ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

P-DEĞERLİ FONKSİYON SINIFLARI ÜZERİNDE TANIMLANAN LİNEER OPERATÖRLER

Nihat YAĞMUR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2010

Yrd.Doç.Dr. Ömer Faruk ÇETİN danışmanlığında, Nihat YAĞMUR tarafından hazırlanan bu çalışma 29/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof.Dr. Muhammet KAMALİ	*İmza:*
Üye	: Doç.Dr. Halit ORHAN	*İmza:*
Üye	: Yrd.Doç.Dr. Ömer Faruk ÇETİN	*İmza:*
Üye	:	*İmza:*
Üye	:	*İmza:*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç.Dr. Recep POLAT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

P-DEĞERLİ FONKSİYON SINIFLARI
ÜZERİNDE TANIMLANAN LİNEER OPERATÖRLER

Nihat YAĞMUR

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk ÇETİN

Bu çalışmada p-değerli fonksiyon sınıfları üzerinde tanımlanan lineer operatörler incelendi ve örneklendirildi. Ayrıca, bu lineer operatörler kullanılarak oluşturulan sınıfların yıldızıllığı, konveksliği, konvekse yakınlığı ve quasi-konveksliği incelendi.

2010, 60 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, meromorf fonksiyon, ünivalent fonksiyon, p-değerli fonksiyon, lineer operatör

ABSTRACT

Master Thesis

LINEAR OPERATORS WHICH DEFINED ON
THE CLASSES OF P-VALENT FUNCTIONS

Nihat YAĞMUR

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ömer Faruk ÇETİN

In this thesis were investigated and sampled linear operators which are defined on the classes of p-valent functions. In addition were investigated starlikeness, convexity, close-to-convexity and quasi-convexity of certain normalized functions which are obtained by these linear operators.

2010, 60 pages

Keywords: Analytic function, meromorph function, univalent function, p-valent function, linear operator

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunun belirlenmesinde, çalışma sürecinde ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk ÇETİN'e ve bu süreçte her türlü desteğiyle yanımda yer alan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa KUDU ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Nurettin SAVAŞ'a en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Çalışmalarım süresince gösterdikleri destekten dolayı aileme ve oda arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Nihat YAĞMUR

Haziran, 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Sayma Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
U	$U=\{z:z\in\mathbb{C}$ ve $\lvert z\rvert<1\}$ birim diski
U^*	$U\setminus\{0\}$
$\Re(f(z))$	*f(z)* karmaşık fonksiyonunun reel kısmı
$A_p(n)$	*p*-değerli analitik fonksiyonlar sınıfı
S	analitik ve ünivalent fonksiyonlar sınıfı
$S_p(n,\alpha)$	α mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$C_p(n,\alpha)$	α mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı
$K_p(n;\alpha,\beta)$	α tipli β mertebeden konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
$QK_p(n;\alpha,\beta)$	α tipli β mertebeden quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı
$\sum_p^n$	*p*-değerli (multivalent) meromorf fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	α mertebeden meromorf yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$C^*(\alpha)$	α mertebeden meromorf konveks fonksiyonlar sınıfı
$K^*(\alpha,\beta)$	α tipli β mertebeden meromorf konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı

$QK^{*}(\alpha,\beta)$	α tipli β mertebeden meromorf quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı
Γ	Gamma fonksiyonu
N	$h(0)=1,\ \Re\{h(z)\}>0\ \ (z\in U)$ şartlarını sağlayan U' da konveks ve ünivalent olan h fonksiyonların sınıfı

1. GİRİŞ

U birim diskinde regüler olan bir $f(z)$ fonksiyonu alındığında $w \in U$ olmak üzere $f(z)=w$ eşitliği için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

a) Birden fazla çözümü yoktur

b) p'den fazla çözümü yoktur

c) Bazı durumlarda en fazla p tane çözümü vardır

Bu üç durumda $f(z)$, U birim diskinde sırasıyla ünivalent (yalınkat), p-valent (multivalent ya da p-değerli), mean p-valent (ortalama p-değerli) olarak adlandırılır.

20. yüzyılın başlarında ünivalent fonksiyonlarla ilgili çalışmalar geometrik fonksiyonlar teorisi şeklinde yeni bir çalışma alanı olarak yön kazanmış ve günümüze kadar gittikçe artan bir ilgiyle devam etmiştir. ''Ünivalent fonksiyonlar'' kavramı U birim diskinde tanımlı fonksiyonların bire-bir dönüşüm olması anlamındadır. U da analitik ve normalize edilmiş yani $f(0)=0$, $f'(0)=1$ ve $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklinde Taylor serisine sahip olan fonksiyonların oluşturduğu sınıftan ''$z_1, z_2 \in U$ olmak üzere $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece ve sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektirir'' şartını sağlayan fonksiyonlara U da ünivalent fonksiyon denir.

Bir fonksiyonun özellikle ünivalent ya da multivalent olup olmadığı araştırmacılar için merak konusu olmuştur. Bunun için ilk çalışmalar 1900'lerin başlarında Koebe tarafından yapılmıştır. $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonunun ünivalent olduğunu ilk olarak Koebe ispatlamış ve bu fonksiyona Koebe fonksiyonu adı verilmiştir.

Bu alanın başlıca ve en önemli problemlerinden bir tanesi geçmişi 1916 yılına dayanan Bieberbach tahminidir. Bieberbach, ünivalent olan her bir fonksiyonun

Taylor katsayıları için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin var olduğu tahmininde bulunmuş ve $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğunu göstermiştir. 1923'de Loewner $|a_3| \leq 3$; 1955'de Garabedian ve Schiffer $|a_4| \leq 4$; 1968'de Pederson ve Ozawa $|a_6| \leq 6$; 1972'de Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ olması gerektiğini ispatlamıştır. 1985 yılında ise Louis De Branges bunu genelleştirerek $|a_n| \leq n$ olduğunu ispatlamıştır.

Bir fonksiyonun multivalent olup olmaması yani $f(z) = w$ eşitliğinin p'den fazla kökünün olmaması ile ilgili ilk çalışmalar 1935'de Cartwright ile başlamıştır. Daha sonra 1940'da Spencer, 1950-1960 yılları arasında W.K.Hayman değişik çalışmalar yapmıştır. Son 50 yılda özellikle Duren, Goodman, Libera, Miller, Silverman, Ruschweyh, Salagean, Srivastava, Owa ve daha birçok bilim adamı tarafından çalışmalar yapılmıştır.

Bu fonksiyonlar üzerinde integral operatörleri Alexander, 1915; Libera, 1965; Bernardi, 1969; Miller, 1978; Jung et al., 1993 tarafından tanımlanmış olup 1999 yılında K.I.Noor , 2001 yılında J-L. Liu, 2001 ve 2004 yıllarında Liu ve Srivastava ayrıca 2004 yılında Liu ve Owa bu integral operatörlerini geliştirmişlerdir. (Yuan et al., 2008) meromorf fonksiyonlar üzerinde integral operatörü tanımlamışlardır.

Bu fonksiyonlar üzerinde türev operatörü ilk olarak Ruscheweyh tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra (Salagean, 1983) bir türev operatörü tanımlamış olup bu türev operatörünü (Al-Oboudi, 2004) geliştirmiştir ve (Raducanu and Orhan, 2010) tarafından en genel halini almıştır. Meromorf fonksiyonlar üzerinde 1991 yılında B.A.Uralegaddi ve C.Somanatha, 1993 yılında M.K.Aouf ve H.M.Hossen türev operatörleri tanımlanmışlardır.

Diğer lineer operatörler ise Carlson and Shaffer 1984; H.Saioth, 1996; Srivastava and Attiya, 2007; Liu, 2008; Wang et al., 2009, tarafından tanımlanmıştır.

P-değerli Meromorf fonksiyonlarla ilgili olarak da (Srivastava et al., 2008) lineer operatör tanımlamışlardır.

Tanımlanan bu lineer operatörler kullanılarak *p*-değerli fonksiyonlar sınıfının değişik altsınıfları tanımlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Tanım: Bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinin her iç noktasında türevlenebilen fonksiyonlara, D de analitik ya da regüler fonksiyonlar denir (Nehari, 1952).

2.2. Tanım: Bir *f* fonksiyonunun bir *B* bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise *f*, *B* de meromorf bir fonksiyondur denir (Başkan, 1998).

2.3. Tanım: Bir *f(z)* fonksiyonu bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde bire-bir ise yani; her bir $u, v \in D$ için $f(u) = f(v)$ olması sadece ve sadece $u = v$ olmasını gerektiriyor ise *f(z)* fonksiyonuna, *D* de ünivalent ya da yalınkat fonksiyon denir (Nehari, 1952).

U birim diskinde ünivalent olan

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

biçimindeki tüm analitik fonksiyonların sınıfını *S* ile göstereceğiz.

2.4. Tanım: $U = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ ve } |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan bir $f(z)$ fonksiyonu alalım. Eğer $\forall w \in U$ için $f(z) = w$ eşitliğinin en fazla p tane kökü varsa $f(z)$ fonksiyonuna U da p-değerli ya da multivalent fonksiyon adı verilir (Kühnau, 2002)

U birim diskinde analitik olan ve normalize edilmiş

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n}^{\infty} a_{k+p} z^{k+p}, \quad (p, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}), \tag{2.1}$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıf $A_p(n)$ ile gösterilecektir. $A_p(1) = A_p$ ve $A_1 = A$ ile gösterilecektir.

2.5. Tanım: Bir $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ için, z den çıkan her ışın ile D nin arakesiti, doğru parçası veya bir ışın ise, D bölgesine z noktasına göre yıldızıl denir (Marx, 1932).

2.6. Tanım: $U = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ ve } |z| < 1\}$ bölgesinde analitik ve görüntü kümesi yıldızıl olan fonksiyonlara, U ' da yıldızıl fonksiyonlar denir (Marx, 1932).

2.7. Teorem: Bir $f(z) \in S$ fonksiyonunun U' da yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul

$$\Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0, (\forall z \in U), \tag{2.2}$$

olmasıdır (Szegö and Polya, 1954).

2.8. Tanım: $f \in A_p(n)$ olmak üzere eğer f fonksiyonu,

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha, \qquad (0 \leq \alpha < p; z \in U), \tag{2.3}$$

koşulunu sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna p-değerli α mertebeden yıldızıl fonksiyon denir ve bu tür fonksiyonların sınıfı $S_p(n,\alpha)$ ile gösterilir. Özel olarak $p = 1$ ve $n = 1$ için $S(\alpha)$ ile gösterilir (Srivastava et al., 2005).

2.9. Tanım: $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $x, y \in \Delta$ olsun. $\lambda \in \mathbb{R}$, $(0 \leq \lambda \leq 1)$ için

$(1-\lambda)x + \lambda y \in \Delta$

oluyorsa, Δ bölgesine konveks bölge denir (Goodman, 1983).

2.10. Tanım: U bölgesinde analitik olan ve görüntü kümesi konveks olan fonksiyonlara, U ' da konveks fonksiyonlar denir (Nehari, 1952).

2.11. Teorem: Bir $f(z) \in S$ fonksiyonunun U ' da konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$\Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,(\forall z\in U), \tag{2.4}$$

olmasıdır (Robertson, 1953).

2.12. Tanım: $f\in A_p(n)$ olmak üzere eğer

$$\Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha, \qquad (0\le\alpha<p; z\in U), \tag{2.5}$$

koşulunu sağlıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna p-değerli α mertebeden konveks fonksiyon denir ve bu tür fonksiyonların sınıfı $C_p(n,\alpha)$ ile gösterilir. Özel olarak $p=1$ ve $n=1$ için $C(\alpha)$ ile gösterilir (Srivastava et al., 2005).

2.13. Tanım:

$$K_p(n;\alpha,\beta)=\left\{f: f\in A_p(n),\quad \Re\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right)>\beta\ ,\quad g\in S_p(n,\alpha)\right\} \tag{2.6}$$

$(0\le\alpha<p;\ \ 0\le\beta<p,\ \ z\in U)$,

şeklinde tanımlanan sınıfa α tipli β mertebeden konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı denir. Özel olarak $p=1$ ve $n=1$ için $K(\alpha,\beta)$ ile gösterilir (Irmak and Piejko, 2005).

2.14. Tanım:

$$QK_p(n;\alpha,\beta)=\left\{f: f\in A_p(n),\quad \Re\left(\frac{\left(zf'(z)\right)'}{g'(z)}\right)>\beta,\quad g\in C_p(n,\alpha)\right\} \tag{2.7}$$

$(0\le\alpha<p;\ \ 0\le\beta<p,\ \ z\in U)$,

şeklinde tanımlanan sınıfa α tipli β mertebeden quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı denir. Özel olarak $p=1$ ve $n=1$ için $QK(\alpha,\beta)$ ile gösterilir (Irmak and Piejko, 2005).

2.15. Tanım: $U^* = \{z : z \in \mathbb{C}\ ve\ 0 < |z| < 1\} = U \setminus \{0\}$ delinmiş açık birim diskinde tanımlı ve analitik olan

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-p} \tag{2.8}$$

şeklindeki p-değerli fonksiyonların sınıfı $\sum_p^n$ ile gösterilecektir. Bu tür fonksiyonlara p-değerli (multivalent) meromorf fonksiyonlar adı verilir (Srivastava et al., 2008).

Özel olarak

$$f(z) = z^{-p} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n} \tag{2.9}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $\sum_p$ ile gösterilecektir. $p = 1$ için ise $\sum$ kullanılacaktır.

2.16. Tanım: Bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < -\alpha \quad (z \in U;\ 0 \le \alpha < 1) \tag{2.10}$$

şartını sağlıyorsa U da α mertebeden meromorf yıldızıl fonksiyon denir ve bu tür fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir (Yuan et al., 2008).

2.17. Tanım: Bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < -\alpha \quad (z \in U;\ 0 \le \alpha < 1) \tag{2.11}$$

şartını sağlıyorsa U da α mertebeden meromorf konveks fonksiyon denir ve bu tür fonksiyonların sınıfı $C^*(\alpha)$ ile gösterilir (Yuan et al., 2008).

2.18. Tanım: Bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu için

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) < -\beta \quad (z \in U;\ 0 \le \alpha < 1; 0 \le \beta < 1) \tag{2.12}$$

olacak şekilde $g \in S^*(\alpha)$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna α tipli β mertebeden meromorf konvekse yakın fonksiyon denir. Bu tür fonksiyonların sınıfı $K^*(\alpha,\beta)$ ile gösterilir (Yuan et al., 2008).

2.19. Tanım: Bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu için

$$\Re\left(\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}\right) < -\beta \quad (z \in U;\ 0 \le \alpha < 1; 0 \le \beta < 1) \tag{2.13}$$

olacak şekilde $g \in C(\alpha)$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna α tipli β mertebeden meromorf konvekse benzer fonksiyon denir. Bu tür fonksiyonların sınıfı $QK^*(\alpha,\beta)$ ile gösterilir (Yuan et al., 2008).

2.20. Tanım: $$f(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} z^{k+p} \quad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}) \tag{2.14}$$

ve $$g(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+p} z^{k+p} \quad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}) \tag{2.15}$$

olmak üzere

$$f(z) * g(z) = (f * g)(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} b_{k+p} z^{k+p} = (g * f)(z) \tag{2.16}$$

işlemine Hadamard Çarpımı (veya konvolusyon toplamı) denir (Mostafa and Aouf, 2009).

2.21. Tanım: (Cauchy- Schwartz Eşitsizliği): (a_k) ve (b_k) iki kompleks sayı dizisi olsun. Bu sayı dizileri için

$$\sum_{k=1}^{m} |a_k b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |a_k|^2} . \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |b_k|^2}, \qquad (m \in \mathbb{N}) \tag{2.17}$$

dir (Duren, 1983).

2.22. Tanım: (Maksimum Modül Teoremi): f, sınırlı bir D bölgesinde sabit olmayan analitik ve $\overline{D}$ da sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini D bölgesinin sınırında alır. Burada $\overline{D}$, D bölgesinin kapanışıdır. (Orhan, 2002)

2.23. Tanım: (Cauchy-Türev Formülü): $w = f(z)$ fonksiyonu bir γ kapalı çevresinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer a, γ nın içinde bir nokta ise,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \tag{2.18}$$

dir (Başkan, 1998).

2.24. Tanım: (Gamma Fonksiyonu): Gamma Γ fonksiyonu her $z \in \mathbb{C} \backslash \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \left(\Re(z) > 0\right) \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z) \tag{2.20}$$

şeklindedir (Srivastava and Choi, 2001).

2.25. Tanım: (Beta Fonksiyonu): Beta β fonksiyonu her $m, n \in \mathbb{C} \backslash \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$ için

$$\beta(m,n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \qquad \left(\Re(m) > 0;\ \Re(n) > 0\right) \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır. Özellikle, Gamma ve Beta fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.22}$$

Eğer, $m,n \in \mathbb{N}$ ise

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \tag{2.23}$$

şeklindedir (Srivastava and Choi, 2001).

2.26. Tanım: (Pochhammer sembolü): $\lambda, v \in \mathbb{C}$ ve Γ gamma fonksiyonu olmak üzere

$$(\lambda)_v = \frac{\Gamma(\lambda+v)}{\Gamma(\lambda)} = \begin{cases} 1 & (v=0; \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}), \\ \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1) & (v=n \in \mathbb{N};\ \lambda \in \mathbb{C}). \end{cases} \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanır (Cho et al., 2004).

2.27. Tanım: (Kesirsel Mertebeden İntegral): Bir *f(z)* fonksiyonunun δ $(\delta > 0)$ mertebeden kesirsel integrali

$$D_z^{-\delta}(f(z)) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^z f(t)(z-t)^{\delta-1} dt, \quad (z \in U) \tag{2.25}$$

ile tanımlanır.

Burada *f(z)* fonksiyonu kompleks düzlemin, orjini kapsayan basit bağlantılı bir bölgesinde analitiktir. Eğer $z-t>0$ ise, $\log(z-t)$ gerçel alınarak $(z-t)^{\delta-1}$ teriminin katlılığı kaldırılır (Owa, 1978).

2.28. Teorem: $f(z) \in A_p(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z \in U$ için *f(z)* fonksiyonunun δ $(\delta > 0)$ kesirsel mertebeden integrali,

$$D_z^{-\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)} \left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!\Gamma(p+\delta+1)}{p!\Gamma(k+\delta+1)} a_k z^{k-p} \right] z^{p+\delta}, \tag{2.26}$$

olur (Çetin, 1997).

İspat: $f(z) \in A_p(n)$ olsun. 2.27.Tanım'ın kullanılmasıyla

$$D_z^{-\delta}\left(f(z)\right)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^z \frac{f(t)}{(z-t)^{1-\delta}}\,dt \tag{2.27}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^z \left\{\frac{t^p+\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}a_k t^k}{(z-t)^{1-\delta}}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\left\{\int_0^z t^p (z-t)^{\delta-1}dt+\int_0^z\left[\sum_{k=n+p}^{\infty} t^k (z-t)^{\delta-1}a_k\right]dt\right\}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\left\{\int_0^z t^p (z-t)^{\delta-1}dt+\sum_{k=n+p}^{\infty} a_k\left[\int_0^z t^k (z-t)^{\delta-1}dt\right]\right\}$$

olur. Burada

$$I=\int_0^z t^p (z-t)^{\delta-1}dt \quad \text{ve} \quad J=\int_0^z t^k (z-t)^{\delta-1}dt$$

diyelim ve önce J integralini çözelim.

$$J=\int_0^z t^k (z-t)^{\delta-1}dt \tag{2.28}$$

integrali için

$uz = z - t \quad \Rightarrow \quad dt = -zdu$ ve $t = z(1-u)$

şeklinde değişken değişimi yapılırsa,

$$J=z^{k+\delta}\int_0^1 u^{\delta-1}(1-u)^k\,du$$

elde edilir. Beta fonksiyonundan

$$J=z^{k+\delta}\beta(\delta,k+1)=z^{k+\delta}\,\frac{k!\Gamma(\delta)}{\Gamma(k+\delta+1)} \tag{2.29}$$

yazılır. Eğer, “Eş. 2.29” daki ifadede $k = p$ alınırsa :

$$I=z^{p+\delta}\beta(\delta,p+1)=z^{p+\delta}\,\frac{p!\Gamma(\delta)}{\Gamma(p+\delta+1)} \tag{2.30}$$

bulunur. Böylece I integrali de çözülmüş olur. “Eş. 2.29” ve “Eş. 2.30” dan

$$D_z^{-\delta}(f(z))=\frac{z^{p+\delta}}{\Gamma(\delta)}\left[\frac{p!\Gamma(\delta)}{\Gamma(p+\delta+1)}+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(\delta)}{\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]$$

$$=\left[\frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)}+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p+\delta}$$

elde edilir. Bu da “Eş. 2.26” yı verir.

Örnek: $f(z)=z+z^2+z^3$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $\delta=\frac{1}{2}$ kesirsel mertebeden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$D_z^{-\delta}(f(z))=\frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p+\delta+1)}{p!\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p+\delta}$$

ifadesinde $p=1$ ve $\delta=\frac{1}{2}$ yazılmasıyla

$$D_z^{-\frac{1}{2}}(f(z))=\frac{1!}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)}\left[1+\sum_{k=2}^{3}\frac{k!\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)}{1!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)}z^{k-1}\right]z^{1+\frac{1}{2}}$$

$$D_z^{-\frac{1}{2}}(f(z))=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left[1+\sum_{k=2}^{3}\frac{k!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}z^{k-1}\right]z^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}\left[1+\sum_{k=2}^{3}\frac{k!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}z^{k-1}\right]z^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}\left[1+\frac{2!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{3}{2}\right)}z+\frac{3!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{3}{2}\right)}z^2\right]z^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}\left[1+\frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}z+\frac{3!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{7}{2}.\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}z^2\right]z^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{4}{5}z+\frac{24}{35}z^2\right]$$

elde edilir.

2.29. Sonuç: $f(z)\in A_1(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z\in U$ için *f(z)* fonksiyonunun δ $(\delta>0)$ kesirsel mertebeden integrali;

$$D_z^{-\delta}(f(z))=\frac{z^{1+\delta}}{\Gamma(2+\delta)}\left[1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!\Gamma(2+\delta)}{\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-1}\right], \tag{2.31}$$

olur.

İspat: 2.28.Teorem de $p=1$ alınırsa, $A_1(n)=A(n)$ olur. Bu ise, istenen ispat için yeterlidir.

2.30. Tanım: (Kesirsel Mertebeden Türev): Bir *f(z)* fonksiyonunun δ $(0\le\delta<1)$ mertebeden kesirsel türevi

$$D_z^{\delta}(f(z))=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\frac{d}{dz}\int_0^z f(t)(z-t)^{\delta}\,dt, \quad (z\in U) \tag{2.32}$$

ile tanımlanır.

Burada *f(z)* fonksiyonu kompleks düzlemin, orijini kapsayan basit bağlantılı bir bölgesinde analitiktir. Eğer $z-t>0$ ise, $\log(z-t)$ gerçel alınarak $(z-t)^{-\delta}$ teriminin katlılığı kaldırılır (Owa, 1978).

2.31. Teorem: $f(z)\in A_p(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z\in U$ için bir *f(z)* fonksiyonunun δ $(0\le\delta<1)$ kesirsel mertebeden türevi;

$$D_z^{\delta}(f(z))=\frac{p!}{\Gamma(p-\delta+1)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\delta+1)}{p!\Gamma(k-\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p-\delta}, \tag{2.33}$$

olur (Çetin, 1997).

İspat: 2.28.Teorem'in ispatında δ yerine $-\delta$ alınır ve 2.30.Tanım'daki kesirsel mertebeden türev tanımı kullanılırsa, istenen elde edilir.

Örnek: $f(z) = z + z^2 + z^3$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $\delta = \dfrac{1}{2}$ kesirsel mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm:

$$D_z^{\delta}(f(z)) = \frac{p!}{\Gamma(p-\delta+1)}\left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!\Gamma(p-\delta+1)}{p!\Gamma(k-\delta+1)} a_k z^{k-p}\right] z^{p-\delta}$$

ifadesinde $p = 1$ ve $\delta = \dfrac{1}{2}$ yazılmasıyla

$$D_z^{\frac{1}{2}}(f(z)) = \frac{1!}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}\left[1 + \sum_{k=2}^{3} \frac{k!\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)}{1!\Gamma(k-\frac{1}{2}+1)} z^{k-1}\right] z^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left[1 + \sum_{k=2}^{3} \frac{k!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} z^{k-1}\right] z^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left[1 + \sum_{k=2}^{3} \frac{k!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} z^{k-1}\right] z^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left[1 + \frac{2!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)} z + \frac{3!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)} z^2\right] z^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left[1 + \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} z + \frac{3!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} z^2\right] z^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left[1+2z+\frac{12}{5}z^2\right]$$

elde edilir.

2.32. Sonuç: $f(z)\in A_1(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z\in U$ için bir *f(z)* fonksiyonunun δ $(0\le\delta<1)$ kesirsel mertebeden türevi,

$$D_z^{\delta}(f(z))=\frac{z^{1-\delta}}{\Gamma(2-\delta)}\left[1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!\Gamma(2-\delta)}{\Gamma(k-\delta+1)}a_k z^{k-1}\right], \tag{2.34}$$

olur.

İspat: 2.31.Teorem'de $p=1$ alınırsa, $A_1(n)=A(n)$ olur. Bu ise, istenen ispat için yeterlidir.

2.33. Sonuç: $f(z)\in A_p(n)$ olsun. Bu durumda, $\forall z\in U$ için

$$D_z^{1+\delta}(f(z))=\frac{p!}{\Gamma(p-\delta)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\delta)}{p!\Gamma(k-\delta)}a_k z^{k-p}\right]z^{p-\delta-1}, \tag{2.35}$$

olur.

İspat: 2.31.Teorem'in ispatında δ yerine $1+\delta$ alınırsa, istenen kolayca görülür.

2.34. Sonuç: $f(z)\in A_1(n)$ olsun. Bu durumda; $\forall z\in U$ için

$$D_z^{1+\delta}(f(z))=\frac{z^{-\delta}}{\Gamma(1-\delta)}\left[1+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(k-\delta)}a_k z^{k-1}\right], \tag{2.36}$$

olur.

İspat: 2.33.Sonuç'ta $p=1$ alınırsa, $A_1(n)=A(n)$ olur. Bu ise, istenen ispat için yeterlidir.

2.35. Tanım: 2.30.Tanım'ın koşulları altında, bir *f(z)* fonksiyonunun $m+\delta$ mertebeden kesirsel türevi

$$D_z^{m+\delta}(f(z)) = \frac{d^m}{dz^m} D_z^{\delta}(f(z)), \qquad (z \in U;\ m \in \mathbb{N}_0) \tag{2.37}$$

ile tanımlanır.(Owa, 1978).

2.36. Tanım: Bir $f(z) \in A_p(n)$ fonksiyonunun, q. mertebeden türevi

$$f^{(q)}(z) = \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} a_k z^{k-q}, \tag{2.38}$$

$\left(p \geq q; n, p \in \mathbb{N}^+, q \in \mathbb{N}\right)$

şeklinde tanımlanır (Chen et al., 1997).

Bu tanımda dikkat edilirse:

$q = 0 \ \Rightarrow\ f^{(0)}(z) = f(z)$

$q = 1 \ \Rightarrow\ f^{(1)}(z) = \dfrac{df(z)}{dz} = f'(z)$

$q = m \ \Rightarrow\ f^{(m)}(z) = \dfrac{d^m f(z)}{dz^m}$

dir.

2.37. Sonuç: 2.31.Teorem'de $\delta = 0$ alınırsa, 2.36.Tanım'daki $q = 0$ haline denk olur.

2.38. Sonuç: 2.33.Sonuç'da $\delta = 0$ alınırsa, 2.36.Tanım'daki $q = 1$ haline denk olur.

2.39. Tanım: (Ruscheweyh Türevi):

$f(z) \in A_p$ fonksiyonunun $(n+p-1)$. mertebeden Ruscheweyh türevi

$$D^{n+p-1} f(z) = \frac{z^p \left(z^{n-1} f(z)\right)^{(n+p-1)}}{(n+p-1)!}, \quad \left(n > -p, n \in \mathbb{Z}\right) \tag{2.39}$$

ile tanımlanır (Kumar and Shukla, 1984).

2.40. Sonuç: * işlemi "Eş. 2.16" daki Hadamard Çarpmını göstermek üzere

$$D^{n+p-1}f(z)=\frac{z}{(1-z)^{n+p}}*f(z) \tag{2.40}$$

dir.

2.41. Sonuç: 2.39. Tanım'da

$p=1,\ n=0$ için $D^{0}f(z)=f(z)$,

$p=n=1$ için $D^{1}f(z)=zf'(z)$

olur.

2.42. Sonuç: $f(z)\in A_p$ fonksiyonunun $(n+p-1)$. mertebeden Ruscheweyh türevi ile $(n+p)$. mertebeden Ruscheweyh türevi arasında

$$z\left(D^{n+p-1}f(z)\right)'=(n+p)D^{n+p}f(z)-nD^{n+p-1}f(z)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Örnek: $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$, olmak üzere $f(z)$ nin 3. mertebeden Ruscheweyh türevini bulunuz.

Çözüm: $f(z)$ nin 3. mertebeden Ruscheweyh türevini bulmak için "Eş. 2.39" daki ifadede $p=1,\ n=3$ olarak alınırsa,

$$D^{3}f(z)=\frac{z\left(z^{2}f(z)\right)^{(3)}}{3!}$$

$$=\frac{z\left(z^{3}+\sum_{k=2}^{\infty}a_k.z^{k+2}\right)^{(3)}}{3!}$$

$$=\frac{z\left(3z^{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(k+2).a_k.z^{k+1}\right)^{(2)}}{3!}$$

$$= \frac{z\left(6z+\sum_{k=2}^{\infty}(k+2).(k+1).a_k.z^k\right)'}{3!}$$

$$= \frac{z\left(6+\sum_{k=2}^{\infty}(k+2).(k+1).k.a_k.z^k\right)}{3!}$$

$$= z+\frac{1}{6}\sum_{k=2}^{\infty}(k+2).(k+1).k.a_k.z^k$$

elde edilir.

2.43. Sonuç: $f \in \sum$ için n. mertebeden Ruscheweyh türevi

$$D^n f(z) = \frac{1}{z(1-z)^{n+1}} * f(z)\ ,\ \ (n \in \mathbb{N}) \tag{2.41}$$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{z^{n+1}f(z)}{n!}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}c(n,k)a_k z^k$$

dir.

Burada $c(n,k) = \begin{pmatrix} n+k+1 \\ n \end{pmatrix} = \frac{(n+1)(n+2)...(n+k+1)}{(k+1)!}$, $(k \in \mathbb{N})$ dir.

Örnek: $f(z) = \frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ olmak üzere $f(z)$ nin 3. mertebeden Ruscheweyh türevini bulunuz.

Çözüm: $f(z)$ nin 3. mertebeden Ruscheweyh türevini bulmak için

$D^n f(z) = \frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}c(n,k)a_k z^k$ ifadesinde $n=3$ yazılırsa

$$D^3 f(z) = \frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}c(3,k)a_k z^k$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4.5...(4+k)}{(k+1)!}a_k z^k$$

$$=\frac{1}{z}+4a_0+\frac{4.5}{2!}a_1 z+\frac{4.5.6}{3!}a_2 z^2+...$$

elde edilir.

2.44. Tanım: (Salagean Operatörü): Bir $f(z)\in A$ fonksiyonunun Salagean operatörü altındaki görüntüsü

$D^0 f(z)=f(z)$, $D^1 f(z)=zf'(z)$ ve

$D^n f(z)=D\left(D^n f(z)\right) \quad \left(n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}\right)$

şeklinde tanımlanır.

$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ olarak alınırsa, $f(z)$ fonksiyonunun *n.* mertebeden Salagean operatörü altındaki görüntüsü

$$D^n f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^n a_k z^k \quad \left(n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}\right) \tag{2.42}$$

olur (Salagean, 1983)

$f(z)\in A_p$ olduğunda ise $D^n f(z)=p^n z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}k^n a_k z^k$ ifadesine $f(z)$ fonksiyonunun Salagean tipli lineer operatör altındaki görüntüsü denir.

2.45. Tanım: Bir $f(z)\in A$ fonksiyonunun integral operatörü:

$$J_c(f(z)) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)dt, \quad (\forall z\in U; c>-1) \tag{2.43}$$

şeklinde tanımlanır (Libera, 1965).

Örnek: $f(z)=z+z^2+z^3$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $c=\dfrac{1}{2}$ için $J_c(f(z))$ operatörü altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm: "Eş. 2.43" de $c=\dfrac{1}{2}$ yazılırsa

$$J_{\frac{1}{2}}(f(z))=\frac{3}{2z^{1/2}}\int_0^z t^{-\frac{1}{2}}.f(t)dt$$

$$=\frac{3}{2z^{1/2}}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{t}}.(t+t^2+t^3)dt$$

$$=\frac{3}{2z^{1/2}}\int_0^z (t^{1/2}+t^{3/2}+t^{5/2})dt$$

$$=z+\frac{3}{5}z^2+\frac{3}{7}z^3$$

elde edilir.

2.46. Tanım: Bir $f(z)\in A_p(n)$ fonksiyonunun integral operatörü,

$$J_{c,p}(f(z)) = \frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)dt \qquad (\forall z\in U;\, c>-p) \tag{2.44}$$

şeklinde tanımlanır (Miller, 1978).

Örnek: $f(z)=z^2+2z^3$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $c=2$ için $J_{c,p}(f(z))$ operatörü altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm: "Eş. 2.44" de $c=2$ yazılırsa

$$J_{2,2}(f(z))=\frac{4}{z^2}\int_0^z t.f(t)dt$$

$$=\frac{4}{z^2}\int_0^z t.(t^2+2t^3)dt$$

$$= z^2 + \frac{8}{5} z^3$$

elde edilir.

2.47. Teorem: $f(z) \in A_p(n)$ olsun. Bu durumda,

$$J_{c,p}\left(f(z)\right) = \left[1 + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{c+p}{k+c} a_k z^{k-p}\right] z^p, \quad (\forall z \in U; c > -p), \tag{2.45}$$

olur (Çetin, 1997).

İspat: $f(z) \in A_p(n)$ olsun. 2.4.Tanım ve 2.46.Tanım'dan :

$$J_{c,p}\left(f(z)\right) = \frac{c+p}{z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt$$

$$= \frac{c+p}{z^c} \int_0^z \left[t^{c+p-1} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left[t^{k+c-1} a_k \right] \right] dt$$

$$= \frac{c+p}{z^c} \left[\int_0^z t^{c+p-1} dt + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k \left[\int_0^z t^{k+c-1} dt \right] \right]$$

$$= \frac{c+p}{z^c} \left\{ \frac{t^{c+p}}{c+p} + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{t^{c+k}}{c+k} a_k \right\} \Bigg|_{t=0}^{t=z}$$

$$= z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{c+p}{k+c} a_k z^k$$

bulunur. Böylece, "Eş. 2.1" deki gibi tanımlanan bir *f(z)* fonksiyonunun integral operatörü de elde edilmiş olur.

2.48. Sonuç: $f(z) \in A_1(n)$ olsun. Bu durumda,

$$J_c\left(f(z)\right) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c+1}{k+c} a_k z^k, \quad (\forall z \in U; c > -1) \tag{2.46}$$

olur.

İspat: 2.47.Teorem'in ispatında $p = 1$ alınırsa, istenen ispat elde edilir.

2.49. Teorem: Bir $f(z)\in A_p(n)$ olsun. Bu durumda,

(i) $D_z^{-\delta}\left(J_{c,p}\left(f(z)\right)\right)\neq J_{c,p}\left(D_z^{-\delta}\left(f(z)\right)\right),$

(ii) $D_z^{\delta}\left(J_{c,p}\left(f(z)\right)\right)\neq J_{c,p}\left(D_z^{\delta}\left(f(z)\right)\right),$

(iii) $D_z^{1+\delta}\left(J_{c,p}\left(f(z)\right)\right)\neq J_{c,p}\left(D_z^{1+\delta}\left(f(z)\right)\right),$

dır (Çetin, 1997).

İspat: $f(z)\in A_p(n)$ fonksiyonunun integral operatörü,

$$J_{c,p}\left(f(z)\right)=z^p+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c+p}{k+c}a_k z^k,\quad (\forall z\in U;\, c>-p) \tag{2.47}$$

δ $(\delta>0)$ mertebeden integrali,

$$D_z^{-\delta}(f(z))=\frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p+\delta+1)}{p!\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p+\delta}, \tag{2.48}$$

δ $(0\leq\delta<1)$ mertebeden türevi,

$$D_z^{\delta}(f(z))=\frac{p!}{\Gamma(p-\delta+1)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\delta+1)}{p!\Gamma(k-\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p-\delta} \tag{2.49}$$

ve $1+\delta$ $(0\leq\delta<1)$ mertebeden türevi,

$$D_z^{1+\delta}(f(z))=\frac{p!}{\Gamma(p-\delta)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p-\delta)}{p!\Gamma(k-\delta)}a_k z^{k-p}\right]z^{p-\delta-1} \tag{2.50}$$

olduklarını "Eş. 2.45", "Eş. 2.26", "Eş. 2.33" ve "Eş. 2.35" den biliyoruz.
"Eş. 2.47" ve "Eş. 2.48" deki ifadelerden,

$$D_z^{-\delta}\left(J_{c,p}\left(f(z)\right)\right)=\frac{p!}{\Gamma(p+\delta+1)}\left[1+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!(c+p)\Gamma(p+\delta+1)}{p!(k+c)\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p+\delta}, \tag{2.51}$$

ve

$$J_{c,p}\left(D_z^{-\delta}\left(f(z)\right)\right)=\frac{(c+p)}{(c+p+\delta)\Gamma(p+\delta+1)}\cdot$$

$$\left[p!-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!\Gamma(p+\delta+1)(p+c+\delta)}{(k+c+\delta)\Gamma(k+\delta+1)}a_k z^{k-p}\right]z^{p+\delta} \tag{2.52}$$

olduğu görülür. “Eş. 2.51” ve “Eş. 2.52” den (i)-şıkkının ispatı kolayca elde edilir. Yine; (ii)-şıkkı için “Eş. 2.47” ve “Eş. 2.49”, (iii)-şıkkı için de “Eş. 2.47” ve “Eş. 2.50” kullanılarak istenenlere kolayca varılır.

2.50. Tanım: f ve g fonksiyonları U da analitik olsun. Eğer $w(0)=0,\ |w(z)|<1\ \ (z\in U)$ ve $f(z)=g(w(z))\ \ (z\in U)$ olacak şekilde *w(z)* Schwarz fonksiyonu varsa *f(z)*, *g(z)* fonksiyonuna subordinatedir denir ve $f\prec g$ veya $f(z)\prec g(z)\quad (z\in U)$ şeklinde yazılır.

g fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise $f\prec g$ olması için gerek ve yeter şart $f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subset g(U)$ olmasıdır (Cho et al., 2004).

2.51. Tanım: *X* ve *Y* boş olmayan kümeler olsun. *X'* in her elemanına *Y*'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala *X'* den *Y*'ye bir operatör veya dönüşüm denir (Musayev ve Alp, 2000).

2.52. Tanım: X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay (vektör uzayı) ve $L: X\to Y$ operatörü verilsin. Eğer $\forall x,y\in X$ ve $\forall \alpha,\beta\in K$ için $L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$ oluyorsa L operatörüne lineer operatör denir (Musayev ve Alp, 2000).

2.53. Tanım: (Hurwitz-Lerch Zeta Fonksiyonu): $\Phi(z,s,a)$ ile gösterilen Hurwitz-Lerch Zeta fonksiyonu, $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-;|z|<1$ iken, $s\in\mathbb{C}$; $|z|=1$ iken, $\Re(s)>1$ olmak üzere

$$\Phi(z,s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+a)^s} \tag{2.53}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan

$$\Phi(z,s,a)=z^n\Phi(z,s,n+a)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{(k+a)^s},\quad \left(n\in\mathbb{N};a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-\right) \tag{2.54}$$

olduğu açıktır (Srivastava and Choi, 2001).

2.54. Teorem: U birim diskinde analitik olan $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$, şeklindeki bir f fonksiyonu

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2}-1\right|\leq 1\ ,\quad (z\in U) \tag{2.55}$$

şartını sağlıyorsa $f(z)\in S$ dir (Ozaki and Nunokawa, 1972)

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışmada materyal olarak makale, tez ve kaynak kitaplar kullanılmıştır. Makaleler ve tezlere Erzincan Üniversitesi Kütüphanesi ve YÖK veri tabanı kullanılarak ulaşılmıştır.

Çalışma konusu ile ilgili tanımlar, teoremler ve sonuçlar örneklendirilerek sunulmuştur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve SONUÇLAR

4.1. Yıldızıl, Konveks, Konvekse Yakın ve Quasi-Konveks Fonksiyon Sınıfları

4.1.1. Tanım: $h(0)=1,\ \ \Re\{h(z)\}>0\ \ (z\in U)$ şartlarını sağlayan U da konveks ve ünivalent olan h fonksiyonlarının sınıfı N ile gösterilsin.

Bu durumda A_p nin bir altsınıfı olan

$$S_p(\eta;h)=\left\{f: f\in A_p,\ \ \frac{1}{p-\eta}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-\eta\right)\prec h(z)\right\} \qquad (4.1)$$

$(0\le\eta<p;\ h\in N;\ z\in U)$

şeklinde tanımlanan sınıfa $\eta.\ (0\le\eta<p)$ mertebeden p-değerli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı denir.

Özel olarak

$$S_p\left(\eta;\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right)=S_p\left(\eta;h_\alpha\right)$$
$$\left(0\le\eta<p;\ 0<\alpha\le 1;\ z\in U;\ h_\alpha(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\in N\right) \qquad (4.2)$$

şeklinde gösterilir (Cho et al., 2004).

4.1.2. Tanım: A_p nin bir altsınıfı olan

$$C_p(\eta;h)=\left\{f: f\in A_p,\ \ \frac{1}{p-\eta}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\eta\right)\prec h(z)\right\} \qquad (4.3)$$

$(0\le\eta<p;\ h\in N;\ z\in U)$

şeklinde tanımlanan sınıfa $\eta.\ (0\le\eta<p)$ mertebeden p-değerli konveks fonksiyonlar sınıfı denir.

Özel olarak

$$C_p\left(\eta;\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right)=C_p\left(\eta;h_\alpha\right)$$

$$\left(0\le\eta<p;\ 0<\alpha\le 1;\ z\in U;\ h_\alpha(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\in N\right) \tag{4.4}$$

şeklinde gösterilir (Cho et al., 2004).

4.1.3. Tanım: A_p nin bir altsınıfı olan

$$K_p(\eta,\delta;h,k)=\left\{f\in A_p:\exists\, g\in S_p(\eta;h),\ \frac{1}{p-\delta}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}-\delta\right)\prec k(z)\right\} \tag{4.5}$$

$$(0\le\eta,\ \delta<p;\ h,k\in N;\ z\in U)$$

şeklinde tanımlanan sınıfa p-değerli konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı denir (Wang et al., 2009).

4.1.4. Sonuç: Her konveks fonksiyon açık olarak konvekse yakındır. Daha genel olarak, her yıldızıl fonksiyon konvekse yakındır. Her konvekse yakın fonksiyon ünivalenttir. Yani $C_1(0;h)\subset S_1(0;h)\subset K_1(0,0;h,k)\subset S$ biçiminde kapsam bağıntısı vardır.

4.1.5. Tanım: A_p nin bir altsınıfı olan

$$QK_p(\eta,\delta;h,k)=\left\{f\in A_p:\exists\, g\in C_p(\eta;h),\ \frac{1}{p-\delta}\left(\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}-\delta\right)\prec k(z)\right\} \tag{4.6}$$

$$(0\le\eta,\ \delta<p;\ h,k\in N;\ z\in U)$$

şeklinde tanımlanan sınıfa p-değerli quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı denir (Wang et al., 2009).

4.2. Lineer Operatör 1

4.2.1. Tanım: $I^{\sigma}:A\to A$ olmak üzere, tek parametreli integral operatörler ailesi,

$$I^{\sigma}(f)(z)=\frac{2^{\sigma}}{z\Gamma(\sigma)}\int_0^z\left(\log\left(\frac{z}{t}\right)\right)^{\sigma-1}f(t)dt \quad (\sigma>0; f\in A) \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır. (Jung et al., 1993).

4.2.2. Sonuç: "Eş. 4.7" de $\log\left(\frac{z}{t}\right)=u$ şeklinde değişken değişimi yapılarak gamma fonksiyonunun tanımından

$$I^{\sigma}(f)(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\sigma}a_k z^k \tag{4.8}$$

elde edilir.

Örnek: $f(z)\in A$ olmak üzere $f(z)=z+\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2+\frac{1}{3}z^3$ olsun. Bu durumda

$\sigma=\frac{1}{2}$ için $I^{1/2}(f)(z)=z+\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2+\left(\frac{2}{4}\right)^{1/2}.\frac{1}{3}z^3=z+\frac{4}{3\sqrt{3}}z^2+\frac{1}{3\sqrt{2}}z^3$

$\sigma=1$ için $I^{1}(f)(z)=z+\frac{2}{3}.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2+\frac{2}{4}.\frac{1}{3}z^3=z+\frac{4\sqrt{2}}{9}z^2+\frac{1}{6}z^3$

$\sigma=2$ için $I^{2}(f)(z)=z+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2+\left(\frac{2}{4}\right)^{2}.\frac{1}{3}z^3=z+\frac{8}{27}z^2+\frac{1}{12}z^3$

olur.

4.3. Lineer Operatör 2

4.3.1. Tanım: $f\in A$ *ve* $\lambda>-1;\mu>0$ olmak üzere $P_{\lambda}^{\mu}:A\to A$ operatörler ailesi

$$P_{\lambda}^{\mu}f(z)=\frac{(\lambda+1)^{\mu}}{z^{\lambda}\Gamma(\mu)}\int_0^z t^{\lambda-1}\left(\log\left(\frac{z}{t}\right)\right)^{\mu-1}f(t)dt \tag{4.9}$$

$$=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+k}\right)^{\mu}a_k z^k \quad (\lambda>-1;\mu>0; f\in A) \tag{4.10}$$

ile tanımlanır (Chun-Yı et al., 2005).

4.3.2. Sonuç: 4.3.1 Tanım'da özel olarak $\lambda = 1$ için lineer operatör 1 elde edilir. Yani

$$P_1^{\mu} f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\mu} a_k z^k = I^{\mu}(f)(z)$$

dir.

Örnek : $f(z) \in A$ olmak üzere $f(z) = z + \frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ olsun. Bu durumda

$\lambda = 0\,, \mu = 1$ için $P_0^1 f(z) = z + \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}z^3 = z + \frac{\sqrt{2}}{3}z^2 + \frac{1}{9}z^3$

$\lambda = 1\,, \mu = 2$ için $P_1^2 f(z) = z + \left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2.\frac{1}{3}z^3 = z + \frac{8\sqrt{2}}{27}z^2 + \frac{1}{12}z^3$

$\lambda = 2\,, \mu = 2$ için $P_2^1 f(z) = z + \left(\frac{3}{4}\right)^2.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2.\frac{1}{3}z^3 = z + \frac{3\sqrt{2}}{8}z^2 + \frac{3}{25}z^3$

olur.

4.4. Lineer Operatör 3

4.4.1. Tanım: $\lambda > -1,\ \mu > 0$ ve $f \in A$ olmak üzere $Q_\lambda^\mu : A \to A$ operatörler ailesi

$$Q_\lambda^\mu f(z) = \binom{\lambda+\mu}{\lambda} \frac{\mu}{z^\lambda} \int_0^z t^{\lambda-1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{\mu-1} f(t)dt \tag{4.11}$$

$$= z + \frac{\Gamma(\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\lambda+1)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda+\mu+k)} a_k z^k$$

$$(\lambda > -1; \mu > 0; f \in A)$$

ile tanımlanır (Chun-Yı et al., 2005).

$\lambda > -1,\ \mu > 0$ ve $f \in A_p$ için

$$Q_{\lambda,p}^\mu f(z) = \binom{p+\lambda+\mu-1}{\text{p}+\lambda-1} \frac{\mu}{z^\lambda} \int_0^z t^{\lambda-1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{\mu-1} f(t)dt \tag{4.12}$$

$$= z^p + \frac{\Gamma(\lambda+\mu+p)}{\Gamma(\lambda+p)} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda+\mu+k)} a_k z^k$$

şeklindedir.

Örnek: $f(z) \in A$ olmak üzere $f(z) = z + \frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ olsun. Bu durumda

$\lambda = 0\,, \mu = 1$ için $Q_0^1 f(z) = z + \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}z^3 = z + \frac{1}{3}\sqrt{2}z^2 + \frac{1}{9}z^3$

$\lambda = 1\,, \mu = 2$ için $Q_1^2 f(z) = z + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)}.\left(\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5)}.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(6)}.\frac{1}{3}z^3\right)$

$$= z + \frac{\sqrt{2}}{3}z^2 + \frac{1}{10}z^3$$

$\lambda = 2\,, \mu = 2$ için $Q_2^2 f(z) = z + \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)}.\left(\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(6)}.\frac{2}{3}\sqrt{2}z^2 + \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(7)}.\frac{1}{3}z^3\right)$

$$= z + \frac{2}{5}\sqrt{2}z^2 + \frac{2}{15}z^3$$

olur.

4.4.2. Sonuç: $Q_{\lambda,p}^{\mu}$ operatörü için

$$z\left(Q_{\lambda,p}^{\mu} f(z)\right)' = (p+\mu+\lambda-1)Q_{\lambda,p}^{\mu-1} f(z) - (\mu+\lambda-1)Q_{\lambda,p}^{\mu} f(z)$$

eşitliği vardır.

4.4.3. Sonuç: Özel olarak $\mu = 1$ için $Q_{\lambda}^{1} f(z) = P_{\lambda}^{1} f(z)$ dir.

4.4.4. Sonuç: Q_{λ}^{μ} lineer operatörü kullanılarak A nın altsınıfları olan

$$S_{\lambda,\,\mu}(\alpha) = \left\{ f \in A : Q_{\lambda}^{\mu} f \in S(\alpha) \ \ (0 \le \alpha < 1) \right\}$$

$$C_{\lambda,\,\mu}(\alpha) = \left\{ f \in A : Q_{\lambda}^{\mu} f \in C(\alpha) \ \ (0 \le \alpha < 1) \right\}$$

$$K_{\lambda,\,\mu}(\alpha,\beta)=\left\{f\in A: Q_\lambda^\mu f\in K(\alpha,\beta)\ \ (0\le\alpha,\beta<1)\right\}$$

$$QK_{\lambda,\,\mu}(\alpha,\beta)=\left\{f\in A: Q_\lambda^\mu f\in QK(\alpha,\beta)\ \ (0\le\alpha,\beta<1)\right\}$$

sınıflar tanımlanmıştır (Chun-Yı et al., 2005).

4.5. Lineer Operatör 4

4.5.1. Tanım: $f\in A$ olmak üzere Salagean operatörünün en geniş hali olan $D_{\lambda\mu}^n : A\to A$ operatörü $0\le\mu\le\lambda\le 1$ ve $m\in\mathbb{N}=\{1,2,...\}$ olmak üzere

$$D_{\lambda\mu}^0 f(z)=f(z)$$

$$D_{\lambda\mu}^1 f(z)=D_{\lambda\mu} f(z)=\lambda\mu z^2 f''(z)+(\lambda-\mu)zf'(z)+(1-\lambda+\mu)f(z)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu durumda

$$D_{\lambda\mu}^n f(z)=D_{\lambda\mu}\left(D_{\lambda\mu}^{n-1} f(z)\right)\ \text{ dir.}$$

Buradan

$$D_{\lambda\mu}^n f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left[1+(\lambda\mu k+\lambda-\mu)(k-1)\right]^n a_k z^k \qquad (4.13)$$

dir (Raducanu and Orhan, 2010).

4.5.2. Sonuç: $\lambda=1,\mu=0$ olması durumunda "Eş. 2.42" deki Salagean operatörü elde edilir. $\mu=0$ durumunda ise (Al-Oboudi, 2004) tarafından tanımlanan operatör elde edilir.

4.5.3. Sonuç: Bu operatör kullanılarak aşağıdaki şekilde bir sınıf tanımlanmaktadır: $0\le\gamma\le 1,\ \alpha\ge 1,\ k\ge 0$ ve $0\le\beta<1$ ve $G(z)=(1-\gamma)D_{\lambda\mu}^n f(z)+\gamma z\left(D_{\lambda\mu}^n f(z)\right)'$ olmak üzere, bir $f\in A$ fonksiyonu eğer

$$\Re\left\{\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}-(\alpha-1)\right\}>k\left|\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}-\alpha\right|+\beta$$

şartını sağlıyorsa $S_{\lambda\mu}^{n}(\gamma,\alpha,k,\beta)$ sınıfındandır denir.

4.6. Lineer Operatör 5 (Carlson-Shaffer Operatörü)

4.6.1. Tanım: $(a)_k$ ve $(c)_k$ Pochammer sembolünü göstermek üzere A üzerinde $\phi(a,c;z)$ fonksiyonu

$$\phi(a,c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}z^{k+1} \tag{4.14}$$

$\left(z\in U;\;\; a\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_0^-;\;\; \mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...\}\right)$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$L(a,c):A\to A$ lineer operatörler ailesi

$$L(a,c)f(z)=\phi(a,c;z)*f(z) \quad (z\in U;\; f\in A) \tag{4.15}$$

ile tanımlanır.

Yani

$$L(a,c)f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}a_{n+1}z^{n+1}\;,\;\;(z\in U) \tag{4.16}$$

olur (Carlson and Shaffer, 1984).

$c>a>0$ ise $L(a,c)f(z)$ nin integral gösterimi

$$L(a,c)f(z)=\int_0^1 u^{-1}f(uz)d\mu(u) \tag{4.17}$$

şeklinde olup, burada $d\mu(u)=\dfrac{u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}}{\beta(a,c-a)}du$, ($\beta$, Beta fonksiyonu) ve $\int_0^1 d\mu(u)=1$ dir.

4.6.2. Sonuç: $c+1>0$ ve $J_c f(z)$, "Eş. 2.41" de tanımlanan integral operatörü olmak üzere

$$L(c+1,c+2)f(z)=\frac{c+1}{z^c}\int_0^c f(t)dt=J_c f(z) \tag{4.18}$$

dir.

4.6.3. Sonuç: $L(a,c)$ operatörü için

$$z\left(L(a,c)f(z)\right)'=aL(a+1,c)f(z)-(a-1)L(a,c)f(z) \tag{4.19}$$

eşitliği vardır.

4.6.4. Sonuç: Özel olarak

$$L(a,a)f(z)=f(z),\ L(2,1)f(z)=zf'(z),\ L(3,1)f(z)=zf'(z)+\frac{1}{2}z^2 f''(z),$$

ve $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $L(n+1,1)f(z)=D^n f(z)$, (D^n, Ruscheweyh türevi)
dir.

Örnek: $f(z)\in A$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ olsun. $L(2,3)f(z)$ 'yi bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}L(2,3)f(z)&=\phi(2,3;z)*f(z)\\&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)_k}{(3)_k}z^{k+1}\right)*\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}\right)\\&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+2)}z^{k+1}\right)*\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+2)}z^{k+1}\\&=z+\frac{2}{3}z^2+\frac{2}{4}z^3+\ldots\end{aligned}$$

olur.

Ayrıca

$z\left(L(2,3)f(z)\right)' = 2.L(3,3)f(z)-(2-1).L(2,3)f(z)$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. Önce eşitliğin sol tarafı için

$$z\left(L(2,3)f(z)\right)' = z.\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+2)}z^{k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(k+1)}{(k+2)}z^{k+1} \quad \text{yazılır.}$$

Eşitliğin sağ tarafın için

$$\begin{aligned}
2.L(3,3)f(z)-(2-1).L(2,3)f(z) &= 2.\left(\phi(3,3;z)*f(z)\right)-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+2)}z^{k+1}\right)\\
&= 2.\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3)_k}{(3)_k}z^{k+1}\right)*\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}\right)\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+2)}z^{k+1}\\
&= 2.\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+2)}z^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(k+1)}{(k+2)}z^{k+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eşitliğin doğruluğu bir örnek üzerinde gösterilmiş olur.

4.7. Lineer Operatör 6

4.7.1. Tanım: $(a)_k$ ve $(c)_k$ Pochammer sembolünü göstermek üzere $A_p(1)=A_p$ üzerinde $\phi_p(a,c;z)$ fonksiyonu

$$\phi_p(a,c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}z^{k+p} \tag{4.20}$$

$$\left(z\in U;\;\; a,c\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_0^-;\;\; \mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...\}\right)$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$L_p(a,c):A_p\to A_p$ lineer operatörler ailesi

$$L_p(a,c)f(z)=\phi_p(a,c;z)*f(z) \quad (z\in U;\; f\in A_p) \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlanır (Cho et al., 2004).

Örnek: $f(z)\in A_4$ olmak üzere $f(z)=z^2+2z^3+3z^4$ olsun. $L_4(1,3)f(z)$ 'yi bulunuz.

Çözüm:

$$L_4(1,3)f(z)=\phi_4(1,3;z)*f(z)$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{2}\frac{(1)_k}{(3)_k}z^{k+2}\right)*\left(z^2+2z^3+3z^4\right)$$

$$=\left(z^2+\frac{\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}}{\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3)}}z^3+\frac{\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}}{\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)}}z^4\right)*\left(z^2+2z^3+3z^4\right)$$

$$=\left(z^2+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{6}z^4\right)*\left(z^2+2z^3+3z^4\right)$$

$$=z^2+\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{2}z^4$$

4.7.2. Sonuç: $L_p(a,c)$ operatörü için

$$z\left(L_p(a,c)f(z)\right)'=aL_p(a+1,c)f(z)-(a-p)L_p(a,c)f(z) \qquad (4.22)$$

eşitliği vardır.

4.7.3. Sonuç: Özel olarak

$$L_p(a,a)f(z)=f(z),\ L_p(p+1,p)f(z)=\frac{zf'(z)}{p}$$

ve $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$L_p(n+p,1)f(z)=D^{n+p-1}f(z) \quad (n>-p)\ (D^n,\ \text{Ruscheweyh türevi}) \qquad (4.23)$$

olur.

4.7.4. Sonuç: Carlson–Shaffer operatörü $L(a,c)$ ile Ruscheweyh türev operatörü $D^{\lambda}: A \to A$ alındığında

$$D^{\lambda} f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f(z) = L_1(\lambda+1, 1) f(z) \quad (f \in A; \lambda > -1) \tag{4.24}$$

elde edilir.

$L_p(a,c)$ lineer operatörü, Carlson-Shaffer operatörü *$L(a,c)$' nin* geniş bir hali ve kesirsel mertebeden türev operatörü D_z^{λ} den oluşmaktadır (Srivastava and Owa, 1987).

4.7.5. Sonuç: $L_p(a,c)$ genel lineer operatörü kullanılarak A_p nin bir altsınıfı olan

$$S_{a,\,c}(\eta; p; A, B) = \left\{ f : f \in A_p,\ \ \frac{1}{p-\eta}\left(\frac{z\left(L_p(a,c)f(z)\right)'}{L_p(a,c)f(z)} - \eta \right) \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \right\} \tag{4.25}$$

$(0 \le \eta < p;\ \ -1 \le B < A \le 1;\ z \in U)$

η. $(0 \le \eta < p)$ mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı tanımlanmaktadır.

Özel olarak

$$S_{a,\,c}(\eta; p; 1, -1) = S_{a,\,c}(\eta; p)$$

$$= \left\{ f : f \in A_p \ \text{ ve } \ \Re\left(\frac{z\left(L_p(a,c)f(z)\right)'}{L_p(a,c)f(z)} \right) > \eta \ \ (0 \le \eta < p;\ \ z \in U) \right\} \tag{4.26}$$

dir (Srivastava and Patel, 2005).

4.7.6. Tanım: $L_p(a,c)$ genel lineer operatörü kullanılarak A_p nin başka bir altsınıfı

$$P_{a,\,c}(A;B;\eta,p)=\left\{f:f\in A_p\ \text{ ve }\ \frac{1}{p-\eta}\left(\frac{\left(L_p(a,c)f(z)\right)'}{z^{p-1}}-\eta\right)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\right\}\tag{4.27}$$

$(0\le\eta<p;\ -1\le B<A\le 1;\ z\in U)$

ile tanımlıdır (Aouf et al., 2008).

4.8.Lineer Operatör 7

4.8.1. Tanım: $(a)_k$ ve $(c)_k$ Pochammer sembolünü göstermek üzere $A_p(n)$ üzerinde $\phi_{p,\,n}(a,c;z)$ fonksiyonu

$$\phi_{p,\,n}(a,c;z)=z^p+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}z^{k+p}\tag{4.28}$$

$\left(z\in U;\ \ a\in\mathbb{R},c\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_0^-;\ \ \mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...\}\right)$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$L_{p,\,n}(a,c):A_p(n)\to A_p(n)$ lineer operatörler ailesi

$$L_{p,\,n}(a,c)f(z)=\phi_{p,\,n}(a,c;z)*f(z)\quad (z\in U;\ f\in A_p(n))\tag{4.29}$$

ile tanımlanır (Xu and Aouf , 2009).

Örnek: $f(z)\in A_2(4)$ olmak üzere $f(z)=z^2+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^{k+2}$ olsun. $L_{2,4}(1,2)f(z)$’yi bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $\phi_{2,\,4}(1,3;z)$ yi bulalım.

$$\phi_{2,\,4}(1,2;z)=z^2+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(1)_k}{(2)_k}z^{k+2}$$

$$= z^2 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)}}{\dfrac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(2)}} z^{k+2}$$

$$= z^2 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k+1} z^{k+2}$$

olur.

Buradan

$$L_{2,4}(1,2)f(z) = \phi_{2,4}(1,2;z) * f(z) = z^2 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^k(k+1)} z^{k+2} = z^2 + \frac{1}{2^4.5} z^6 + \frac{1}{2^5.6} z^7 + ...$$

elde edilir.

4.8.2. Sonuç: Özel olarak $L_{p,1}(a,c) = L_p(a,c), \quad L_1(a,c) = L(a,c)$ dir.

4.8.3. Sonuç: $L_{p,n}(a,c)$ operatörü için

$$z\left(L_{p,n}(a,c)f(z)\right)' = aL_{p,n}(a+1,c)f(z) - (a-p)L_{p,n}(a,c)f(z) \tag{4.30}$$

eşitliği vardır.

4.8.4. Sonuç: Özel olarak

$L_{p,n}(a,a)f(z) = f(z)$

$L_{p,n}(p+1,p)f(z) = \dfrac{zf'(z)}{p}$ ve $L_{p,n}(\lambda+p,1)f(z) = D^{\lambda+p-1}f(z) \quad (\lambda > -p)$ dir.

4.8.5. Sonuç: $J_{c,p}(f(z))$ "Eş. 2.44" deki integral operatörü olmak üzere

$\dfrac{L_{p,n}(a,c)f(z)}{z^p} \prec h(z)$ ise $\dfrac{L_{p,n}(a,c)(J_{c,p}f)(z)}{z^p} \prec h(z)$ dir.

4.8.6. Tanım: $p, n \in \mathbb{N},\ \delta \geq 0, a > 0,\ c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $h(z)$, U da analitik, ünivalent, konveks ve $h(0) = 1$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $L_{p,n}(a,c)$ operatörü kullanılarak $T_{p,n}(a,c,\delta;h)$ sınıfı tanımlanmaktadır şöyle ki:

$f(z) \in A_p(n)$ fonksiyonu

$$(1-\delta)\frac{L_{p,n}(a,c)f(z)}{z^p} + \delta\frac{L_{p,n}(a+1,c)f(z)}{z^p} \prec h(z) \tag{4.31}$$

şartını sağlıyorsa $T_{p,n}(a,c,\delta;h)$ sınıfındandır denir (Xu and Aouf, 2009).

4.8.7. Tanım: $\delta > 0,\ \lambda > -p,\ -1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere $f(z) \in A_p(n)$ fonksiyonu

$$(1-\delta)\frac{D^{\lambda+p-1}f(z)}{z^p} + \delta\frac{D^{\lambda+p}f(z)}{z^p} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \tag{4.32}$$

şartını sağlıyorsa $H(p,n,\lambda,\delta,A,B)$ sınıfındadır denir (Xu and Aouf, 2009).

4.8.8. Sonuç: "Eş. 4.31" de $a = \lambda + p,\ c = 1$ ve $h(z) = \dfrac{1+Az}{1+Bz}$ alınırsa "Eş. 4.32" elde edilir.

4.8.9. Sonuç: $f(z) \in T_{p,n}(a,c,\delta;h)$ ve $J_{c,p}(f(z))$ "Eş. 2.44" deki integral operatörü olmak üzere $\dfrac{L_{p,n}(a,c)(J_{c,p}f)(z)}{z^p} \prec h(z)$ dir.

4.9. Lineer Operatör 8

4.9.1. Tanım: "Eş. 4.20" deki $\phi_p(a,c;z)$ fonksiyonuna karşılık

$$\phi_p(a,c;z) * \phi_p^{\dagger}(a,c;z) = \frac{z^p}{(1-z)^{\lambda+p}} \quad (\lambda > -p) \tag{4.33}$$

eşitliğini sağlayan bir $\phi_p^{\dagger}(a,c;z)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $T_p^{\lambda}(a,c): A \to A$ lineer operatörler ailesi

$$T_p^{\lambda}(a,c)f(z) = \phi_p^{\dagger}(a,c;z) * f(z) \tag{4.34}$$

$(a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^- \; ; \; \lambda > -p \; ; \; z \in U; \, f \in A_p)$

şeklinde tanımlanır (Cho et al., 2004).

Örnek: $f(z) \in A_3$ olmak üzere $f(z) = z^3 + 2z^4 + 3z^5 + 4z^6 ...$ olsun. $T_3^{-2}(2,3)f(z)$ 'yi bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $\phi_3(2,3;z)$ yi bulalım.

$$\phi_3(2,3;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2)_k}{(3)_k} z^{k+3}$$

$$= z^3 + \frac{(2)_1}{(3)_1} z^4 + \frac{(2)_2}{(3)_2} z^5 + \frac{(2)_3}{(3)_3} z^6 + ...$$

$$= z^3 + \frac{\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)}}{\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3)}} z^4 + \frac{\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)}}{\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)}} z^5 + \frac{\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(2)}}{\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)}} z^6 + ...$$

$$= z^3 + \frac{2}{3} z^4 + \frac{2}{4} z^5 + \frac{2}{5} z^6 + ...$$

dir. Bu durumda $\phi_3(2,3;z) * \phi_3^{\dagger}(2,3;z) = \dfrac{z^3}{(1-z)^{-2+3}} = \dfrac{z^3}{1-z}$ olacak şekilde $\phi_3^{\dagger}(2,3;z)$ yi bulalım.

$$\left(z^3 + \frac{2}{3} z^4 + \frac{2}{4} z^5 + \frac{2}{5} z^6 + ... \right) * \left(z^3 + bz^4 + cz^5 + dz^6 + ... \right) = \frac{z^3}{1-z}$$

$$z^3 + \frac{2b}{3} z^4 + \frac{2c}{4} z^5 + \frac{2d}{5} z^6 + ... = \frac{z^3}{1-z}$$

$$z^3 + \frac{2b}{3} z^4 + \frac{2c}{4} z^5 + \frac{2d}{5} z^6 + ... = z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + ...$$

olur.

Buradan $b = \dfrac{3}{2}, \;\; c = \dfrac{4}{2}, \;\; d = \dfrac{5}{2} \;, ...$ elde edilir.

Yani $\phi_3^{\dagger}(2,3;z)=z^3+\frac{3}{2}z^4+\frac{4}{2}z^5+\frac{5}{2}z^6+...$ dir.

Bu durumda

$$T_3^{-2}(2,3)f(z)=\phi_3^{\dagger}(2,3;z)*f(z)$$

$$=\left(z^3+\frac{3}{2}z^4+\frac{4}{2}z^5+\frac{5}{2}z^6+...\right)*\left(z^3+2z^4+3z^5+4z^6+...\right)$$

$$=z^3+3z^4+6z^5+10z^6+...$$

olur.

4.9.2. Sonuç: $T_p^{\lambda}(a+1,c)$ ile $T_p^{\lambda}(a,c)$ arasında

$$z(T_p^{\lambda}(a+1,c)f(z))'=aT_p^{\lambda}(a,c)f(z)-(a-p)T_p^{\lambda}(a+1,c)f(z) \qquad (4.35)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

4.9.3. Sonuç: Özel olarak

$T_p^1(p+1,1)f(z)=f(z)$ ve $T_p^1(p,1)f(z)=\dfrac{zf'(z)}{p}$ dir.

4.9.4. Sonuç: $T_p^{\lambda}(a,c)$ operatörü için

$$z(T_p^{\lambda}(a,c)f(z))'=(\lambda+p)T_p^{\lambda+1}(a,c)f(z)-\lambda T_p^{\lambda}(a,c)f(z), \qquad (4.36)$$

eşitliği vardır.

$T_1^{\lambda}(\mu+2,1)$ $(\lambda>-1\ ;\ \mu>-2)$ operatörü (Choi et al., 2002) tarafından tanımlanmıştır.

4.9.5. Sonuç:

$T_p^{\lambda}(a,c)$ genel lineer operatörü kullanılarak A_p'nin aşağıdaki altsınıfı tanımlanmaktadır:

$$S^{\lambda}_{a,\,c}(\eta;p;h)=\left\{f:f\in A_p \text{ ve } \frac{1}{p-\eta}\left(\frac{z\left(T^{\lambda}_{p}(a,c)f(z)\right)'}{T^{\lambda}_{p}(a,c)f(z)}-\eta\right)\prec h(z)\right\} \tag{4.37}$$

$(0\le \eta<p;\ h\in N;\ z\in U)$

Özel olarak

$$S^{\lambda}_{a,\,c}(\eta;p;1,-1)=S^{\lambda}_{a,\,c}(\eta;p)$$
$$=\left\{f:f\in A_p \text{ ve } \Re\left(\frac{z\left(T^{\lambda}_{p}(a,c)f(z)\right)'}{T^{\lambda}_{p}(a,c)f(z)}\right)>\eta\ \ (0\le\eta<p;\ z\in U)\right\} \tag{4.38}$$

dir.

4.9.6. Sonuç: $F_\mu : A_p \to A_p$,

$$F_\mu(f)=F_\mu(f)(z)=\frac{\mu+p}{z^\mu}\int_0^z t^{\mu-1}f(t)dt \quad (\mu\ge 0) \tag{4.39}$$

integral operatörü olmak üzere, $f\in S^{\lambda}_{a,\,c}(\eta;p;h)$ ise $F_\mu(f)\in S^{\lambda}_{a,c}(\eta;p;h)$ dir (Yuan et al., 2008).

4.10. Lineer Operatör 9 (Srivastava-Attiya operatörü)

4.10.1. Tanım: $f\in A,\ b\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ ve $s\in\mathbb{C}$ olmak üzere bir $G_{s,\,b}(z)$ fonksiyonu

$$G_{s,\,b}(z)=(1+b)^s\left[\Phi(z,s,b)-b^{-s}\right],\ (z\in U) \tag{4.40}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon kullanılarak

$J_{s,\,b}(f):A\to A$ lineer operatörü

$$J_{s,\,b}(f)(z)=G_{s,\,b}(z)*f(z) \tag{4.41}$$

$\left(z\in U;\ f\in A\ ;b\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^- \text{ ve } s\in\mathbb{C}\right)$

şeklinde tanımlanır.

Bu durumda

$$J_{s,\,b}(f)(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1+b}{k+b}\right)^{s}a_k z^k \tag{4.42}$$

olur (Srivastava and Attiya, 2007).

Örnek: $f(z)\in A$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}$, $s=2$ ve $b=1$ olsun. Bu durumda $J_{2,\,1}(f)(z)$' i bulunuz.

Çözüm: $f(z)=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}=z+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{2k-1}z^{2k-1}$ şeklinde yazılabilir. Böylece

$$J_{2,\,1}(f)(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k+1}\right)\frac{1}{2k-1}z^{2k-1}$$

$$=z+\frac{2}{9}z^2+\frac{1}{10}z^3+\frac{2}{35}z^3+\ldots$$

elde edilir.

4.10.2. Sonuç: $f\in A,\ b\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$ ve $s\in\mathbb{C}$ olmak üzere "Eş. 4.41" ve "Eş. 4.42" den $J_{s,\,0}(f)(z)=\lim\limits_{b\to 0}\{J_{s,\,b}(f)(z)\}$ dir.

4.10.3. Sonuç: $f\in A$ ve $z\in U$ olmak üzere "Eş. 4.41" ve "Eş. 4.42" den

$$J_{0,\,b}(f)(z)=f(z)\,, \tag{4.43}$$

$$J_{1,\,0}(f)(z)=\int_0^z\frac{f(t)}{t}dt=A(f)(z)\,, \tag{4.44}$$

$$J_{1,\,1}(f)(z)=\frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt=L(f)(z)\,, \tag{4.45}$$

$$J_{1,\,\gamma}(f)(z)=\frac{1+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt=L_{\gamma}(f)(z),\quad(\gamma>-1) \tag{4.46}$$

ve

$$J_{\sigma,\,1}(f)(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\sigma}a_k z^k=I^{\sigma}(f)(z)\quad(\sigma>0) \tag{4.47}$$

dir. Burada $A(f)$, $L(f)$, $L_\gamma(f)$, $I^\sigma(f)$ integral operatörleri olup sırasıyla Alexander, 1915; Libera, 1969; Bernardi, 1969 ve Jung et al., 1993 tarafından tanımlanmıştır.

4.10.4. Sonuç: $f \in A,\ z, t_j \in U\ (j = 1, ..., n), n \in \mathbb{N}$ ve $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ olmak üzere

$$J_{2,\,0}(f)(z) = \int_0^z \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{f(t_2)}{t_2} dt_2 dt_1 \tag{4.48}$$

$$J_{n,\,0}(f)(z) = \int_0^z \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \cdots \frac{1}{t_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} \frac{f(t_n)}{t_n} dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \tag{4.49}$$

$$J_{2,\,b}(f)(z) = \frac{(1+b)^2}{z^b} \int_0^z \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} t_2^{b-1} f(t_2) dt_2 dt_1 \tag{4.50}$$

ve

$$J_{n,\,b}(f)(z) = \frac{(1+b)^n}{z^b} \int_0^z \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \cdots \frac{1}{t_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} t_n^{b-1} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_1 \tag{4.51}$$

"Eş. 4.42" den

$$J_{s+1,\,b}(f)(z) = \frac{1+b}{z^b} \int_0^z t^{b-1} J_{s,\,b}(f)(t) dt \tag{4.52}$$

elde edilir.

"Eş. 4.52" nin her iki tarafının z'ye göre türevi alınırsa,

$$z\, J'_{s+1,\,b}(f)(z) = (1+b) J_{s,\,b}(f)(z) - b J_{s+1,\,b}(f)(z) \tag{4.53}$$

elde edilir.

4.10.5. Sonuç: $f \in A$, $b \geq 0$, $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$h(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}+\frac{2(1-\alpha)}{(1-z)[1+b+(1-2\alpha-b)z]} \quad \text{ve} \quad \frac{J_{s+j,\,b}(f)(z)}{z}\neq 0 \quad (j=0,1)$$

olsun. Bu durumda $\dfrac{z\,J'_{s,\,b}(f)(z)}{J_{s,\,b}(f)(z)}\prec h(z) \quad (z\in U)$

ise $J_{s+1,\,b}(f)(z)\in S(\alpha)$ dır.

4.11. Lineer Operatör 10

4.11.1. Tanım:

Srivastava-Attiya operatörünün genel hali olan $J_{s,\,b}(f):A_p\to A_p$ lineer operatörü

$z\in U;\ f\in A_p\ ;b\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-\ ,\ s\in\mathbb{C}, p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$J_{s,\,b}(f)(z)=G_{p,\,s,\,b}(z)*f(z) \tag{4.54}$$

ile tanımlanır.

Burada

$$G_{p,\,s,\,b}(z)=(1+b)^s\left[\Phi_p(z,s,b)-b^{-s}\right],\ (z\in U) \tag{4.55}$$

ve

$$\Phi_p(z,s,b)=\frac{1}{b^s}+\frac{z^p}{(1+b)^s}+\frac{z^{p+1}}{(2+b)^s}+\ldots \tag{4.56}$$

olmak üzere “Eş. 4.54” , “Eş. 4.55” ve “Eş. 4.56” dan

$$J_{s,\,b}(f)(z)=z^p+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+b}{n+1+b}\right)^s a_n z^{n+p} \tag{4.57}$$

elde edilir (Liu, 2008).

Örnek: $f(z)\in A_3$ olmak üzere $f(z)=z^3+2z^4+3z^5+4z^6\ldots$ ve $s=2$, $b=1$ olsun. Bu durumda $J_{2,\,1}(f)(z)$’ i bulunuz.

Çözüm: “Eş. 4.57” de $s=2$, $b=1$ ve $a_n=n+1$ yazılırsa

$$J_{2,\,1}(f)(z)=z^{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{2}.(n+1)z^{n+3}$$

$$=z^{2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)^{2}}z^{n+2}$$

$$=z^{2}+\frac{8}{3^{2}}z^{3}+\frac{12}{4^{2}}z^{4}+\frac{16}{5^{2}}z^{5}+\ldots$$

elde edilir.

4.11.2. Sonuç: $p=1$ durumunda Srivastava-Attiya operatörü elde edilmektedir.

4.11.3. Tanım: Bir $f(z)\in A_p$ fonksiyonu, $\lambda\in\mathbb{C};p\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ ve $h(z)\in N$ olmak üzere

$$\frac{(1-\lambda)}{p}z^{-p+1}\left(J_{s,\,b}f(z)\right)'+\frac{\lambda}{p(p-1)}z^{-p+2}\left(J_{s,\,b}f(z)\right)''\prec h(z)$$

şartını sağlıyorsa $T_{s,\,b}(\lambda;h)$ sınıfındandır denir (Liu, 2008).

4.12. Lineer Operatör 11

4.12.1. Tanım: $z\in U;\, f\in A_p\ ;b\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-$, $s\in\mathbb{C}, p\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_{s,\,b}^{p}(z)=z^{p}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p+k+b}{p+b}\right)^{s}z^{p+k} \tag{4.58}$$

fonksiyonu verilsin. Hadamard çarpımı yardımıyla

$$f_{s,\,b}^{p}(z)*f_{s,\,b}^{\lambda,p}(z)=\frac{z^{p}}{(1-z)^{\lambda+p}} \qquad (z\in U;\lambda>-p) \tag{4.59}$$

eşitliğini sağlayan $f_{s,\,b}^{\lambda,p}(z)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(f):A_p\to A_p$ lineer operatörü

$$J_{s,\,b}^{\lambda,\,p} f(z) = f_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(z) * f(z) \qquad (z \in U; f \in A_p) \tag{4.60}$$

ile tanımlanır.

"Eş. 4.58", "Eş. 4.59" ve "Eş. 4.60" dan

$$J_{s,\,b}^{\lambda,\,p} f(z) = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda+p)_k}{k!} \left(\frac{p+b}{p+k+b} \right)^s a_{p+k} z^{p+k} \tag{4.61}$$

($z \in U$ ve $(v)_k$ Pochhammer sembolü)

elde edilir (Wang et al., 2009).

Örnek: $f(z) \in A$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + ...$ fonksiyonu verilsin. $\lambda = 1$, $s = 1$ ve $b = 1$ için $J_{s,\,b}^{\lambda,\,p} f(z)$ ' i bulunuz.

Çözüm: "Eş. 4.61" de $\lambda = 1$, $s = 1$ ve $b = 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} J_{1,\,1}^{1,\,1} f(z) &= z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2)_k}{k!} \left(\frac{2}{k+2} \right)^1 a_{k+1} z^{k+1} \\ &= z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k+1} z^{2k+1} \\ &= z + \frac{3}{2} z^3 + \frac{5}{3} z^5 + \frac{7}{4} z^5 + ... \end{aligned}$$

elde edilir.

4.12.2. Sonuç: $J_{s+1,\,b}^{\lambda,\,p}$ ile $J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}$ arasında

$$z\left(J_{s+1,\,b}^{\lambda,\,p} f(z) \right)' = (p+b) J_{s,\,b}^{\lambda,\,p} f(z) - b J_{s+1,\,b}^{\lambda,\,p} f(z) \tag{4.62}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

4.12.3. Sonuç: $J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}$ operatörü için

$$z\left(J_{s,\,b}^{\lambda,\,p} f(z) \right)' = (p+\lambda) J_{s,\,b}^{\lambda+1,\,p} f(z) - \lambda J_{s,\,b}^{\lambda,\,p} f(z) \tag{4.63}$$

eşitliği vardır.

4.12.4. Sonuç: $J_{s,\,b}^{0,\,1}(f)$ durumunda Srivastava-Attiya operatörü elde edilir.

4.12.5. Sonuç: $J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}$ lineer operatörü kullanılarak A_p nin altsınıfları olan

$$S_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta;h)=\left\{f\in A_p : J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}f\in S_p(\eta;h)\right\}$$

$$C_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta;h)=\left\{f\in A_p : J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}f\in C_p(\eta;h)\right\}$$

$$K_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta,\delta;h,k)=\left\{f\in A_p : J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}f\in K_p(\eta,\delta;h,k)\right\}$$

$$QK_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta,\delta;h,k)=\left\{f\in A_p : J_{s,\,b}^{\lambda,\,p}f\in QK_p(\eta,\delta;h,k)\right\}$$

şeklinde sınıflar tanımlanmaktadır.

4.12.6. Sonuç: $J_{c,p}(f(z))$ "Eş. 2.43" deki integral operatörü olmak üzere

i) $f\in S_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta;h)$ ise $J_{c,p}(f)\in S_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta;h)$

ii) $f\in C_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta;h)$ ise $J_{c,p}(f)\in C_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta;h)$

iii) $f\in K_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta,\delta;h,k)$ ise $J_{c,p}(f)\in K_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta,\delta;h,k)$

iv) $f\in QK_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta,\delta;h,k)$ ise $J_{c,p}(f)\in QK_{s,\,b}^{\lambda,\,p}(\eta,\delta;h,k)$

dir (Wang et al., 2009).

4.13. Lineer Operatör 12

4.13.1. Tanım:

$f\in\sum_p$ için D^n türev operatörü

$$D^0 f(z)=f(z)$$

$$D^1 f(z)=z^{-p}+\sum_{k=0}^{\infty}(p+k+1)a_k z^k=\frac{\left(z^{p+1}f(z)\right)'}{z^p} \qquad (4.64)$$

ve en genel hali

$$D^n f(z) = D\left(D^{n-1} f(z)\right) = z^{-p} + \sum_{k=0}^{\infty} (p+k+1)^n a_k z^k \quad , \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.65}$$

ile tanımlanır (Liu and Srivastava, 2004).

Örnek: $f(z) = \dfrac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ olmak üzere $f(z)$ nin D^3 türev operatörü altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm: "Eş. 4.65" deki ifadede $p = 1,\ n = 3$ yazılırsa

$$D^3 f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^3 a_k z^k$$

$$= \frac{1}{z} + 2^3 a_0 + 3^3 a_1 z + 4^3 a_2 z^2 + \ldots$$

elde edilir.

4.13.2. Sonuç: $f \in \sum_p$ olmak üzere f' nin $(n+1)$. mertebeden türevi ile n. mertebeden türevi arasında

$$z\left(D^n f(z)\right)' = D^{n+1} f(z) - (p+1) D^n f(z) \tag{4.66}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

4.13.3. Tanım: $z \in U;\ -1 \le B < A \le 1;\ p \in \mathbb{N};\ n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, bir $f(z) \in \sum_p$ fonksiyonu

$$\left| \frac{z^{p+1}\left(D^n f(z)\right)' + p}{Bz^{p+1}\left(D^n f(z)\right)' + Ap} \right| < 1 \tag{4.67}$$

şartını sağlıyorsa $R_{n,p}(A,B)$ sınıfındandır denir (Liu and Srivastava, 2004).

4.13.4. Sonuç: $J^{*}_{c,p}:\sum_{p}\to\sum_{p}$,

$$J^{*}_{c,p}(f)(z)=\frac{c}{z^{c+p}}\int_{0}^{z}t^{c+p-1}f(t)\,dt \qquad (\forall z\in U;\, c>0) \tag{4.68}$$

integral operatörü olmak üzere

$f(z)\in R_{n,p}(A,B)$ ise $J^{*}_{c,p}(f)(z)\in R_{n,p}(A,B)$ dir.

4.14. Lineer Operatör 13

4.14.1. Tanım:

$f_n(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^{n+1}}$ $\quad(n>-1)$ olsun ve $f^{\dagger}_{n,\mu}$ fonksiyonu

$$f_n(z) * f^{\dagger}_{n,\mu}(z)=\frac{1}{z(1-z)^{\mu}}\ ,\ (\mu>0) \tag{4.69}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlansın. Bu durumda

$I_{n,\mu}:\sum\ \to\sum$ integral operatörler ailesi

$$I_{n,\mu}f(z)=f^{\dagger}_{n,\mu}(z) * f(z)\ ,\ (f\in\Sigma) \tag{4.70}$$

ile tanımlanır.

"Eş. 4.69" ve "Eş. 4.70" den

$$I_{n,\mu}f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu)_{k+1}}{(n+1)_{k+1}}\,a_k z^k\ ,\ \left(\ (K)_n \text{ Pochhammer sembolü }\right) \tag{4.71}$$

elde edilir (Yuan et al., 2008).

Örnek: $f(z)\in\sum$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}kz^k$ olsun.

Bu durumda $I_{4,\,1}(f)(z)$ ' yi bulunuz.

Çözüm: "Eş. 4.71" de $n=4$ ve $\mu=1$ yazılırsa

$$I_{4,\,1}(f)(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_{k+1}}{(5)_{k+1}}kz^k$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\dfrac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(1)}}{\dfrac{\Gamma(k+6)}{\Gamma(5)}}kz^k=\frac{1}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}z^k$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{3.4.5.6}z+\frac{2}{4.5.6.7}z^2+\frac{3}{5.6.7.8}z^3+...$$

elde edilir.

4.14.2. Sonuç: $I_{n+1,\mu}$ ile $I_{n,\mu}$ arasında

$$z\left(I_{n+1,\mu}f(z)\right)'=(n+1)I_{n,\mu}f(z)-(n+2)I_{n+1,\mu}f(z) \qquad (4.72)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

4.14.3. Sonuç: $I_{n,\mu}$ ile $I_{n,\mu+1}$ arasında

$$z\left(I_{n,\mu}f(z)\right)'=\mu I_{n,\mu+1}f(z)-(\mu+1)I_{n,\mu}f(z) \qquad (4.73)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

4.14.4. Sonuç: $J_c^*:\sum\rightarrow\sum$,

$$J_c^*(f)(z)=\frac{c}{z^{c+1}}\int_0^z t^c f(t)dt \qquad (\forall z\in U;\, c>0) \qquad (4.74)$$

integral operatörü olmak üzere

$$cI_{n,\mu}f(z)=(c+1)I_{n,\mu}J_c^*(f)(z)+z\left(I_{n,\mu}J_c^*(f)(z)\right)' \qquad (4.75)$$

dir.

4.14.5. Sonuç: $I_{n,\mu}$ lineer operatörü kullanılarak $\sum$ nın altsınıfları olan

i) $S_{n,\mu}^*(\alpha)=\left\{f:f\in\sum \text{ ve } I_{n,\mu}f\in S^*(\alpha) \quad (0\leq\alpha<1)\right\}$

ii) $C^{*}_{n,\mu}(\alpha)=\left\{f : f\in\sum \text{ ve } I_{n,\mu}f\in C^{*}(\alpha)\quad (0\leq\alpha<1)\right\}$

ii) $K^{*}_{n,\mu}(\alpha,\beta)=\left\{f : f\in\sum \text{ ve } I_{n,\mu}f\in K^{*}(\alpha,\beta)\quad (0\leq\alpha<1;\ 0\leq\beta<1)\right\}$

iv) $QK^{*}_{n,\mu}(\alpha,\beta)=\left\{f : f\in\sum \text{ ve } I_{n,\mu}f\in QK^{*}(\alpha,\beta)\quad (0\leq\alpha<1;\ 0\leq\beta<1)\right\}$

şeklinde sınıflar tanımlanmaktadır.

4.15. Lineer Operatör 14

4.15.1. Tanım: $(a)_k$ ve $(c)_k$ Pochammer sembolünü göstermek üzere $\sum_p^n$ üzerinde $\phi_p(a,c;z)$ fonksiyonu

$$\phi_p(a,c;z)=z^{-p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}z^{n-p} \tag{4.76}$$

$\left(z\in U;\ a,c\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_0^-;\ \mathbb{Z}_0^-=\{0,-1,-2,...\}\right)$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$L_p(a,c):\sum_p^n \to \sum_p^n$ lineer operatörler ailesi

$$L_p(a,c)f(z)=\phi_p(a,c;z)*f(z)\quad (z\in U;\ f\in\textstyle\sum_p^n) \tag{4.77}$$

ile tanımlanır (Liu and Srivastava, 2001).

Örnek: $f(z)\in\sum_2$ olmak üzere $f(z)=z^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}kz^{k+2}$ olsun. $L_2(1,3)f(z)$ 'yi bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $\phi_2(1,3;z)$ 'yi bulalım.

$$\phi_2(1,3;z)=z^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1)_k}{(3)_k}z^{k+2}$$

$$= z^{-2} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)}}{\dfrac{\Gamma(k+3)}{\Gamma(3)}} z^{k+2}$$

$$= z^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+2)} z^{k+2}$$

Buradan

$$L_2(1,3)f(z) = \phi_2(1,3;z) * f(z) = z^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)(k+2)} z^{k+2}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{2.3} z^3 + \frac{4}{3.4} z^4 + \frac{6}{4.5} z^5 + ...$$

olur.

4.15.2. Sonuç: $L(a,c)$ operatörü için

$$z\left(L_p(a,c)f\right)'(z) = aL_p(a+1,c)f(z) - (a+p)L_p(a,c)f(z) \qquad (4.78)$$

eşitliği vardır.

4.15.3. Tanım: $p,k \in \mathbb{N},\ c \notin \mathbb{Z}_0^-$, $\varepsilon_k = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{k}\right)$ olmak üzere $f_{p,k}(a,c;z)$ fonksiyonu

$$f_{p,k}(a,c;z) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_k^{jp}\left(L_p(a,c)f(\varepsilon_k^j z)\right) = z^{-p} + ... \qquad \left(f \in \sum\nolimits_p^n\right) \qquad (4.79)$$

ile tanımlanır (Srivastava et.al., 2008).

4.15.4. Sonuç: $k=1$ için $f_{p,1}(a,c;z) = L_p(a,c)f(z)$ dir.

Örnek: $f(z) \in \sum_2$ olmak üzere $f(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n+2}$ olsun. $f_{2,k}(1,3;z)$' yi $k=2$ ve $k=3$ için bulunuz.

Çözüm: $k=2$ olsun. Bu durumda $\varepsilon_2=\exp\left(\frac{2\pi i}{2}\right)=-1$ olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
f_{2,2}(1,3;z)&=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}(-1)^{2j}\left(L_2(1,3)f((-1)^{2j}z)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left[L_2(1,3)f(z)+L_2(1,3)f(-z)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z^2}+\frac{2}{2.3}z^3+\frac{4}{3.4}z^4+\frac{6}{4.5}z^5+...+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{2.3}z^3+\frac{4}{3.4}z^4-\frac{6}{4.5}z^5+...\right]\\
&=\frac{1}{z^2}+\frac{4}{3.4}z^4+\frac{8}{5.6}z^6+\frac{12}{7.8}z^8+...=z^{-2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2(k-1)}{(2k-1)k}z^{2k}
\end{aligned}
$$

olur.

Şimdi ise $k=3$ olsun. Bu durumda $\varepsilon_3=\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ olur. O zaman

$$
\begin{aligned}
f_{2,3}(1,3;z)&=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{2}\varepsilon_3^{\,2j}\left(L_2(1,3)f\left(\varepsilon_3^{\,2j}z\right)\right)\\
&=\frac{1}{3}\left[L_2(1,3)f(z)+e^{4\pi i/3}.L_2(1,3)f\left(e^{2\pi i/3}z\right)+e^{2\pi i/3}.L_2(1,3)f\left(e^{4\pi i/3}z\right)\right]\\
&=\frac{1}{z^2}+\frac{4}{3.4}z^4+\frac{10}{6.7}z^7+\frac{16}{9.10}z^{10}+...=z^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k-2}{3k(3k+1)}z^{3k+1}
\end{aligned}
$$

olur.

4.15.5. Tanım: $h\in N,\ z\in U^*$ ve $f_{p,k}(a,c;z)\neq 0$ olmak üzere bir $f(z)\in\sum_p^n$ fonksiyonu

$$
-\frac{z\left(L_p(a,c)f(z)\right)'}{pf_{p,k}(a,c;z)}\prec h(z) \tag{4.80}
$$

şartını sağlıyorsa $\sum_{p,k}^n(a,c;h)$ sınıfındandır denir (Srivastava et.al., 2008).

4.15.6. Tanım: $z\in U,\ -1\leq B<A\leq 1$ olmak üzere bir $f(z)\in\sum_p^n$ fonksiyonu

$$\left| \frac{z\left(L_p(a,c)f(z)\right)' + pL_p(a,c)f(z)}{Bz\left(L_p(a,c)f(z)\right)' + ApL_p(a,c)f(z)} \right| < 1 \tag{4.81}$$

şartını sağlıyorsa $H_{a,c}(p;A,B)$ sınıfındandır denir (Srivastava et.al., 2008).

4.15.7. Sonuç: $\sum_{p,k}^{n}(a,c;h)$ ' de $k=1$ ve $h(z)=\dfrac{1+Az}{1-Bz}$, $(-1\le B<A\le 1)$ alınırsa $H_{a,c}(p;A,B)$ elde edilir.

4.15.8. Tanım: $h\in N,\ z\in U^*$ ve $g\in\sum_{p,k}^{n}(a,c;h)$ olmak üzere bir $f(z)\in\sum_{p}^{n}$ fonksiyonu

$$-\frac{z\left(L_p(a,c)f(z)\right)'}{pg_{p,k}(a,c;z)} \prec h(z) \tag{4.82}$$

şartını sağlıyorsa $K_{p,k}(a,c;h)$ sınıfındandır denir (Srivastava et.al., 2008).

4.15.9. Sonuç: $K_{p,k}(a,c;h)$ sınıfında $p=k=a=c=1$ ve $h(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ alınırsa meromorf konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı elde edilir.

4.15.10. Tanım: $\alpha\ge 0,\ h\in N,\ z\in U^*, g\in\sum_{p,k}^{n}(a,c;h)$ ve $g_{p,k}(a+1,c;z)\ne 0$ olmak üzere bir $f(z)\in\sum_{p}^{n}$ fonksiyonu

$$-\alpha\frac{z\left(L_p(a+1,c)f(z)\right)'}{pg_{p,k}(a+1,c;z)} - (1-\alpha)\frac{z\left(L_p(a,c)f(z)\right)'}{pg_{p,k}(a,c;z)} \prec h(z) \tag{4.83}$$

şartını sağlıyorsa $K_{p,k}(\alpha;a,c;h)$ sınıfındandır denir (Srivastava et.al., 2008).

4.15.11. Lemma: $f \in \sum_{p,k}^{n}(a,c;h)$ ise

$$-\frac{zf_{p,k}{}'(a,c;z)}{pf_{p,k}(a,c;z)} \prec h(z) \tag{4.84}$$

dir.

İspat: "Eş. 4.79" dan

$$\begin{aligned} f_{p,k}(a,c;\varepsilon_k^j z) &= \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\varepsilon_k^{mp}\left(L_p(a,c)f(\varepsilon_k^{m+j}z)\right) \qquad (j\in\{0,1,...,k-1\}) \\ &= \frac{\varepsilon_k^{-jp}}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\varepsilon_k^{(m+j)p}\left(L_p(a,c)f(\varepsilon_k^{m+j}z)\right) \\ &= \varepsilon_k^{-jp}f_{p,k}(a,c;z) \end{aligned}$$

ve

$$f'_{p,k}(a,c;z) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon_k^{j(p+1)}\left(L_p(a,c)f(\varepsilon_k^j z)\right)'$$

yazılır.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} -\frac{zf_{p,k}{}'(a,c;z)}{pf_{p,k}(a,c;z)} &= -\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\varepsilon_k^{j(p+1)}z\left(L_p(a,c)f(\varepsilon_k^j z)\right)'}{pf_{p,k}(a,c;z)} \\ &= -\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\varepsilon_k^{j}z\left(L_p(a,c)f(\varepsilon_k^j z)\right)'}{pf_{p,k}(a,c;\varepsilon_k^j z)} \end{aligned} \tag{4.85}$$

olur. $f \in \sum_{p,k}^{n}(a,c;h)$ olduğundan

$$-\frac{\varepsilon_k^{j}z\left(L_p(a,c)f(\varepsilon_k^j z)\right)'}{pf_{p,k}(a,c;\varepsilon_k^j z)} \prec h(z) \qquad (j\in\{0,1,...,k-1\}) \tag{4.86}$$

dir. "Eş. 4.85" ve "Eş. 4.86" dan

$-\dfrac{zf_{p,k}{}'(a,c;z)}{pf_{p,k}(a,c;z)} \prec h(z)$ elde edilir (Srivastava et al., 2008).

KAYNAKLAR

Alexander, J. W., “Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions”, ***Annals of Mathematics (Series 2)***, 17: 12–22, (1915).

Al-Oboudi, F. M., “On univalent functions defined by a generalized Salagean operator”, ***Internat. J. Math. Math. Sci.,*** 27: 1429-1436, (2004).

Aouf, M.K., Silverman, H. and Srivastava, H.M., “Some families of linear operators associated with certain subclasses of multivalent functions”, ***Computers and Mathematics with Applications,*** 55: 535–549, (2008).

Başkan, T., “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, ***Uludağ Üniversitesi***, sayfa 153, 159, (1998).

Bajpai, S.K., “Sprial-like integral operators”, ***Internet J. Math. Sci.***, 24: 337-351, (1981)

Bernardi, S.D., “Convex and starlike functions”, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, 135: 429-446, (1969).

Carlson, B.C. and Shaffer, D.B., “Starlike and prestarlike hypergeometric functions”, ***J. Math. Anal.*** 159: 737–745, (1984)

Chen, M.P., Irmak, H. and Srivastava, H. M., “Some families of multivalenty analytic functions with negative coefficients”. ***J. Math. Anal. Appl.,*** (1997).

Cho, N.E., Kwon O.S., and Srivastava H.M., “Inclusion relationships and argument properties for certain subclasses of multivalent functions associated with a family of linear operators”, ***J. Math. Anal. Appl.*** 292: 470–483, (2004).

Choi, J.H., Saigo, M. and Srivastava, H.M., “Some inclusion properties of a certain family of integral operators”, ***J. Math. Anal. Appl.*** 276: 432–445, (2002).

Chun-Yi, G., Shao-Mou, Y. and Srivastava, H.M., “Some Functional Inequalities and Inclusion Relationships Associated with Certain Families of Integral Operators”, ***Computers and Mathematics with Applications*** 49: 1787-1795, (2005).

Çetin, Ö.F., “p-değerli analitik fonksiyonların kesirsel mertebeden türev ve integralleri”, Doktora tezi, ***Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Van, 6-8, (1997).

Duren, P.L., “Univalent functions”, ***Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag***, New York, Vol. 259, (1983).

Goel, R.M. and Sohi, N.S., “A new criterion for p-valent functions”, ***Proc. Amer. Math. Soc.*** 78: 353–357, (1980).

Goodman, W.A., “Univalent Functions”, ***Mariner Publications Company***, Tampa, Volume II, Set., p.557, (1983).

Irmak, H. and Piejko, K., “Starlikeness, Convexity, Close-to-Convexity, and Quasi-Convexity of certain analytic functions”, ***International Journal of Pure and Applied Mathematics***,Volume 21, No 3: 307-314, (2005).

Jung, I.B., Kim,Y.C. and Srivastava, H.M., “The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 176: 138–147, (1993).

Kumar, V. and Shukla, S.K., “Multivalent Functions Defined By Ruscheweyh Derivatives”, ***II. Indian J. Pure Appl. Math.***, 15 (11): 1228-1238, (1984).

Kuhnau, R, “Handbook Of Complex Analysis: Geometric Function Theory”, Volume1, ***Elsevier***, p.26, (2002).

Libera, R. J., “Some classes of regüler univalent functions”, ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 16: 755-758, (1965).

Libera, R.J., “Some classes of regular univalent functions”, ***Proceedings of the American Mathematical Society***, 135: 429–449, (1969).

Liu, J.-L., “Subordinations for certain multivalent analytic functions associated with the generalized Srivastava-Attiya operator”, ***Integral Transforms and Special Functions***, Vol. 19, No 12: 893–901, (2008).

Liu, J.-L. and Srivastava, H.M., A linear operator and associated families of meromorphically multivalent functions, ***J. Math. Anal. Appl***., 259: 566–581, (2001).

Liu, J.-L. and Srivastava, H.M., “Subclasses of Meromorphically Multivalent Functions Associated with a Certain Linear Operator”, ***Mathematical and Computer Modelling,*** 39: 35-44, (2004).

Marx, A., “Untersuchengen über schlichte abbildungen”, ***Math. Ann.*** , 107: 40-67, (1932).

Miller, S.S. , Mocanu, P. T. and Reade, M. O., “Starlike integral operator”, ***Pasifik J. Math.***, 79: 157-168, (1978).

Mostafa, A.O. and Aouf, M.K, “Certain subclasses of p-valent functions involving the Dziok–Srivastava operator”, ***Applied Mathematics and Computation***, 211: 23–32, (2009).

Musayev, B. ve Alp, M., “Fonksiyonel Analiz”, ***Balcı Yayınları***, sayfa 123, 126, (2000).

Nehari, Z., “Conformal mapping”, ***Mc. Graw-Hill***, p. 369, (1952).

Orhan, H., “Analitik fonksiyonların belli sınıfları için katsayı eşitsizlikleri”, Doktora tezi, ***Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** (2002).

Owa, S., “On the distortion theorems”, ***Kyungpook Math. J.,*** 18: 53-59, (1978).

Ozaki S., and Nunokawa M., “The Schwarzian derivative and univalent functions”, ***Proc. Amer. Math. Soc.*** 33: 392–394, (1972).

Raducanu, D., and Orhan, H., “Subclasses of Analytic Functions Defined by a Generalized Differential Operator”, ***Int. Journal of Math. Analysis***, Vol. 4, No 1: 1–5, (2010).

Robertson, N. J. , “On the theory of univalent functions”, ***Ann. of Math.***, 37 (2): 374-408, (1936).

Ruscheweyh, S., “New criteria for univalent functions”, ***Proc. Amer. Math. Soc.,*** 49: 109–115, (1975).

Saitoh, H., A, “Linear operator and its applications of first order differential subordinations”, ***Math. Japon***., 44: 31–38, (1996).

Salagean, G.S., “Subclasses of univalent functions”, Lecture Notes in Mathematics 1013, ***Springer-Verlag***, Berlin, 362–372, (1983).

Srivastava, H.M. and Owa, S., “Some characterization and distortion theorems involving fractional calculus, generalized hypergeometric functions, Hadamard products, linear operators, and certain subclasses of analytic functions”, ***Nagoya Math. J.,*** 106: 1–28, (1987).

Srivastava, H. M., Owa, S. and Chattejea, S. K., “A note on certain classes of starlike functions”, ***Rend. Sem. Math. Univ. Padova,*** 77: 115-124, (1987).

Srivastava, H.M. and Choi, J., “Series Associated with the Zeta and Related Functions”, ***Kluwer Academic Publishers***, Dordrecht, Boston and London, 121, (2001).

Srivastava H.M. and Patel J., “Some subclasses of multivalent functions involving a certain linear operator”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 310: 209–228, (2005).

Srivastava H.M., Patel J. and Mohapatra, G.P., “A Certain Class of P-valently Analytic Functions”, ***Mathematical and Computer Modelling,*** 41: 321-334, (2005).

Srivastava, H.M. and Attiya, A.A., “An integral operator associated with the Hurwitz–Lerch Zeta function and differential subordination”, ***Integral Transforms and Special Functions,*** Vol. 18, No 3: 207–216, (2007).

Srivastava, H.M., Yang, D.-G. and Xu, N.-E., “Some subclasses of meromorphically multivalent functions associated with a linear operator”, ***Applied Mathematics and Computation***, 195: 11–23, (2008).

Szegö, G. and Polya, “Aufgaben und lehrsatze aus der analysis”, ***Springer Verlag,*** Berlin, Vol. 1, (1954).

Xu, N. and Aouf, M.K., “Properties of certain analytic multivalent functions defined by a linear operator”, ***Computers and Mathematics with Applications***, 58: 1169-1179, (2009).

Wang, Z.-G., Li, Q.-G. and Jiang, Y.-P., “Certain subclasses of multivalent analytic functions involving the generalized Srivastava-Attiya operator”, ***Integral Transforms and Special Functions,*** Volume 21, Issue 3 : 221-234, (2009).

Yaguchi, T., “The radii of starlikeness and convexity for certain multivalent functions”, in: H.M. Srivastava,S. Owa (Eds.), Current Topics in Analytic Function Theory, ***World Scientific***, Singapore, pp. 375–386, (1992).

Yuan, S.M., Liu, Z.-M. and Srivastava, H.M., “Some inclusion relationships and integral-preserving properties of certain subclasses of meromorphic functions associated with a family of integral operators”, ***J. Math. Anal. Appl.,*** 337: 505–515, (2008).

ÖZGEÇMİŞ

10.05.1979 yılında Erzurum'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da, lise öğrenimini İzmir Aliağa'da tamamladı. Lisans eğitimine 1996 yılında, Ankara Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladı. 1 yıl hazırlık okudu. Haziran 2001 de mezun oldu. 2005 yılında Erzincan'da kısa dönem olarak askerliğini yaptı. 2001-2009 yılları arasında matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2008 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2009 yılında Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak başladı ve halen bu görevi sürdürmektedir.