T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞEYMA TEMİZEL

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞEYMA TEMİZEL

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Şeyma TEMİZEL tarafından hazırlanan "**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26.08.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Yrd. Doç. Dr. Figen AÇIL KİRAZ	....
Üye Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR	....
Üye Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ....

ÖZET

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ŞEYMA TEMİZEL
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: YRD. DOÇ. DR. FİGEN AÇIL KİRAZ)

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2013

Diferansiyel denklemlerin çözümleri çeşitli yöntemler kullanılarak bulunabilir. Bu tezde adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için denklemin tanımlandığı manifoldu değişmez bırakan yerel dönüşüm grubu olan Lie simetri grubu kullanıldı. Bu yöntem, diferansiyel denklemlerin yeni çözümlerinin oluşturulmasında önemli rol oynar. Simetri grubu yardımıyla diferansiyel denklemlerin çözümleri daha kolay elde edilebileceği gibi yeni çözümler de elde edilebilir. Ayrıca adi diferansiyel denklemlerin mertebe indirgemesi ve kısmi diferansiyel denklemlerin değişken sayısının azaltılması hatta adi diferansiyel denkleme indirgenmesi yapılabilir. Bu yöntem tüm diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde adi diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili birkaç çözüm yönteminden bahsedilmiş ve örnekler verilmiştir. İkinci bölümde temel kavramlar olan bir parametreli Lie grupları, sonsuz küçük dönüşümler, değişmezlik şartı, Lie cebirleri hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde ise simetri dönüşümlerinin adi diferansiyel denklemlere uygulanışı anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ikinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin simetri dönüşümüne yer verilmiş. Bu bilgiler doğrultusunda birinci bölümde örnek olarak verilen ve dönüşüm yapılarak çözülen adi diferansiyel denklemin simetri grubunun üreteci bulunup, Lie cebirinin üreteci belirlendi ve simetri dönüşümü ile aynı çözüme ulaşıldı. Beşinci ve son bölümde ise birinci bölümde Adomiyan Ayrıştırma yöntemi ile yaklaşık çözümü verilen lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem olan Duffing denklemine simetri yöntemi uygulandı. Lie grubunun üreteci bulunup Lie cebirinin üreteci belirlendi. Diferansiyel değişmezler metodu kullanarak denklem birinci mertebe adi diferansiyel denkleme indirgendikten sonra başlangıç değer problemi için bir çözüm elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: bir parametreli Lie grupları, değişmezlik şartı, sonsuz küçükler, sonsuz küçük değişmezlik şartı, Lie cebiri, mertebe indirgeme, Duffing denklemi.

ABSTRACT

SYMMETRY TRANSFORMATIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

MSC THESIS

ŞEYMA TEMİZEL

BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. FİGEN AÇIL KİRAZ)

BALIKESİR, AUGUST 2013

Solutions of ordinary differential equations are found by different method. In this thesis, Lie symmetry group which is local transformation group is left invariant described manifold of the equation is used for solutions of ordinary differential equations. This method plays on important role construction of new solutions of ordinary differential equations. Solutions of ordinary differential equations can be obtained more easily with the help of the symmetry group as well as new solutions can be found. Also, reduction order of ordinary differential equations, decrease number of variable of partial differential equations insomuch as partial differential equations can be reduced ordinary differential equations. This method can be applied all of ordinary differential equations.

This thesis consists of five chapters. In chapter one, several of solution methods of ordinary differential equations are given with examples. In chapter two, is informed about one-parameter Lie groups, infinitesimal transformations, invariance condition, Lie algebras. In chapter three, symmetry transformations are applied to ordinary differential equation. In chapter four, symmetry transformations of second order ordinary differential equations are given. Also, the ordinary differential equation which was solved using a transformation in first chapter, is solved with symmetry theory and both solutions are found same. In chapter five, symmetry method is applied to Duffing equation which is a nonlinear second order ordinary differential equation and is given approximation solution with Adomian decomposition method in first chapter. Lie group operator and Lie algebra operator are found. A solution is obtained for initial value problem after Duffing equation is reduced first order differential equation using differential invariants.

KEYWORDS: one parameter Lie groups, invariant condition, infinitesimals, infinitesimal invariance condition, Lie algebras, order reduction, Duffing equation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince değerli fikirlerinden ve bilgilerinden faydalandığım, her konuda destek olan hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Figen AÇIL KİRAZ'a çok teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca bana hep destek olan, fikirlerime önem veren, beni bugünlere getiren sevgili anneme ve sevgili babama çok teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemler, uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendisliğin birçok alanında önemli rol oynamaktadır. Adi diferansiyel denklemlerin birçok çözüm yolu vardır. Bu çözüm yollarından biri de simetri dönüşümlerini kullanarak yapılan çözümdür.

1870'lerde Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından ortaya koyulan diferansiyel denklemin simetri analizi, Lie grubu adı verilen denklemin tanımlandığı manifoldu değişmez bırakan yerel dönüşüm gruplarının bulunmasıyla diferansiyel denklemlerin yeni çözümlerini sistematik bir şekilde oluşturulmasını sağlayan bir teoridir[1].

Lie'nin çalışmalarının sonuçlarının zenginliği uzun süre fark edilememiş ve matematiksel modellerin diferansiyel denklemlerine Lie teorisinin uygulanması 1960'lı yıllarda başlayabilmiştir. Daha sonraları L.V. Ovsyannikov'un çalışmaları bu konuya ilgiyi arttırmış ve yazdığı [2] kitabı modern uygulamalı grup analizinin uzun süre temel kaynağı olmuştur.

Son yıllarda bu konuya ilginin iyice artması ile [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] kitapları yazılmış ve bu konunun daha da gelişmesine katkıda bulunulmuştur.

Adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için simetri kullanımı bir anahtar gibidir[7]. Simetri dönüşümlerini kullanarak yapılan çözüm yöntemi, diferansiyel denklemlerin yeni çözümlerinin oluşturulmasında önemli rol oynar. Simetri grubu yardımıyla diferansiyel denklemlerin daha kolay çözümleri elde edilebileceği gibi yeni çözümler de elde edilebilir. Yüksek mertebeli adi diferansiyel denklemlerde, simetrilerini kullanılarak adi diferansiyel denklemlerin mertebeleri indirgenebilir. Ayrıca kısmi diferansiyel denklemlerin değişken sayısının azaltılması hatta adi diferansiyel denkleme indirgenmesi yapılabilir. Bu yöntem tüm diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

Simetri teorisi ile diferansiyel denklemi integre etme problemi denklemi değişmez bırakan grubun bulunması problemine indirgenir[10]. Bu da simetri teorisi ile diferansiyel denklemi çözmenin en önemli avantajlarındandır.

Bu bölümün devamında, lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözüm yollarından birkaçı incelenmiştir.

İkinci bölümde, bir adi diferansiyel denklemin simetri ile çözülebilmesi için bilinmesi gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, adi diferansiyel denklemin simetri ile çözülebilmesi için gerekli olan değişmezlik şartı, değişmezlik şartından belirleyici denklemlerin elde edilmesi, belirleyici denklemlerin çözülmesiyle sonsuz küçük dönüşümlerin bulunması, bulunan bu sonsuz küçük dönüşümlerle Lie grubunun üretecinin oluşturulması, Lie grubun üreteci yardımıyla Lie cebirinin bir boyutlu alt cebirlerinin oluşturulması ve bu alt cebirler yardımıyla diferansiyel değişmezler metodu kullanılarak adi diferansiyel denklemin mertebe indirgenmesinin nasıl yapılacağı anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, ikinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin simetri ile çözümü daha kapsamlı bir şekilde anlatılmıştır. Ayrıca birinci bölümde verilen ve dönüşüm yapılarak çözümü bulunan örneğe simetri dönüşüm uygulanmış ve aynı çözüme ulaşılmıştır.

Beşinci bölümde ise özel bir denklem olan Duffing denkleminin simetri ile çözümü verilmiştir. Birinci bölümde Adomiyan ayrıştırma metodu ile yaklaşık çözümü verilmiş olan bu denkleme üçüncü bölümde anlatıldığı gibi simetri dönüşümü uygulandığında birinci mertebe adi diferansiyel denkleme indirgeme yapılmış. Bu indirgeme sonucunda bulunan birinci mertebe adi diferansiyel denklem çözülerek farklı bir çözüm elde edilmiştir.

1.1 Adi Diferansiyel Denklemler

x bağımsız değişken y bağımlı değişken olmak üzere $\Psi(x, y, y_x, ..., y_{nx}) = 0$ kapalı formda yazılabilen fonksiyonlara *n.* mertebe adi diferansiyel denklem denir. Ayrıca,

$$a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y_x + ... + a_n(x)y_{nx} = 0 \ , \ a_n(x) \neq 0$$

şeklindeki denklemlere *n.* mertebe lineer adi diferansiyel denklemler denir. Burada, $\frac{dy}{dx} = y_x(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y_{xx}(x)$,..., $\frac{d^ny}{dx^n} = y_{nx}(x)$ şeklindeki adi diferansiyellerdir. Bu tez boyunca adi diferansiyeller bu şekilde gösterilmiştir. Lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere ise lineer olmayan adi diferansiyel denklemler denir.

Lineer olmayan adi diferansiyel denklemleri çözmek için birçok yol vardır. Bunlardan bazılarını inceleyelim. Bunun için denklemleri bağımlı değişkeni olmayan ve bağımsız değişkeni olmayan şeklinde iki gruba ayıralım.

1.1.1 Bağımlı Değişkeni Olmayan Denklemler

Bu tip denklemler, y bağımlı değişkeninin türevlerini içeren fakat doğrudan y 'yi içermeyen denklemlerdir. Yani,

$$\Psi(x, y_x, ..., y_{nx}) = 0 \tag{1.1}$$

şeklindedir. Denklem (1.1) formunda ise $y_x(x) = p(x)$, $y_{xx}(x) = p_x(x)$,..., $y_{nx}(x) = p_{(n-1)x}(x)$ dönüşümü yapılarak denklem $\Psi(x, p, p_x, ..., p_{(n-1)x}) = 0$ formuna dönüşür[11]. Böylece çözüm elde edilir.

1.1.1.1 Örnek: $xy_{xx} + y_x = x^2y_x^2$ adi diferansiyel denklemini çözümünü bulalım.

Bu denkleme $y_x = p$ ve $y_{xx} = p_x$ dönüşümleri uygulanırsa

$$xp_x + p = x^2p^2$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin her iki tarafı x 'e bölünürse,

$$p_x + \frac{1}{x}p = xp^2$$

şeklinde Bernoulli diferansiyel denklemi elde edilir. Bernoulli denklemini çözmek için denklemin her iki tarafı p^2'ye bölünürse

$$p^{-2}p_x + \frac{1}{x}p^{-1} = x$$

elde edilir. Buradan $p^{-1} = u \Rightarrow -p^{-2}p_x = u_x$ dönüşümü yapılırsa denklem

$$u_x - \frac{1}{x}u = -x$$

birinci mertebe lineer diferansiyel denkleme dönüşür. Denklemin tam diferansiyel olması için integral çarpanı

$$\lambda = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

şeklinde bulunur. Denklemin her iki tarafını integral çarpanı ile çarptığımızda,

$$\frac{1}{x}u_x - \frac{1}{x^2}u = -1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}u\right) = -1$$

olur. Son denklemin integrali alınırsa

$$\frac{1}{x}u = -x + c_1 \Rightarrow u = -x^2 + c_1 x$$

bulunur. Burada c_1 keyfi sabittir. $p^{-1} = u \Rightarrow p = \frac{1}{u}$ olduğundan $p = \frac{1}{c_1 x - x^2}$ olur. Son eşitlikte $p = y_x$ yazılırsa

$$y_x = \frac{1}{c_1 x - x^2},$$

$$y = \frac{1}{c_1}\left[\ln\left(\frac{x}{c_1 - x}\right)\right] + c_2$$

c_2 keyfi sabit olmak üzere denklemin genel çözümü bulunur.

1.1.2 Bağımsız Değişkeni İçermeyen Denklemler

Bu tip denklemlerde x bağımsız değişkeni açıkça verilmez. Yani denklem,

$$\Psi(y, y_x, ..., y_{nx}) = 0 \tag{1.2}$$

şeklindedir. Denklem (1.2) formunda ise $\frac{dy}{dx} = p(y), y = y(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \left(p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$,... dönüşümü yapılarak denklem

$$\Psi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

şeklinde bir eksik mertebeden p ve y değişkenli yeni bir adi diferansiyel denkleme dönüşür[11]. Buradan çözüm kolayca yapılır.

1.1.2.1 Örnek: $yy_{xx} + y_x^2 = y_x$ adi diferansiyel denklemini çözümünü bulalım.

Denklem x değişkeni içermediğinden $\frac{dy}{dx} = p(y)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ dönüşümler yapılırsa denklem

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = p \Rightarrow \frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = \frac{1}{y}$$

lineer diferansiyel denkleme dönüşür. Denklemin tam diferansiyel olması için integral çarpanı

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{y}dx} = e^{\ln y} = y$$

bulunur. Denklemin her iki tarafını integral çarpanı ile çarptığımızda,

$$y\frac{dp}{dy} + p = 1 \Rightarrow \int \frac{\partial(yp)}{\partial y}dy = \int dy$$

$$\Rightarrow yp = y + c_1$$

$$\Rightarrow p=\frac{y+c_1}{y}$$

elde edilir. $\frac{dy}{dx}=p$ olduğundan denklem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+c_1}{y}$$

olur. Sonuç olarak

$$y=c_1\ln|c_1+y|+x+c_2$$

c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere genel çözümü bulunur.

Bu yöntemler lineer adi diferansiyel denklemler için de kullanılır. Bir örnekle gösterelim.

1.1.2.2 Örnek: $y_{xx}-y=0$ lineer adi diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklem x değişkeni içermediğinden $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$ dönüşümleri yapılırsa denklem,

$$p\frac{dp}{dy}-y=0$$

değişkenlerine ayrılabilir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Buradan k_1 keyfi sabit olmak üzere,

$$p=\sqrt{y^2+k_1}$$

bulunur. Son eşitlikte $p=\frac{dy}{dx}$ yazılıp integrali alınırsa k_2 keyfi sabit olmak üzere,

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2+k_1}\,,$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+k_1}}=\int dx\Rightarrow\ln\left|y+\sqrt{y^2+k_1}\right|=x+\ln k_2$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$y+\sqrt{y^2+k_1}=e^x k_2$$

genel çözümü elde edilir.

Şimdi de yukarıdaki iki tipte olmayan denklemler için bir yaklaşım metodu verelim.

1.1.3 Adomiyan Ayrıştırma Metodu

Bu metod bir yaklaşım yöntemidir ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için analitik yaklaşım verir. Bu çözüm genellikle sonsuz seri biçimindedir. Lineer ve lineer olmayan terimleri içeren, kendisi lineer olmayan bir adi diferansiyel operatör F verilen fonksiyon da g olmak üzere

$$Fu(x)=g(x)$$

veya

$$Lu+Ru+Nu=g(x) \tag{1.3}$$

diferansiyel denklemini ve $u(x_0)=w, u_x(x_0)=z$ başlangıç şartlarını göz önüne alalım. Burada L tersi alınabilen, diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli türevini gösteren lineer operatör; R lineer operatörden kalan lineer kısım; N ise diferansiyel denklemin lineer olmayan terimidir[12].

(1.3) denkleminin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa,

$$L^{-1}Lu+L^{-1}Ru+L^{-1}Nu=L^{-1}g \tag{1.4}$$

şeklinde yazılabilir. (1.4) denklemi düzenlenirse

$$L^{-1}Lu=L^{-1}g-L^{-1}Ru-L^{-1}Nu \tag{1.5}$$

olur. Adi diferansiyel denklem birinci mertebeden ise lineer diferansiyel operatör

$$L(\ )=\frac{d}{dx}(\ ),$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden ise lineer diferansiyel operatör

$$L(\ )=\frac{d^2}{dx^2}(\ ),$$

şeklindedir. Bu şekilde devam edilirse $n.$ mertebe lineer diferansiyel operatör

$$L(\ )=\frac{d^n}{dx^n}(\ )$$

şeklinde olur. İntegral operatörü ise

$$L^{-1}(\ )=\int_0^x(\ )dx\,,$$

$$L^{-1}(\ )=\int_0^x\int_0^x(\ )dxdx$$

şeklinde yazılabilir. (1.5) eşitliğindeki lineer olmayan Nu terimleri,

$$Nu=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$$

serisine eşit olup A_n 'ler (1.3) eşitliğindeki Adomiyan polinomlardır[13]. (1.5) denklemi u için çözülürse,

$$u=w+zx+L^{-1}g-L^{-1}Ru-L^{-1}Nu \tag{1.6}$$

bulunur. $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ ve $u_0=w+zx+L^{-1}g(x)$ eşitlikleri (1.6) denkleminde yazılırsa,

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n=u_0-L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty}u_n-L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}A_n \tag{1.7}$$

elde edilir. (1.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&u_1=-L^{-1}Ru_0-L^{-1}A_0\\
&u_2=-L^{-1}Ru_1-L^{-1}A_1\\
&\ldots\\
&u_{n+1}=-L^{-1}Ru_n-L^{-1}A_n,\ n\geq 0
\end{aligned}$$

bulunur[12],[14].

A_n Adomiyanının açık hali,

$$A_0 = f(u_0)$$
$$A_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)$$
$$A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0)$$
$$\ldots$$

şeklindedir[12],[15]. Bu polinomların genel hali,

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\phi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}, n\rangle 0$$

olarak yazılabilir[12],[16]. Buradan çözüm fonksiyonu,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

şeklindedir[12].

1.1.3.1 Örnek: $y(0) = A, y_x(0) = 0$ başlangıç koşulları verilen

$$y_{xx} + y + \varepsilon y^3 = 0$$

Duffing denklemini Adomiyan metod ile çözelim[12].

$L_x y = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $Ry = y$, $Ny = y^3$ olmak üzere denklemin operatör formu,

$$L_x y = -Ry - \varepsilon Ny \tag{1.8}$$

olur. $L_x^{-1} = \int_0^x\int_0^x (\ )dxdx$ olmak üzere (1.8) denkleminin her iki tarafına soldan L_x^{-1} operatörü uygulanırsa $y(x) = w + zx - L_x^{-1}Ry(x) - \varepsilon L_x^{-1}Ny(x)$ olur. $Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ yazılabilir. $y_0 = w + zx = A$ yerine yazılırsa $y_{n+1}, n \geq 0$ için iterasyon formülü $\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} = -L_x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} y_n - \varepsilon L_x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ biçiminde yazılabilir. Adomiyan polinomlar $A_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}$, $n\rangle 0$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&A_0 = y_0^3 \\
&A_1 = 3y_0^2 y_1 \\
&A_2 = 3y_0 y_1^2 + 3y_0^2 y_2 \\
&A_3 = y_0^3 + 6y_0 y_1 y_2 + 3y_0^2 y_3 \\
&A_4 = \frac{1}{4!}\left(72y_1^2 y_2 + 72y_0 y_2^2 + 144y_0 y_1 y_3 + 72y_4 y_0^2\right) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -L_x^{-1} y_0 - \varepsilon L_x^{-1} A_0 = -\frac{1}{2} A x^2 - \frac{1}{2} \varepsilon A^3 x^2 \\
y_2 &= -L_x^{-1} y_1 - \varepsilon L_x^{-1} A_1 = \frac{1}{24} A x^4 + \frac{1}{6} \varepsilon A^3 x^4 + \frac{1}{8} \varepsilon^2 A^5 x^4 \\
y_3 &= -L_x^{-1} y_2 - \varepsilon L_x^{-1} A_2 = -\frac{1}{720} A x^6 - \frac{5}{144} \varepsilon A^3 x^6 - \frac{17}{240} \varepsilon^2 A^5 x^6 - \frac{3}{80} \varepsilon^3 A^7 x^6 \\
y_4 &= -L_x^{-1} y_3 - \varepsilon L_x^{-1} A_3 = \frac{1}{40320} A x^8 + \frac{13}{2520} \varepsilon A^3 x^8 + \frac{47}{2240} \varepsilon^2 A^5 x^8 + \frac{3}{112} \varepsilon^3 A^7 x^8 + \frac{7}{640} \varepsilon^4 A^5 x^8
\end{aligned}
$$

olmak üzere (1.8) denkleminin yaklaşık çözümü $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ olur.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümdeki bilgiler adi diferansiyel denklemlerin simetri ile çözülebilmesi için gerekli tanım ve teoremlerden oluşmaktadır. Bu bölümün iyi anlaşılması, bundan sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılması için bir ön koşuldur.

2.1 Bir Parametreli Lie Grupları

Lie grupları grup özelliklerinden başka ek özelliklere sahip olan özel gruplardır. Bir Lie grubu temel grup özelliklerine ilaveten düzgün bir manifold yapısına sahiptir. Lie grupları ile ilgili aşağıdaki tanımı verebiliriz[9].

2.1.1 Tanım: $x=\left(x^1,x^2,x^3,...,x^n\right)$, R^n $n-$boyutlu Euclidean manifoldunda sürekli açık bir D kümesinde uzanan bir vektör olsun. F^j fonksiyonları x reel değişkenlerine sonsuz diferansiyellenebilir ve S açık aralığında uzanan reel değerli, sürekli s parametresinin analitik fonksiyonları olmak üzere dönüşüm,

$$T^s=\left\{x^j=F^j\left[\tilde{x},s\right],\ j=1,2,...,n\right\}$$

şeklinde yazılabilir. T^s dönüşümünün bir parametreli Lie grubu olması için gerek ve yeter koşul bileşke işlemi altında aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

(i) $\tilde{x}$ 'yı kendi kendine dönüştüren bir $s\to s_0$ elemanı vardır.

$$T^{s_0}=\left\{\tilde{x}^j=F^j\left[\tilde{x},s_0\right],\ j=1,2,...,n\right\}$$

Birim elemanın daima sıfır olacak şekilde düzenlendiğine dikkat ediniz.

(ii) Her s için x 'i, $\tilde{x}$ 'ya dönüştüren $s\to s_{inv}$ şeklinde bir tersi vardır.

$$T^{s_{inv}}=\left\{\tilde{x}^j=F^j\left[x,s_{inv}\right],\ j=1,2,...,n\right\}$$

(iii) Bileşke işlemi altında $T^{s_1}\cdot T^{s_2}=T^{s_3}$ kapalı grubun üyelerinden oluşan bir dönüşüm üretir.

(iv)Grup birleşmelidir.

$$\left(T^{s_1}\cdot T^{s_2}\right)\cdot T^{s_3}=T^{s_1}\cdot\left(T^{s_2}\cdot T^{s_3}\right)$$

2.2 Değişmez Fonksiyonlar

Simetri teorisinin gelişiminin merkezi bir değişmez fonksiyon yapısıdır. Bir grup altında değişmez olan bir fonksiyonun özelliği, yeni değişkenlerle fonksiyonun tamamen aynı okunmasıdır. Değişmez fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki tanımı verebiliriz.

2.2.1 Tanım: R^n $n-$boyutlu Euclidean manifoldunda $x = \left(x^1, x^2, x^3, ..., x^n\right)$ vektörü olmak üzere $\Psi[x]$ fonksiyonunun $T^s = \left\{x^j = F^j[\tilde{x}, s], j = 1,2,...,n\right\}$ Lie grubu altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul

$$\Psi[x] = \Psi[F[\tilde{x}, s]] = \Psi[\tilde{x}] \qquad (2.1)$$

olmasıdır[9]. Değişmezlik için s parametresi dönüşümden yok edilmelidir. Böylece fonksiyon yeni değişkenlerle aynı şekilde okunabilir.

2.3 Bir Lie Grubunun Sonsuz Küçük (Infinitesimal) Formu

Bir parametreli Lie grubunun formu $x = \left(x^1, x^2, x^3, ..., x^n\right)$ olmak üzere

$$\tilde{x}^j = F^j[x, s] \qquad (2.2)$$

şeklindedir. Burada s grup parametresidir. $s_0 = 0$ birim elemanı,

$$x^j = F^j[x, 0]$$

olur. Bu nokta dönüşümünün kaynak noktasını göstermek için tilda kullanıldı. $s = 0$ noktasında (2.2) eşitliğini Taylor serisine açılırsa

$$\tilde{x}^j = x^j + s \cdot \left[\frac{\partial F^j}{\partial s}\right]_{s=0} + O\left(s^2\right) + ... \quad , \quad j = 1,2,3,...,n$$

elde edilir. $s = 0$ noktasında hesaplanan s grup parametresi ile ilgili F^j türevlerine grubun sonsuz küçükleri(infinitesimals) denir ve genellikle ξ^j ile gösterilir[9].

$$\xi^j[x] = \left[\frac{\partial}{\partial s} F^j[x, s]\right]_{s=0} \quad , \quad j = 1,2,3,...,n$$

ξ^j vektörü , (2.2) grubunun vektör alanıdır.

2.4 Lie Serileri, Grup Operatörleri ve Fonksiyonlar için Sonsuz Küçük Değişmezlik Şartı

(2.1) eşitliği ile verilen bir fonksiyonun değişmezlik şartını, pratikte uygulamak zordur. Çünkü F^j, s parametresine bağımlı ve genellikle lineer değildir. (2.1) şartından, dönüşüm F^j 'de yerine yazılmalı ve orijinal fonksiyondaki gibi okunabilecek şekilde düzenlenmelidir. Bu yöntem, karmaşık fonksiyonların değişmezini bulmak için oldukça sıkıcı bir prosedürdür ve diferansiyel denklemlere uygulandığında daha da karmaşık olur. Değişmezlik için (2.1) denklemine eşdeğer daha basit bir denkleme ihtiyaç vardır[9]. Bunun için $\Psi[\tilde{x}]$ analitik fonksiyonunda (2.2) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\Psi[\tilde{x}] = \Psi[F[x,s]] \tag{2.3}$$

olur ve (2.3) denklemini $s=0$ da Taylor serisine açalım.

$$\Psi[\tilde{x}] = \Psi[x] + s \cdot \left[\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right]_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \cdot \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}\right]_{s=0} + \ldots \tag{2.4}$$

Zincir kuralından,

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right]_{s=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial F^j} \cdot \left[\frac{\partial F^j}{\partial s}\right]_{s=0} = \xi^j \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial F^j}, \ldots$$

yazılabilir. (2.4) eşitliğindeki açılım, Ψ fonksiyonunun Lie serileri gösterimi olur. Sonuç olarak (2.4) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Psi[\tilde{x}] = \Psi[x] + s \cdot \left(\xi^j \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x^j}\right) + \frac{s^2}{2!} \cdot \xi^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\xi^{j_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{j_1}}\right) + \ldots \tag{2.5}$$

Burada $j_1, j_2, \ldots$ keyfi indislerdir. Bu durumda değişmezlik şartını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$\Psi[\tilde{x}] = \Psi[x]$ şartı sağlanması için gerek ve yeter koşul $\xi^j \dfrac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0$ olmasıdır[9].

Şimdi fonksiyonun değişmezliği için sonsuz küçük (infinitesimal) dönüşümlerin kullanımını verelim.

2.4.1 Teorem: $x=\left(x^1,x^2,x^3,...,x^n\right)$ olmak üzere $\Psi[x]$ analitik fonksiyonu, $T^s=\left\{\tilde{x}^j=F^j[x,s], j=1,2,...,n\right\}$ Lie grubu altında veya $\xi^j[x]$ $j=1,2,...,n$ sonsuz küçük dönüşümleri altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul

$$\xi^j[x]\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}=0 \tag{2.6}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır[9].

(2.6) denklemi, n tane birinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin otonom sistemini sağlayan $n-1$ tane $\Psi^i[x]$ karakteristik fonksiyonlarını yöneten birinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Her $\Psi^i[x]$ fonksiyonu T^s grubu altında değişmezdir.

Grup operatörü

$$X\equiv\xi^j[x]\frac{\partial}{\partial x^j}$$

formundadır. $X\Psi$ ye ise Ψ 'nin Lie türevi denir[9].

(2.5) eşitliği ile verilen Lie serisi, grup operatörü kullanılarak kısaca yazılabilir. Her analitik fonksiyon

$$\Psi[\tilde{x}]=\Psi[x]+s(X\Psi)+\frac{s^2}{2!}X(X\Psi)+\frac{s^3}{3!}X(X(X\Psi))+... \tag{2.7}$$

eşitliğindeki gibi genişleyebilir. (2.7) Lie serisi üstel olarak

$$\Psi[\tilde{x}]=e^{sX}\Psi[x] \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sophus Lie'nin önerisi, (2.1) eşitliği ile verilen karmaşık, lineer olmayan sonlu değişmezlik şartını, (2.6) eşitliğindeki lineer, sonsuz küçük şartı ile çok daha kullanışlı hale getirmekti. Ayrıca bir fonksiyon sonsuz küçük şartını sağlarsa sonlu şartını da sağlayacağı fikrini tanıtmaktı. Buradaki önemli nokta, lineer olmayan problemlere uygulanabilen Lie teorisine imkan vermektir. Lie grup teorisi çok yönlü bir çok disiplin olmasına rağmen (2.2) eşitliği ile geliştirilmesi ve (2.8) eşitliği ile sonuçlanması uygulamalardaki grupları anlamak ve kullanmak için ihtiyaç duyulan teorinin merkezidir[9].

2.5 $X\Psi[x]=0$ Karakteristik Denklemin Çözümü

$\xi^j[x]\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}\right)=0$ lineer birinci mertebeden kısmi türevli denklem

$$\frac{dx^1}{\xi^1[x]}=\frac{dx^2}{\xi^2[x]}=\frac{dx^3}{\xi^3[x]}=...=\frac{dx^n}{\xi^n[x]} \tag{2.9}$$

şeklindeki $n-1$ karakteristikli birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin birleşmeli bir sistemidir. Burada $x=\left(x^1,x^2,x^3,...,x^n\right)$ vektörüdür. (2.9) eşitliğinin integralleri

$$\psi^i=\Psi^i[x] \quad , \quad i=1,2,3,...,n-1$$

olur ve bunlar Lie grubunun değişmezleridir. Bunlara benzerlik dönüşümleri de denir. Her Ψ^i fonksiyonları , ψ^i 'nin her uygun değeri için eğrilerin(veya yüzeylerin) sonsuz bir ailesini ifade eder. Bu aile ξ^j sonsuz küçükleri ile F^j grubu altında değişmezdir. Her $\psi^i=sabit$ eğrisi grup altında ayrı ayrı değişmezdir[9].

2.5.1 Değişmez Noktalar

F (veya ξ^j veya X) grubu altında değişmez olan $x=\left(x^1,x^2,x^3,...,x^n\right)$ noktaları içinde izole noktalar olabilir. Bu noktalar aşağıdaki ifadenin köküne karşılık gelir.

$$\xi^j[x]=0$$

Grubun değişmez noktaları,

$$\frac{dx^j}{ds}=\xi^j[x] \quad , \quad j=1,2,3,...,n \tag{2.10}$$

denkleminin kritik noktalarıdır[9].

2.6 Bir Grubun Sonsuz Küçüklerinden(Infinitesimals) Oluşturulması

$x=\left(x^1,x^2,x^3,...,x^n\right)$ olmak üzere her $G[x]$ analitik fonksiyonu X grup operatörünün terimlerinde

$$G[\tilde{x}]=G[x]+s(XG)+\frac{s^2}{2!}X(XG)+\frac{s^3}{3!}X(X(XG))+... \qquad (2.11)$$

şeklindeki gibi Lie serisine açılabilir. (2.11) eşitliğinde $G[x]=x^j$ olsun. Buradan (2.11) Lie serisi

$$\tilde{x}^j=x^j+s\left(Xx^j\right)+\frac{s^2}{2!}X\left(Xx^j\right)+\frac{s^3}{3!}X\left(X\left(Xx^j\right)\right)+... \quad , \; j=1,2,3,...,n \qquad (2.12)$$

biçiminde yazılabilir. (2.12) serisi, $x=\left(x^1,x^2,x^3,...,x^n\right)$ olmak üzere $\xi^j[x]$ için açıkça elde edilebilir. (2.12) eşitliği,

$$\tilde{x}^j=e^{sX}x^j$$

üstel bir dönüşüm olarak gösterilebilir. Bu işlem, x kaynak noktasının $\tilde{x}$ hedef noktasına dönüşümüdür. (2.12) eşitliğinde verilen sonlu grubun Lie serileri formu, (2.10) karakteristik denklemlerin çözümü için nümerik algoritmanın temeli olarak kullanılır.

2.6.1 Örnek: Dönme(Rotasyon) Grubu

Bir dönme grubunun sonsuz küçükleri $(\xi,\eta)=(-y,x)$ olsun. Bu grubu sonsuz küçüklerle oluşturalım[9].

Öncelikle operatörü yazalım,

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

olduğundan

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\tilde{x}=x+s(Xx)+\frac{s^2}{2!}X(Xx)+\frac{s^3}{3!}X(X(Xx))+... \qquad (2.13)$$

olduğundan, operatörün x üzerindeki operasyonları,

$$\left.\begin{array}{l} Xx=\left(-y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(x)=-y, \\ X(Xx)=\left(-y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(-y)=-x, \\ X(X(Xx))=\left(-y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(-x)=y, \\ \ldots \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

şeklinde bulunur. (2.14) eşitliğinde bulunan ifadeler (2.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\tilde{x}=x-sy-\frac{s^2}{2!}x+\frac{s^3}{3!}y+\frac{s^4}{4!}x+\ldots \tag{2.15}$$

olur. (2.15) eşitliği x ve y ’li terimlere göre düzenlenirse,

$$\tilde{x}=x\left(1-\frac{s^2}{2!}+\frac{s^4}{4!}-\ldots\right)-y\left(s-\frac{s^3}{3!}+\frac{s^5}{5!}-\ldots\right) \tag{2.16}$$

bulunur. $\cos s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot s^{2n}}{(2n)!}$ ve $\sin s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot s^{2n+1}}{(2n+1)!}$ olduğundan (2.16) eşitliği

$$\tilde{x}=x\left(1-\frac{s^2}{2!}+\frac{s^4}{4!}-\ldots\right)-y\left(s-\frac{s^3}{3!}+\frac{s^5}{5!}-\ldots\right)=x\cos s-y\sin s \tag{2.17}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde operatörün y üzerindeki operasyonları,

$$\left.\begin{array}{l} Xy=x, \\ X(Xy)=-y, \\ X(X(Xy))=-x, \\ X(X(X(Xy)))=y, \\ \ldots \end{array}\right\} \tag{2.18}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{y}=y+s(Xy)+\frac{s^2}{2!}X(Xy)+\frac{s^3}{3!}X(X(Xy))+\ldots \tag{2.19}$$

olduğundan (2.18) eşitliklerinde verilen ifadeler (2.19) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\tilde{y} = y + sx - \frac{s^2}{2!}y - \frac{s^3}{3!}x + \frac{s^4}{4!}y - \dots \tag{2.20}$$

bulunur. (2.20) eşitliği x ve y'li ifadelere göre düzenlenirse,

$$\tilde{y} = x\left(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \dots\right) + y\left(1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots\right) = x\sin s + y\cos s \tag{2.21}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (2.17) ve (2.21) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x\cos s - y\sin s\\ \tilde{y} &= x\sin s + y\cos s\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Lie serileri dönme(rotasyon) grubunun sonlu formunu üretir.

2.7 Çok Parametreli Gruplar

Çok parametreli gruplar yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemler özellikle de kısmi türevli denklemleri(KTD) düşündüğümüzde artar. Çok parametreli grubun sonlu formu aşırı karmaşık olabilir ve uygulamada nadir kullanılır. Ama çok parametreli bir grubun sonsuz küçük üreteci grubun parametrelerinin bağımsız üreteçlerinin basit bir lineer toplamıdır. Çok parametreli bir grubun analizini göstermek için $n-$boyutlu izdüşüm(projective) grubunu detaylı inceleyelim[9].

$$T^{iz} = \left\{ \tilde{x}^j = \frac{x^j + a_j + b_{jk}x^k}{1 + c_k x^k},\ j = 1,2,\dots,n \right\} \tag{2.22}$$

burada k indeksindeki toplam 1'den n'ye kadardır.

İzdüşüm grubunun bir özelliği de $n-$boyutlu düzgün doğrulardan düzgün doğrulara bir dönüşüm olmasıdır. Bu grup $r = n^2 + 2n$ bağımsız grup parametresine sahiptir. (2.22) dönüşümünün sonsuz küçük formunu belirleyelim. Her parametre, kendi parametresi ile orantılı bir scaler çarpan ile düzenlenirse

$$a_j \Rightarrow a_j s,\ b_{jk} \Rightarrow b_{jk}s\ ,c_k \Rightarrow c_k s \tag{2.23}$$

olur.

(2.23) eşitliğindeki ifadeler (2.22) grubunda yerine yazılırsa,

$$\tilde{x}^j = \frac{x^j + \left(a_j + b_{jk}x^k\right)s}{1 + \left(c_k x^k\right)s}, \quad j = 1,2,...,n \tag{2.24}$$

bulunur. (2.24) eşitliğinin paydası ilk iki terimine göre binom serilerine açılırsa,

$$\tilde{x}^j = \left(x + \left(a_j + b_{jk}x^k\right)s\right)\left(1 - \left(c_k x^k\right)s\right), \quad j = 1,2,...,n \tag{2.25}$$

olur. (2.25) eşitliği en düşük s parametresini içerecek şekilde düzenlenirse,

$$\tilde{x}^j = x^j + \left(a_j + b_{jk}x^k - c_k x^k x^j\right)s, \quad j = 1,2,...,n$$

bulunur. İzdüşüm grubunun sonsuz küçükleri

$$\xi^j(x) = a_j + b_{jk}x^k - c_k x^k x^j, \quad j = 1,2,...,n$$

şeklinde elde edilir. Çok parametreli bir grubun üreteci için her bir parametreli grubun katkısı vardır. Sonsuz küçükteki her sabit sonlu bir parametreli grubu ve grup üretecini gösterir. (2.22) dönüşümü aşağıdaki grup operatörleri ile $r = n^2 + 2n$ tane bağımsız bir parametreli grupları tanımlar.

$$X^{a_j} = \frac{\partial}{\partial x^j}, \ X^{b_{jk}} = x^k \frac{\partial}{\partial x^j}, \ X^{c_k} = x^k x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.26}$$

2.8 Komütatör (Commutatör)

Grup operatörlerinin ilginç ve kullanışlı bir özelliği de komütatör ile ilgili kapalı bir küme olmasıdır. X^a ve X^b iki grup operatörünün komütatörü,

$$\left\{X^a, X^b\right\} = X^a\left(X^b\right) - X^b\left(X^a\right)$$

şeklindedir[9]. Burada $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ olmak üzere

$$X^a = \alpha^j[x]\frac{\partial}{\partial x^j}, \ X^b = \beta^k[x]\frac{\partial}{\partial x^k}$$

olsun. Bu operatörlerin komütatörü,

$$\left\{X^a, X^b\right\} = \alpha^j[x]\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\beta^k[x]\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \beta^k[x]\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\alpha^j[x]\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \left(\alpha^j \frac{\partial \beta^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} - \left(\beta^k \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

şeklinde olur. Burada komütatördeki ikinci türevler daima dışarı çıkar ve böylece sonuç yine birinci türevli bir Lie operatörü olur. Örneğin (2.26) eşitliğindeki ilk iki operatörün komütatörü,

$$\left\{ X^{a_j}, X^{b_{jk}} \right\} = X^{a_j}\left(X^{b_{jk}} \right) - X^{b_{jk}}\left(X^{a_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - x^k \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \qquad (2.27)$$

bulunur.(2.27) eşitliği

$$\left\{ X^{a_j}, X^{b_{jk}} \right\} = \delta_k^j \frac{\partial}{\partial x^k} = \begin{cases} X^{a_j}, \, j = k \\ 0, \, j \neq k \end{cases}$$

formuna indirgenir. Bir vektör uzayı formu olan (2.26) operatörlerine Lie cebiri denir. Bunun anlamı; çok karmaşık olan, lineer olmayan, çok parametreli dönüşümleri düşünerek bir grubun doğasını analiz etmektir.

2.9 Lie Cebirleri

Lie cebirleri modern matematikte önemlidir. Bu uygulamalar, yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin indirgenmesinin yanı sıra çok parametreli grupların normları olan kısmi türevli denklemlerin indirgenmesinde önemli rol oynar.

2.9.1 Tanım: $T^{a_1,\dots,a_r} = \left\{ \tilde{x}^j = F^j\left[x^1,\dots,x^n; a_1,\dots,a_r \right], j = 1,2,\dots,n \right\}$ $r-$parametreli Lie grubunun $X^k, k = 1,2,\dots,r$ sonsuz küçük üreteçleri aşağıda verilen özellikler ile $\wedge^r$, $r-$boyutlu bir Lie cebiri oluşturur[9].

$X^a, X^b, X^c \in \wedge^r$ ve α, β reel sabitler olsun. Ayrıca $\wedge^0$'da sıfır cebiri olsun.

(i) $\wedge^r$ Lie cebiri, $X^k, k = 1,2,\dots,r$ sonsuz küçük üreteçlerinin temel kümesi tarafından $r-$boyutlu vektör uzayının bir bazıdır.

$$\alpha X^a + \beta X^b = Y \Rightarrow Y \in \wedge^r \text{ ve } X^a + X^b = X^b + X^a$$

(ii) Grup operatörlerinin komütatörü antisimetriktir.

$$\left\{ X^a, X^b \right\} = -\left\{ X^b, X^a \right\}$$

(iii) Grup operatörleri toplamaya göre birleşmelidir.

$$X^a + \left(X^b + X^c\right) = \left(X^a + X^b\right) + X^c$$

(iv) Grup operatörleri Jakobi özdeşliğini sağlar.

$$\left\{\left\{X^a, X^b\right\}, X^c\right\} + \left\{\left\{X^c, X^a\right\}, X^b\right\} + \left\{\left\{X^b, X^c\right\}, X^a\right\} = 0$$

(v) Komütatör genişletilebilir.

$$\left\{\alpha X^a + \beta X^b, X^c\right\} = \alpha\left\{X^a, X^c\right\} + \beta\left\{X^b, X^c\right\}$$

2.9.2 Örnek: (2.22) izdüşüm grubunda $n = 2$ için komütatör tablosunu oluşturalım[9].

(2.22) grubunda $n = 2$ için,

$$r = n^2 + 2n \Rightarrow r = 2^2 + 2.2 \Rightarrow r = 8$$

parametreli bir grup oluşturulur. Bu grup

$$T^{iz} = \left\{ \tilde{x} = \frac{x + a_3 x + a_4 y + a_5}{1 + a_1 x + a_2 y}, \tilde{y} = \frac{y + a_6 x + a_7 y + a_8}{1 + a_1 x + a_2 y} \right\} \qquad (2.28)$$

biçiminde yazılabilir. $8-$parametreli grubun sonsuz küçükleri şöyle bulunur. Herbir parametre s skaleri ile çarpılıp (2.28) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$a_1 \Rightarrow a_1 s,\ a_2 \Rightarrow a_2 s,\ a_3 \Rightarrow a_3 s,\ a_4 \Rightarrow a_4 s,$$

$$a_5 \Rightarrow a_5 s,\ a_6 \Rightarrow a_6 s,\ a_7 \Rightarrow a_7 s,\ a_8 \Rightarrow a_8 s,$$

$$\tilde{x} = \frac{x + (a_3 x + a_4 y + a_5)s}{1 + (a_1 x + a_2 y)s}, \quad \tilde{y} = \frac{y + (a_6 x + a_7 y + a_8)s}{1 + (a_1 x + a_2 y)s}$$

olur. Buradan paydalar ilk iki terimlerine göre binom serilerine açılırsa

$$\tilde{x} = \left(x + (a_3 x + a_4 y + a_5)s\right)\left(1 - (a_1 x + a_2 y)s\right),$$

$$\tilde{y} = \left(y + (a_6 x + a_7 y + a_8)s\right)\left(1 - (a_1 x + a_2 y)s\right)$$

bulunur.

Bu ifadeler en düşük s terimine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + \left(-a_1x^2 - a_2xy + a_3x + a_4y + a_5\right)s \\ \tilde{y} &= y + \left(-a_1xy - a_2y^2 + a_6x + a_7y + a_8\right)s\end{aligned} \tag{2.29}$$

elde edilir.(2.29) grubunun sonsuz küçükleri,

$$\begin{aligned}\xi &= a_1x^2 + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5 \\ \eta &= a_1xy + a_2y^2 + a_6x + a_7y + a_8\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan Lie grup operatörü,

$$X = \left(a_1x^2 + a_2xy + a_3x + a_4y + a_5\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(a_1xy + a_2y^2 + a_6x + a_7y + a_8\right)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.30}$$

şeklinde elde edilir. (2.30) operatöründen,

$$a_1 = 1 \text{ için } X^1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad a_2 = 1 \text{ için } X^2 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y},$$

$$a_3 = 1 \text{ için } X^3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad a_4 = 1 \text{ için } X^4 = y\frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_5 = 1 \text{ için } X^5 = \frac{\partial}{\partial x}, a_6 = 1 \text{ için } X^6 = x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$a_7 = 1 \text{ için } X^7 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad a_8 = 1 \text{ için } X^8 = \frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde bir parametreli grup operatörleri elde edilir. Bulunan operatörlerle oluşturulan komütatör tablosu, Tablo 2.1'de verilmiştir.

Lie cebirinin genel üreteci

$$X = k_1X^1 + k_2X^2 + k_3X^3 + k_4X^4 + k_5X^5 + k_6X^6 + k_7X^7 + k_8X^8$$

biçiminde yazılabilir. Burada $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8$ keyfi sabitlerdir.

Tablo 2.1: İki boyutlu izdüşüm grubunun komütatör tablosu

$\{,\}$	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^7	X^8
X^1	0	0	$-X^1$	$-X^2$	$-2X^3$ $-X^7$	0	0	$-X^6$
X^2	0	0	0	0	$-X^4$	$-X^1$	$-X^2$	$-X^3$ $-2X^7$
X^3	X^1	0	0	$-X^4$	$-X^5$	X^6	0	0
X^4	X^2	0	X^4	0	0	X^7-X^3	$-X^4$	$-X^5$
X^5	$2X^3$ $+X^7$	X^4	X^5	0	0	X^8	0	0
X^6	0	X^1	$-X^6$	X^3-X^7	$-X^8$	0	X^6	0
X^7	0	X^2	0	X^4	0	$-X^6$	0	$-X^8$
X^8	X^6	X^3 $+2X^7$	0	X^5	0	0	X^8	0

2.9.3 Tanım: Komütatör tanımından operatörler değişmeli olduğundan her a, b için $\{X^a, X^b\} = 0$ ise Lie cebiri değişmelidir(abelyandır) denir[9].

2.9.4 Tanım: Her $X \in \Lambda^q$ ve $Y \in \Lambda^r$ için komütatörü $\{X, Y\} \in \Lambda^q$ ise $q \langle r$ olmak üzere $\Lambda^q \subset \Lambda^r$ altcebirine, Λ^r 'nin ideal bir altcebiri denir[9].

2.9.5 Tanım: Λ^k, $k-$boyutlu bir Lie cebir ve $k = 1,2,3,...,q$ için Λ^{k-1}, Λ^k 'nın ideal bir altcebiri olmak üzere

$$\Lambda^0 \subset \Lambda^1 \subset \Lambda^2 \subset ... \subset \Lambda^{q-1} \subset \Lambda^q$$

biçimindeki gibi alt cebirlerin bir zinciri varsa Λ^q Lie cebirine $q-$ boyutlu çözülebilir bir Lie cebir denir[9]. Burada, Λ^0 operatörsüz sıfır idealidir.

Çözülebilirlik şartı, Λ^q 'nın operatörlerinin $X^1,..., X^q$ tabanında yazılmasıdır.

İkinci ve yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin indirgenmesinde çözülebilir Lie cebirlerini kullanacağız. Bir adi diferansiyel denklemin mertebesinin indirgenmesi için simetri kullanımı, denklemi değişmez yapan çok parametreli grubun Lie cebirinin çözülebilirliğine dayalıdır. Burada asıl prensip, denklemin mertebesinin indirgenmesinin her seviyesi orijinal denklemin simetrileri olan dönüşüm denkleminin simetrilerinin kullanılması ile başarılır[9].

3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMLERİ

$\Psi[x, y, y_x, y_{xx}, ..., y_{px}] = 0$ *p*. mertebe adi diferansiyel denklemini simetri ile çözebilmek için denklemi değişmez yapan grupları belirlememiz gerekir. Bunun için aşağıdaki birkaç adımı bilmek yararlı olacaktır[9].

(i) T^s nokta dönüşümü *p*. mertebeden türevleri içeren dönüşümlere genişleyebilir. Bunun için sonsuz küçük dönüşümlere ihtiyaç vardır.

(ii) Diferansiyel denklem genişlemiş grup kullanılarak dönüşebilir. Denklem dönüşümü, *p*. genişlemiş grubun $X_{\{p\}}$ operatörünün terimlerine açılmış bir Lie serisi olarak ifade edilebilir.

(iii) Diferansiyel denklem değişmezdir. $\Leftrightarrow$ $X_{\{p\}}\Psi = 0$

(iv) Değişmezlik şartı grubun belirleyici denklemleri olarak bilinen, ξ ve η için lineer kısmi türevli denklemlerin bir kümesine indirgenir. Birinci mertebe adi diferansiyel denklemler için belirleyici denklem sadece birinci mertebeden kısmi türevli denklem sistemidir. Fakat iki veya daha yüksek mertebe adi diferansiyel denklemler için belirleyici denklem 2 veya daha fazla mertebeden kısmi türevli denklem sistemidir.

3.1 Türevlerine Dönüşen Fonksiyonların Yazımı

Bu bölüm ve diğer bölümlerde türevlerine dönüşen fonksiyonlar, genişlemiş dönüşüm grupları, genişlemiş sonsuz küçük dönüşümler, genişlemiş grup operatörleri $\{\ \}$ alt indisi ile gösterilmiştir. Örneğin, düzlemdeki birinci genişlemiş grup

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= F[x, y, s],\\
\tilde{y} &= G[x, y, s],\\
\tilde{y}_{\tilde{x}} &= G_{\{1\}}[x, y, y_x, s].
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\{1\}$ alt indisi ile birinci türeve dönüşen bir fonksiyon gösterildi.

Grup parametresinin küçük değerleri için dönüşüm,

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + s\xi[x, y],\\ \tilde{y} &= y + s\eta[x, y],\\ \tilde{y}_{\tilde{x}} &= y_x + s\eta_{\{1\}}[x, y, y_x].\end{aligned}$$

formundadır. Bu şekilde p. mertebe genişlemiş grubu ve sonsuz küçük dönüşümlü formu yazılabilir[9].

3.2 Tam Diferansiyel Operatörü

Bir bağımlı bir bağımsız değişkenli tam diferansiyel operatörü

$$D = \frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y_x \frac{\partial}{\partial y} + y_{xx} \frac{\partial}{\partial y_x} + \ldots + y_{(p+1)x} \frac{\partial}{\partial y_{px}}$$

biçimindedir[9].

$$\Psi[x, y, y_x, y_{xx}, \ldots, y_{px}] = 0$$

p. mertebe adi diferansiyel denkleminin tam diferansiyel operatörü ise

$$D\Psi = \frac{D\Psi}{Dx} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + y_x \frac{\partial\Psi}{\partial y} + y_{xx} \frac{\partial\Psi}{\partial y_x} + \ldots + y_{(p+1)x} \frac{\partial\Psi}{\partial y_{px}}$$

şeklindedir[9].

3.3 Değme(Contact) Şartları

Genişlemiş dönüşüm grupları, değme şartları kullanılarak üretilebilir. Bir bağımlı bir bağımsız değişkenli birinci mertebeli dönüşümler,

$$dy - y_x dx = 0$$

birinci mertebe değme şartını sağlamalıdır[9].Dahası bu bağıntı hem (x, y) kaynak hem de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ hedef uzayını sağlamalıdır.

$$d\tilde{y} - \tilde{y}_{\tilde{x}} d\tilde{x} = 0$$

Lie grupları hem kaynak hem de hedef uzayındaki bütün değme(tangency) şartlarını korur[9]. p. mertebeye kadar türevlerin dönüşümleri,

$$
\begin{aligned}
& dy - y_x dx = d\tilde{y} - \tilde{y}_{\tilde{x}} d\tilde{x} = 0, \\
& dy_x - y_{xx} dx = d\tilde{y}_{\tilde{x}} - \tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} d\tilde{x} = 0, \\
& \ldots \\
& dy_{(p-1)x} - y_{px} dx = d\tilde{y}_{(p-1)\tilde{x}} - \tilde{y}_{p\tilde{x}} d\tilde{x} = 0
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir[9].

3.4 Düzlemde Lie Gruplarının Genişlemesi

Düzlemde Lie gruplarının genişlemeleri değme şartları kullanılarak bulunur. Lie gruplarının genişlemeleri de Lie grup özelliği taşır. Böylece yüksek mertebe bir adi diferansiyel denklem yine yüksek mertebelere genişlemiş bir Lie grubu altında değişmez olur.

3.4.1 Birinci Türevin Sonlu Dönüşümü

İki boyutlu, sonlu Lie nokta grubunu düşünelim.

$$
T^s = \begin{Bmatrix} \tilde{x} = F[x, y, s] \\ \tilde{y} = G[x, y, s] \end{Bmatrix} \tag{3.1}
$$

(3.1) dönüşümü, $dy/dx = y_x$ birinci türevini içererek genişleyebilir. Buradaki temel amaç, genişlemiş dönüşüm grubunun da Lie grubunun özelliklerini sağlamasıdır. Böylece; dönüşüm (x, y, y_x) teğet(tanjant) uzayında tersinir bir dönüşümdür. Bunun için, birinci türevin dönüşümü

$$
dy - y_x dx = 0
$$

birinci mertebe değme şartını sağlamalıdır. Bu şart hem (x, y) kaynak koordinatları hem de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ hedef koordinatları sağlar öyle ki

$$
d\tilde{y} - \tilde{y}_{\tilde{x}} d\tilde{x} = 0 \tag{3.2}
$$

olur.

Genişlemiş dönüşüm grubunu üretmek için (3.1) eşitliğinde verilen fonksiyonların diferansiyelleri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
d\tilde{y} &= \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy \\
d\tilde{x} &= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

4-bağımsız kaynak değişkene (x, y, dx, dy) dayalı (3.1) ve (3.3) birleşik dönüşümü, 4-bağımsız hedef değişkene $(\tilde{x}, \tilde{y}, d\tilde{x}, d\tilde{y})$ dönüşür. (3.2) değme şartı sağlandığında y, x'in bir fonksiyonu olarak kabul edilir. (3.3) denklemleri, (3.2) eşitliğinde yerine yazıldığında, $\tilde{y}_{\tilde{x}}$ için çözüm, pay ve paydanın dx'e bölünmesi ile bulunur.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{y}}{dx} &= \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\
\frac{d\tilde{x}}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}
\end{aligned}
\Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial F}\dfrac{dy}{dx}}
$$

Sonuçta birinci türevin sonlu dönüşümü,

$$
\tilde{y}_{\tilde{x}} = \frac{G_x + G_y y_x}{F_x + F_y y_x} = (DG)(DF)^{-1} \tag{3.4}
$$

şeklinde yazılabilir. Dönüşüm fonksiyonları sadece x ve y'ye bağlı olduğundan D operatörü

$$
D(\;) = \frac{\partial}{\partial x}(\;) + y_x \frac{\partial}{\partial y}(\;)
$$

formundadır. Birinci genişlemiş sonlu dönüşüm grubu

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= F[x, y, s] \\
\tilde{y} &= G[x, y, s] \\
\tilde{y}_{\tilde{x}} &= G_{\{1\}}[x, y, y_x, s]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ve

$$
G_{\{1\}}[x, y, y_x, s] = (DG)(DF)^{-1} \tag{3.6}
$$

bulunur[9]. (3.5) birinci genişlemiş sonlu dönüşüm grubu bir Lie gruptur[9]. Bu dönüşüm grubu yüksek mertebelere genişleyebilir. Şimdi *p*. mertebe genişlemiş sonlu dönüşüm grubunun nasıl bulunduğunu gösterelim.

3.4.2 Yüksek Mertebe Türevlerin Sonlu Dönüşümü

$(p-1)$. mertebeden genişlemiş grup

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = F[x, y, s],\\
&\tilde{y} = G[x, y, s],\\
&\tilde{y}_{\tilde{x}} = G_{\{1\}}[x, y, y_x, s],\\
&\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} = G_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}, s],\\
&\ldots\\
&\tilde{y}_{(p-1)\tilde{x}} = G_{\{p-1\}}\left[x, y, y_x, y_{xx}, \ldots, y_{(p-1)x}, s\right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklindedir[9]. (3.7) dönüşümünün

$$d\left(\tilde{y}_{(p-1)\tilde{x}}\right) - \tilde{y}_{p\tilde{x}}\, d\tilde{x} = 0 \tag{3.8}$$

şeklindeki p. mertebe değme şartını sağladığını kabul edelim. p. mertebeden türevin dönüşümü, $(p-1)$. mertebe genişlemiş dönüşümün türevinin alınması ile belirlenebilir. Yani

$$\frac{d\left(\tilde{y}_{(p-1)\tilde{x}}\right)}{d\tilde{x}} = \frac{\dfrac{\partial G_{\{p-1\}}}{\partial x}dx + \dfrac{\partial G_{\{p-1\}}}{\partial y}dy + \ldots + \dfrac{\partial G_{\{p-1\}}}{\partial y_{(p-1)x}} d\left(y_{(p-1)x}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy} \tag{3.9}$$

eşitliği yazılabilir. (3.9) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadenin pay ve paydası dx 'e bölünürse,

$$\tilde{y}_{p\tilde{x}} = \frac{G_{\{p-1\}x} + G_{\{p-1\}y}\, y_x + \ldots + G_{\{p-1\}y_{(p-1)x}}\, y_{px}}{F_x + F_y y_x} = DG_{\{p-1\}}(DF)^{-1}$$

bulunur. Buradan p. genişlemiş grup

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = F[x, y, s],\\
&\tilde{y} = G[x, y, s],\\
&\tilde{y}_{\tilde{x}} = G_{\{1\}}[x, y, y_x, s],\\
&\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} = G_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}, s],\\
&\ldots\\
&\tilde{y}_{p\tilde{x}} = G_{\{p\}}\left[x, y, y_x, y_{xx}, \ldots, y_{px}, s\right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

formunda yazılabilir[9].

Burada,

$$G_{\{p\}}\left[x, y, y_x, y_{xx}, ..., y_{px}, s\right] = DG_{\{p-1\}}(DF)^{-1} \tag{3.11}$$

olur[9].

3.4.2.1 Teorem: (3.8) değme şartı ile üretilen (3.10) genişlemiş grubu bir Lie gruptur[9].

3.5 Türevlerin Sonsuz Küçük Dönüşümleri

Türevlerin sonsuz küçük dönüşümleri, sonlu dönüşüm grupları ile bulunur. Sonsuz küçük dönüşümler yüksek mertebelere genişleyebilir. Adi diferansiyel denklemlerin değişmez bırakan gruplar bulunurken denklemin mertebesi kadar genişlemiş sonsuz küçükler kullanılır. Bunun için genişlemiş sonsuz küçük dönüşümlerinin nasıl bulundukları hakkında bilgi verelim.

3.5.1 Birinci Türevin Sonsuz Küçük Dönüşümü

(3.1) dönüşümünün sonsuz küçükleri

$$\xi[x, y] = \left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{s=0}, \ \eta[x, y] = \left.\frac{\partial G}{\partial s}\right|_{s=0}$$

olmak üzere sonsuz küçük formu,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + s\xi[x, y] \\ \tilde{y} &= y + s\eta[x, y] \end{aligned}$$

şeklindedir. $G = y + s\eta$ ve $F = x + s\xi$ dönüşümlerinin türevleri alınırsa

$$DG = \frac{\partial G}{\partial x} + y_x \frac{\partial G}{\partial y} = s\eta_x + y_x\left(1 + s\eta_y\right) = y_x + s\left(\eta_x + \eta_y y_x\right),$$

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x} + y_x \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + s\xi_x + y_x s\xi_y = 1 + s\left(\xi_x + \xi_y y_x\right)$$

elde edilir.

Bu ifadeler (3.13) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\tilde{y}_{\tilde{x}} = (DG)(DF)^{-1} = \frac{y_x + s(\eta_x + \eta_y y_x)}{1 + s(\xi_x + \xi_y y_x)} = \frac{y_x + s(D\eta)}{1 + s(D\xi)} \tag{3.12}$$

bulunur. (3.12) eşitliğinin sağ tarafının paydasına binom seri açılımı yapılıp (3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{y}_{\tilde{x}} = (y_x + sD\eta)(1 + sD\xi)^{-1} = (y_x + sD\eta)(1 - sD\xi + ...)$$

olur. Bu ifade s parametresini içeren en küçük mertebeye göre düzenlenirse,

$$\tilde{y}_{\tilde{x}} = y_x + s(D\eta - y_x D\xi)$$

bulunur. Düzlemde birinci genişlemiş sonsuz küçük grup

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + s\xi[x, y], \\ \tilde{y} &= y + s\eta[x, y], \\ \tilde{y}_{\tilde{x}} &= y_x + s\eta_{\{1\}}[x, y, y_x], \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir[9]. Burada,

$$\eta_{\{1\}}[x, y, y_x] = D\eta - y_x D\xi = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_x - \xi_y (y_x)^2 \tag{3.13}$$

formundadır[9].

3.5.2 Yüksek Mertebe Türevlerin Sonsuz Küçük Dönüşümü

(ξ, η) sonsuz küçük grubunun yüksek mertebeye genişlemeleri aynı prosedürle üretilebilir. $G_{\{p-1\}} = y_{(p-1)x} + s\eta_{\{p-1\}}$ ve $F = x + s\xi$ dönüşümlerinin türevleri alınıp (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{y}_{p\tilde{x}} = \frac{y_{px} + s(D\eta_{\{p-1\}})}{1 + s(D\xi)} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.14) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadenin paydası binom serilerine açılır ve s parametresini içeren en küçük mertebeye göre yazılırsa,

$$\tilde{y}_{p\tilde{x}} = y_{px} + s(D\eta_{\{p-1\}} - y_{px} D\xi)$$

elde edilir. Buradan $p.$ mertebeye genişlemiş sonsuz küçük grup,

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= x + s\xi[x, y], \\
\tilde{y} &= y + s\eta[x, y], \\
\tilde{y}_{\tilde{x}} &= y_x + s\eta_{\{1\}}[x, y, y_x], \\
\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} &= y_{xx} + s\eta_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}], \\
&\ldots \\
\tilde{y}_{p\tilde{x}} &= y_{px} + s\eta_{\{p\}}[x, y, y_x, y_{xx}, \ldots, y_{px}]
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir[9]. Ayrıca,

$$\eta_{\{p\}}[x, y, y_x, y_{xx} \ldots, y_{px}] = D\eta_{\{p-1\}} - y_{px}D\xi \tag{3.15}$$

olur[9] ve burada

$$D\eta_{\{p-1\}} = \frac{\partial \eta_{\{p-1\}}}{\partial x} + y_x \frac{\partial \eta_{\{p-1\}}}{\partial y} + y_{xx} \frac{\partial \eta_{\{p-1\}}}{\partial y_x} + \ldots + y_{px} \frac{\partial \eta_{\{p-1\}}}{\partial y_{(p-1)x}}$$

formundadır.

3.6 Bir Lie Serisinde Bir Adi Diferansiyel Denklemin Genişlemesi-Adi Diferansiyel Denklemler için Değişmezlik Şartı

Bir diferansiyel denklem, değişkenlerinin ve türevlerinin genel bir analitik fonksiyonu olarak davranabilir. Bir adi diferansiyel denklem için değişmezlik şartı, bir fonksiyonun değişmezlik şartı ile tamamen aynıdır. Bunun için aşağıdaki teoremi verelim.

3.6.1 Teorem: $x, y, y_x, y_{xx}, \ldots, y_{px}$ değişkenlerinin bir diferansiyel fonksiyonu olarak davranan $p.$ mertebe adi diferansiyel denklem $\psi = \Psi[x, y, y_x, y_{xx}, \ldots, y_{px}] = 0$

$$\Psi[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}_{\tilde{x}}, \tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}}, \ldots, \tilde{y}_{p\tilde{x}}] = \Psi[x, y, y_x, \ldots, y_{px}] + sX_{\{p\}}\Psi + \frac{s^2}{2!} X_{\{p\}}\left(X_{\{p\}}\Psi\right) + \ldots$$

şeklinde Lie serilerine genişleyebilir. Burada $X_{\{p\}}$, p defa genişlemiş grubun operatörüdür ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$X_{\{p\}} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta_{\{1\}} \frac{\partial}{\partial y_x} + \eta_{\{2\}} \frac{\partial}{\partial y_{xx}} + \ldots + \eta_{\{p\}} \frac{\partial}{\partial y_{px}}$$

Adi diferansiyel denklemin değişmez olması için gerek ve yeter koşul

$$X_{\{p\}}\Psi\left[x, y, y_x, y_{xx}, ..., y_{px}\right] = 0 \tag{3.16}$$

eşitliğini sağlamsıdır[9]. (3.16) eşitliği ile ilgili $p+1$ integral değişmezli karakteristik denklemler

$$\frac{dx}{\xi[x,y]} = \frac{dy}{\eta[x,y]} = \frac{dy_x}{\eta_{\{1\}}[x,y,y_x]} = ... = \frac{dy_{px}}{\eta_{\{p\}}[x,y,y_x,...,y_{px}]} \tag{3.17}$$

şeklinde yazılabilir[9].

3.7 Diferansiyel Değişmezler Metodu ile Mertebe İndirgeme

Yüksek mertebe değişmezler (3.17) eşitliğinin çözülmesinden ziyade ilk iki teriminden de üretilebilir. Örneğin; (3.17) eşitliğinde $p=2$ için $X_{\{2\}}\Psi = 0$ şartının karakteristik fonksiyonları

$$\frac{dx}{\xi[x,y]} = \frac{dy}{\eta[x,y]} = \frac{dy_x}{\eta_{\{1\}}[x,y,y_x]} = \frac{dy_{xx}}{\eta_{\{2\}}[x,y,y_x,y_{xx}]} \tag{3.18}$$

şeklindedir. (3.18) sisteminin üç değişmezi vardır. Bunlar,

$$\psi^1 = \Psi^1[x,y],\ \psi^2 = \Psi^2[x,y,y_x],\ \psi^3 = \Psi^3[x,y,y_x,y_{xx}]$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki üçüncü değişmezi ilk iki değişmezin lineer bir birleşimi olarak oluşturabiliriz. Bu fonksiyon α, β keyfi sabitler olmak üzere

$$\alpha = \Psi^2[x,y,y_x] - \beta\Psi^1[x,y], \tag{3.19}$$

$X, X_{\{1\}}, X_{\{2\}}$ operatörleri altında değişmez olan birinci mertebe bir adi diferansiyel denklemdir. (3.19) eşitliğinin diferansiyeli alınırsa ve α sabit olduğundan,

$$\frac{D\left(\Psi^2 - \beta\Psi^1\right)}{Dx} = \frac{\partial\Psi^2}{\partial x} + y_x\frac{\partial\Psi^2}{\partial y} + y_{xx}\frac{\partial\Psi^2}{\partial y_x} - \beta\left(\frac{\partial\Psi^1}{\partial x} + y_x\frac{\partial\Psi^1}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.20}$$

bulunur. (3.20) denklemi, β 'nın her değeri için sağlanmalıdır.

Böylece üçüncü değişmez,

$$\frac{d\Psi^2}{d\Psi^1}=\frac{\dfrac{\partial\Psi^2}{\partial x}+y_x\dfrac{\partial\Psi^2}{\partial y}+y_{xx}\dfrac{\partial\Psi^2}{\partial y_x}}{\dfrac{\partial\Psi^1}{\partial x}+y_x\dfrac{\partial\Psi^1}{\partial y}}=\Psi^3[x,y,y_x,y_{xx}] \tag{3.21}$$

bulunur. (3.21) eşitliğinin sağ tarafı düzenlendiğinde,

$$\Psi^3[x,y,y_x,y_{xx}]=\Omega\left[\Psi^1[x,y],\Psi^2[x,y,y_x]\right] \tag{3.22}$$

yazılabilir. (3.22) eşitliği bu Lie grup altında değişmez olan genel ikinci mertebe denklemdir[9].

(ξ,η) grubu altında değişmez olan genel ikinci mertebe adi diferansiyel denkleminin çözülmesi problemi,

$$\frac{d\Psi^2}{d\Psi^1}=\Omega\left[\Psi^1,\Psi^2\right]$$

birinci mertebe adi diferansiyel denklemin çözümüne indirgenir. Sonuçta; $\Psi^1[x,y]$ ve $\Psi^2[x,y,y_x]$, $(\xi,\eta,\eta_{\{1\}})$ birinci genişlemiş grubunun değişmezleri ise $\dfrac{d\Psi^2}{d\Psi^1}$, $(\xi,\eta,\eta_{\{1\}},\eta_{\{2\}})$ ikinci genişlemiş grubunun değişmezleridir. Benzer şekilde, $\dfrac{d\left(d\Psi^2\right)}{d\left(\Psi^1\right)^2}$, $\dfrac{d\left(d\left(d\Psi^2\right)\right)}{d\left(\Psi^1\right)^3}$, …, $\dfrac{d^p\Psi^2}{d\left(\Psi^1\right)^p}$ $p.$genişlemiş grubun değişmezleridir[9].

Bütün ikinci mertebe adi diferansiyel denklemler iki boyutlu bir Lie cebiri kabul eder, tam integrali kanonik forma dönüşür[9].

3.7.1 Örnek: Çözülebilir iki boyutlu Lie cebir ile lineer olmayan üçüncü mertebe bir adi diferansiyel denklem olan

$$\Psi[x,y,y_x,y_{xx},y_{xxx}]=y_{xxx}+yy_{xx}=0 \tag{3.23}$$

formundaki Blasius denklemini simetri ile çözelim[9].

Blasius Denkleminin Değişmez Grubu:

Blasius denklemini simetri ile çözebilmemiz için öncelikle denklemi değişmez bırakan grubu belirlemek gerekir.

Denklem üçüncü mertebe olduğundan üç kez genişlemiş grup operatörü kullanılır. Değişmezlik şartı,

$$X_{\{3\}}\Psi = \xi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \eta_{\{1\}}\frac{\partial\Psi}{\partial y_x} + \eta_{\{2\}}\frac{\partial\Psi}{\partial y_{xx}} + \eta_{\{3\}}\frac{\partial\Psi}{\partial y_{xxx}} = 0$$

olduğundan $\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y} = y_{xx}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y_x} = 0$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y_{xx}} = y$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y_{xxx}} = 1$ eşitlikleri değişmezlik şartında yerine yazılırsa,

$$\eta y_{xx} + \eta_{\{2\}}y + \eta_{\{3\}} = 0 \tag{3.24}$$

bulunur. (3.24) denklemindeki $\eta_{\{2\}}$ ve $\eta_{\{3\}}$ ifadelerini bulalım. Bunun için (3.15) eşitliğindeki $p = 2$ için,

$$\eta_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}] = D\eta_{\{1\}} - y_{xx}D\xi$$

olduğundan $D\eta_{\{1\}} = \frac{\partial\eta_{\{1\}}}{\partial x} + y_x\frac{\partial\eta_{\{1\}}}{\partial y} + y_{xx}\frac{\partial\eta_{\{1\}}}{\partial y_x}$ ve $D\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x} + y_x\frac{\partial\xi}{\partial y}$ eşitlikleri $\eta_{\{2\}}$ formülünde yerine yazılırsa,

$$\eta_{\{2\}} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx} \tag{3.25}$$

bulunur.

(3.15) eşitliğinde $p = 3$ için,

$$\eta_{\{3\}}[x, y, y_x, y_{xx}, y_{xxx}] = D\eta_{\{2\}} - y_{xxx}D\xi$$

olduğundan $D\eta_{\{2\}} = \frac{\partial\eta_{\{2\}}}{\partial x} + y_x\frac{\partial\eta_{\{2\}}}{\partial y} + y_{xx}\frac{\partial\eta_{\{2\}}}{\partial y_x} + y_{xxx}\frac{\partial\eta_{\{2\}}}{\partial y_{xx}}$ ve $D\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x} + y_x\frac{\partial\xi}{\partial y}$ eşitlikleri $\eta_{\{3\}}$ formülünde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\eta_{\{3\}} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x + (3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy})y_x^2 + (\eta_{yyy} - \xi_{xyy})y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 \\ &+ (3\eta_{xy} - 3\xi_{xx})y_{xx} + (3\eta_{yy} - 9\xi_{xy})y_x y_{xx} - (6\xi_{yy})y_x^2 y_{xx} - (3\xi_y)y_{xx}^2 \\ &+ (\eta_y - 3\xi_x)y_{xxx} - (4\xi_y)y_x y_{xxx}\end{aligned} \tag{3.26}$$

bulunur.

$\eta_{\{2\}}$ ve $\eta_{\{3\}}$ ifadelerinin (3.25) ve (3.26) eşitliklerindeki karşılıkları (3.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\eta y_{xx} + y\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})yy_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})yy_x^2 - \xi_{yy}yy_x^3 \\
&+ (\eta_y - 2\xi_x)yy_{xx} - 3\xi_y yy_x y_{xx} + \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x \\
&+ (3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy})y_x^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 \\
&+ (3\eta_{xy} - 3\xi_{xx})y_{xx} + (3\eta_{yy} - 9\xi_{xy})y_x y_{xx} - 6\xi_{yy}y_x^2 y_{xx} \\
&- 3\xi_y y_{xx}^2 + (\eta_y - 3\xi_x)y_{xxx} - 4\xi_y y_x y_{xxx} = 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

bulunur.(3.27) denklemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&y\eta_{xx} + \eta_{xxx} + (2y\eta_{xy} - y\xi_{xx} + 3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x \\
&+ (y\eta_{yy} - 2y\xi_{xy} + 3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy})y_x{}^2 \\
&+ (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy} - y\xi_{yy})y_x{}^3 - \xi_{yyy}y_x^4 \\
&+ (3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \eta + y\eta_y - 2y\xi_x)y_{xx} \\
&+ (3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} - 3y\xi_y)y_x y_{xx} - 6\xi_{yy}y_x^2 y_{xx} \\
&+ (\eta_y - 3\xi_x)y_{xxx} - 4\xi_y y_x y_{xxx} = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olur. (3.28) değişmezlik şartı, (3.23) Blasius denkleminin bir çözümü y olduğunda sağlanır. (3.28) eşitliğindeki en yüksek türevin yerine $y_{xxx} = -yy_{xx}$ yazılıp tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&y\eta_{xx} + \eta_{xxx} + (2y\eta_{xy} - y\xi_{xx} + 3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x \\
&+ (y\eta_{yy} - 2y\xi_{xy} + 3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy})y_x^2 \\
&+ (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy} - y\xi_{yy})y_x^3 - \xi_{yyy}y_x^4 \\
&+ (3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \eta + y\xi_x)y_{xx} \\
&+ (3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} + y\xi_{xy} + y\xi_y)y_x y_{xx} \\
&- 6\xi_{yy}y_x^2 y_{xx} - 3\xi_y y_{xx}^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur. Bu değişmezlik şartının sağlanması için katsayılar sıfır olmalıdır.(3.29) eşitliğindeki son iki terimden $\xi_{yy} = 0$ ve $\xi_y = 0$ olur. Bu kural (3.29) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&y\eta_{xx} + \eta_{xxx} + (2y\eta_{xy} - y\xi_{xx} + 3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y_x \\
&+ (y\eta_{yy} + 3\eta_{xyy})y_x^2 + (\eta_{yyy})y_x^3 \\
&+ (3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \eta + y\xi_x)y_{xx} + (3\eta_{yy})y_x y_{xx} = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) denklemindeki son ve sondan üçüncü terimden $\eta_{yy}=0$ ve $\eta_{yyy}=0$ olduğundan denklem

$$y\eta_{xx}+\eta_{xxx}+\left(2y\eta_{xy}-y\xi_{xx}+3\eta_{xxy}-\xi_{xxx}\right)y_x+\left(3\eta_{xy}-3\xi_{xx}+\eta+y\xi_x\right)y_{xx}=0$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak Blasius denkleminin sonsuz küçükleri,

$$\begin{aligned}
&\xi_y=0,\\
&\xi_{yy}=0,\\
&\eta_{yy}=0,\\
&\eta_{yyy}=0,\\
&y\eta_{xx}+\eta_{xxx}=0,\\
&2y\eta_{xy}-y\xi_{xx}+3\eta_{xxy}-\xi_{xxx}=0,\\
&3\eta_{xy}-3\xi_{xx}+\eta+y\xi_x=0,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

denklemlerini sağlar. ξ ve η 'nün kısmi türevli denklemlerinden oluşan bu denklem sistemine grubun belirleyici denklemleri(determining equations) denir.

(3.31) belirleyici denklemlerinden,

$$\xi_y=0\Rightarrow\xi=p(x)$$

ve

$$\eta_{yy}=0\Rightarrow\eta_y=q(x)\Rightarrow\eta=q(x)y+r(x)$$

bulunabilir. Burada $p(x),q(x),r(x)$ keyfi fonksiyonlardır. Ayrıca $\xi_x=p_x(x)$, $\xi_{xx}=p_{xx}(x)$, $\xi_{xxx}=p_{xxx}(x)$, $\eta_x=q_x(x)y+r_x(x)$, $\eta_{xy}=q_x(x)$, $\eta_{xxy}=q_{xx}(x)$ bulunur. Bu ifadeler (3.31) denklem sistemindeki son ve sondan ikinci denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$3\eta_{xy}-3\xi_{xx}+\eta+y\xi_x=0\Rightarrow 3q_x-3p_{xx}+qy+r+yp_x=0 \tag{3.32}$$

ve

$$2y\eta_{xy}-y\xi_{xx}+3\eta_{xxy}-\xi_{xxx}=0\Rightarrow 2yq_x-yp_{xx}+3q_{xx}-p_{xxx}=0 \tag{3.33}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.32) eşitliğinin sağlanması için,

$$3q_x-3p_{xx}+r=0 \text{ ve } q+p_x=0, \tag{3.34}$$

olmalıdır. (3.33) eşitliğinin sağlanması için

$$2q_x - p_{xx} = 0 \text{ ve } 3q_{xx} - p_{xxx} = 0 \tag{3.35}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. (3.34) ve (3.35) eşitliklerinden,

$-q_x = p_{xx}$ ve $2q_x = p_{xx}$ olduğundan $3q_x = 0 \Rightarrow q_x = 0 \Rightarrow q(x) = -b$ bulunur. Ayrıca, $q = -p_x \Rightarrow -b = -p_x \Rightarrow p(x) = bx + a$ bulunur. Burada a, b keyfi sabitlerdir. Dahası $3q_x - 3p_{xx} + r = 0 \Rightarrow r = 0$ olur. Sonuç olarak

$$\xi = p(x) \Rightarrow \xi = a + bx,$$

$$\eta = q(x)y + r(x) \Rightarrow \eta = -by$$

yazılabilir. (3.31) denklemlerinin çözümlerinden,

$$\xi = a + bx,$$
$$\eta = -by$$

sonsuz küçükleri bulunur[9]. Buradan Lie grubunun üreteci,

$$X = (a + bx)\frac{\partial}{\partial x} - by\frac{\partial}{\partial y}$$

olur. Lie cebirinin üreteci aşağıdaki gibi bulunur.

$$a = 1, b = 0 \text{ için } X^a = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a = 0, b = 1 \text{ için } X^b = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

olduğundan Lie cebirinin genel üreteci,

$$X = c_1 X^a + c_2 X^b \tag{3.36}$$

şeklinde elde edilir. Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

X^a ve X^b operatörlerinin komütatörleri,

$$\{X^a, X^b\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} = X^a,$$

$$\{X^b, X^a\} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} = -X^a$$

şeklinde olup komütatör tablosu aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.1: Lie cebirinin komütatör tablosu

$\{,\}$	X^a	X^b
X^a	0	X^a
X^b	$-X^a$	0

Blasius denklemi çözülebilir iki parametreli bir grup altında değişmezdir. Grubun çözülebilir olması denklemin mertebesinin indirgenmesini garantiler. X^a operatörü, X^a, X^b Lie cebirinin bir idealidir. Bu grupların kullanımı mertebe indirgemede önemlidir.

İlk İndirgeme:

(3.36) eşitliğinde $c_1 = 1, c_2 = 0$ için X^a ideali ile indirgeme yapalım. $X^a_{\{3\}}$ üçüncü genişlemiş operatörünün karakteristik denklemleri

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy_x}{0} = \frac{dy_{xx}}{0} = \frac{dy_{xxx}}{0} \tag{3.37}$$

şeklindedir. (3.37) karakteristik denklemlerinden

$$\phi = y\,, G = y_x\,, \tag{3.38}$$

benzerlik dönüşümleri (değişmezleri) elde edilir[9]. Diferansiyel değişmezler metodu kullanarak verilen Blasius denklemini indirgeyebiliriz. Buradan,

$$\frac{DG}{D\phi} = \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x} + y_x\dfrac{\partial G}{\partial y} + y_{xx}\dfrac{\partial G}{\partial y_x}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + y_x\dfrac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{y_{xx}}{y_x},$$

$$\frac{D^2G}{D\phi^2} = \left(\frac{y_x y_{xxx} - y_{xx}^2}{y_x^2}\right)\frac{1}{y_x} = \frac{y_x(-yy_{xx}) - y_{xx}^2}{y_x^3} \tag{3.39}$$

bulunur. (3.39) denkleminde $y_{xxx} = -yy_{xx}$ yazıldı. (3.39) eşitliği düzenlenirse,

$$G\frac{D^2G}{D\phi^2} + \phi\frac{DG}{D\phi} + \left(\frac{DG}{D\phi}\right)^2 = 0 \tag{3.40}$$

elde edilir. Böylece Blasius denklemi bir basamak indirgenmiş oldu.

İkinci İndirgeme:

(ϕ, G) yeni değişkenleri üstündeki $\tilde{x} = e^b x$, $\tilde{y} = e^{-b} y$ grubunun etkisini belirleyelim.

$$\tilde{\phi} = e^{-b}\phi,\ \tilde{G} = e^{-2b}G \tag{3.41}$$

dönüşümü (3.40) denklemini değişmez bırakır[9].

$$\tilde{G}\frac{D^2\tilde{G}}{D\tilde{\phi}^2} + \tilde{\phi}\frac{D\tilde{G}}{D\tilde{\phi}} + \left(\frac{D\tilde{G}}{D\tilde{\phi}}\right)^2 = e^{-2b}\left(G\frac{D^2G}{D\phi^2} + \phi\frac{DG}{D\phi} + \left(\frac{DG}{D\phi}\right)^2\right) = 0$$

(3.41) denkleminin grup operatörü aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\xi_1 = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial b} = -e^{-b}\phi\Big|_{b=0} = -\phi\,,\ \eta_1 = \frac{\partial\tilde{G}}{\partial b} = -2e^{-2b}G\Big|_{b=0} = -2G\,,$$

$$\eta_{1\{1\}} = D\eta_1 - G_\phi D\xi_1 = -2\frac{\partial G}{\partial\phi} - 2G_\phi\frac{\partial G}{\partial G} - G_\phi\left(-\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\right) = -G_\phi\,, \eta_{1\{2\}} = 0\,,$$

$$X_1 = -\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - 2G\frac{\partial}{\partial G} - G_\phi\frac{\partial}{\partial G_\phi}$$

Böylece (3.41) grubunun karakteristik denklemleri,

$$\frac{d\phi}{-\phi} = \frac{dG}{-2G} = \frac{dG_\phi}{-G_\phi} = \frac{dG_{\phi\phi}}{0} \tag{3.42}$$

şeklinde yazılır. (3.42) karakteristik denklemlerinden ikinci aşamadaki benzerlik dönüşümleri,

$$\gamma = \frac{G}{\phi^2}\,,\ H = \frac{G_\phi}{\phi} \tag{3.43}$$

elde edilir.

Mertebenin ikinci indirgemesini üretmek için diferansiyel değişmezler metodu kullanırsa

$$\frac{DH}{D\gamma}=\frac{\dfrac{\partial H}{\partial \phi}+\dfrac{\partial H}{\partial G}\dfrac{dG}{d\phi}+\dfrac{\partial H}{\partial G_{\phi}}\dfrac{dG_{\phi}}{d\phi}}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial \phi}+\dfrac{\partial \gamma}{\partial G}\dfrac{dG}{d\phi}}=\frac{-\dfrac{G_{\phi}}{\phi^{2}}+\dfrac{1}{\phi}G_{\phi\phi}}{-2\dfrac{G}{\phi^{3}}+\dfrac{1}{\phi^{2}}G_{\phi}} \tag{3.44}$$

elde edilir. İkinci türev terimini yok etmek için ilk indirgenmiş denklemi kullanarak (3.44) denkleminin sağ tarafı

$$\frac{DH}{D\gamma}=\frac{-\dfrac{1}{\phi^{2}}\dfrac{dG}{d\phi}+\dfrac{1}{\phi}\left(-\dfrac{\phi}{G}\dfrac{dG}{d\phi}-\dfrac{1}{G}\left(\dfrac{dG}{d\phi}\right)^{2}\right)}{-2\dfrac{G}{\phi^{3}}+\dfrac{1}{\phi^{2}}\dfrac{dG}{d\phi}},$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{\phi}\dfrac{dG}{d\phi}-\dfrac{\phi}{G}\dfrac{dG}{d\phi}-\dfrac{1}{G}\left(\dfrac{dG}{d\phi}\right)^{2}}{-2\dfrac{G}{\phi^{2}}+\dfrac{1}{\phi}\dfrac{dG}{d\phi}} \tag{3.45}$$

şeklinde düzenlenebilir.

(3.43) dönüşümleri, (3.45) denkleminde kullanılarak Blasius denklemi,

$$\frac{dH}{d\gamma}=\frac{\gamma H+H+H^{2}}{2\gamma^{2}-H\gamma} \tag{3.46}$$

birinci mertebe adi diferansiyel denklemine indirgenebilir.

Çözüm:

(3.46) denkleminin çözüm yörüngeleri verilen sınır şartları için belirlenebilir,

$$H=F_{1}\left[\gamma;\tilde{\gamma},\tilde{H}\right]$$

orijinal problemin çözümünde iki integrasyona daha ihtiyaç vardır. İlki,

$$\frac{1}{\phi}\frac{dG}{d\phi}=F_{1}\left[\frac{G}{\phi^{2}}\right] \tag{3.47}$$

olur.

(3.47) eşitliği düzenlenirse,

$$\frac{d\left(G/\phi^2\right)}{d\ln\phi} = F_1\left[\frac{G}{\phi^2}\right] - \frac{2G}{\phi^2} \qquad (3.48)$$

bulunur. (3.48) denkleminin çözümü,

$$\frac{G}{\phi^2} = F_2[\phi]$$

olur. İkinci integrasyon,

$$x = \int \frac{dy}{y^2 F_2[y]} + c$$

şeklindedir. Burada c integrasyon sabitidir. Sonuçta çözüm,

$$y = Y\left[x; \tilde{\gamma}, \tilde{H}, c\right]$$

$\left[\tilde{\gamma}, \tilde{H}, c\right]$ sabitleri, orijinal problemin üç sınır şartı ile bağlantılıdır[9].

4. İKİNCİ MERTEBE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ İLE ÇÖZÜMLERİ

İkinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin Lie simetrisi ile çözülebilmesi için ikinci genişlemiş grup altında değişmez olması gerekir. Bunun için ikinci genişlemiş sonsuz küçük grubu kullanılır. Bu bölümde ikinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin Lie simetri teorisi ile ilgili çözümleri çeşitli örnekler üzerinde anlatıldı. Şimdi ikinci genişlemiş sonsuz küçük grubunu bulmak için ikinci türevin sonlu dönüşümünden bahsedelim.

4.1 İkinci Türevin Sonlu Dönüşümü

(3.5) eşitliği ile verilen birinci genişlemiş sonlu dönüşüm grubu

$$d\tilde{y}_{\tilde{x}} - \tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} d\tilde{x} = 0 \tag{4.1}$$

ikinci mertebede değme şartını sağlar. İkinci türevin dönüşümü, (4.1) eşitliğinde gösterilen diferansiyellerin alınması ile bulunabilir. Yani,

$$\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{d\tilde{y}_{\tilde{x}}}{d\tilde{x}} = \frac{G_{\{1\}x}dx + G_{\{1\}y}dy + G_{\{1\}y_x}dy_x}{F_x dx + F_y dy} \tag{4.2}$$

olur. (4.2) denkleminin sağ tarafındaki ifadenin pay ve paydasının dx'e bölünmesi ile ikinci türevin dönüşümü

$$\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \frac{G_{\{1\}x} + G_{\{1\}y}y_x + G_{\{1\}y_x}y_{xx}}{F_x + F_y y_x} = DG_{\{1\}}(DF)^{-1}$$

şeklinde elde edilir.

İkinci genişlemiş sonlu dönüşüm grubu,

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= F[x, y, s], \\
\tilde{y} &= G[x, y, s], \\
\tilde{y}_{\tilde{x}} &= G_{\{1\}}[x, y, y_x, s], \\
\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} &= G_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}, s],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

formundadır[9].

(4.3) eşitliğindeki,

$$G_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}, s] = DG_{\{1\}}(DF)^{-1} \tag{4.4}$$

şeklindedir. İkinci genişlemiş grup bir Lie grubudur[9].

4.2 İkinci Türevin Sonsuz Küçük Dönüşümü

İkinci genişlemiş grubun sonsuz küçük formu, yaklaşım kullanılarak bulunabilir. $G_{\{1\}} = y_x + s\eta_{\{1\}}$ ve $F = x + s\xi$ dönüşümlerinin türevleri alınıp (4.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$DG_{\{1\}} = \frac{\partial G_{\{1\}}}{\partial x} + y_x \frac{\partial G_{\{1\}}}{\partial y} + y_{xx} \frac{\partial G_{\{1\}}}{\partial y_x} = y_{xx} + s\left(D\eta_{\{1\}}\right)$$

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x} + y_x \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + s\xi_x + y_x s\xi_y = 1 + s\left(\xi_x + \xi_y y_x\right)$$

$$\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \left(DG_{\{1\}}\right)\left(DF\right)^{-1} = \frac{y_{xx} + s\left(\eta_{\{1\}x} + \eta_y y_x\right)}{1 + s\left(\xi_x + s\xi_y\right)} = \frac{y_{xx} + s\left(D\eta_{\{1\}}\right)}{1 + s\left(D\xi\right)} \tag{4.5}$$

bulunur. (4.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadenin paydası binom serilerine açılır ve s parametresini içeren en küçük mertebeye göre yazılırsa,

$$\tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} = y_{xx} + s\left(D\eta_{\{1\}} - y_{xx}D\xi\right)$$

elde edilir.

İkinci genişlemiş sonsuz küçük grup,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + s\xi[x, y], \\ \tilde{y} &= y + s\eta[x, y], \\ \tilde{y}_{\tilde{x}} &= y_x + s\eta_{\{1\}}[x, y, y_x], \\ \tilde{y}_{\tilde{x}\tilde{x}} &= y_{xx} + s\eta_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}], \end{aligned}$$

formundadır[9]. Ayrıca

$$\eta_{\{2\}}[x, y, y_x, y_{xx}] = D\eta_{\{1\}} - y_{xx}D\xi \ , \tag{4.6}$$

şeklindedir[9].

(4.6) eşitliğindeki,

$$D\eta_{\{1\}} = \frac{\partial \eta_{\{1\}}}{\partial x} + y_x \frac{\partial \eta_{\{1\}}}{\partial y} + y_{xx} \frac{\partial \eta_{\{1\}}}{\partial y_x}, \quad D\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} + y_x \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

olduğundan ikinci genişlemiş sonsuz küçük,

$$\eta_{\{2\}} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx} \quad (4.7)$$

bulunur[9]. Dikkat edelim ki $\eta_{\{2\}}$, y_{xx}'de lineerdir.

4.3 İkinci Mertebe Adi Diferansiyel Denklemler ve Grubun Belirleyici Denklemleri

Genel ikinci mertebe adi diferansiyel denklem,

$$\psi = \Psi[x, y, y_x, y_{xx}] = 0$$

$(\xi, \eta, \eta_{\{1\}}, \eta_{\{2\}})$ sonsuz küçükleri ile iki kez genişlemiş grup altında değişmez olması için gerek ve yeter koşul

$$X_{\{2\}}\Psi = 0 \quad (4.8)$$

olmasıdır. (4.8) eşitliğini

$$X_{\{2\}}\Psi = \xi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \eta_{\{1\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_x} + \eta_{\{2\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_{xx}} = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\eta_{\{1\}}$ ve $\eta_{\{2\}}$, (3.13) ve (4.7) eşitlikleri ile verilenlerdir. Değişmezlik şartı, verilen ikinci veya daha yüksek mertebeden bir denklemi değişmez yapan grubu belirlemek için kullanılır.

4.3.1 Örnek: En basit ikinci mertebe adi diferansiyel denklemi

$$y_{xx} = 0 \quad (4.9)$$

değişmez yapan grubu bulalım[9].

(4.9) denklemini değişmez bırakan grup,

$$X_{\{2\}}\Psi = \xi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \eta_{\{1\}}\frac{\partial\Psi}{\partial y_x} + \eta_{\{2\}}\frac{\partial\Psi}{\partial y_{xx}} = 0$$

değişmezlik şartının sağlanması halinde bulunabilir. Bu değişmezlik şartındaki kısmi türevler alınırsa,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial\Psi}{\partial y_x} = 0\,,\ \frac{\partial\Psi}{\partial y_{xx}} = 1$$

bulunur. Bu değerler değişmezlik şartında yerine yazılırsa,

$$X_{\{2\}}\Psi = \eta_{\{2\}} = 0 \tag{4.10}$$

olur. (4.7) eşitliğinde verilen $\eta_{\{2\}}$ değeri (4.10) denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 \\ &-\xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx} = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. Verilen denklem $y_{xx} = 0$ olduğundan (4.11) değişmezlik şartı,

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 - \xi_{yy}y_x^3 = 0 \tag{4.12}$$

şeklinde yazılabilir. y_x niceliği, $y_{xx} = 0$ ’in çözümlerinin ailesi tarafından kapsanan sınırlı keyfi değerler alabilir. Böylece değişmezlik şartı, (4.12) denklemindeki her katsayısının sıfır olması halinde sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} = 0, \\ &2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0, \\ &\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \\ &\xi_{yy} = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ξ ve η ’nün 4 lineer kısmi türevli denklem sistemi olan grubun belirleyici denklemleri elde edilir.

(4.13) belirleyici denklemleri bilinmeyen sonsuz küçüklerin bulunduğu lineer kısmi diferansiyel denklemlerin bir kümesini oluşturur. Bütün durumlarda, bütün çözümler için genel bir yol yoktur. Çeşitli teknikler kullanılabilir.

Bu sistem tipik olarak ortaya çıkan çözümlerin sınıfları oldukça kısıtlı olarak belirlenebilir. Bu nedenle kuvvet serisi çözümü daha kullanışlıdır. Kuvvet serileri sonsuz küçüklerin bir ya da daha fazlası için kısaltılmışı iyi bir olasılıktır. Örneğin aşağıdaki formdaki gibi üçüncü mertebe serileri deneyelim[9].

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 \\ \eta &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + b_7 x^3 + b_8 x^2 y + b_9 xy^2 + b_{10} y^3 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Burada a_i, b_i, $i = 1,...,10$ keyfi sabitlerdir. (4.14) eşitliğindeki sonsuz küçüklerin (4.13) belirleyici denklemlerindeki kısmi türevleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\xi_x = a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 3a_7 x^2 + 2a_8 xy + a_9 y^2$$

$$\xi_y = a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 ,$$

$$\xi_{xx} = 2a_4 + 6a_7 x + 2a_8 y ,$$

$$\xi_{xy} = a_5 + 2a_8 x + 2a_9 y ,$$

$$\xi_{yy} = 2a_6 + 2a_9 x + 6a_{10} y ,$$

$$\eta_x = b_2 + 2b_4 x + b_5 y + 3b_7 x^2 + 2b_8 xy + b_9 y^2 ,$$

$$\eta_y = b_3 + b_5 x + 2b_6 y + b_8 x^2 + 2b_9 xy + 3b_{10} y^2 ,$$

$$\eta_{xx} = 2b_4 + 6b_7 x + 2b_8 y ,$$

$$\eta_{xy} = b_5 + 2b_8 x + 2b_9 y ,$$

$$\eta_{yy} = 2b_6 + 2b_9 x + 6b_{10} y$$

Bulunan ifadeler (4.13) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} = 2b_4 + 6b_7 x + 2b_8 y = 0, \\ &2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 2b_5 + 4b_8 x + 4b_9 y - 2a_4 - 6a_7 x - 2a_8 y = 0, \\ &\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 2b_6 + 2b_9 x + 6b_{10} y - 2a_5 - 2a_8 x - 2a_9 y = 0, \\ &\xi_{yy} = 2a_6 + 2a_9 x + 6a_{10} y = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) denklemleri x ve y 'nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} &2b_4 + 6b_7 x + 2b_8 y = 0, \\ &(2b_5 - 2a_4) + (4b_8 - 6a_7)x + (4b_9 - 2a_8)y = 0, \\ &(2b_6 - 2a_5) + (2b_9 - 2a_8)x + (6b_{10} - 2a_9)y = 0, \\ &2a_6 + 2a_9 x + 6a_{10} y = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

bulunur. x ve y değişkenleri tamamen bağımsızdır. x ve y 'nin katsayıları ayrı ayrı sıfır olursa (4.16) sağlanır. Sonuç olarak,

$$\begin{gathered} a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0\,, \\ b_4 = b_7 = b_8 = b_9 = b_{10} = 0\,, \\ b_5 = a_4\,,\; b_6 = a_5 \end{gathered} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) eşitliklerindeki sonuçlar (4.14) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy \\ \eta &= b_1 + b_2 x + b_3 y + a_4 xy + a_5 y^2 \end{aligned}$$

$y_{xx} = 0$ denkleminin sonsuz küçükleri bulunur[9]. Bunlar sekiz bağımsız parametreli düzlemde izdüşüm (projective) dönüşümleridir.

4.3.2 Teorem: İkinci mertebeden bir diferansiyel denklemi değişmez bırakan lineer bağımsız grup operatörü sayısı sekizi geçemez[10].

4.3.3 Örnek: (Sonsuz küçükleri logaritmalar içeren lineer olmayan ikinci mertebe bir adi diferansiyel denklem)

$$y_{xx} + \frac{1}{x} y_x + e^y = 0 \tag{4.18}$$

lineer olmayan ikinci mertebe adi diferansiyel denklemin simetri grubunu[9] ve genel çözümünü araştıralım.

(4.18) denklemi,

$$\psi = \Psi[x, y, y_x, y_{xx}] = y_{xx} + \frac{1}{x} y_x + e^y \tag{4.19}$$

şeklinde yazılabilir. Değişmezlik şartı,

$$X_{\{2\}}\Psi = \xi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \eta_{\{1\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_x} + \eta_{\{2\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_{xx}} = 0 \tag{4.20}$$

olduğundan

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{y_x}{x^2}\,, \frac{\partial \Psi}{\partial y} = e^y\,,\; \frac{\partial \Psi}{\partial y_x} = \frac{1}{x}\,, \frac{\partial \Psi}{\partial y_{xx}} = 1$$

değerleri (4.20) şartında yerine yazılırsa,

$$-\frac{\xi}{x^2}y_x+\eta e^y+\frac{\eta_{\{1\}}}{x}+\eta_{\{2\}}=0 \tag{4.21}$$

bulunur.(4.21) denkleminin tam yazımı,

$$\begin{aligned}&-\frac{\xi}{x^2}y_x+\eta e^y+\frac{1}{x}\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y_x-\xi_y y_x^2\right)\\&+\eta_{xx}+\left(2\eta_{xy}-\xi_{xx}\right)y_x+\left(\eta_{yy}-2\xi_{xy}\right)y_x^2\\&-\xi_{yy}y_x^3+\left(\eta_y-2\xi_x\right)y_{xx}-3\xi_y y_x y_{xx}=0\end{aligned} \tag{4.22}$$

şeklindedir. (4.22) bağıntısında, $y_{xx}=-\frac{1}{x}y_x-e^y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}&-\frac{\xi}{x^2}y_x+\eta e^y+\frac{1}{x}\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y_x-\xi_y {y_x}^2\right)\\&+\eta_{xx}+\left(2\eta_{xy}-\xi_{xx}\right)y_x+\left(\eta_{yy}-2\xi_{xy}\right){y_x}^2\\&-\xi_{yy}y_x^3+\left(\eta_y-2\xi_x-3\xi_y y_x\right)\left(-e^y-\frac{1}{x}y_x\right)=0\end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. (4.23) değişmezlik şartı düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}&\frac{\eta_x}{x}+\eta_{xx}-\left(\eta_y-2\xi_x-\eta\right)e^y\\&+\left(-\frac{\xi}{x^2}+2\eta_{xy}-\xi_{xx}+\frac{\xi_x}{x}+3\xi_y e^y\right)y_x\\&+\left(\eta_{yy}-2\xi_{xy}+\frac{2\xi_y}{x}\right){y_x}^2-\xi_{yy}y_x^3=0\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. y_x, (4.19) çözümlerinin ailesini sağlayan y_x değişimleri ile keyfi değerler alır. (4.24) denklemindeki her katsayı ayrı ayrı sıfır ise değişmezlik şartı sağlanır. Sonsuz küçükler,

$$\begin{aligned}&\frac{\eta_x}{x}+\eta_{xx}-\left(\eta_y-2\xi_x-\eta\right)e^y=0,\\&-\frac{\xi}{x^2}+2\eta_{xy}-\xi_{xx}+\frac{\xi_x}{x}+3\xi_y e^y=0,\\&\eta_{yy}-2\xi_{xy}+\frac{2\xi_y}{x}=0,\\&\xi_{yy}=0.\end{aligned} \tag{4.25}$$

belirleyici denklemlerini sağlar.

(4.25) denklemlerinin çözümlerini şöyle bulabiliriz[5].

$$\xi_{yy} = 0 \Rightarrow \xi_y = p(x) \Rightarrow \xi = p(x)y + q(x),$$

p ve q keyfi fonksiyonlardır.

e^y hiçbir zaman sıfır olamayacağından ilk iki denklemdeki e^y 'li ifadelerin katsayıları sıfır olmalıdır. Yani,

$$\xi_y = 0 \text{ ve } 2\xi_x + \eta - \eta_y = 0$$

olur. $\xi_y = 0$ ve $p(x) = 0$ olduğundan $\xi = p(x)y + q(x) \Rightarrow \xi = q(x)$ olur. Ayrıca (4.25)'deki üçüncü eşitlikten,

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} + \frac{2\xi_y}{x} = 0 \Rightarrow \eta_{yy} = 0,$$

$$\eta_{yy} = 0 \Rightarrow \eta_y = A(x) \text{ ve } \eta = A(x)y + B(x)$$

bulunur. $\xi_x = q_x$ olduğundan $2\xi_x + \eta - \eta_y = 0$ ifadesinde bulunanlar yerine yazılırsa,

$$2\xi_x + \eta - \eta_y = 0 \Rightarrow 2q_x(x) + A(x)y + B(x) - A(x) = 0$$

olur. Buradan da $A(x) = 0$ ve $B(x) = -2q_x(x)$ yazılabilir. $\eta = -2q_x(x)$ olur. Bulunan ifadeler (4.25) eşitliklerinden ikincisinde yerine yazılırsa,

$$-\frac{\xi}{x^2} + 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + \frac{\xi_x}{x} + 3\xi_y e^y = 0 \Rightarrow -\frac{q}{x^2} - q_{xx} + \frac{q_x}{x} = 0$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse,

$$q_{xx} - \frac{q_x}{x} + \frac{q}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(q_x - \frac{q}{x}\right)_x = 0$$

elde edilir. Bu durumda, $\left(q_x - \frac{q}{x}\right) = 0 \wedge q_x - \frac{q}{x} = b, b \in IR$ olmalıdır. Denklemler çözülürse,

$$q_x - \frac{q}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln q = \ln x + \ln a \Rightarrow \ln q = \ln ax$$

$$\Rightarrow e^{\ln q} = e^{\ln ax} \Rightarrow q = ax \tag{4.26}$$

olur. $q_x - \frac{q}{x} = b$ ve integrant çarpanı $\lambda = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ olduğundan çözüm,

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}q\right)dx = \int \frac{b}{x}dx \Rightarrow q = bx\ln x \tag{4.27}$$

olur. a ve b keyfi sabitlerdir. (4.26) ve (4.27) eşitliklerinden,

$$q(x) = ax + bx\ln x$$

yazılabilir.

$$\xi = q(x) \Rightarrow \xi = ax + bx\ln x$$

ve

$$\eta = -2q_x(x) \Rightarrow \eta = -2a - 2b - 2b\ln x$$

bulunur.

(4.25) denklemlerinin çözümü,

$$\begin{aligned} \xi &= ax + b(x\ln x), \\ \eta &= a(-2) + b(-2 - 2\ln x) \end{aligned} \tag{4.28}$$

formundadır. (4.28) eşitliklerinden Lie grubunun operatörü ise

$$X = (ax + b(x\ln x))\frac{\partial}{\partial x} + (a(-2) + b(-2 - 2\ln x))\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.29}$$

şeklindedir. Lie cebirinin üreteci aşağıdaki gibi bulunur.(4.29) eşitliğinde

$$a = 1, b = 0 \text{ için } X^a = x\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y},$$

$$a = 0, b = 1 \text{ için } X^b = x\ln x\frac{\partial}{\partial x} - 2(1 + \ln x)\frac{\partial}{\partial y}$$

olduğundan Lie cebirinin genel üreteci ise

$$X = c_1 X^a + c_2 X^b \tag{4.30}$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

(4.30) eşitliğinde $c_1 = 1, c_2 = 0$ için $X^{a}_{\{2\}} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}$ Lie cebirinin ikinci genişlemiş karakteristik denklemi,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2} = \frac{dy_x}{-y_x} = \frac{dy_{xx}}{-2y_{xx}} \tag{4.31}$$

yazılabilir. (4.31) karakteristik denklemlerinden

$$u = xy_x\,,\ v = x^2 e^y \tag{4.32}$$

benzerlik dönüşümleri(değişmezleri) elde edilir.

Diferansiyel değişmezler metodunu kullanarak denklemi indirgeyebiliriz. Buradan

$$Dv = \frac{\partial v}{\partial x} + y_x\frac{\partial v}{\partial y} = xe^y\left(2 + xy_x\right),$$

$$Du = \frac{\partial u}{\partial x} + y_x\frac{\partial u}{\partial y} + y_{xx}\frac{\partial u}{\partial y_x} = y_x + xy_{xx} = y_x + x\left(-\frac{1}{x}y_x - e^y\right) = -xe^y\,,$$

$$\frac{Dv}{Du} = \frac{xe^y\left(2 + xy_x\right)}{-xe^y} = -2 - u$$

$$\frac{dv}{du} = -2 - u \tag{4.33}$$

birinci mertebe adi diferansiyel denklemi bulunur. (4.33) eşitliğinin integrali alınırsa,

$$v = -2u - \frac{u^2}{2} + k_1 \tag{4.34}$$

k_1 keyfi sabit olmak üzere denklemi elde edilir. (4.32) eşitliğindeki $u\,,v$ değerleri (4.34) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_x^2 + \frac{4}{x}y_x + 2e^y = \frac{2}{x^2}k_1 \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35) adi diferansiyel denkleminin çözümü,

$$y = F[x, y, k]$$

k keyfi sabit olmak üzere kapalı formunda bulunur.

Şimdi de lineer bir adi diferansiyel denklemi simetri ile çözelim.

4.3.4 Örnek: $y_{xx} - y = 0$ adi diferansiyel denkleminin genel çözümünü simetri teorisi ile bulalım.

Bu denklemin simetri ile çözülebilmesi için değişmez olduğu grubun üretecini belirlememiz gerekir. Bunun için $\Psi[x, y, y_x, y_{xx}] = y_{xx} - y$ olmak üzere

$$X_{\{2\}}\Psi = \xi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \eta_{\{1\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_x} + \eta_{\{2\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_{xx}} = 0 \tag{4.36}$$

değişmezlik şartını sağlamalıdır. (4.36) eşitliğindeki kısmi türevler

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0\,, \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -1\,, \frac{\partial \Psi}{\partial y_x} = 0\,, \frac{\partial \Psi}{\partial y_{xx}} = 1$$

olduğundan bu değerler (4.36) şartında yerine yazılırsa,

$$-\eta + \eta_{\{2\}} = 0 \tag{4.37}$$

bulunur. (4.37) eşitliğindeki $\eta_{\{2\}}$ değerinin (4.7) eşitliği ile verilen karşılığını yerine yazalım.

$$\begin{aligned} &-\eta + \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 \\ &-\xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx} = 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

(4.38) denkleminde $y_{xx} = y$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} &-\eta + \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 \\ &-\xi_{yy}y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y - 3y\xi_y y_x = 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir. (4.39) denklemi y 'nin türevlerine göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &-\eta + \eta_{xx} + y\eta_y - 2y\xi_x + (2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3y\xi_y)y_x \\ &+ (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x{}^2 - \xi_{yy}y_x{}^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

bulunur.

(4.40) eşitliğinin sağlanması için,

$$\begin{aligned}
&-\eta+\eta_{xx}+y\eta_y-2y\xi_x=0,\\
&2\eta_{xy}-\xi_{xx}-3y\xi_y=0,\\
&\eta_{yy}-2\xi_{xy}=0,\\
&\xi_{yy}=0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

belirleyici denklemleri bulunur. (4.41) denklemlerinin çözümünü şöyle yapabiliriz,

$$\xi_{yy}=0 \Rightarrow \xi_y=a(x) \Rightarrow \xi=a(x)y+b(x) \tag{4.42}$$

$a(x)$ ve $b(x)$ keyfi fonksiyonlardır. Ayrıca,

$$\xi_{xy}=a_x(x),\ \xi_{xx}=a_{xx}(x)y+b_{xx}(x)$$

bulunur. Uygun olan değerler (4.41) denklemlerinin üçüncüsünde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\eta_{yy}-2\xi_{xy}=0 \Rightarrow \eta_{yy}&=2a_x(x)\\
\Rightarrow \eta_y&=2a_x(x)y+p(x)\\
\Rightarrow \eta&=a_x(x)y^2+p(x)y+q(x)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

bulunur. $p(x)$ ve $q(x)$ keyfi fonksiyonlardır. Dahası $\eta_{xy}=2a_{xx}(x)y+p_x(x)$ olur. Uygun ifadeler (4.41)'un ikinci denkleminde yerine yazılırsa,

$$2\eta_{xy}-\xi_{xx}-3y\xi_y=0 \Rightarrow 4a_{xx}(x)y+2p_x(x)-a_{xx}(x)y-b_{xx}(x)-3a(x)y=0 \tag{4.44}$$

olur. (4.44) denklemi y 'nin katlarına göre düzenlenirse,

$$3(a_{xx}(x)-a(x))y+2p_x(x)-b_{xx}(x)=0 \tag{4.45}$$

bulunur. (4.45) eşitliğinin sağlanması için

$$a_{xx}(x)-a(x)=0,\ 2p_x(x)-b_{xx}(x)=0 \tag{4.46}$$

olmalıdır. Ayrıca,

$$-\eta+\eta_{xx}+y\eta_y-2y\xi_x=0$$

denkleminde (4.42) ve (4.43) sonsuz küçüklerinin değerleri yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&-a_x(x)y^2-p(x)y-q(x)+a_{xxx}(x)y^2+p_{xx}(x)y+q_{xx}(x)\\
&+2a_x(x)y^2+p(x)y-2a_x(x)y^2-2b_x(x)y=0
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

olur. (4.47) denklemi y 'nin katlarına göre düzenlenirse,

$$
(-a_x(x)+a_{xxx}(x))y^2+(p_{xx}(x)-2b_x(x))y+q_{xx}(x)-q(x)=0, \tag{4.48}
$$

elde edilir. (4.48) eşitliğinin sağlanması için

$$
-a_x(x)+a_{xxx}(x)=0,\ p_{xx}(x)-2b_x(x)=0,\ q_{xx}(x)-q(x)=0 \tag{4.49}
$$

olmalıdır.(4.46) ve (4.49) denklemlerinin çözümünden sonsuz küçükleri bulabiliriz.

$$
a_{xx}(x)-a(x)=0 \Leftrightarrow a(x)=c_1e^x\ ,
$$

$$
q_{xx}(x)-q(x)=0 \Leftrightarrow q(x)=c_2e^x,
$$

olur. (4.46) ve (4.49) eşitliklerinden,

$$
2p_x(x)=b_{xx}(x),\ \frac{p_{xx}(x)}{2}=b_x(x) \Rightarrow b_{xx}(x)=\frac{p_{xxx}(x)}{2},
$$

yazılabilir.

$$
p_x(x)=\frac{b_{xx}(x)}{2} \Leftrightarrow p_{xx}(x)=\frac{b_{xxx(x)}}{2}
$$

$$
p_{xx}(x)=2b_x(x)
$$

olduğundan

$$
b_{xxx}(x)=4b_x(x) \Rightarrow b(x)=c_3e^{2x}+c_4
$$

bulunur. (4.46) eşitliğinden

$$
2p_x(x)-b_{xx}(x)=0 \Rightarrow p(x)=c_3e^{2x}+c_5
$$

elde edilir. Bulunan $a(x), b(x), p(x), q(x)$ ifadelerinin karşılıkları (4.42) ve (4.43) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\xi &= c_1e^xy+c_3e^{2x}+c_4\\
\eta &= c_1e^xy^2+(c_3e^{2x}+c_5)y+c_2e^x
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

sonsuz küçükleri bulunur. (4.50) sonsuz küçük grubu ile Lie grubunun üreteci,

$$X = \left(c_1 e^x y + c_3 e^{2x} + c_4\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(c_1 e^x y^2 + \left(c_3 e^{2x} + c_5\right)y + c_2 e^x\right)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.51}$$

şeklinde yazılabilir. Lie cebirinin üreteci ise aşağıdaki gibi bulunur.(4.51)grubunda,

$$c_1 = 1 \text{ için } X^1 = e^x y \frac{\partial}{\partial x} + e^x y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad c_2 = 1 \text{ için } X^2 = e^x \frac{\partial}{\partial y},$$

$$c_3 = 1 \text{ için } X^3 = e^{2x} \frac{\partial}{\partial x} + e^{2x} y \frac{\partial}{\partial y}, \quad c_4 = 1 \text{ için } X^4 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$c_5 = 1 \text{ için } X^5 = y \frac{\partial}{\partial y}$$

bir parametreli operatörleri bulunur. Buradan Lie cebirinin genel üreteci

$$X = a_1 X^1 + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 + a_5 X^5 \tag{4.52}$$

şeklindedir. Burada a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 keyfi sabitlerdir.

Tablo 4.1: Lie cebirin komütatör tablosu

$\{,\}$	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5
X^1	0	$-X^3$	0	$-X^1$	$-X^1$
X^2	X^3	0	0	$-X^2$	X^2
X^3	0	0	0	$-2X^3$	0
X^4	X^1	X^2	$2X^3$	0	0
X^5	X^1	$-X^2$	0	0	0

(4.52) eşitliğinde $a_4 = 1$ ve $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$ için ikinci genişlemiş operatörle indirgemeyi yapalım. $X^4_{\{2\}} = \frac{\partial}{\partial x}$ Lie cebirinin ikinci genişlemiş karakteristik denklemi,

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dy_x}{0}=\frac{dy_{xx}}{0}\ , \tag{4.53}$$

şeklindedir. (4.53) karakteristik denklemlerinden,

$$u=y \text{ ve } v=y_x$$

benzerlik dönüşümleri elde edilir. Diferansiyel değişmezler metodu ile mertebeyi indirgeyerek çözümü yapalım. Buradan denklem,

$$Dv=\frac{\partial v}{\partial x}+y_x\frac{\partial v}{\partial y}+y_{xx}\frac{\partial v}{\partial y_x}=y_{xx}\,,$$

$$Du=\frac{\partial u}{\partial x}+y_x\frac{\partial u}{\partial y}=y_x\,,$$

$$\frac{Dv}{Du}=\frac{y_{xx}}{y_x}=\frac{y}{y_x}=\frac{u}{v} \tag{4.54}$$

birinci mertebe ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüştü. (4.54) denklemi integre edilirse,

$$\frac{dv}{du}=\frac{u}{v}\Rightarrow vdv=udu$$

$$\Rightarrow v^2=u^2+k_1$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{u^2+k_1} \tag{4.55}$$

bulunur. (4.55) denkleminde $u=y$ ve $v=y_x$ yazılırsa,

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2+k_1} \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.56) denkleminin çözümü,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2+k_1}}=dx\Rightarrow \ln\left|y+\sqrt{y^2+k_1}\right|=x+\ln k_2\,,$$

$$\Rightarrow y+\sqrt{y^2+k_1}=k_2e^x$$

k_1,k_2 keyfi sabitler olmak üzere elde edilmiş olur.

5. DUFFING DENKLEMİNİN SİMETRİ İLE ÇÖZÜMÜ

Duffing denklemi, sönümlü(damped) ve devamlı(driven) osilatörler modeli olarak kullanılan ikinci mertebe lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir. Denklemi, $y = y(x)$, x anındaki yer değiştirme; y_x hız ; y_{xx} ivme; $\delta, \alpha, \lambda, \gamma, w$ sabitler olmak üzere

$$y_{xx} + \delta y_x + \alpha y + \lambda y^3 = \gamma \cos wx$$

ile verilmektedir. Duffing denklemi ile detaylı bilgiler [17] kaynağından elde edilebilir.

δ=0, α=1, γ=0 durumunda elde edilen

$$y_{xx} + y + \lambda y^3 = 0, \qquad y(0) = A, y_x(0) = 0$$

Duffing denkleminin simetri çözümünü yapalım.

$\Psi[x, y, y_x, y_{xx}] = y_{xx} + y + \lambda y^3 = 0$ denkleminin çözülebilmesi için $X_{\{2\}}\Psi = 0$ değişmezlik şartını sağlanmalıdır. Bunun için,

$$X_{\{2\}}\Psi = \xi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \eta_{\{1\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_x} + \eta_{\{2\}} \frac{\partial \Psi}{\partial y_{xx}} = 0 \tag{5.1}$$

olmalıdır. (5.1) eşitliğindeki kısmi türevler alınır,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1 + 3\lambda y^2, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_{xx}} = 1$$

ve bu ifadeler değişmezlik şartında yerine yazılırsa,

$$\eta(1 + 3\lambda y^2) + \eta_{\{2\}} = 0 \tag{5.2}$$

bulunur. $\eta_{\{2\}}$'nin (4.7) eşitliğinde verilen karşılığı (5.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\eta(1 + 3\lambda y^2) + \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y_x + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y_x^2 \\ &- \xi_{yy} y_x^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y_{xx} - 3\xi_y y_x y_{xx} = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

eşitliği elde edilir.

(5.3) eşitliğinde $y_{xx}=-y-\lambda y^3$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\eta\left(1+3\lambda y^2\right)+\eta_{xx}+\left(2\eta_{xy}-\xi_{xx}\right)y_x+\left(\eta_{yy}-2\xi_{xy}\right)y_x^2\\&-\xi_{yy}y_x^3+\left(\eta_y-2\xi_x\right)\left(-y-\lambda y^3\right)+3\xi_y y_x\left(y+\lambda y^3\right)=0\end{aligned}\tag{5.4}$$

bulunur. (5.4) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&\eta\left(1+3\lambda y^2\right)+\eta_{xx}-y\eta_y+2y\xi_x-\lambda y^3\eta_y+2\lambda y^3\xi_x\\&+\left(2\eta_{xy}-\xi_{xx}+3y\xi_y+3\lambda y^3\xi_y\right)y_x+\left(\eta_{yy}-2\xi_{xy}\right)y_x^2-\xi_{yy}y_x^3=0\end{aligned}\tag{5.5}$$

elde edilir. (5.5) denkleminin sağlanması için

$$\begin{aligned}&\xi_{yy}=0,\\&\eta_{yy}-2\xi_{xy}=0,\\&2\eta_{xy}-\xi_{xx}+3y\xi_y+3\lambda y^3\xi_y=0,\\&\eta\left(1+3\lambda y^2\right)+\eta_{xx}-y\eta_y+2y\xi_x-\lambda y^3\eta_y+2\lambda y^3\xi_x=0\end{aligned}\tag{5.6}$$

şeklinde belirleyici denklemler bulunur. (5.6) belirleyici denklemlerinden sonsuz küçükler aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\xi_{yy}=0\Rightarrow\xi_y=a(x)\Rightarrow\xi=a(x)y+b(x)\tag{5.7}$$

ve

$$\xi_{xy}=a_x(x)$$

olduğundan bunları (5.6) denklemlerinin ikincisinde yerine yazılırsa,

$$\eta_{yy}=2\xi_{xy}\Rightarrow\eta_{yy}=2a_x(x)\Rightarrow\eta_y=2a_x(x)y+p(x)$$

$$\Rightarrow\eta=a_x(x)y^2+p(x)y+q(x)\tag{5.8}$$

ve

$$\eta_{xy}=2a_{xx}(x)y+p_x(x),\ \xi_{xx}=a_{xx}(x)y+b_{xx}(x)$$

bulunur. Bu ifadeler $2\eta_{xy}-\xi_{xx}+3y\xi_y+3\lambda y^3\xi_y=0$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$4a_{xx}(x)y+2p_x(x)-a_{xx}(x)y-b_{xx}(x)+3a(x)y+3\lambda a(x)y^3=0\tag{5.9}$$

elde edilir. (5.9) eşitliği y 'nin katlarına göre düzenlenirse,

$$2p_x(x)-b_{xx}(x)+3(a_{xx}(x)+a(x))y+3\lambda a(x)y^3=0 \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.10) eşitliğinin sağlanması için

$$\lambda\neq 0 \text{ ise } a(x)=0\,,\, 2p_x(x)-b_{xx}(x)=0\,,\; a_{xx}(x)+a(x)=0 \tag{5.11}$$

olmalıdır. Dolayısıyla $\xi=b(x)$ ve $\eta=p(x)y+q(x)$ yazılabilir. Ayrıca,

$$\xi_x=b_x(x),\; \eta_y=p(x),\; \eta_{yy}=0\,,\; \eta_{xx}=p_{xx}(x)y+q_{xx}(x)$$

olduğundan bunlar $\eta(1+3\lambda y^2)+\eta_{xx}-y\eta_y+2y\xi_x-\lambda y^3\eta_y+2\lambda y^3\xi_x=0$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&(p(x)y+q(x))(1+3\lambda y^2)+p_{xx}(x)y+q_{xx}(x)\\ &-p(x)y+2yb_x(x)-\lambda y^3p(x)+2\lambda y^3b_x(x)=0\end{aligned} \tag{5.12}$$

elde edilir. (5.12) denklemi y 'nin katlarına göre düzenlenirse,

$$q(x)+q_{xx}(x)+(p_{xx}(x)+2b_x(x))y+3\lambda q(x)y^2+2\lambda(p(x)+b_x(x))y^3=0 \tag{5.13}$$

bulunur. (5.13) eşitliğinin sağlanması için y 'nin katsayıları sıfır olmalıdır. Buradan

$$\lambda\neq 0 \text{ ise } q(x)=0\,,\; q(x)+q_{xx}(x)=0\,,\, p_{xx}(x)+2b_x(x)=0\,,\, p(x)+b_x(x)=0 \tag{5.14}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.14) eşitliklerinden, $p(x)+b_x(x)=0$ eşitliğinin her iki tarafının x 'e göre türevini alınırsa

$$b_{xx}(x)=-p_x(x),$$

bulunur. (5.11) denkleminden $2p_x(x)-b_{xx}(x)=0$ olduğundan

$$p_x(x)=0 \quad \text{ve} \quad p(x)=c_1 \tag{5.15}$$

yazılabilir. Ayrıca, (5.14) ve (5.15) eşitliklerinden

$$b_x(x)=-p(x)\Rightarrow b_x(x)=-c_1\Rightarrow b(x)=-c_1x+c_2$$

bulunur.

$p_{xx}(x)+2b_x(x)=0$ ve $p_x(x)=0$ olduğundan

$$b_x(x)=0 \Rightarrow b(x)=c_2$$

yazılabilir. Burada c_2 keyfi sabittir. Böylece simetri grubunun sonsuz küçükleri,

$$\begin{aligned} \xi &= c_2 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

şeklinde elde edilmiş olur. (5.16) eşitliğinden Lie grubunun üreteci ise

$$X = c_2 \frac{\partial}{\partial x} \tag{5.17}$$

formundadır. Lie cebirinin üreteci aşağıdaki gibi bulunur.(5.17) eşitliğinde,

$$c_2 = 1 \text{ için } X^1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

olduğundan Lie cebirinin genel üreteci ise

$$X = a_1 X^1 \tag{5.18}$$

a_1 keyfi sabit olmak üzere şeklinde elde edilir.

(5.18) eşitliğinde $a_1 = 1$ için $X^1_{\{2\}} = \frac{\partial}{\partial x}$ Lie cebirinin ikinci genişlemiş karakteristik denklemi,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy_x}{0} = \frac{dy_{xx}}{0} \tag{5.19}$$

olur. (5.19) karakteristik denkleminden

$$u = y \text{ ve } v = y_x \tag{5.20}$$

benzerlik değişkenleri elde edilir. Diferansiyel değişmezler metodu ile mertebeyi indirgeyerek çözümü yapalım. Buradan,

$$Dv = \frac{\partial v}{\partial x} + y_x \frac{\partial v}{\partial y} + y_{xx} \frac{\partial v}{\partial y_x} = y_{xx} = -y - \lambda y^3 = -u - \lambda u^3 ,$$

$$Du = \frac{\partial u}{\partial x} + y_x \frac{\partial u}{\partial y} = y_x = v \ ,$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u + \lambda u^3}{v} \tag{5.21}$$

değişkenlerine ayrılabilen adi diferansiyel denklem elde edilir. (5.21) denkleminin çözümü,

$$2v^2 + 2u^2 + \lambda u^4 = k_1$$

k_1 keyfi sabit olmak üzere denklemi yazılabilir. Burada (5.20) dönüşümü uygulanırsa,

$$2y_x^2 + 2y^2 + \lambda y^4 = k_1 \tag{5.22}$$

olur. Burada $y(0) = A, y_x(0) = 0$ şartları yerine yazılırsa,

$$k_1 = 2A^2 + \lambda A^4 \tag{5.23}$$

bulunur. (5.23) sabiti, (5.22) denkleminde yerine yazılırsa,

$$2y_x^2 + 2y^2 + \lambda y^4 = 2A^2 + \lambda A^4 \tag{5.24}$$

elde edilir. (5.24) eşitliği düzenlenirse,

$$dx = \frac{dy}{\left(\frac{\lambda}{2}\left(A^4 - y^4\right) + A^2 - y^2\right)^{1/2}} \tag{5.25}$$

olur. (5.25) eşitliğinde $y = -A\cos\theta$ ve $dy = A\sin\theta d\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$dx = \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{\lambda}{2}A^2 + \frac{\lambda}{2}A^2\cos^2\theta\right)^{1/2}} \tag{5.26}$$

bulunur. (5.26) eşitliği düzenlenirse,

$$dx = \frac{d\theta}{\left(1 + \lambda A^2 - \frac{\lambda}{2}A^2 + \frac{\lambda}{2}A^2\cos^2\theta\right)^{1/2}}$$

$$dx = \frac{d\theta}{\left(1+\lambda A^2 - \frac{\lambda}{2}A^2\left(1-\cos^2\theta\right)\right)^{1/2}}$$

$$dx = \frac{d\theta}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}\left(1-\frac{\lambda A^2}{2+2\lambda A^2}\sin^2\theta\right)^{1/2}}$$

elde edilir. $\frac{\lambda A^2}{2+2\lambda A^2} = m$ diyelim. Böylece denklem,

$$dx = \frac{d\theta}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}\left(1-m\sin^2\theta\right)^{1/2}} \tag{5.27}$$

olur. $\left(1-m\sin^2\theta\right)^{-1/2}$ binom serisine açılırsa,

$$\left(1-m\sin^2\theta\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}m\sin^2\theta+\frac{3}{8}m^2\sin^4\theta+...$$

$$\left(1-m\sin^2\theta\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{4}m-\frac{1}{4}m\cos 2\theta+\frac{3}{32}m^2\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{\cos 4\theta}{2}\right)+...$$

elde edilir. Bu ifade (5.27) denkleminde yerine yazılır ve integrali alınırsa,

$$dx = \frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left[1+\frac{1}{4}m-\frac{1}{4}m\cos 2\theta+\frac{3}{32}m^2\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{\cos 4\theta}{2}\right)+...\right]d\theta$$

$$\int dx = \frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\int\left[1+\frac{m}{4}-\frac{m}{4}\cos 2\theta+\frac{3}{32}m^2\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{\cos 4\theta}{2}\right)+...\right]d\theta$$

$$x = \frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left[\theta+\frac{1}{4}m\theta-\frac{1}{8}m\sin 2\theta+\frac{9}{64}m^2\theta-\frac{3}{32}m^2\sin 2\theta+\frac{3}{256}m^2\sin 4\theta+...\right]+C$$

bulunur. Burada C integral sabittir.

$y=-A\cos\theta$ olduğundan $\theta=\arccos\left(-\frac{y}{A}\right)$ denklemde yerine yazılırsa,

$$x = \frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left[\left(1+\frac{1}{4}m+\frac{9}{64}m^2+...\right)\arccos\left(-\frac{y}{A}\right)-\left(\frac{1}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)\frac{2y\sqrt{A^2-y^2}}{A^2}+...\right]+C$$

elde edilir. İntegral sabitini bulmak için $y(0)=A$ koşulunu kullanabiliriz. Buradan,

$$C=-\frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left(1+\frac{m}{4}+\frac{9m^2}{64}+\ldots\right)\pi$$

bulunur.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} x=&\frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left[\left(1+\frac{1}{4}m+\frac{9}{64}m^2+\ldots\right)\left(\arccos\left(-\frac{y}{A}\right)-\pi\right)\right] \\ &-\frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left[\left(\frac{1}{8}m+\frac{3}{32}m^2\right)\frac{2y\sqrt{A^2-y^2}}{A^2}+\ldots\right] \end{aligned} \tag{5.28}$$

olur. $m=\dfrac{\lambda A^2}{2+2\lambda A^2}$ değeri (5.28) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x=&\frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left[\left(1+\frac{1}{8}\left(\frac{\lambda A^2}{1+\lambda A^2}\right)+\frac{9}{256}\left(\frac{\lambda A^2}{1+\lambda A^2}\right)^2+\ldots\right)\left(\arccos\left(-\frac{y}{A}\right)-\pi\right)\right] \\ &-\frac{1}{\left(1+\lambda A^2\right)^{1/2}}\left[\left(\frac{1}{16}\left(\frac{\lambda A^2}{1+\lambda A^2}\right)+\frac{3}{128}\left(\frac{\lambda A^2}{1+\lambda A^2}\right)^2\right)\left(\frac{2y\sqrt{A^2-y^2}}{A^2}\right)+\ldots\right] \end{aligned} \tag{5.29}$$

çözümü elde edilir.

(5.29) çözümü, Duffing Denkleminin simetri metodu kullanılarak birinci mertebe adi diferansiyel denkleme indirgenerek çözülmesiyle elde edilmiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Lineer olan veya olmayan bütün adi diferansiyel denklemleri simetri dönüşümleri ile çözümü yapılabilir. Bu tezin birinci bölümünde genel çözümü verilen lineer bir adi diferansiyel denkleme dördüncü bölümde simetri dönüşümü uygulanarak aynı sonuç elde edilmiştir. Yine birinci bölümde lineer olmayan Duffing denkleminin Adomiyan metodla yaklaşık çözümü verilmiş. Beşinci bölümde ise aynı Duffing denklemine simetri yöntemi uygulanmış ve denklem birince mertebe diferansiyel denkleme indirgenerek başlangıç değer problemi için bir çözüm elde edilmiştir. Bu indirgeme yapılırken denklemi simetrik bırakan Lie grubuna ait Lie cebirinin bir boyutlu alt cebirlerinden yararlanılmıştır. Başka alt cebirler kullanılarak yeni indirgemeler yapılabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Açıl Kiraz, F., "Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Lie simetrileri üzerine", Doktora Tezi, *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, İzmir, (2007).

[2] Ovsyannikov, L.V., *Group analysis of differential equations*, New York:Academic Press, (1982).

[3] Stephani, H., *Differential equations: Their solution using symmetries,* Cambridge University Press, (1989).

[4] Olver, P.J, *Applications of Lie groups to differential equations*, GTM 107, Springer Verlag, Second edn.,(1993).

[5] Ibragimov, N.H., *Handbook of Lie group analysis of differential equations*, vol 1, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, (1994).

[6] Ibragimov, N.H., *Elemantary Lie group analysis and ordinary differential equations*, Wiley, (1999).

[7] Hydon, P.E., *Symmetry methods for differential equations:A beginner's guide*, Cambrige, UK: Cambridge University Press, (2000).

[8] Bluman, G.W., Anco, S.C., *Symmetry and integration methods for differential equations,* New York: Springer Verlag,(2002).

[9] Cantwell, B.J., *Introduction to symmetry analysis*, Cambridge text in applied mathematics, TH Moulden: Cambridge University Press, , (2004).

[10] Özceylan, M., "Bir parametreli Lie gruplarının diferansiyel denklemlere uygulanması",Yüksek Lisans Tezi, *Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Edirne, (2007).

[11] Sezer, M., *Diferansiyel denklemler-II ve çözümlü problemler,* DEÜ İzmir, (1995).

[12] Kırmızıtoprak, D., "Lineer olmayan denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri", Yüksek Lisans Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, (2008).

[13] Ünal, D., "Singuler başlangıç veya sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri: Diferansiyel dönüşüm ve adomian ayrıştırma metodları", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, (2010).

[14] Bulut, H., "Lineer ve lineer olmayan skokastik diferansiyel denklemlerin ayrışım metodu ile çözümü", Doktora tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, (2002).

[15] Adomian, G., *Solving frontier problems of physics: The decomposition method,* Kluwer Academic Publishers, (1994).

[16] Seng, V., Abbaoui, K., Cherruavit, Y., "Adomian polynomials for nonlinear operators", *Mathematical and Computer Modelling*, 24,59-65,(1996).

[17] Kovacic, I., Brennan, M.J., *The Duffing equation:Nonlinear oscillators and their behaviour*, John Wiley&Sons ,(2011).