\varphi)\nabla_Y X$$

$$+g(\nabla_Y X, Z)\mathrm{grad}\varphi + g(X, \nabla_Y Z)\mathrm{grad}\varphi + g(X, Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi$$

$$-(Y\varphi)\nabla_X Z + (Y\varphi)(X\varphi)Z + (Y\varphi)(Z\varphi)X - (Y\varphi)g(X, Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-(\nabla_X Z)(\varphi)Y + (X\varphi)(Z\varphi)Y + (Z\varphi)(X\varphi)Y$$

$$-(g(X, Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)Y + g(Y, \nabla_X Z)\mathrm{grad}\varphi - (X\varphi)g(Y, Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-(Z\varphi)g(Y, X)\mathrm{grad}\varphi + g(X, Z)g(Y, \mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

İspatı tamamlamak için, son olarak $\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$ teriminin eşitini yazmamız gerek. Bunun için teoremin $(i)$ şıkkını kullanalım:

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [X, Y](\varphi)Z - (Z\varphi)[X, Y] + g([X, Y], Z)\mathrm{grad}\varphi$$

eşitliği gelir. Bu eşitlik ile bize gereken bütün ifadeleri yazmış olduk. Şimdi ispatlamamız gereken $\tilde{R}(X, Y)Z$ ifadesinin eşitini yazalım:

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

Bulduğumuz eşitlikleri yerlerine yazalım:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - X(Y\varphi)Z - (Y\varphi)\nabla_X Z - X(Z\varphi)Y$$

$$-(Z\varphi)\nabla_X Y + g(\nabla_X Y, Z)\text{grad}\varphi + g(Y, \nabla_X Z)\text{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X\text{grad}\varphi$$

$$-(X\varphi)\nabla_Y Z + (X\varphi)(Y\varphi)Z + (X\varphi)(Z\varphi)Y - (X\varphi)g(Y,Z)\text{grad}\varphi$$

$$-(\nabla_Y Z)(\varphi)X + (Y\varphi)(Z\varphi)X + (Z\varphi)(Y\varphi)X - (g(Y,Z)\text{grad}\varphi)(\varphi)X$$

$$+g(X, \nabla_Y Z)\text{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X,Z)\text{grad}\varphi - (Z\varphi)g(X,Y)\text{grad}\varphi$$

$$+g(Y,Z)g(X,\text{grad}\varphi)\text{grad}\varphi - \nabla_Y\nabla_X Z + Y(X\varphi)Z + (X\varphi)\nabla_Y Z + Y(Z\varphi)X$$

$$+(Z\varphi)\nabla_Y X - g(\nabla_Y X, Z)\text{grad}\varphi - g(X, \nabla_Y Z)\text{grad}\varphi - g(X,Z)\nabla_Y\text{grad}\varphi$$

$$+(Y\varphi)\nabla_X Z - (Y\varphi)(X\varphi)Z - (Y\varphi)(Z\varphi)X + (Y\varphi)g(X,Z)\text{grad}\varphi +$$

$$(\nabla_X Z)(\varphi)Y - (X\varphi)(Z\varphi)Y - (Z\varphi)(X\varphi)Y + (g(X,Z)\text{grad}\varphi)(\varphi)Y$$

$$-g(Y, \nabla_X Z)\text{grad}\varphi + (X\varphi)g(Y,Z)\text{grad}\varphi + (Z\varphi)g(Y,X)\text{grad}\varphi$$

$$-g(X,Z)g(Y,\text{grad}\varphi)\text{grad}\varphi - \nabla_{[X,Y]}Z + ([X,Y]\varphi)Z$$

$$+(Z\varphi)[X,Y] - g([X,Y],Z)\text{grad}\varphi$$

İfadeyi, biraz düzenleyelim:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - X(Y\varphi)Z + Y(X\varphi)Z$$

$$-(Y\varphi)\nabla_X Z + (X\varphi)\nabla_Y Z - X(Z\varphi)Y + Y(Z\varphi)X - (Z\varphi)\nabla_X Y$$

$$+(Z\varphi)\nabla_Y X + g(\nabla_X Y, Z)\mathrm{grad}\varphi - g(\nabla_Y X, Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$+g(Y, \nabla_X Z)\mathrm{grad}\varphi - g(X, \nabla_Y Z)\mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi$$

$$-g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi - (X\varphi)\nabla_Y Z + (Y\varphi)\nabla_X Z + (X\varphi)(Y\varphi)Z$$

$$-(Y\varphi)(X\varphi)Z + (X\varphi)(Z\varphi)Y - (Y\varphi)(Z\varphi)X$$

$$-(X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi + (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi - (\nabla_Y Z)(\varphi)X$$

$$+(\nabla_X Z)(\varphi)Y + (Y\varphi)(Z\varphi)X - (X\varphi)(Z\varphi)Y + (Z\varphi)(Y\varphi)X$$

$$-(Z\varphi)(X\varphi)Y - (g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)X + (g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)Y$$

$$+g(X, \nabla_Y Z)\mathrm{grad}\varphi - g(Y, \nabla_X Z)\mathrm{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$+(X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi - (Z\varphi)g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi + (Z\varphi)g(Y,X)\mathrm{grad}\varphi$$

$$+g(Y,Z)g(X,\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi - g(X,Z)g(Y,\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-\nabla_{[X,Y]}Z + ([X,Y]\varphi)Z + (Z\varphi)[X,Y] - g([X,Y],Z)\mathrm{grad}\varphi$$

Elde ettiğimiz bu eşitlikte, birbirini götüren terimler mevcuttur. Bunlar,

$$g(Y, \nabla_X Z)\mathrm{grad}\varphi; g(X, \nabla_Y Z)\mathrm{grad}\varphi; (X\varphi)(Y\varphi)Z; (X\varphi)(Z\varphi)Y;$$

$$(Y\varphi)(Z\varphi)X; (X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi; (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi;$$

$$(Z\varphi)g(X,Y)\mathrm{grad}\varphi; (Y\varphi)\nabla_X Z; (X\varphi)\nabla_Y Z$$

terimleridir. Bu ifadeleri eşitlikte yok edelim:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z - X(Y\varphi)Z + Y(X\varphi)Z$$

$$-X(Z\varphi)Y + Y(Z\varphi)X - (Z\varphi)\nabla_X Y + (Z\varphi)\nabla_Y X$$

$$+g(\nabla_X Y, Z)\text{grad}\varphi - g(\nabla_Y X, Z)\text{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X\text{grad}\varphi$$

$$-g(X,Z)\nabla_Y\text{grad}\varphi - (\nabla_Y Z)(\varphi)X + (\nabla_X Z)(\varphi)Y + (Z\varphi)(Y\varphi)X$$

$$-(Z\varphi)(X\varphi)Y - (g(Y,Z)\text{grad}\varphi)(\varphi)X + (g(X,Z)\text{grad}\varphi)(\varphi)Y$$

$$+g(Y,Z)g(X,\text{grad}\varphi)\text{grad}\varphi - g(X,Z)g(Y,\text{grad}\varphi)\text{grad}\varphi$$

$$+([X,Y]\varphi)Z + (Z\varphi)[X,Y] - g([X,Y],Z)\text{grad}\varphi$$

Şimdi, eşitlikte bazı terimlerin eşitini yazalım:

$$-X(Y\varphi)Z + Y(X\varphi)Z = -[Y,X](\varphi)Z = -[X,Y](\varphi)Z$$

Bu eşitlikte bulduğumuz terim ile, $[X,Y](\varphi)Z$ terimi birbirini götürür.

$$\begin{aligned} g([X,Y],Z)\text{grad}\varphi &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)\text{grad}\varphi \\ &= g(\nabla_X Y, Z)\text{grad}\varphi - g(\nabla_Y X, Z)\text{grad}\varphi \end{aligned}$$

olup bu terim ile, $-g(\nabla_X Y, Z)\text{grad}\varphi + g(\nabla_Y X, Z)\text{grad}\varphi$ terimi birbirini götürür.

$$[X,Y](Z\varphi) = (Z\varphi)\nabla_X Y - (Z\varphi)\nabla_Y X$$

olup, bu terim ile, $-(Z\varphi)\nabla_X Y + (Z\varphi)\nabla_Y X$ terimi, birbirini götürürler. O hâlde eşitliğimizin son hâli,

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z - X(Z\varphi)Y + Y(Z\varphi)X$$

$$+g(Y,Z)\nabla_X\text{grad}\varphi - g(X,Z)\nabla_Y\text{grad}\varphi - (\nabla_Y Z)(\varphi)X + (\nabla_X Z)(\varphi)Y$$

$$+(Z\varphi)(Y\varphi)X - (Z\varphi)(X\varphi)Y - (g(Y,Z)\text{grad}\varphi)(\varphi)X$$

$$+(g(X,Z)\text{grad}\varphi)(\varphi)Y + g(Y,Z)g(X,\text{grad}\varphi)\text{grad}\varphi - g(X,Z)g(Y,\text{grad}\varphi)\text{grad}\varphi$$

olarak bulunur. Ayrıca, $g(X,\text{grad}\varphi) = X(\varphi)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği, şu terimler için kullanacağız,

$$\begin{aligned} g(Y,Z)g(X,\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi &= g(Y,Z)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi \\ g(X,Z)g(Y,\mathrm{grad}\varphi)\mathrm{grad}\varphi &= g(X,Z)(Y\varphi)\mathrm{grad}\varphi \end{aligned}$$

Şimdi, bu ifadeleri, $\tilde{R}(X,Y)Z$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} &\tilde{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + g(Y,Z)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi \\ &-X(Z\varphi)Y + Y(Z\varphi)X - g(X,Z)\nabla_Y\mathrm{grad}\varphi - (\nabla_Y Z)(\varphi)X \\ &+(\nabla_X Z)(\varphi)Y + (Z\varphi)(Y\varphi)X - (Z\varphi)(X\varphi)Y - (g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)X \\ &+(g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)Y + g(Y,Z)X(\varphi)\mathrm{grad}\varphi - g(X,Z)Y(\varphi)\mathrm{grad}\varphi \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$R_1(X,Y)Z := g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned} (g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)X + (g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi)(\varphi)Y &= (g(Y,Z)X + g(X,Z)Y)(\mathrm{grad}\varphi)(\varphi) \\ &= g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, bulduğumuz bu ifadeleri, $\tilde{R}(X,Y)Z$ eşitliğinde yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned} &\tilde{R}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z - X(Z\varphi)Y + Y(Z\varphi)X \\ &+g(Y,Z)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi - g(X,Z)\nabla_Y\mathrm{grad}\varphi - (\nabla_Y Z)(\varphi)X + (\nabla_X Z)(\varphi)Y \\ &+(Z\varphi)(Y\varphi)X - (Z\varphi)(X\varphi)Y + (X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi \\ &-(Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi - g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z \end{aligned}$$

Burada, $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ olduğu biliniyor. Eşitlikte yerine yazalım:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi - g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi$$

$$-X(Z\varphi)Y + Y(Z\varphi)X - (\nabla_Y Z)(\varphi)X + (\nabla_X Z)(\varphi)Y + (Z\varphi)(Y\varphi)X$$

$$-(Z\varphi)(X\varphi)Y + (X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z$$

Ayrıca, $X(Z\varphi)Y$, $Y(Z\varphi)X$, $(\nabla_Y Z)(\varphi)X$, $(\nabla_X Z)(\varphi)Y$ terimleri için,

$$\begin{aligned} -X(Z\varphi)Y + (\nabla_X Z)(\varphi)Y &= -g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y \\ Y(Z\varphi)X - (\nabla_Y Z)(\varphi)X &= -g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Bulduğumuz bu ifadeleri, $\tilde{R}(X,Y)Z$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi - g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi$$

$$-g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y - g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X + (Z\varphi)(Y\varphi)X$$

$$-(Z\varphi)(X\varphi)Y + (X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z$$

Bir hatırlatmada bulunalım, $Y(f) = g(\mathrm{grad}f, Y)$ olduğunu biliyoruz. Burada, her iki tarafın $X$ yönündeki türevini alalım:

$$\begin{aligned} X(Yf) &= X(g(\mathrm{grad}f, Y)) \\ &= g(\nabla_X \mathrm{grad}f, Y) + g(\mathrm{grad}f, \nabla_X Y) \qquad \text{(Metrik uyumluluk)} \\ &= g(\nabla_X \mathrm{grad}f, Y) + \nabla_X Y(f) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y &= (X(Z\varphi) - (\nabla_X Z)(\varphi))Y \\ &= X(Z\varphi)Y - (\nabla_X Z)(\varphi)Y \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliği,

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X &= (Y(Z\varphi) - (\nabla_Y Z)(\varphi))X \\ &= Y(Z\varphi)X - (\nabla_Y Z)(\varphi)X \end{aligned}$$

terimi içinde yazarız. Şimdi, bu ifadeleri, $\tilde{R}(X,Y)Z$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi - g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi$$

$$-X(Z\varphi)Y + (\nabla_X Z)(\varphi)Y + Y(Z\varphi)X - (\nabla_Y Z)(\varphi)X + (Z\varphi)(Y\varphi)X$$

$$-(Z\varphi)(X\varphi)Y + (X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z$$

Burada,

$$(X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi = ((X\varphi)g(Y,Z) - (Y\varphi)g(X,Z))\mathrm{grad}\varphi$$

şeklinde yazarız. Bu ifadeyi, $\tilde{R}(X,Y)Z$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + (Z\varphi)(Y\varphi)X - (Z\varphi)(X\varphi)Y$$

$$-g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y + g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X$$

$$-g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi$$

$$((X\varphi)g(Y,Z) - (Y\varphi)g(X,Z))\mathrm{grad}\varphi$$

$$-g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z$$

İstenen elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

**iii)** $\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})$

olduğunu gösterelim. Burada ilk yapacağımız şey, $Ric$ tanımını kullanarak $\widetilde{Ric}$ teriminin eşitini bulmaktır. $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_n\}$, $\tilde{g}$ ye göre ortonormal çatı olsun.

Buna göre, $\widetilde{Ric}$ tensörü;

$$\widetilde{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{g}(\tilde{R}(X,\tilde{e}_i)\tilde{e}_i, Y)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\tilde{g} = e^{-2\varphi} g$ ifadesi, eşitlikte yerine yazalım:

$$\widetilde{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} e^{-2\varphi} g(\tilde{R}(X,\tilde{e}_i)\tilde{e}_i, Y)$$

$e^{-2\varphi}$ katsayısını, toplam sembolünün dışına alalım:

$$\widetilde{Ric}(X,Y) = e^{-2\varphi} \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{R}(X,\tilde{e}_i)\tilde{e}_i, Y)$$

$U$ üzerinde, $e_i = e^{-\varphi}\tilde{e}_i$ şeklindeki vektör alanlarını alalım. Bu durumda, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kümesi, $U$ üzerinde $g$ metriğine göre ortonormal bir çatı olur. Yani,

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} g(e_i, e_j) &= g(e^{-\varphi}\tilde{e}_i, e^{-\varphi}\tilde{e}_j) \\ &= e^{-\varphi} \cdot e^{-\varphi} g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \\ &= e^{-2\varphi} g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \end{aligned}$$

şeklindedir. $g = e^{2\varphi}\tilde{g}$ eşitliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} g(e_i, e_j) &= e^{-2\varphi} \cdot e^{2\varphi} \tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \\ &= \tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

O hâlde, iddia ettiğimiz eşitlik doğrudur. Yani, $\tilde{e}_i = e^{\varphi} e_i$ şeklindedir. Şimdi bulduğumuz bu terimi eşitlikte yerine yazalım:

$$\widetilde{Ric}(X,Y) = e^{-2\varphi} \sum_{i=1}^{n} g(\tilde{R}(X, e^{\varphi} e_i) e^{\varphi} e_i, Y)$$

olur. Burada, $e^{\varphi}$ katsayı oluğu için dışarı çıkaralım:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric}(X,Y) &= e^{-2\varphi}\sum_{i=1}^{n} g(e^{\varphi}e^{\varphi}\tilde{R}(X,e_i)e_i,Y) \\
&= e^{-2\varphi}\sum_{i=1}^{n} g(e^{2\varphi}\tilde{R}(X,e_i)e_i,Y) \\
&= e^{-2\varphi}\sum_{i=1}^{n} e^{2\varphi}g(\tilde{R}(X,e_i)e_i,Y) \\
&= e^{-2\varphi}\cdot e^{2\varphi}\sum_{i=1}^{n} g(\tilde{R}(X,e_i)e_i,Y)
\end{aligned}$$

Burada, $e^{-2\varphi}\cdot e^{2\varphi}=1$ olup,

$$\widetilde{Ric}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(\tilde{R}(X,e_i)e_i,Y)$$

eşitliği elde edilir. Burada, toplam sembolünü, $g$ metriğinin içine yazalım:

$$\widetilde{Ric}(X,Y)=g(\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X,e_i)e_i,Y)$$

Şimdi, bize gerekli olan, $\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X,e_i)e_i$ teriminin eşitidir. Bu terimin eşitini bulabilmek için, teoremin $(ii)$ şıkkında verilen ifadeyi kullanalım. O hâlde, $\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X,e_i)e_i$ teriminin eşiti,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X,e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{n}R(X,e_i)e_i-\sum_{i=1}^{n}g(\nabla_X\mathrm{grad}\varphi,e_i)e_i+\sum_{i=1}^{n}g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi,e_i)X \\
&-\sum_{i=1}^{n}g(X,e_i)\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi+\sum_{i=1}^{n}g(e_i,e_i)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi+\sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)(e_i\varphi)X \\
&-\sum_{i=1}^{n}(X\varphi)(e_i\varphi)e_i-\sum_{i=1}^{n}g(\mathrm{grad}\varphi,\mathrm{grad}\varphi)\cdot R_1(X,e_i)e_i \\
&+\sum_{i=1}^{n}(X\varphi)g(e_i,e_i)\mathrm{grad}\varphi-\sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)g(X,e_i)\mathrm{grad}\varphi
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, bazı terimlerin eşitini aşağıda yazalım:

$$\begin{aligned}
g(e_i,e_i) &= 1; \\
\sum_{i=1}^{n}g(\nabla_X\mathrm{grad}\varphi,e_i)e_i &= \nabla_X\mathrm{grad}\varphi
\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{g(X,e_i)e_i}\mathrm{grad}\varphi \\ &= \nabla_{\sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)e_i}\mathrm{grad}\varphi \\ &= \nabla_X\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} g(e_i,e_i)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi &= \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\nabla_X\mathrm{grad}\varphi \\ &= n\cdot\nabla_X\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)g(X,ei) &= X\varphi; \\ \sum_{i=1}^{n}(X\varphi)(e_i\varphi)e_i &= (X\varphi)\mathrm{grad}\varphi, \\ \sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)e_i &= g(\mathrm{grad}\varphi,e_i)=\mathrm{grad}f \\ \sum_{i=1}^{n}(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi &= n\cdot(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

Şimdi, gösterdiğimiz bu terimleri, $\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X,e_i)e_i$ eşitliğinde yerlerine yazalım:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X,e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}R(X,e_i)e_i - \nabla_X\mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n}g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi,e_i)X$$

$$-\nabla_X\mathrm{grad}\varphi + n\cdot\nabla_X\mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)(e_i\varphi)X - (X\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

$$-||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}R_1(X,e_i)e_i + n\cdot(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi - (X\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

Benzer terimleri bir araya getirerek, eşitliği biraz düzenleyelim:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X,e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}R(X,e_i)e_i + (n-2)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n}g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi,e_i)X$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)(e_i\varphi)X + (n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi - ||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}R_1(X,e_i)e_i$$

elde edilir. Burada, $\sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)(e_i\varphi)X$ teriminin eşitini bulalım:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(e_i\varphi)(e_i\varphi)X &= \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{grad}, e_i)g(\mathrm{grad}, e_i)X \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{grad}, e_i)^2X \\ &= ||\mathrm{grad}\varphi||^2 \cdot X\end{aligned}$$

Bulduğumuz ifadeyi, $\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X, e_i)e_i$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}R(X, e_i)e_i + (n-2)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n}g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X$$
$$+||\mathrm{grad}\varphi||^2 \cdot X + (n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi - ||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}R_1(X, e_i)e_i$$

Burada $R_1(X, e_i)e_i = g(e_i, e_i)X - g(X, e_i)e_i$ tanımını kullanırsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}R(X, e_i)e_i + (n-2)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n}g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X$$
$$+||\mathrm{grad}\varphi||^2 \cdot X + (n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi - ||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}(g(e_i, e_i)X - g(X, e_i)e_i)$$

olur. Son terimde, toplam sembolünü ve katsayısını dağıtalım:

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}R(X, e_i)e_i + (n-2)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n}g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X$$
$$+||\mathrm{grad}\varphi||^2 \cdot X + (n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi - ||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}g(e_i, e_i)X$$
$$+||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}g(X, e_i)e_i$$

Burada, $g(e_i, e_i) = 1$ dir.

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{R}(X, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}R(X, e_i)e_i + (n-2)\nabla_X\mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n}g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X$$
$$+||\mathrm{grad}\varphi||^2 \cdot X + (n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi - ||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}X$$
$$+||\mathrm{grad}\varphi||^2\sum_{i=1}^{n}g(X, e_i)e_i$$

elde edilir. Son terimde, toplam sembolünü kullanarak,

$$\sum_{i=1}^{n} g(X, e_i)e_i = X$$

$$\sum_{i=1}^{n} X = n \cdot X$$

eşitlikleri bulunur. Şimdi, eşitlikte bulduğumuz bu iki ifadeyi yerlerine yazalım:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}(X, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i)e_i + (n-2)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X$$

$$+||\mathrm{grad}\varphi||^2 \cdot X + (n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi - ||\mathrm{grad}\varphi||^2 \cdot n \cdot X + ||\mathrm{grad}\varphi||^2 X$$

Benzer ifadeleri bir araya getirerek ifadeyi toparlayalım:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}(X, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i)e_i + (n-2)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X$$

$$+(n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi + (2-n) \cdot ||\mathrm{grad}\varphi||^2 X$$

Şimdi, $\widetilde{Ric}(X, Y)$ ifadesinde bulduğumuz bu eşitliği, yerine yazalım:

$$\widetilde{Ric}(X, Y) = g(\sum_{i=1}^{n} R(X, e_i)e_i + (n-2)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi$$

$$+\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X + (n-2)(X\varphi)\mathrm{grad}\varphi$$

$$+(2-n) \cdot ||\mathrm{grad}\varphi||^2 X, Y)$$

Burada, $g$ metriğini dağıtalım:

$$\widetilde{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(X, e_i)e_i, Y) + (n-2)g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} g(g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X, Y)$$

$$+(n-2)(X\varphi)g(\mathrm{grad}\varphi, Y) + (2-n) \cdot ||\mathrm{grad}\varphi||^2 g(X, Y)$$

Buradaki bazı terimlerin eşitini yazalım:

$$\sum_{i=1}^{n} g(R(X, e_i)e_i, Y) = Ric(X, Y);$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(g(\nabla_{e_i}\mathrm{grad}\varphi, e_i)X, Y) = (\triangle\varphi)g(X, Y)$$

Bu ifadeleri, $\widetilde{Ric}(X,Y)$ eşitliğinde yerlerine yazalım:

$$\widetilde{Ric}(X,Y) = Ric(X,Y) + (n-2)g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y) + (\triangle\varphi)g(X,Y)$$
$$+(n-2)(X\varphi)g(\mathrm{grad}\varphi, Y) + (2-n)\cdot ||\mathrm{grad}\varphi||^2 g(X,Y)$$

şeklinde bulunur. $\widetilde{Ric}(X,Y)$ eşitliğindeki,

$$(n-2)g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y) + (n-2)(X\varphi)g(\mathrm{grad}\varphi, Y)$$

terimlerini kullanarak, bir eşitlik elde edeceğiz. Burada, $g(\mathrm{grad}\varphi, Y) = Y\varphi$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, bu terimleri $(n-2)$ ortak parantezine alalım:

$$(n-2)g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y) + (n-2)(X\varphi)g(\mathrm{grad}\varphi, Y) = (n-2)(g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y)$$
$$+(X\varphi)(Y\varphi))$$

Burada,

$$g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y) = X(Y\varphi) - (\nabla_X Y)\varphi$$

şeklinde tanımlıdır. Bulduğumuz bu ifadeyi, eşitlikte yerine yazalım:

$$(n-2)g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y) + (n-2)(X\varphi)g(\mathrm{grad}\varphi, Y) = (n-2)(X(Y\varphi)$$
$$-(\nabla_X Y)(\varphi) + (X\varphi)(Y\varphi))$$

Burada,

$$(n-2)(X(Y\varphi) - (\nabla_X Y)(\varphi) + (X\varphi)(Y\varphi)) = (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})(X,Y)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için Hessiyen tanımını kullanacağız.

$$(\nabla^2 f)(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f)$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Bu tanım yardımı ile,

$$\begin{aligned}
\nabla^2(e^\varphi)(X,Y) &= X(Y(e^\varphi)) - \nabla_X Y(e^\varphi) \\
&= X(e^\varphi(Y\varphi)) - \nabla_X Y(e^\varphi) \\
&= e^\varphi X(Y\varphi) + X(e^\varphi)(Y\varphi) - e^\varphi(\nabla_X Y)\varphi \\
&= e^\varphi X(Y\varphi) + e^\varphi(X\varphi)(Y\varphi) - e^\varphi(\nabla_X Y)\varphi \\
&= e^\varphi(X(Y\varphi) + (X\varphi)(Y\varphi) - (\nabla_X Y)\varphi)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada, son satırda $e^\varphi$ parantezine aldığımız ifade,

$$(n-2)g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Y) + (n-2)(X\varphi)g(\mathrm{grad}\varphi, Y)$$

ifadesinin eşitinde bulduğumuz ifadedir.

$$\nabla^2(e^\varphi)(X,Y) = e^\varphi(X(Y\varphi) + (X\varphi)(Y\varphi) - (\nabla_X Y)\varphi)$$

Burada, her tarafı $e^\varphi$ katsayısı ile bölelim:

$$e^{-\varphi}\nabla^2(e^\varphi)(X,Y) = (X(Y\varphi) + (X\varphi)(Y\varphi) - (\nabla_X Y)\varphi)$$

Bu da bizim göstermeye çalıştığımız eşitlik idi. Şimdi $\widetilde{Ric}(X,Y)$ eşitini yazalım:

$$\widetilde{Ric}(X,Y) = Ric(X,Y) + \triangle\varphi g(X,Y)$$

$$+(2-n)||\mathrm{grad}\varphi||^2 g(X,Y) + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^\varphi)(X,Y)$$

Gerekli parantezlere alalım:

$$\widetilde{Ric}(X,Y) = Ric(X,Y) + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g(X,Y)$$

$$+(n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^\varphi)(X,Y)$$

Bu eşitlik, her $X, Y$ için sağlanacağından, her iki taraftan kaldırılır. O hâlde,

$$\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^\varphi)$$

olup, istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

**iv**) $\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z, T)$ ifadesinin eşitini bulacağız. Öncelikle, $\tilde{R}(X,Y)Z$ ifadesinin eşitini yazalım:

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = \tilde{g}(R(X,Y)Z - g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y + g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X$$

$$-g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi + (Y\varphi)(Z\varphi)X - (X\varphi)(Z\varphi)Y$$

$$-g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi) \cdot R_1(X,Y)Z + ((X\varphi)g(Y,Z)$$

$$-(Y\varphi)g(X,Z)) \cdot \mathrm{grad}\varphi, T)$$

Burada, $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ olduğunu biliyoruz. Eşitlikte yerine yazalım:

$$e^{-2\varphi}g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = e^{-2\varphi}g(R(X,Y)Z - e^{-2\varphi}g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y$$

$$+g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X - g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi + g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi$$

$$+(Y\varphi)(Z\varphi)X - (X\varphi)(Z\varphi)Y - g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z$$

$$+(X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi - (Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi, T)$$

Şimdi, $e^{-2\varphi}g$ terimini dağıtalım:

$$e^{-2\varphi}g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = e^{-2\varphi}g(R(X,Y)Z,T) - e^{-2\varphi}g(g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y,T)$$

$$+e^{-2\varphi}g(g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X,T) - e^{-2\varphi}g(g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, T)$$

$$+e^{-2\varphi}g(g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, T) + e^{-2\varphi}g((Y\varphi)(Z\varphi)X,T)$$

$$-e^{-2\varphi}g((X\varphi)(Z\varphi)Y,T) - e^{-2\varphi}g(g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z,T)$$

$$+e^{-2\varphi}g((X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi, T) - e^{-2\varphi}g((Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi, T)$$

$e^{-2\varphi}$ katsayısı, her iki tarafta olduğu için sadeleştirelim:

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) - g(g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, Z)Y,T)$$

$$+g(g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, Z)X,T) - g(g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, T)$$

$$+g(g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, T) + g((Y\varphi)(Z\varphi)X,T)$$

$$-g((X\varphi)(Z\varphi)Y,T) - g(g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z,T)$$

$$+g((X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi, T) - g((Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi, T)$$

Burada,

$$(g \bullet g)(X,Y,Z,T) = 2R_1(X,Y,Z,T)$$

olup, $R_1$ terimini yalnız bırakalım:

$$R_1(X,Y,Z,T) = \frac{1}{2}(g \bullet g)(X,Y,Z,T)$$

Şimdi,

$$g(g(\text{grad}\varphi, \text{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z,T) = g(||\text{grad}\varphi||^2 R_1(X,Y)Z,T)$$

eşitliğinde, $R_1$ teriminin karşılığını yerine yazalım:

$$\begin{aligned} g(g(\text{grad}\varphi, \text{grad}\varphi)R_1(X,Y)Z,T) &= ||\text{grad}\varphi||^2 \left(\frac{1}{2}(g \bullet g)(X,Y,Z,T)\right) \\ &= \frac{1}{2}||\text{grad}\varphi||^2 (g \bullet g)(X,Y,Z,T) \end{aligned}$$

Ayrıca, bir önceki teoremde gösterdiğimiz,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \text{grad}\varphi, Z)Y &= X(Z\varphi)Y - (\nabla_X Z)(\varphi)Y; \\ g(\nabla_Y \text{grad}\varphi, Z)X &= Y(Z\varphi)X - (\nabla_Y Z)(\varphi)X \end{aligned}$$

terimlerin karşılığını eşitlikte yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned} &g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) - g(X(Z\varphi)Y - (\nabla_X Z)(\varphi)Y,T) \\ &+g(Y(Z\varphi)X - (\nabla_Y Z)(\varphi)X,T) - g(g(X,Z)\nabla_Y \text{grad}\varphi, T) \\ &+g(g(Y,Z)\nabla_X \text{grad}\varphi, T) + g((Y\varphi)(Z\varphi)X,T) \\ &-g((X\varphi)(Z\varphi)Y,T) - \frac{1}{2}||\text{grad}\varphi||^2 (g \bullet g)(X,Y,Z,T) \\ &+g((X\varphi)g(Y,Z)\text{grad}\varphi, T) - g((Y\varphi)g(X,Z)\text{grad}\varphi, T) \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned} g(g(X,Z)\nabla_Y \text{grad}\varphi, T) &= g(X,Z)g(\nabla_Y \text{grad}\varphi, T); \\ g(g(Y,Z)\nabla_X \text{grad}\varphi, T) &= g(Y,Z)g(\nabla_X \text{grad}\varphi, T) \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, T) &= Y(T\varphi) - (\nabla_Y T)\varphi; \\ g(\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, T) &= X(T\varphi) - (\nabla_X T)\varphi \end{aligned}$$

şeklindedir. O hâlde,

$$\begin{aligned} g(g(X,Z)\nabla_Y \mathrm{grad}\varphi, T) &= g(X,Z)(Y(T\varphi) - (\nabla_Y T)\varphi); \\ g(g(Y,Z)\nabla_X \mathrm{grad}\varphi, T) &= g(Y,Z)(X(T\varphi) - (\nabla_X T)\varphi) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi bulduğumuz bu ifadeleri, eşitlikte yerlerine yazalım:

$$\begin{aligned} &g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) - g(X(Z\varphi)Y,T) + g((\nabla_X Z)(\varphi)Y,T) \\ &+g(Y(Z\varphi)X,T) - g((\nabla_Y Z)(\varphi)X,T) - g(X,Z)(Y(T\varphi) - (\nabla_Y T)\varphi) \\ &+g(Y,Z)(X(T\varphi) - (\nabla_X T)\varphi) + g((Y\varphi)(Z\varphi)X,T) \\ &-g((X\varphi)(Z\varphi)Y,T) - \frac{1}{2}||\mathrm{grad}\varphi||^2(g \bullet g)(X,Y,Z,T) \\ &+g((X\varphi)g(Y,Z)\mathrm{grad}\varphi,T) - g((Y\varphi)g(X,Z)\mathrm{grad}\varphi,T) \end{aligned}$$

İfadeyi biraz düzenleyelim;

$$\begin{aligned} &g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) - X(Z\varphi)g(Y,T) + (\nabla_X Z)(\varphi)g(Y,T) \\ &+Y(Z\varphi)g(X,T) - (\nabla_Y Z)(\varphi)g(X,T) - Y(T\varphi)g(X,Z) + (\nabla_Y T)(\varphi)g(X,Z) \\ &+X(T\varphi)g(Y,Z) - (\nabla_X T)(\varphi)g(Y,Z) + (Y\varphi)(Z\varphi)g(X,T) \\ &-(X\varphi)(Z\varphi)g(Y,T) - \frac{1}{2}||\mathrm{grad}\varphi||^2(g \bullet g)(X,Y,Z,T) \\ &+(X\varphi)g(Y,Z)g(\mathrm{grad}\varphi,T) - (Y\varphi)g(X,Z)g(\mathrm{grad}\varphi,T) \end{aligned}$$

Burada, $g(\text{grad}\varphi, T) = T\varphi$ olduğunu biliyoruz. Eşitlikte yerine yazalım:

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) - X(Z\varphi)g(Y,T) - \nabla_X Z(\varphi)g(Y,T)$$

$$+Y(Z\varphi)g(X,T) - \nabla_Y Z(\varphi)g(X,T) - Y(T\varphi)g(X,Z) - \nabla_Y T(\varphi)g(X,Z)$$

$$+X(T\varphi)g(Y,Z) - \nabla_X T(\varphi)g(Y,Z) + (Y\varphi)(Z\varphi)g(X,T)$$

$$-(X\varphi)(Z\varphi)g(Y,T) - \frac{1}{2}||\text{grad}\varphi||^2(g \bullet g)(X,Y,Z,T)$$

$$+(X\varphi)g(Y,Z)(T\varphi) - (Y\varphi)g(X,Z)(T\varphi)$$

Bize gerekli olan, $(\nabla^2(\varphi) \bullet g)$ teriminin eşitidir. Bunu elde edelim:

$$(\nabla^2(\varphi) \bullet g)(X,Y,T,Z) = \nabla^2\varphi(X,T) \cdot g(Y,Z)$$

$$+\nabla^2\varphi(Y,Z) \cdot g(X,T) - \nabla^2\varphi(X,Z) \cdot g(Y,T)$$

$$-\nabla^2\varphi(Y,T) \cdot g(X,Z)$$

şeklindedir. Yazdığımız bu eşitlikteki ifadelerin eşitini yazalım:

$$\begin{aligned} \nabla^2(\varphi)(X,Y) &:= \nabla_X\nabla_Y\varphi - (\nabla_X Y)\varphi \\ &= X(Y\varphi) - (\nabla_X Y)\varphi \end{aligned}$$

Diğer terimlerde de aynı işlemler yapılarak,

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi(Y,Z) &= Y(Z\varphi) - (\nabla_Y Z)\varphi; \\ \nabla^2\varphi(X,Z) &= X(Z\varphi) - (\nabla_X Z)\varphi; \\ \nabla^2\varphi(Y,T) &= Y(T\varphi) - (\nabla_Y T)\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yazdığımız ifadeleri, $(\nabla^2(\varphi) \bullet g)(X,Y,T,Z)$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$(\nabla^2(\varphi) \bullet g)(X,Y,T,Z) = (X(T\varphi) - (\nabla_X T)\varphi) \cdot g(Y,Z)$$

$$+(Y(Z\varphi) - (\nabla_Y Z)\varphi) \cdot g(X,T)$$

$$-(X(Z\varphi) - (\nabla_X Z)\varphi) \cdot g(Y,T)$$

$$-(Y(T\varphi) - (\nabla_Y T)\varphi) \cdot g(X,Z)$$

Metrikleri dağıtalım:

$$(\nabla^2(\varphi) \bullet g)(X,Y,T,Z) = X(T\varphi) \cdot g(Y,Z) - (\nabla_X T)\varphi \cdot g(Y,Z)$$

$$+Y(Z\varphi) \cdot g(X,T) - (\nabla_Y Z)\varphi \cdot g(X,T) - X(Z\varphi) \cdot g(Y,T)$$

$$+(\nabla_X Z)\varphi \cdot g(Y,T) - Y(T\varphi) \cdot g(X,Z) + (\nabla_Y T)\varphi \cdot g(X,Z)$$

Bulduğumuz bu eşitliği, $g(\tilde{R}(X,Y)Z,T)$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) + (\nabla^2(\varphi) \bullet g)(X,Y,T,Z)$$

$$+(Y\varphi)(Z\varphi)g(X,T) - (X\varphi)(Z\varphi)g(Y,T)$$

$$-\frac{1}{2}||\mathrm{grad}\varphi||^2(g \bullet g)(X,Y,Z,T)$$

$$+(X\varphi)g(Y,Z)(T\varphi) - (Y\varphi)g(X,Z)(T\varphi)$$

Son olarak bize, $(\nabla\varphi)^2 \bullet g$ terimi lazım. Bu terimin eşitini bulalım:

$$(\nabla\varphi)^2 \bullet g(X,Y,Z,T) = (\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi) \bullet g(X,Y,Z,T)$$

Kulkarni-Nomizu çarpımı kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa,

$$(\nabla\varphi)^2 \bullet g(X,Y,Z,T) = (Y\varphi)(Z\varphi)g(X,T) - (X\varphi)(Z\varphi)g(Y,T)$$

$$+(X\varphi)g(Y,Z)(T\varphi) - (Y\varphi)g(X,Z)(T\varphi)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, bulduğumuz bu ifadeyi, $g(\tilde{R}(X,Y)Z,T)$ eşitliğinde yazalım:

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,T) = g(R(X,Y)Z,T) + (\nabla^2(\varphi) \bullet g)(X,Y,T,Z)$$

$$-\frac{1}{2}||\mathrm{grad}\varphi||^2(g \bullet g)(X,Y,Z,T) + (\nabla\varphi)^2 \bullet g$$

Bu eşitlik, her $X,Y,Z,T$ için sağlandığından, her iki taraftan kaldırılır. O hâlde, eşitliğimizin son hali,

$$e^{2\varphi}\tilde{R} = R - \frac{1}{2}g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)(g \bullet g) + (\nabla^2\varphi \bullet g) + (\nabla\varphi)^2 \bullet g$$

olur. İstenilen elde edilir.

**Teorem 3.3.5**

Her $n \geq 3$ boyutu için,

**i**) $(M, g)$, Riemann manifoldu olsun. $g$ metriğinin bir $\tilde{g}$ Einstein metriğine konformal denk olması için gerek ve yeter koşul

$$e^{\varphi} Ric + (n-2)\nabla^2 e^{\varphi} = h \cdot g$$

olacak şekilde, $h \in C^{\infty}$ ve $\varphi \in C^{\infty}$ fonksiyonlarının var olmasıdır.

**ii**) $(M, g)$, Einstein uzayı ve $\tilde{g} = e^{-2\varphi} g$ konformal denk metrikler olsun. Bu durumda,

"$\tilde{g}$ Einstein metriktir $\Leftrightarrow$ $\nabla^2(e^{\varphi}) = \lambda g$ olacak şekilde $\mu : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır."

**İspat 3.3.5**

**i**) ($\Rightarrow$) $g$ metriği, $\tilde{g}$ Einstein metriğine konformal denk olsun. O hâlde, $\tilde{g} = e^{-2\varphi} g$ olur. $\tilde{g}$ Einstein metrik olduğundan,

$$\widetilde{Ric}(X, Y) = \lambda \cdot \tilde{g}(X, Y)$$

olacak şekilde $\lambda : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. O hâlde buradaki $\tilde{g}$, Einstein metriğinin eşitini yazalım:

$$\widetilde{Ric}(X, Y) = \lambda \cdot e^{-2\varphi} g(X, Y)$$

Burada, her tarafı $e^{-2\varphi}$ katsayısı ile bölelim:

$$e^{2\varphi} \widetilde{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

$\widetilde{Ric}$, yerine teoremde eşitini bulduğumuz denklemi yazalım:

$$e^{2\varphi}(Ric(X, Y) + \triangle\varphi g(X, Y) - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 g(X, Y)$$

$$+(n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})(X, Y)) = \lambda g(X, Y)$$

Buradaki eşitlik, her $X, \dot{Y}$ için sağlandığından, eşitliğin her iki tarafından kaldırılır.

$$e^{2\varphi}(Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})) = \lambda g$$

$e^{2\varphi}$ katsayısını dağıtalım:

$$e^{2\varphi}Ric + e^{2\varphi} \triangle \varphi g - e^{2\varphi}(n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2 g + e^{2\varphi}(n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) = \lambda g$$

Eşitliğin sol tarafındaki terimlerde, metrik bulunan ifadeleri eşitliğin sağ tarafına atalım:

$$e^{2\varphi}Ric + e^{\varphi}(n-2)\nabla^2(e^{\varphi}) = \lambda g - e^{2\varphi} \triangle \varphi g + e^{2\varphi}(n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2 g$$

Şimdi, metrik parantezine alalım:

$$e^{2\varphi}Ric + e^{\varphi}(n-2)\nabla^2(e^{\varphi}) = (\lambda - e^{2\varphi} \triangle \varphi + e^{2\varphi}(n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g$$

Her iki tarafı $e^{-\varphi}$ katsayısı ile çarpalım:

$$\begin{aligned} e^{\varphi}Ric + (n\text{-}2)\nabla^2(e^{\varphi}) &= (e^{-\varphi}\lambda - e^{-\varphi}e^{2\varphi} \triangle \varphi + e^{-\varphi}e^{2\varphi}(n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g \\ &= (e^{-\varphi}\lambda - e^{\varphi} \triangle \varphi + e^{\varphi}(n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g \end{aligned}$$

Burada,

$$(e^{-\varphi}\lambda - e^{\varphi} \triangle \varphi + e^{\varphi}(n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2) = h$$

olarak alabiliriz. O hâlde eşitlik,

$$e^{\varphi}Ric + (n-2)\nabla^2(e^{\varphi}) = h \cdot g$$

olarak elde edilir. Bu da, bizim göstermek istediğimiz eşitliktir.

$(\Leftarrow) e^{\varphi}Ric + (n-2)\nabla^2(e^{\varphi}) = h \cdot g$

olacak şekilde, $h \in C^{\infty}(M)$ fonksiyon olsun. $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ olduğunu ve $\tilde{g}$ Einstein metrik olduğunu göstermeliyiz.

İddia: Aradığımız konformal metriği, $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ olarak alabiliriz. Bu durumda, $\tilde{g}$ metriğinin, Einstein metrik olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) \quad .....(***)$$

eşitliğinin var olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$e^{\varphi}Ric + (n-2)\nabla^2(e^{\varphi}) = h \cdot g$$

olduğunu biliyoruz. O hâlde, bu eşitlikte her iki tarafı $e^{-\varphi}$ katsayısı ile çarpalım:

$$Ric + e^{-\varphi}(n-2)\nabla^2(e^{\varphi}) = e^{-\varphi}h \cdot g$$

$(***)$ olarak belirttiğimiz eşitlikte bilinen denklemi yerine koyalım:

$$\widetilde{Ric} = e^{-\varphi}h \cdot g + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g$$

Şimdi, metrik parantezine alalım:

$$\widetilde{Ric} = (e^{-\varphi}h + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2))g$$

Burada, eşitiliğin sağ tarafını, çarpımları 1 olan $e^{-2\varphi}$ ve $e^{2\varphi}$ katsayıları ile çarpalım:

$$\widetilde{Ric} = e^{-2\varphi}(e^{2\varphi}e^{-\varphi}h + e^{2\varphi}(\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2))g$$

Gerekli işlemleri yaparsak,

$$\widetilde{Ric} = e^{-2\varphi}(e^{\varphi}h + e^{2\varphi}(\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2))g$$

elde edilir. Burada,

$$(e^{\varphi}h + e^{2\varphi}(\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)) = \lambda$$

olarak alabiliriz. O hâlde eşitlik,

$$\widetilde{Ric} = \lambda e^{-2\varphi}g$$

şeklinde elde edilir. Biz, başta $e^{-2\varphi}g = \tilde{g}$ olduğunu kabul etmiştik. Bu durumda, eşitlik,

$$\widetilde{Ric} = \lambda\tilde{g}$$

olup, $\tilde{g}$ bir Einstein metriktir.

**ii**) $(\Rightarrow)$ $\tilde{g}$ Einstein metrik olsun. O hâlde, $\widetilde{Ric} = \mu \cdot \tilde{g}$ olacak şekilde $\mu : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

$$\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) = \mu \cdot \tilde{g}$$

olur. $Ric = \lambda_1 \cdot g$ yazabiliriz.

$$\lambda_1 \cdot g + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) = \mu \cdot \tilde{g}$$

olup, $\tilde{g}$ ve $g$ konformal denk metrik olduğundan, $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ şeklindedir. Eşitlikte yerine yazalım:

$$\lambda_1 \cdot g + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) = \mu \cdot e^{-2\varphi}g$$

Burada, $g$ metriği bulunan terimleri, eşitliğin sağ tarafına atalım:

$$(n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) = \mu \cdot e^{-2\varphi}g - \lambda_1 \cdot g - (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g$$

$g$ metriği parantezine alalım:

$$(n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) = (\mu \cdot e^{-2\varphi} - \lambda_1 - (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2))g$$

Eşitliğin sol tarafında bulunan $(n-2)e^{-\varphi}$ katsayısını, sağ tarafa atalım:

$$\nabla^2(e^{\varphi}) = \left(\frac{e^{\varphi}}{(n-2)}(\mu \cdot e^{-2\varphi} - \lambda_1 - (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2))\right)g$$

Burada,

$$\left(\frac{e^{\varphi}}{(n-2)}(\mu \cdot e^{-2\varphi} - \lambda_1 - (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)\right) = \lambda$$

olarak alabiliriz. O hâlde eşitlik,

$$\nabla^2(e^{\varphi}) = \lambda g$$

olup, istenen sağlanmış olur.

($\Leftarrow$) $\nabla^2(e^{\varphi}) = \lambda g$ olacak şekilde, $\lambda : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var olsun. $\tilde{g}$ Einstein metrik olduğunu görmeliyiz.

$$\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})$$

$\tilde{g}$ Einstein metrik olduğundan, $Ric = \lambda_1.g$ ve $\nabla^2(e^{\varphi}) = \lambda g$ olup $\widetilde{Ric}$ eşitlite yerine yazalım:

$$\widetilde{Ric} = \lambda_1 \cdot g + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\lambda g$$

Burada, $g$ metriği parantezine alalım:

$$\widetilde{Ric} = (\lambda_1 + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2) + (n-2)e^{-\varphi}\lambda)g$$

Eşitliğin sağ tarafını, çarpımları 1 olan $e^{-2\varphi}$ ve $e^{2\varphi}$ katsayıları ile çarpalım:

$$\widetilde{Ric} = e^{-2\varphi}(e^{2\varphi}\lambda_1 + e^{2\varphi}(\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2) + e^{2\varphi}(n-2)e^{-\varphi}\lambda)g$$

Burada,

$$e^{2\varphi}\lambda_1 + e^{2\varphi}(\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2) + e^{2\varphi}(n-2)e^{-\varphi}\lambda = \mu$$

olarak alabiliriz. O hâlde eşitlik,

$$\begin{aligned} \widetilde{Ric} &= e^{-2\varphi}g\mu \\ &= \mu\tilde{g} \end{aligned}$$

olup, $\tilde{g}$ bir Einstein metriktir.

**Teorem 3.3.6 (Weyl Teoremi)**

**1)** Weyl tensörü, konformal denklik altında invaryant kalır.

$(0,4)-$ tipindeki tensör, $Rm = Um + Zm + Wm$ ve

$(0,4)-$ tipindeki tensör alanı, $\tilde{R}m = \tilde{U}m + \tilde{Z}m + \tilde{W}m$

olup,

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi}Wm$$

olur.

**2)** $M^n$, $C^\infty(M)$ manifold olsun. $g$ metrik olsun. $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ konformal denk metrikler olsun.

$(1,3)-$ tipindeki tensör, $R = U + Z + W$ ve

$(1,3)-$ tipindeki tensör alanı, $\tilde{R} = \tilde{U} + \tilde{Z} + \tilde{W}$

olup,

$$\tilde{W} = W$$

dir.

**İspat 3.3.6**

**1)** $Rm(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T)$ olduğunu biliyoruz. Aynı şekilde $\tilde{R}m$ ifadesini,

$$\tilde{R}m(X,Y,Z,T) = g(\tilde{R}(X,Y)Z,T)$$

şeklinde yazarız. Ayrıca $Rm$ tensörü gibi $\tilde{R}m$ de,

$$\tilde{R}m = \tilde{U}m + \tilde{Z}m + \tilde{W}m$$

şeklinde ayrışır. Bu ayrışımı,

$$\tilde{R}m = \tilde{U}m + \tilde{Z}m + \tilde{W}m$$

$$\tilde{W}m = \tilde{R}m - \tilde{U}m - \tilde{Z}m$$

$$\tilde{W}m = \tilde{R}m - \frac{1}{n-2}\left(\widetilde{Ric} - \frac{\tilde{S}}{2(n-1)}\tilde{g}\right) \bullet \tilde{g}$$

şeklinde yazarız. Şimdi, $\tilde{W}m = e^{-2\varphi}Wm$ olduğunu gösterelim:

$$\tilde{W}m = \tilde{R}m - \frac{1}{n-2}\left(\widetilde{Ric} - \frac{\tilde{S}}{2(n-1)}\tilde{g}\right) \bullet \tilde{g}$$

olduğunu belirtmiştik. Şimdi bu eşitliği biraz daha açalım. Burada $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ olduğunu biliyoruz. Eşitlikte yerine yazalım:

$$\tilde{W}m = \tilde{R}m - \frac{1}{n-2}\left(\widetilde{Ric} - \frac{\tilde{S}}{2(n-1)} \cdot (e^{-2\varphi}g)\right) \bullet (e^{-2\varphi}g)$$

Şimdi, $\tilde{R}m$ teriminin eşitini bulalım. Bunun için,

$$e^{2\varphi}\tilde{R}m = Rm - \frac{1}{2}g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)(g \bullet g) + (\nabla^2\varphi \bullet g) + (\nabla\varphi)^2 \bullet g$$

eşitliğini kullanacağız. Burada, eşitliğin sağ tarafını $e^{-2\varphi}$ ile bölelim:

$$\tilde{R}m = e^{-2\varphi}Rm - e^{-2\varphi}\left(\frac{1}{2}g(\mathrm{grad}\varphi, \mathrm{grad}\varphi)(g \bullet g) + (\nabla^2\varphi \bullet g) + (\nabla\varphi)^2 \bullet g\right)$$

Eşitliği biraz düzenleyelim:

$$\tilde{R}m = e^{-2\varphi}Rm - \frac{e^{-2\varphi}}{2}||\text{grad}\varphi||^2(g \bullet g) + e^{-2\varphi}(\nabla^2\varphi \bullet g) + e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g)$$

Bulduğumuz eşitliği, $\tilde{W}m$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi}Rm - \frac{e^{-2\varphi}}{2}||\text{grad}\varphi||^2(g \bullet g) + e^{-2\varphi}(\nabla^2\varphi \bullet g)$$
$$+e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g - \frac{1}{n-2}\left(\widetilde{Ric} - \frac{\tilde{S}}{2(n-1)} \cdot (e^{-2\varphi}g)\right) \bullet (e^{-2\varphi}g)$$

Şimdi, $\widetilde{Ric}$ ifadesinin eşiti olan,

$$\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})$$

eşitliğini, $\tilde{W}m$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi}Rm - \frac{e^{-2\varphi}}{2}||\text{grad}\varphi||^2(g \bullet g) + e^{-2\varphi} \cdot (\nabla^2\varphi) \bullet g$$
$$+e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g - \frac{1}{n-2}(Ric + \triangle\varphi g - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 g$$
$$+(n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) - \frac{\tilde{S}}{2(n-1)} \cdot (e^{-2\varphi}g)) \bullet (e^{-2\varphi}g)$$

Bu eşitlikte parantezleri açarak yazalım:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi}Rm - \frac{e^{-2\varphi}}{2}||\text{grad}\varphi||^2(g \bullet g) + e^{-2\varphi} \cdot (\nabla^2\varphi) \bullet g$$
$$+e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g - \frac{1}{n-2} \cdot Ric \bullet (e^{-2\varphi}g) - \frac{1}{n-2} \cdot \triangle\varphi g \bullet (e^{-2\varphi}g)$$
$$+\frac{1}{n-2} \cdot (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 g \bullet (e^{-2\varphi}g)$$
$$-\frac{1}{n-2} \cdot (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) \bullet (e^{-2\varphi}g) + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{\tilde{S}}{2(n-1)} \cdot (e^{-2\varphi}g) \bullet (e^{-2\varphi}g)$$

Burada, $\tilde{S}$ ifadesinin eşitini bulalım. Normalde, $S = trRic$ olduğunu biliyoruz. O hâlde bu ifadeyi, $\tilde{S}$ için yazarsak,

$$\tilde{S} = tr_{\tilde{g}}\widetilde{Ric}$$

olur. O halde bu eşitliği kullanalım. Burada, $\widetilde{Ric}$ eşitini yerine yazalım:

$$\widetilde{Ric} = Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})$$

olduğunu biliyoruz. O halde $\tilde{S}$ eşitliği,

$$\tilde{S} = tr_{\tilde{g}}(Ric + (\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}))$$

olur. Burada $\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ olup,

$$tr_{\tilde{g}} = tr_{e^{-2\varphi}g} = e^{2\varphi}tr_g$$

olur. Parantezi açalım:

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}tr_g(Ric) + e^{2\varphi}tr_g(\triangle\varphi - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2)g + e^{2\varphi}tr_g((n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}))$$

$e^{2\varphi}$ parantezine alalım:

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}(tr(Ric) + tr(\triangle\varphi g) - tr((n-2)||\text{grad}\varphi||^2 g)$$

$$+tr((n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi})))$$

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}(S + \triangle\varphi tr(g) - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 tr(g)$$

$$+(n-2)e^{-\varphi}tr(\nabla^2(e^{\varphi})))$$

Burada, $tr(g) = n$ olduğunu biliyoruz.

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}(S + \triangle\varphi \cdot n - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 \cdot n + (n-2)e^{-\varphi}tr(\nabla^2(e^{\varphi})))$$

Eşitlik elde edildi. Burada, $tr(\nabla^2(e^{\varphi}))$ teriminin eşitini bulalım. Bunun için $\nabla^2(e^{\varphi})$ teriminin açılımını kullanacağız.

$$\nabla^2(e^{\varphi})(X,Y) = X(Y(e^{\varphi})) - (\nabla_X Y)(e^{\varphi})$$

Burada ilk terim ile ikinci terimde yönlü türev alalım:

$$\nabla^2(e^{\varphi})(X,Y) = X(e^{\varphi})(Y\varphi) + e^{\varphi}(X(Y\varphi)) - e^{\varphi}(\nabla_X Y)(\varphi)$$

İlk terim için işlemi tekrarlayalım:

$$\nabla^2(e^{\varphi})(X,Y) = e^{\varphi}(X\varphi)(Y\varphi) + e^{\varphi}(X(Y\varphi)) - e^{\varphi}(\nabla_X Y)(\varphi)$$

Hessiyen tanımını kullanalım:

$$\nabla^2(e^{\varphi})(X,Y) = e^{\varphi}(X\varphi)(Y\varphi) + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)(X,Y)$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}(\triangle\varphi \cdot \triangle\varphi)(X,Y) &= \nabla\varphi(X)\cdot\nabla\varphi(Y)\\ &= \nabla_X\varphi + \nabla_Y\varphi\\ &= (X\varphi)\cdot(Y\varphi)\end{aligned}$$

ve

$$X\varphi = \nabla_X\varphi ve Y\varphi = \nabla_Y\varphi$$

olduğunu biliyoruz. Yerine yazalım:

$$\nabla^2(e^{\varphi})(X,Y) = e^{\varphi}(\nabla_X\varphi)(\nabla_Y\varphi) + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)(X,Y)$$

Burada,

$$(\nabla_X\varphi)(\nabla_Y\varphi) = (\nabla\varphi)(\nabla\varphi)(X,Y)$$

olduğunu biliyoruz. Yerine yazalım:

$$\begin{aligned}\nabla^2(e^{\varphi})(X,Y) &= e^{\varphi}(\nabla\varphi)(\nabla\varphi)(X,Y) + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)(X,Y)\\ &= e^{\varphi}(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)(X,Y) + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)(X,Y)\\ &= e^{\varphi}(\nabla\varphi)^2(X,Y) + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)(X,Y)\end{aligned}$$

Bu eşitlik, her $X, Y$ elemanı için sağlanacağından her iki taraftan kaldırılır. O hâlde,

$$\nabla^2(e^{\varphi}) = e^{\varphi}(\nabla\varphi)^2 + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)$$

eşitliği elde edilir. Elde ettiğimiz bu eşitliği, $\tilde{S}$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}(S + \triangle\varphi\cdot n - (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2\cdot n$$

$$+(n-2)e^{-\varphi}tr(e^{\varphi}(\nabla\varphi)^2 + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)))$$

Şimdi, $tr$ ifadesini dağıtalım:

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= e^{2\varphi}(S + \triangle\varphi \cdot n - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 \cdot n \\ &+ (n-2)e^{-\varphi}tr(e^{\varphi}(\nabla\varphi)^2) + (n-2)e^{-\varphi}tr(e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= e^{2\varphi}(S + \triangle\varphi \cdot n - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 \cdot n \\ &+ (n-2)e^{-\varphi}e^{\varphi}tr((\nabla\varphi)^2) + (n-2)e^{-\varphi}e^{\varphi}tr((\nabla^2\varphi))) \\ &= e^{2\varphi}(S + \triangle\varphi \cdot n - (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 \cdot n \\ &+ (n-2)tr((\nabla\varphi)^2) + (n-2)tr((\nabla^2\varphi)))\end{aligned}$$

Burada şöyle bir hatırlatmada bulunalım:

$$\begin{aligned}\triangle f &= tr(\nabla^2 f) \\ \triangle\varphi &= tr(\nabla^2\varphi)\end{aligned}$$

Bu eşitliği , $\tilde{S}$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}(S + n \cdot \triangle\varphi - n(n-2) \cdot ||\text{grad}\varphi||^2$$

$$+ (n-2)tr((\nabla\varphi)^2) + (n-2)\triangle\varphi)$$

Şimdi, eşitini bulmamız gereken, $tr((\nabla\varphi)^2)$ terimi kaldı. Bu terimin eşiti,

$$tr((\nabla\varphi)^2) = ||\text{grad}\varphi||^2$$

olur. Bulduğumuz bu ifadeyi, $\tilde{S}$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}(S + n \triangle \varphi - n(n-2)||\text{grad}\varphi||^2 + (n-2)||\text{grad}\varphi||^2 + (n-2)\triangle\varphi)$$

Eşitliği düzenleyelim:

$$\tilde{S} = e^{2\varphi}(S + 2(n-1) \triangle \varphi - (n-1)(n-2) \cdot ||\text{grad}\varphi||^2$$

Bulduğumuz bu ifadeyi, $\tilde{W}m$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi} \cdot Rm - \frac{e^{-2\varphi}}{2}||\mathrm{grad}\varphi||^2(g \bullet g) + e^{-2\varphi}(\nabla^2\varphi) \bullet g$$

$$+e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g - \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot Ric \bullet g - \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \triangle\varphi g \bullet g$$

$$+\frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2 g \bullet g$$

$$-\frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) \bullet g$$

$$+\frac{e^{-4\varphi}}{n-2} \cdot \frac{e^{2\varphi}(S + 2(n-1) \triangle \varphi - (n-1)(n-2) \cdot ||\mathrm{grad}\varphi||^2}{2(n-1)} \cdot g \bullet g$$

Eşitliğini düzenleyelim. Bunun için,

$$\frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot (n-2)||\mathrm{grad}\varphi||^2 g \bullet g ve \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot (n-2)e^{-\varphi}\nabla^2(e^{\varphi}) \bullet g$$

ifadesinde $(n-2)$ katsayılarını sadeleştirelim:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi} \cdot Rm - \frac{e^{-2\varphi}}{2}||\mathrm{grad}\varphi||^2(g \bullet g) + e^{-2\varphi}(\nabla^2\varphi) \bullet g$$

$$+e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g - \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot Ric \bullet g - \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \triangle\varphi g \bullet g$$

$$+e^{-2\varphi}||\mathrm{grad}\varphi||^2 g \bullet g - e^{-2\varphi}e^{-\varphi}(e^{\varphi}(\nabla\varphi)^2 + e^{\varphi}(\nabla^2\varphi)) \bullet g$$

$$+\frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \frac{1}{2(n-1)}S + \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \frac{1}{2(n-1)}2(n-1) \triangle \varphi g \bullet g$$

$$+\frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \frac{(n-1)(n-2) \cdot ||\mathrm{grad}\varphi||^2}{2(n-1)} g \bullet g$$

Burada, $||\text{grad}\varphi||^2$ ortak parantezine alalım:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi} \cdot Rm + \frac{e^{-2\varphi}}{2}||\text{grad}\varphi||^2(g \bullet g) + e^{-2\varphi}(\nabla^2\varphi) \bullet g$$

$$+e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g - \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot Ric \bullet g - \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \triangle\varphi g \bullet g$$

$$-e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g - e^{-2\varphi}(\nabla^2\varphi) \bullet g$$

$$+\frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \frac{1}{2(n-1)}S + \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \triangle\varphi g \bullet g$$

$$+e^{-2\varphi}\frac{||\text{grad}\varphi||^2}{2} g \bullet g$$

Bu eşitlikte birbirini götüren terimler mevcuttur. Bunlar,

$$\frac{e^{-2\varphi}}{2}||\text{grad}\varphi||^2(g \bullet g);$$
$$e^{-2\varphi}(\nabla^2\varphi) \bullet g;$$
$$e^{-2\varphi}(\nabla\varphi)^2 \bullet g;$$
$$\frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \triangle\varphi g \bullet g,$$

terimleridir. Eşitlikte bu terimleri sadeleştirelim:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi} \cdot Rm - \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot Ric \bullet g + \frac{e^{-2\varphi}}{n-2} \cdot \frac{1}{2(n-1)}S$$

$e^{-2\varphi}$ ortak paratezine alalım:

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi}(Rm - \frac{1}{n-2} \cdot Ric \bullet g + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{2(n-1)}S)$$

Burada,

$$Wm = Rm - \frac{1}{n-2} \cdot Ric \bullet g + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{2(n-1)}S$$

olduğunu biliyoruz. O hâlde,

$$\tilde{W}m = e^{-2\varphi}(Wm)$$

olup, istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

**2)** $\tilde{W} = W$ olduğunu gösterelim:

$$\tilde{W}m(X,Y,Z,V) = \tilde{g}(\tilde{W}(X,Y,Z),V)$$

ve

$$Wm(X,Y,Z,V) = g(W(X,Y,Z),V)$$

şeklinde yazılır. $\tilde{W}m = e^{-2\varphi}(Wm)$ olduğunu gösterdik. O hâlde,

$$Wm(X,Y,Z,V) = g(W(X,Y,Z),V)$$

$$e^{2\varphi}\tilde{W}m(X,Y,Z,V) = g(W(X,Y,Z),V)$$

şeklinde yazarız. Burada, $\tilde{W}m(X,Y,Z,V)$ nin eşitini yazalım:

$$e^{2\varphi}\tilde{g}(\tilde{W}(X,Y,Z),V) = g(W(X,Y,Z),V)$$

$\tilde{g} = e^{-2\varphi}g$ yerine yazalım:

$$e^{2\varphi}e^{-2\varphi}g(\tilde{W}(X,Y,Z),V) = g(W(X,Y,Z),V)$$

Katsayıları sadeleştirelim:

$$g(\tilde{W}(X,Y,Z),V) = g(W(X,Y,Z),V)$$

Şimdi, eşitliğin sağındaki ifadeyi karşıya atalım:

$$g(\tilde{W}(X,Y,Z),V) - g(W(X,Y,Z),V) = 0$$

Metriğin özeliğini kullanalım:

$$g(\tilde{W}(X,Y,Z) - W(X,Y,Z),V) = 0$$

Metrik non-dejenere olduğundan,

$$\tilde{W}(X,Y,Z) - W(X,Y,Z) = 0$$

olur. Bu eşitlik her $X, Y, Z$ için sağlanacağından eşitliğin her iki tarafından kaldırılır.

$$\tilde{W} = W$$

şeklindeki istenilen eşitlik elde edilir.

# KAYNAKÇA


[1] Jost, Jürgen. *Riemannian Geometry And Geometric Analysis*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 1995.

[2] Kühnel, Wolfgang. *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds,* AMS, USA, 2006.

[3] Lee, John M.. *Introduction To Smooth Manifolds*, Springer, USA, 2000.

[4] Lee, John M.. *Riemannian Manifolds An Introduction To Curvature*, Springer, New York, 1997.

[5] O'Neill, Barrett. *Semi-Riemann Geometry With Applications To Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[6] Petersen, Peter. *Riemannian Geometry,* Springer, New York, 1998.

[7] Spivak, Michael. *A Comprehensive Introduction To Differential Geometry,* Publish or Perish, Houston-Texas, 1999.

[8] Tu, Loring W.. *An Introduction To Manifolds,* Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

# ÖZGEÇMİŞ

| | | |
|---|---|---|
| **Adı-Soyadı** | : | Sümeyye Büşra KARTAL |
| **Yabancı Dil** | : | İngilizce |
| **Doğum Yeri ve Yılı** | : | Kayseri/ 1993 |
| **E-Posta** | : | kbsumeyye@gmail.com |

**Eğitim Geçmişi**:

- 2011-2015, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü.
- 2016-2019, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, Yüksek Lisans.