ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REGÜLER VE SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

Mesut COŞKUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2013

REGÜLER VE SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mesut COŞKUN

YRD. DOÇ. DR. MEHMET KAYALAR

2013

Yrd.Doç. Dr. Mehmet KAYALAR danışmanlığında, Mesut COŞKUN tarafından hazırlanan bu çalışma 14.06.2013 tarihinde* aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK Anabilim Dalı ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Hikmet KEMALOĞLU	*İmza:*
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Mehmet KAYALAR	*İmza:*
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Murat ŞAT	*İmza:*
Üye	:	*İmza:*
Üye	:	*İmza:*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Recep POLAT
Enstitü Müdürü

14.06.2013

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REGÜLER VE SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

Mesut COŞKUN

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet KAYALAR

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, diferansiyel operatörlerin spektral analizi ile ilgili olarak daha önce yapılmış çalışmaların özeti verilmiştir. Kuramsal yöntemler bölümünde, regüler ve singüler diferansiyel operatörlerin spektral analizinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Materyal ve yöntem bölümünde, kaynaklar, tez ve dönüşüm operatörü incelenmiştir. Araştırma bulguları bölümünde; Sturm-Liouville, Dirac ve Bessel operatörlerinin özdeğer ve özfonksiyonları incelenerek dönüşüm operatörleri araştırılmıştır. Sonuç bölümünde ise regüler ve singüler diferansiyel operatörlerden elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2013, 82 sayfa

Anahtar Kelimeler: Operatör, Spektrum, Sturm-Liouville Operatör, Bessel Operatör, Dirac Operatör, Dönüşüm Operatörü, Özdeğer, Özfonksiyon.

ABSTRACT

Masters Thesis

SPECTRAL ANALIYSIS OF REGULER AND SINGULAR DIFFERENTIAL OPERATORS

Mesut COŞKUN

Erzincan University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet KAYALAR

This study consists of five sections.

In the introduction section, the summary of the previous study, which is about the spectral analysis of differantial, is given. In the tehoretical methods section, some basic definitions and theorems which are used in the spectral analysis of the regüler and singüler differential operators are given. In the material and method section, the source, thesis and conversion operator are investigated. At the section of findings; by examining the eigenvalues and eigenfunctions operators of Sturm-Liouville, Dirac ve Bessel, their conversion operators are investigated. In the conclusion section, the results which are obtained from the regüler and singüler diffrential operators are given.

2013, Page 82

Key Words: Operator, Spektrum, Sturm-Liouville Operator, Bessel Operator, Dirac Operator, Translation Operator, Eigenvalues, Eigenfunction

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım; sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet KAYALAR’a, sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ŞAT’a, ve aileme teşekkür ederim.

Mesut COŞKUN

Haziran, 2013

SİMGELER LİSTESİ

Γ	Gamma fonksiyonu
H	Hilbert uzayı
$L^2\left[a,b\right]$	Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
L	Lineer operatör
L^*	L operatörünün adjointi
λ_n	Özdeğer
$y(x,\lambda)$	Özvektör fonksiyonu
$O(1)$	Sınırlı değerler
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
$J_v(x)$	v-inci mertebeden 1.inci tür Bessel fonksiyonu

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1.GİRİŞ

Matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında operatörlerin spektral teorisi geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları lineer cebir ve titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vs.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok önceki yıllara dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı ve daha sonra ise genel Hilbert uzayı üzerinde çalışılmıştır. l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H da lineer self adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. $XIX - XX$ asırlarda matematikçilerin sayesinde bu teori çok ileri bir seviyeye ulaşmış ve bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar, vs. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Spektral teorinin tamamında önemli bir yere sahip olan spektral açılım teoremi ispatlanarak belirli diferansiyel ve fark operatörleri için spektral açılımın uygun denklem çözümleri vasıtasıyla ifade edildiği araştırılmıştır.

Daha sonraları regüler ve singüler diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri üzerinde çalışılmıştır. Regüler operatörler tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlerdir, singüler operatörler ise tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (veya her ikisi sağlanacak biçimde) diferansiyel operatörlerdir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Strum-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. Asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G.D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniği için çok önemlidir. Daha sonra birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri incelenmiştir. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rietsz, Neumann ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Sonraki yıllarda J. Neuman tarafından simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi yapılmıştır. Titchmarsh, 1958'de ikinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisi için yeni bir yaklaşım ortaya koymuş ve doğru ekseninde tanımlı azalan(artan) potansiyelli

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

Strum-Liouville operatörleri (son yıllarda bu operatöre sık sık bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir) için özdeğerlerin dağılımı formülünü bulmuştur. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için dağılım formülünün görüntüsü düzgün bir şekilde ifade edilmiştir.

1949 yılında Levitan tarafından singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotikliğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular R. Courant, T. Carleman, M.S Birman, M.Z Salamyak, W.P. Maslov, M.V. Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Sturm-Liouville denkleminin incelenme sürecinde kullanılan yöntemlerden biri de ters problemlerin çözümlerinde önemli bir araç olan dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Bu kavram operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde Delsart ve Levitan tarafından verilmiştir. Keyfi Strum-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısını kendi çalışmalarında ilk olarak Povzner göstermiştir.

Strum-Liouville denklemini inceleme sürecinde (özellikle XX. Asrın ikinci yarısında) kullanılan yöntemler sürekli artmakta olmuştur. Buna kanıt olarak 1967'de bir grup Amerikan Matematik ve Fizikçileri Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından bulunan bazı kısmi türevli nonlineer evalusyon denklemleriyle Strum-

Liouville operatörlerinin spektral teorisi arasındaki ilginç bağıntıyı gösterebiliriz. Bu konu günümüzde halen yoğun bir şekilde fizikçiler ve matematikçiler tarafından araştırılmaktadır.

Şimdi ise Dirac operatörünün spektral teorisine ait bazı önemli sonuçları hatırlatalım. Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar doğal olarak fizikçiler F. Prats, J. Toll, H. E. Moses ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx}+Q(x)y=\lambda y \quad , \quad 0<x<\infty \tag{1.1}$$

$$y_1(0)=0, \qquad y_2(\pi)+Hy_1(\pi)=0 \tag{1.2}$$

$$(\, y_1(0)=0, \qquad y_2(\pi)+H_1y_1(\pi)=0 \ \ H_1\neq H\,) \tag{1,2)'$$

sınır problemi ele alınmıştır. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix},\ \text{(1.1) denkleminin}$$

$$\varphi_1(0,\lambda)=0 \quad \varphi_2(0,\lambda)=-1 \tag{1.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $p(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ (1.1) ,(1.2) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L^2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\varphi(x,\lambda)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{F(\lambda)-F_n\left(\lambda\right)\right\}^2 dp\left(\lambda\right)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^T\left(x\right) f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty} F^2\left(\lambda\right)dp(\lambda) \tag{1.4}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir. Dirac operatörü için özvektör fonksiyonlarının tamlığı, Cauchy probleminin çözümü self-adjointlik durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülerize izin hesaplanması, peryodik ve antiperyodik problemler, açılım teoremleri, özvektör fonksiyonlarının asimptotiği, 2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problem sırası ile " I. S. Sargsjan 1966" ve" V. V. Martynov 1965" çalışmalarında incelenmiştir. Daha sonraki yıllarda H. Hochstadt, B. M. Levitan ve E.S. Penahov kısmen çakışmayan iki spektruma göre farklı yöntemlerle Sturm-Liouville ve Dirac operatörleri için ters problemi incelemişlerdir.

Singüler Strum-Liouville operatörler ailesinden olan ve sıfır noktasında $\dfrac{l\left(l+1\right)}{x^2}$ şeklinde tekilliğe sahip operatörler için spektral fonksiyona göre ters problem Stashevskaya (1953) tarafından çözülmüştür. Volk (1953) ise bu tür operatörler için Riemann yöntemiyle Dönüşüm operatörünün varlığını incelemiştir. Daha sonraları ise iki spektruma göre ters problem Gasymov ve kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problemin çeşitli sorunları Penahov tarafından incelenmiştir. Ayrıca, Jeofizikte birçok uygulamaları olan Bessel operatörleri için Kuantum saçılma teorisinin ters problemler Chadan, Sabatier, Korop, Sohin, Carlson vs. matematikçiler tarafından ele alınmış ve çözülmüştür.

Sunulan bu tezde Sturm-Liouville, Dirac ve Bessel operatörleri için spektral analizin düz problemleri incelenmiş olup bu operatörlerin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri ve dönüşüm operatörleri araştırılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1. (Hilbert Uzayı) x, y, z elemanlarından oluşan herhangi bir cümle H olsun ve aşağıdaki aksiyomlar sağlansın:

1. H lineer kompleks uzay

2. H ' nin her x, y ikili elamanına karşılık gelen $\langle x, y \rangle$ kompleks sayısı için

a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

b) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ $\qquad (x_1, x_2 \in H)$

c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ (Her λ kompleks sayısı için)

d) $\langle x, y \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $(\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle})$

3. $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği anlamında H tamdır.

4. Her n doğal sayısı için H de n sayıda lineer bağımsız elaman vardır. Yani H sonsuz boyutludur.

Bu takdirde 1-4 sınır şartlarını sağlayan uzaya Soyut Hilbert uzayı, 1-3 şartlarını sağlayan uzaya ise Üniter Hilbert uzayı denir (Kreyszing, 1978).

Tanım 2.2. (Operatör) Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir (Liusternik, 1961).

Tanım 2.3. (Lineer operatör) E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayı olsun.

A: $E_x \to E_y$ operatör dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa:

i) $x_1, x_2 \in E_x$, $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = Ax_1 + Ax_2$

ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, $\lambda \in IR$

A operatörüne lineerdir denir (Kreyszing, 1978).

Tanım 2.4. (Sürekli operatör)

$A: S(x,\delta) \to A(Ax,\varepsilon)$ olsun. $|x - x_0| \le \delta$ için $|Ax - Ax_0| < \varepsilon$

ise A operatörüne süreklidir denir (Kreyszing, 1978).

Tanım 2.5. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer

$\|Lx\| \le c\|x\|$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir (Natahson, 1974).

Tanım 2.6. (Adjoint Operatör) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzay ve $L: H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

Eğer $L^*: H_2 \to H_1$ operatörü $\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^* y\rangle$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir (Kreyszing, 1978).

Tanım 2.7. L, $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$Ly = \lambda y$

eşitliğini sağlayan $y(x) \ne 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise bir özfonksiyonu denir (Kostyuchenko ve Sargsyan,1979).

Tanım 2.8. $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olacak şekilde

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir (Levitan, 1964).

Tanım 2.9. (Dönüşüm Operatörü) E lineer topolojik uzay, A ve B Operatörleri $A:E\to E$, $B:E\to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 ise E lineer uzayın kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı E_1 ve E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanıyor

şartlarını sağlıyorsa A ve B operatörleri çifti için dönüşüm operatörü denir (Levitan, 1987).

Lemma 2.1. B operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektör $\varphi_\lambda \in E_1$ olsun. Dolayısıyla

$$B\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$$

dir. Bu takdirde A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü

$$\psi_\lambda = X\varphi_\lambda$$

dır. Burada X dönüşüm operatörüdür (Levitan 1964).

İspat:

$AX = XB$ olduğundan

$$A\psi_\lambda = AX\varphi_\lambda = XB\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.2.

A, B, C lineer operatörleri E uzayında tanımlı ve E_1, E_2, E_3 ise E nin kapalı alt uzayları olsun. $X_{A,B}: E_2 \to E_3$, $X_{B,C}: E_1 \to E_2$ olsun. Bu durumda $X_{A,C}: E_1 \to E_3$ operatörü

$$X_{A,C} = X_{A,B}\, X_{B,C}$$

şeklindedir (Levitan, 1964).

İspat:

Dönüşüm operatörü tanımından $A\,X_{A,B} = X_{A,B}\,B$, $B\,X_{B.C} = X_{B,C}\,C$ şeklindedir. İkinci denklemden $B = \left[X_{B,C}\,C\left(X_{B,C^{-1}}\right)\right]$ elde edilir. Son eşitliği ilk denklemde yerine yazarsak,

$$A\,X_{A,B} = X_{A,B}\,X_{B,C} C\,X_{B,C^{-1}}$$

veya

$$A\,X_{A,B}\,X_{B,C} = X_{A,B}\,X_{B,C} C$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.10. f(z) kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyor ise *f(z)* fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir (Marchenko, 1950).

Tanım 2.11. f(z) kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise *f(z)* fonksiyonuna tam fonksiyon denir (Markushevich, 1977).

Tanım 2.12. Bir *f(z)* fonksiyonuna karşılık gelen *A* ve *a* pozitif sayıları bulunabiliyorsa, öyle ki $r = |z| \to \infty$ iken

$$|f(z)| < Ae^{r^a}$$

ise *f(z)* fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur, *a* sayılarının en küçüğü olan *r* ‘ye ise tam fonksiyon mertebesi denir (Suziki, 1983).

Tanım 2.13. $x \to 0$ (veya $x \to \infty$) iken eğer $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ ise $f(x) = o(g(x))$, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir (Natahson, 1974).

Tanım 2.14. $a \leq t \leq b$ olmak üzere $L^2[a,b]$ uzayı

$$L^2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt \angle \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $g(x) = \overline{g(x)}$) (Natahson, 1974).

Tanım 2.15. (Gamma Fonksiyonu)

$n > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona gamma fonksiyonu denir (Aydın, 1990).

Teorem 2.1. (Rouche Teoremi)

Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları kapalı bir C eğrisi üzerinde ve içinde analitik ve $|g(x)| < f(x)$ ise $f(x) + g(x)$ ile $f(x)$ fonksiyonları C üzerinde aynı sayıda köke sahiptir (M. Idemen, 1999).

Teorem 2.2. (Green Teoremi)

$B; xoy$ düzleminde basit bir bölge, C de bu bölgeyi çevreleyen ve saat yönünün tersine yönlendirilmiş bir eğri olsun. Bu durumda

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) dxdy$$

olur (Churchill, 1976).

Tanım 2.16. $L-\lambda I$ operatörünün sınırlı $\left(L-\lambda I\right)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ' lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir (Levitan ve Sargsyan, 1991).

Tanım 2.17. Herhangi λ için $L-\lambda I$ operatörü terse sahip ise $R_\lambda = \left(L-\lambda I\right)^{-1}$ operatörüne

$Lx-\lambda x = y$ veya $(L-\lambda I)x = y$

denkleminin rezolvent operatörü denir (Liusternik ve Sobolev, 1961).

Tanım 2.18. Analitik $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 ‘a $f(z)$' nin kutup' u denir.

Tanım 2.19. $r > R$ için

$$M(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{2.19.1}$$

olmak üzere $\mu > 0$ varsa $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir ve (2.19.1) eşitsizliğini sağlayan μ sayılar cümlesinin

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \frac{InInM(r)}{Inr}$$

formülü ile tanımlı ρ alt sınırına $f(z)$' nin mertebesi denir (Uluçay, 1978).

Tanım 2.20. $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\sigma = \infty$ olacak biçimde ρ $(0 < \rho < \infty)$ mertebeli $f(z)$ tam fonksiyonu sırası ile minimal, normal, maksimal tipe sahiptir denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada Sturm-Liouville, Dirac ve Bessel operatörleri için dönüşüm operatörlerinden yararlanılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Sturm-Liouville Operatörü

4.1.1 Sturm-Liouville Operatörü İçin Genel Bilgiler

$Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y fonksiyonuna L operatörünün özfonksiyonu, λ ya ise özdeğeri denir. L herhangi elemanlar cümlesinde tanımlı lineer bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere operatörlerin spektral teorisinde sık sık göz önüne alınan Sturm-Liouville operatörü

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur. L operatörü için sınır şartları genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. tür sınır şartı: Bunlara ayrık sınır şartları denir ve

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

şeklinde tanımlanır**.**

2.tür sınır şartı: Bunlar periyodik ve antiperiyodik sınır şartları olarak bilinir ve sırası ile

$$y(a) = -y(b)$$
$$y'(a) = -y'(b)$$

şeklinde yazılır.

3. tür sınır şartı: Bunlar uçları bağlı sınır şartları olarak bilinir ve

$$y(a) = y(b) = 0 \text{ veya } y'(a) = y'(b) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

$$Ly(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \tag{4.1.1.1}$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{4.1.1.2}$$

şeklinde tanımlanan (4.1.1.1)-(4.1.1.2) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir.

Lemma 4.1.1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ farklı özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani;

$$\int_0^{\pi} y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0 \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

dır.

İspat : $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli ve iki kez diferensiyellenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$Lf = f''(x) - q(x)f(x)$$

alalım.

$$W_x\{f,g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

olmak üzere bu ifadeye iki kez kısmi integral uygulanırsa

$$\int_0^{\pi} Lfg(x)dx = W_{\pi}(f,g) - W_0(f,g) + \int_0^{\pi} f(x)Lgdx$$

denklemi elde edilir.. $f(x) = y(x,\lambda_1)$ ve $g(x) = y(x,\lambda_2)$ olsun. (4.1.1.2.) sınır şartlarından $W_0\{f,g\} = W_{\pi}\{f,g\} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bundan dolayı (4.1.1.4) denkleminden

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^{\pi} y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0$$

ve dolayısıyla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan Lemma (4.1.1) ispatlanmış olur.

Lemma 4.1.2. (4.1.1.1)-(4.1.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: $\lambda_1 = u + iv$ kompleks bir özdeğer olsun. $q(x)$ reel değerli bir fonksiyon α ve β sayıları reel olduğundan dolayı $\overline{y(x,\lambda_1)}$ özfonksiyonu $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısına sahip bir özdeğer olur. Bu taktirde Lemma (4.1.1)'den

$$\int_0^\pi |y(x,\lambda_1|^2 dx = 0$$

elde ederiz ki buradan da $y(x,\lambda_1) = 0$ olduğu bulunur.

4.1.2. Özdeğer ve Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Formüller

1. $q(x)$, $[0,\pi]$aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki Sturm-Liouville Problemini

$$-y'' + q(x)y = \lambda y\,,\ x \in [0,\pi] \tag{4.1.2.1}$$

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{4.1.2.2}$$

göz önüne alalım. (4.1.2.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h \tag{4.1.2.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\varphi(x,\lambda)$ ile gösterelim. Aynı denklemin

$$\psi(0,\lambda) = 1, \ \psi'(0,\lambda) = -H \tag{4.1.2.4}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü de $\psi(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Lemma 4.2.1. $\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau \qquad (4.1.2.5)$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau \qquad (4.1.2.6)$$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle (4.1.2.5) eşitliğini ispatlayalım $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.1.1) denklemini sağladığı için

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau = \int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

yazılabilir. Daha sonra sağdaki ilk integrali iki kez kısmi integralleyelim ve (4.1.2.3) şartını göz önüne alalım. Bu takdirde

$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau$ integralini hesaplayalım.

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= \varphi'(x,\lambda)\sin\{s(x-x)\} - \varphi'(0,\lambda)\sin\{s(x-0)\} + s\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= -h\sin sx + s\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= -h\sin sx + s\left\{\varphi(x,\lambda)\cos\{s(x-x)\} - \varphi(0,\lambda)\cos\{s(x-0)\} - s\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

$$= -h\sin sx + s\left\{\varphi(x,\lambda) - \cos sx - s\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau = \int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= -h\sin sx + s\{\varphi(x,\lambda) - \cos sx\} - s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= -h\sin sx + s\varphi(x,\lambda) - s\cos sx$$

elde edilir. (4.1.2.6) bağıntısının ispatı da benzer şekilde yapılır.

Lemma 4.2.2. $s = \sigma + i$ olsun. Bu durumda öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\varphi(x,\lambda) = O(e^{|t|.x}), \qquad \psi(x,\lambda) = O(|s|^{-1} e^{|t|.x}) \tag{4.1.2.7}$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O(|s|^{-1} e^{|t|.x}) \tag{4.1.2.8}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O(\frac{e^{|t|.x}}{|s|^2}) \tag{4.1.2.9}$$

$0 \le x \le \pi$ için x in aldığı tüm değerlerde bu ifadeler sağlanır.

2. Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formülleri hesaplayalım. (4.1.2.1)-(4.1.2.2) Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2 den dolayı

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O(|s|^{-1} e^{|t|.x})$$

şeklindedir.

$h \neq \infty$ ve $H \neq \infty$ olsun. $\varphi(x,\lambda)$, (4.1.2.1) denkleminin (4.1.2.2) sınır şartlarını sağlayan bir çözümü olduğundan bu fonksiyonun π noktasındaki değerini (4.1.2.2) sınır şartlarının ikincisinde yazdığımızda özdeğerleri buluruz. Lemma 2.4 den dolayı özdeğerler reeldir. Negatif özdeğerlerin sayısı sonludur. λ pozitif sayısı için Im s=0 dır. Bu sebeple (4.1.2.8) formülünden

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O(\frac{1}{|s|}) \tag{4.1.2.10}$$

yazılabilir. Daha sonra (4.1.2.5) ifadesini x' e göre diferansiyelini alıp ve (4.1.2.10) bağıntısını da kullanırsak

$$\varphi'_x(x,\lambda)=-s\sin sx+h\cos sx+O(\frac{1}{s}) \tag{4.1.2.11}$$

ifadesini elde ederiz. (4.1.2.2) sınır şartlarının ikincisinde (4.1.2.8) ve (4.1.2.11) ifadelerini yerlerine yazarsak özdeğerleri bulmak için aşağıdaki

$$-s\sin s\pi+(h+H)\cos s\pi+O(\frac{1}{s})=0 \tag{4.1.2.12}$$

denklemini elde ederiz.

s'nin büyük değerleri için (4.1.2.12) denkleminin tam doğal sayılarının komşuluğunda kökleri olmak üzere çözümlerin varlığı açıktır. Buradan özdeğerlerin sonsuz bir cümlesinin var olduğunu elde ederiz. Herhangi yeteri kadar büyük tam n'den başlayarak her n'nin komşuluğunda (4.1.2.12) denkleminin sadece bir kökünün bulunduğunu gösterelim. Bu amaçla (4.1.2.12) denkleminin sol kısmının s'ye göre diferansiyeli alınırsa

$$-\pi s\cos s\pi-\sin s\pi-\pi(h+H)\sin s\pi+O(1)=0$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadenin s büyük tam değerleri komşuluğunda sıfıra eşit olmadığını göstermek mümkündür.

s_n ile (4.1.2.12) denkleminin n. dereceden kökünü gösterelim. Sturm'un osilasyon teoreminden ve (4.1.2.8) formülünden s_n için s'nin sıfırlarını yalnız tam n komşuluğunda elde ederiz. Bu iddianın Sturm'un teoremine bağlı kalmadan başka bir ifadesini de söyleyebiliriz.

$\lambda=s^2$ olsun. Bu takdirde özdeğerler

$$\varphi'_x(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)\equiv w(\lambda)=0$$

denkleminin kökleri olduğu için $w(\lambda)=w_1(s)$ dir. (4.1.2.5) ifadesinden dolayı $w_1(s)$, s ye göre tam fonksiyondur. Buna ilaveten (4.1.2.10) ve (4.1.2.11) formüllerinden $\sin s\pi\neq 0$ için $w(\lambda)=w_1(s)$ ifadesinden

$$w_1(s) = -Hs\sin s\pi\left\{1+O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right\} \tag{4.1.2.13}$$

elde edilir.

S düzleminde $R = N + \frac{1}{2}$ yarıçaplı ve merkezi orijinde olan D_R dairesini göz önüne alalım. Rouche teoreminden ve (4.1.2.13) asimptotik formülünden D_R dairesinin içinde $w_1(s)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısına eşit olup bu sayı 2n+2 dir. $w_1(s)$ nin her pozitif sıfırına karşılık gelir. Yani $N + \frac{1}{2}$ den küçük olan s_k özdeğerinin sayısı $N+1$ olacaktır. s_n için asimptotik formül aşağıdaki gibi olur.

$$s_n = n + o(1) \tag{4.1.2.14}$$

$$s_n = n + \delta_n$$

olsun. O zaman (4.1.2.12) denklemi

$n\sin\delta_n\pi + O(1) = 0$ şeklinde olur. Buradan $\sin\delta_n\pi = o(\frac{1}{n})$ yani $\delta_n = o(\frac{1}{n})$ olur. Buna göre (4.1.2.12) denkleminin köklerini büyük n ler için

$$s_n = n + o(\frac{1}{n}) \tag{4.1.2.15}$$

elde ederiz.

Eğer (4.1.1.1) denkleminde $q(x)$ fonksiyonu sınırlı türeve sahipse (4.1.2.15) formülü yeteri kadar düzgün sayılır. Şayet (4.1.2.5) eşitliğinin x göre türevini alıp daha sonra $\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi'_x(x,\lambda)$ ifadelerinin (4.1.2.2) sınır şartlarının ikincisinde kullanıp birkaç dönüşüm yaparsak

$$A = h + H + \int_0^\pi \left\{\cos s\tau + \frac{H}{s}\sin s\tau\right\} q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$B = \frac{hH}{s} + \int_0^\pi \left\{\sin s\tau + \frac{H}{s}\right\} q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

olacak şekilde

$$(-s+B)\sin s\pi + A\cos s\pi = 0 \tag{4.1.2.16}$$

ifadesini elde ederiz. (4.1.2.10) ifadesinden dolayı ve A ve B için

$$A = h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\cos 2s\tau d\tau + O(\frac{1}{s})$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\sin 2s\tau d\tau + O(\frac{1}{s})$$

olur. Hipotezimizden dolayı $q(x)$ potansiyel fonksiyonu sınırlı türeve sahip olduğu için kısmi integral alınırsa

$$\int_0^{\pi} q(\tau)\cos 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\int_0^{\pi} q(\tau)\sin 2s\tau d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Dolayısıyla A ve B ifadeleri için

$$A = h + H + h_1 + O(\frac{1}{s}) \qquad h_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau$$

$$B = O(\frac{1}{s})$$

elde edilir. Bu sebeple (4.1.2.16) denklemini

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O(\frac{1}{s})}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Tekrar $s_n = n + \delta_n$ alınırsa

$$s_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\tan \pi\delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir ve

$$c = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau\right)$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (4.1.2.17)$$

elde ederiz. $q(x) \in C^2(0,\pi)$ olduğunu kabul edersek daha yaklaşık bir asimptotik formül buluruz. c_1 sabit olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad (4.1.2.18)$$

olur. Şimdi (4.1.2.17) formülünden faydalanarak $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ özfonksiyonları için asimptotik formül bulalım. Bunun için (4.1.2.5) eşitliğinde $\varphi(x,\lambda)$ yerine (4.1.2.10) ifadesini yazarsak

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda) &= \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\cos s\tau q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\end{aligned} \qquad (4.1.2.19)$$

bulunur. Böylece özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilir. (4.1.2.17) formülünde s için her yerde s_n alınırsa,

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x) &= \cos nx - \frac{cx}{n}\sin nx + \frac{h}{n}\sin nx + \frac{\sin nx}{2n}\int_0^x q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. $\varphi_n(x)$ normlaştırılmış özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini bulmak için

$$\alpha_n{}^2 = \int_0^\pi \varphi_n{}^2(x)dx = \int_0^\pi \cos^2 nxdx + \frac{1}{n}\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

integralini göz önüne alalım. $\beta(x)$ fonksiyonu diferensiyellenebilir olduğundan

$$\int_0^{\pi}\beta(x)\sin 2nxdx = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir. Bundan dolayı $\alpha_n^{\ 2} = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dolayısıyla

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.20}$$

olur. Normlaştırıcı sayılar için asimptotik formüller elde edilir. Böylece normlu özfonksiyonlar için asimptotik formül

$$v_n(x) = \frac{1}{\alpha_n}\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.21}$$

şeklinde olur.

3. Şimdi $h = \infty$, $H \neq \infty$ olduğu durumu inceleyelim. (4.1.2.2) sınır şartlarının birincisinde

$$y(0) = 0 \tag{4.1.2.22}$$

olduğunu kabul edelim. $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2.22) şartını sağlar. Bundan dolayı araştırdığımız durum için (4.1.2.2) sınır şartlarının ikincisinde $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonunu yazarak özdeğerlerini araştırabiliriz. (4.1.2.6) ifadesinin x'e göre diferansiyelini alırsak

$$\psi_x'(x,\lambda) = \cos sx + \int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau$$

elde ederiz. Bundan dolayı (4.1.2.2) sınır şartlarının ikincisinden

$$\begin{aligned} &\cos s\pi + \int_0^x \cos\{s(\pi-\tau\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau \\ &+H\left\{\frac{\sin s\pi}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(\pi-\tau\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau\right\} = 0 \end{aligned} \tag{4.1.2.23}$$

elde ederiz. (4.1.2.9) ifadesinden dolayı (4.1.2.23) den

$$\cos s\pi + \frac{1}{s}\int_0^x \cos\{s(\pi-\tau\}\sin s\tau q(\tau)d\tau + \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \tag{4.1.2.24}$$

bulunur. *q(x)* sınırlı türeve sahip olduğundan

$$\int_0^\pi q(\tau)\cos\{s(\pi-\tau\}\sin s\tau d\tau=\varphi(x,\tau)=\cos s\pi\int_0^\pi \sin s\tau\cos s\tau q(\tau)d\tau+\sin s\tau\int_0^\pi \sin^2 s\tau d\tau$$

$$=\frac{\sin s\pi}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Bundan dolayı (4.1.2.24) eşitliğinden

$$\cos s\pi+\frac{\sin s\pi}{s}\left\{H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau\right\}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=\cos s\pi+H_1\frac{\sin s\pi}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0$$

$$(4.1.2.25)$$

olur.

$s_n=n+\frac{1}{2}+\delta_n$ olsun. O zaman (4.1.2.25) ifadesinden

$$s_n=\frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\cot\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi=-\tan\delta_n\pi=-\frac{H_1}{n+\frac{1}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur ve

$$H_1=h+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$s_n=n+\frac{1}{2}+\frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (4.1.2.26)$$

elde ederiz.

Şimdi (4.1.2.6) da s_n değerini yerleştirirsek $\psi(x,\lambda_n)=\psi_n(x)$ özfonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formülü

$$\psi_n(x)=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (4.1.2.27)$$

elde ederiz. a_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \tag{4.1.2.28}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı bu durum için $v_n(x)=\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$ normalleştirilmiş özfonksiyonları

$$v_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1.2.29}$$

şeklinde olur.

4. Son olarak $h=\infty$ ve $H=\infty$ durumunu araştıralım. (4.1.2.2) sınır şartlarında $y(0)=y(\pi)=0$ olduğunu söyleyebiliriz ve bundan dolayı $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu özel olarak $\psi(x,\lambda)=0$ şartını sağlamalıdır. (4.1.2.6) ifadesinden

$$\sin s\pi+\int_0^{\pi}\sin\{s(\pi-\tau\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau=0$$

ya da

$$\sin s\pi\left\{1+\int_0^{\pi}\cos s\tau q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau\right\}-\cos s\pi\int_0^{\pi}\sin s\tau q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau=0$$

elde edilir. (4.1.2.9) ifadesinden dolayı ($q(x)$ sınırlı)

$$\sin s\pi-\frac{1}{2s}\cos s\pi\int_0^{\pi}q(t)dt+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=\sin s\pi-\frac{\alpha}{s}\cos s\pi+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0 \tag{4.1.2.30}$$

elde ederiz. Bu denklem (4.1.2.12) denklemi ile aynıdır. Bundan dolayı (4.1.2.30) denkleminin s_n kökleri

$\alpha_1=\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{\pi}q(\tau)d\tau$ olmak üzere

$$s_n=n+\frac{\alpha_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.31}$$

şeklindedir.

(4.1.2.6) da s_n ’ nin değerini yerine yazarsak $\psi(x,\lambda_n)=\psi_n(x)$ özfonksiyonları için

$$\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.32}$$

asimptotik formülünü elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \left\{1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{4.1.2.33}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$ normlaştırılmış özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1.2.34}$$

olur. Böylece Sturm-Liouville operatörünün özdeğer, özfonksiyon ve normlaştırıcı sayıları için asimptotik formüller elde edilir.

4.1.3 Sturm-Liouville Operatörü İçin Dönüşüm Operatörünün Elde Edilmesi

Burada $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun sıfır olduğu durumdaki çözümü bulmaya çalışalım. Bu durumda;

$$A_1.\equiv \frac{-d^2.}{dx^2}+q(x). \quad , \quad A_2.\equiv \frac{-d^2.}{dx^2}$$

olsun. Dönüşüm operatörü tanımından,

$$A_1X = XA_2 \quad \text{ya da} \quad A_1X\left[f(x)\right]=XA_2\left[f(x)\right]$$

olduğunu gösterilmelidir. Önce eşitliğin sol tarafı yapılırsa.

$$A_1X\left[f(x)\right]=A_1\left[f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)dt\right]$$
$$=\frac{-d^2}{dx^2}\left[f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)dt\right]+q(x)\left[f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)dt\right]$$
$$=\frac{-d}{dx}\left[f'(x)+K(x,x).f(x)+\int_0^x K_x'(x,t).f(t)dt\right]+q(x)f(x)+q(x)\int_0^x K(x,t)f(t)dt$$
$$=-f''(x)-K_x'(x,x)f(x)-K(x,x)f'(x)-K_x'(x,x)f(x)-\int_0^x K_{xx}(x,t)f(t)dt+$$
$$+q(x)f(x)+q(x)\int_0^x K(x,t)f(t)dt \tag{4.1.3.1}$$

bulunur.

eşitliğin sağ tarafı da aynı şekilde

$$XA_2\left[f(x)\right]=X\left[-f''(x)\right]=-f''(x)-\int_0^x f''(t).K(x,t)dt$$

alınıp kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$=-f''(x)-K(x,t).f'(t).|_0^x+\int_0^x K_t'(x,t)\,f'(t)\,dt$$

olur. Bir daha kısmi integrasyon uygularanırsa,

$$=-f''(x)-K(x,x).f'(x)+K(x,0).f'(0)+K_t'(x,t).f(t)|_0^x-\int_0^x K_{tt}''(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$-f''(x)-K(x,x).f'(x)+K(x,0).f'(0)+K_t'(x,x).f(x)-K_t'(x,0).f(0)-$$

$$-\int_0^x K_{tt}''(x,t)\,f(t)\,dt$$

(4.1.3.2)

elde edilir. Daha sonra (4.1.3.1) ve (4.1.3.2) eşitlenirse integral içlerinin eşitliğinden

$$-K_{xx}+q(x)K=-K_{tt} \tag{4.1.3.3}$$

bulunur.

Sağ tarafta $f'(0)$ olmadığından

$$K(x,0)=0 \tag{4.1.3.4}$$

olur. Ayrıca yapılan sadeleştirmeler sonunda sağ tarafta hiçbir ifade kalmadığından ve $f(x)\neq 0$ olduğundan

$$-2K_x'(x,x)\,f(x)+q(x)\,f(x)=0$$

$$\frac{q(x)}{2}=K_x'(x,x)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds=K(x,x) \tag{4.1.3.5}$$

bulunur

Burada $K(x,t)$ çekirdeği de

$$\begin{aligned} \frac{d^2K}{dx^2}-q(x)&=\frac{\partial^2K}{dt^2} \\ K(x,0)&=0 \\ K(x,x)&=\frac{1}{2}\int_0^x q(s)\,ds \end{aligned} \tag{4.1.3.6}$$

denkleminin çözümüdür.

4.2 Dirac Operatörü

4.2.1.Bir Boyutlu Dirac Sistemi

$p_{ik}(x)$, $(i,k=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$L=\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{12}(x)=p_{21}(x) \tag{4.2.1.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \text{ ve } B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx}+L(x)-\lambda I\right)y=0 \tag{4.2.1.2}$$

denklemi, iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx}+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2=\lambda y_1 \\ -\frac{dy_1}{dx}+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2=\lambda y_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.2.1.2$'$}$$

denklem sistemine denktir.

Bu durumda $V(x)$-potansiyel fonksiyon, m-parçacığının kütlesi olacak biçimde $p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0$ ve $p_{11}(x)=V(x)+m$, $p_{22}(x)=V(x)-m$ olurken relativistik kuantum teorisinde (4.2.1.2) sistemi 1-boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir.

2-boyutlu her düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x)=\begin{pmatrix}\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x)\\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır. Ayrıca,

$BH = HB$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y = Hz$ olacak şekilde (4.2.1.2) denkleminin her iki tarafını soldan H^{-1} ile çarparsak,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz)+H^{-1}LHz=\lambda H^{-1}Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}LH\right)z=\lambda z \qquad (4.2.1.3)$$

elde ederiz.

$$Q=H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}LH$$

olacak şekilde Q matrisini hesaplayalım. Bu taktirde

$$H^{-1}(x)=\begin{pmatrix}\cos\varphi(x) & \sin\varphi(x)\\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\end{pmatrix},\quad H^{-1}(x)=\frac{1}{\det H(x)}\begin{pmatrix}H_{22}(x) & -H_{12}(x)\\ -H_{21}(x) & H_{11}(x)\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix}-\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x)\\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x)\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix}\cos\varphi(x) & \sin\varphi(x)\\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x)\\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\\ -\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\varphi'(x)\sin\varphi(x) & -\varphi'(x)\cos\varphi(x)\\ \varphi'(x)\cos\varphi(x) & -\varphi'(x)\sin\varphi(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi'(x) & 0\\ 0 & \varphi'(x)\end{pmatrix}$$

$$H^{-1}LH=\begin{pmatrix}\cos\varphi(x) & \sin\varphi(x)\\ -\sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}(x) & p_{12}(x)\\ p_{21}(x) & p_{22}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x)\\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

elde ederiz. Son iki eşitlikten,

$$Q=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi'(x)+p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & \varphi'(x)+p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

buluruz. $q_{12}(x)=0$ olmak üzere $\varphi(x)$ fonksiyonunu seçelim. Bu taktirde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x)+\frac{1}{2}\{p_{22}(x)-p_{11}(x)\}\sin 2\varphi=0$$

dir. Buradan

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

elde edilir. $Q(x)$ matrisinin görüntüsü

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (4.2.1.3) denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{4.2.1.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme *Dirac denkleminin I. kanonik formu* denir.

Şimdi $izQ(x)=q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$ olmak üzere bir $\varphi(x)$ fonksiyonu seçelim. Yani

$$2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)=0$$

dir. Buradan

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\{p_{11}(z)+p_{22}(z)\}dz$$

elde edilir. Buna göre (4.2.1.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{4.2.1.5}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denkleme *Dirac denkleminin II. Kanonik formu* denir. (4.2.1.4) ve (4.2.1.5) denklemlerine (4.2.1.2) sisteminin kanonik formları da denir.(4.2.1.2) denklem sisteminin spektral teorisinin çeşitli sorularını incelerken bu veya diğer kanonik formlardan faydalanmak bize kolaylık sağlar. Örneğin özdeğerin ve özvektör fonksiyonlarının asimptotik davranışları araştırılırken ve keyfi vektör fonksiyonunun (0 ve π noktalarında homojen sınır şartları sağlandığında) (4.2.1.2) denklem sisteminin özvektör fonksiyonlarına göre açılımı incelenirken (4.2.1.4) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar. Sonsuz aralıkta verilmiş (4.2.1.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (4.2.1.5) kanonik denkleminden faydalanmak kolaylık sağlar.

(4.2.1.4) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x),[0,\pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\} y_1 = 0 \ , \qquad y_1' + \{\lambda + r(x)\} y_2 = 0 \tag{4.2.1.6}$$

$$y_2(0)\cos\alpha + y_1(0)\sin\alpha = 0 \tag{4.2.1.7}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta + y_1(\pi)\sin\beta = 0 \tag{4.2.1.8}$$

sınır problemini gözönüne alalım. Herhangi bir λ_1 değeri için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_1) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_1) \\ y_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_1'e özdeğer buna karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$' e de özfonksiyon denir (Levitan, 1970).

4.2.2 Dirac Operatörü İçin Asimptotik Formüllerin Elde Edilmesi

$$A \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \ B \equiv \begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix} \tag{4.2.2.1}$$

olsun. Burada $p_1(x), p_2(x), r_1(x)$ ve $r_2(x)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli ve reel değerli fonksiyonlardır.

E_1 ve E_2 sırasıyla

$$\begin{aligned} &f_2(0)\cos\gamma + f_1(0)\sin\gamma = 0, \\ &g_2(0)\cos\delta + g_1(0)\sin\delta = 0 \end{aligned} \tag{4.2.2.2}$$

sınır koşullarını sağlayan ve

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

sürekli türevlere sahip olan fonksiyonların uzayı olsun. Burada γ ve δ keyfi reel sayılardır.

Lemma 4.2.2.1 Bir X operatör dönüşümü $g(x) = X\left[f(x)\right]$ şeklinde verilir. Yani

$$g_1(x)=\alpha(x)\,f_1(x)+\beta(x)\,f_2(x)+\int_0^x\{P(x,s)\,f_1(s)+R(x,s)\,f_2(s)\}ds$$
$$g_2(x)=-\beta(x)\,f_1(x)+\alpha(x)\,f_2(x)+\int_0^x\{Q(x,s)\,f_1(s)+H(x,s)\,f_2(s)\}ds \tag{4.2.2.3}$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha(x)=\frac{1}{\chi}\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x\left[p_1(t)+r_1(t)-p_2(t)-r_2(t)\right]dt+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\}$$
$$\beta(x)=\frac{1}{\chi}\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x\left[p_1(t)+r_1(t)-p_2(t)-r_2(t)\right]dt+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{4.2.2.4}$$

şeklindedır. Ayrıca $\chi=\sec(\delta-\gamma)$ ve $P(x,s)$, $R(x,s)$, $Q(x,s)$, $H(x,s)$ sürekli türeve sahip fonksiyonlardır.

Şimdi operatör dönüşümünün yardımı ile özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik formüllerini bulmaya çalışalım.

$\varphi(x,\gamma)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\gamma)\\ \varphi_2(x,\gamma)\end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu (4.2.1.6) denklemler sisteminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=\cos\alpha,\varphi_2(0,\lambda)=-\sin\alpha \tag{4.2.2.5}$$

koşullarını sağlayan çözümü olsun. $p(x)=r(x)\equiv 0$ için

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha),\varphi_2(x,\lambda)=-\sin(\lambda x-\alpha) \tag{4.2.2.6}$$

olduğunu göstermek zor değildir. Şimdi (4.2.1.6)-(4.2.1.7) probleminin çözümlerine bir operatör dönüşümü uygulayalım. (4.2.1.6) denklemler sistemi

$$A_1 y=\begin{pmatrix}-p(x) & \dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & -r(x)\end{pmatrix}y=\lambda y \tag{4.2.2.7}$$

formundadır. (4.2.2.6) fonksiyonu, yani

$$\begin{pmatrix} \cos(\lambda x-\alpha) \\ -\sin(\lambda x-\alpha) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonu

$$B_1 y = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y \qquad (4.2.2.8)$$

denkleminin çözümüdür. Eğer $\psi(x,\lambda)$ vektör fonksiyonu $B_1\psi = \lambda\psi$ denkleminin bir çözümü ise X operatör dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$A_1 X[\psi] = XB_1[\psi] = X[\lambda\psi] = \lambda X[\psi]$$

olduğu elde edilir. Yani $\varphi = X[\psi]$ vektör fonksiyonu $A_1\varphi = \lambda\varphi$ denkleminin bir çözümüdür. Böylece,

$$\psi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x-\alpha) \\ -\sin(\lambda x-\alpha) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonu (4.2.2.8) denkleminin bir çözümü ise $\varphi(x,\lambda) = X[\psi(x,\lambda)]$ vektör fonksiyonu da (4.2.2.7) denkleminin bir çözümüdür.Ele alınan bu durumda, $p_1(x) = -p(x), r_1(x) = -r(x), p_2(x) = r_2(x) \equiv 0$ ’dır ve (4.2.2.2) sınır koşullarının yerine, (4.2.2.5) sınır koşulları alındığından $\gamma = \delta$ olur. Yani $\chi = 1$'dir. (4.2.2.4)’den

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(t)+r(t)]dt\right\} \\ \beta(x) &= \sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(t)+r(t)]dt\right\} \end{aligned} \qquad (4.2.2.9)$$

elde edilir. (4.2.2.3) formülünden (4.2.1.6), (4.2.2.5) probleminin

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

çözümü için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\varphi_1(x,\lambda)=\alpha(x)\cos(\lambda x-\alpha)+\beta(x)\sin(\lambda x-\alpha)$$
$$+\int_0^x\{P(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+R(x,s)\sin(\lambda x-\alpha)\}ds,$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=\alpha(x)\sin(\lambda x-\alpha)+\beta(x)\cos(\lambda x-\alpha)$$
$$+\int_0^x\{Q(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+H(x,s)\sin(\lambda x-\alpha)\}ds.$$

ya da (4.2.2.9)'daki $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos\{\wp(x,\lambda)-\alpha\}$$
$$+\int_0^x\{P(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+R(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\}ds \tag{4.2.2.10}$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=\sin\{\wp(x,\lambda)-\alpha\}$$
$$+\int_0^x\{Q(x,s)\cos(\lambda s-\alpha)+H(x,s)\sin(\lambda s-\alpha)\}ds \tag{4.2.2.11}$$

elde edilir. Burada

$$\xi(x,\lambda)=\lambda x-\frac{1}{2}\int_0^x\{p(t)+r(t)\}dt \tag{4.2.2.12}$$

şeklindedir.

Lemma 4.2.2.2: Aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$
$$\varphi_2(x,\lambda)=\sin\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.2.2.13}$$

$$\frac{\partial\varphi_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}=-x\sin\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(1),$$
$$\frac{\partial\varphi_2(x,\lambda)}{\partial\lambda}=x\cos\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(1). \tag{4.2.2.14}$$

İspat:

(4.2.2.13)'ü elde etmek için (4.2.2.10) ve (4.2.2.11)'in sağ tarafındaki integrallerde kısmi integrasyon yöntemini kullanmak yeterlidir. ($P(x,s), R(x,s), Q(x,s)$ ve $H(x,s)$ fonksiyonları diferansiyellenebilir olduğundan kısmi integrasyon metodu uygulanabilir). (4.2.2.14) ise (4.2.2.10) ve (4.2.2.11)'in iki yanından türev alınarak benzer bir yolla ispatlanabilir.

Lemma 4.2.2.3: (4.2.1.6),(4.2.1.7),(4.2.1.8) sınır değer probleminin özdeğerleri sadece $\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta$ fonksiyonunun kökleridir. Üstelik bu fonksiyonun her kökü tek katlıdır.

İspat:

$\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.2.1.7) nin sınır şartlarını sağladığından (4.2.1.6) -(4.2.1.8) sınır değer probleminin özdeğerini bulmak için $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.2.1.8) sınır şartında yerine yazılmalı böylece eşitliğin kökleri bulunur.

$$D(\lambda)=\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta$$

alınıp , λ'ya göre türev alınırsa

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\partial\varphi_2(\pi,\lambda)}{\partial\lambda}\cos\beta+\frac{\partial\varphi_1(\pi,\lambda)}{\partial\lambda}\sin\beta$$

elde edilir. Varsayalım ki λ_1 iki katlı kök olsun ve

$\begin{pmatrix} P_1(x,\lambda_1) \\ P_2(x,\lambda_1) \end{pmatrix}$, λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektör fonksiyonlarından biri olsun.

O halde $D(\lambda_1)=0$ ve $dD(\lambda_1)/d\lambda=0$ birlikte sağlanmalıdır.

Yani;

$$\varphi_2(\pi,\lambda_1)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda_1)\sin\beta=0 \ ,$$

$$\frac{\partial \varphi_2(\pi,\lambda_1)}{\partial \lambda}\cos\beta+\frac{\varphi_1(\pi,\lambda_1)}{\partial \lambda}\sin\beta=0$$

ifadelerinden

$$\varphi_2(\pi,\lambda_1)\frac{\partial \varphi_1(\pi,\lambda_1)}{\partial \lambda}-\varphi_1(\pi,\lambda_1)\frac{\partial \varphi_2(\pi,\lambda_1)}{\partial \lambda}=0 \qquad (4.2.2.15)$$

elde edilir.

(4.2.1.6) denklemini λ ya göre diferansiyeli alınırsa

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial y_2}{\partial \lambda}\right)'_x-\{\lambda+p(x)\}\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}=y_1\\&\left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}\right)'_x+\{\lambda+r(x)\}\frac{\partial y_2}{\partial \lambda}=-y_2\end{aligned}\right. \qquad (4.2.2.16)$$

elde edilir.

(4.2.1.6) ve (4.2.2.16) eşitlikleri $\frac{\partial y_1}{\partial \lambda},-\frac{\partial y_2}{\partial \lambda},-y_1$ ve y_2 ile sırasıyla çarpılıp eklenirse ve sonra $(0,\pi)$ aralığında, x e göre integrallenirse

$$\left\{y_2(x,\lambda)\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}-y_1(x,\lambda)\frac{\partial y_2}{\partial \lambda}\right\}_0^x=-\int_0^x\left(y_1^2(r,\lambda)+y_2^2(r,\lambda)\right)dr$$

elde edilir.

$\lambda=\lambda_1$ alınırsa ve

$$\varphi_1(0,\lambda)=\cos\alpha\ ,\quad \varphi_2(0,\lambda)=-\sin\alpha$$

yardımıyla

$$\left.\frac{\partial \varphi_1(x,\lambda_1)}{\partial \lambda}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial \varphi_2(x,\lambda_1)}{\partial \lambda}\right|_{x=0}=0$$

dikkate alırnırsa ve (4.2.2.6) kullanılırsa

$$-\int_0^x \left\{\varphi_1^2(x,\lambda_1)+\varphi_2^2(x,\lambda_1)\right\}dx=\varphi_2(\pi,\lambda_1)\frac{\partial\varphi_1(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}-\varphi_1(\pi,\lambda_1)\frac{\partial\varphi_2(\pi,\lambda_1)}{\partial\lambda}=0$$

elde edilir. $\varphi_1(x,\lambda_1)=\varphi_2(x,\lambda_1)\equiv 0$ bulunur. Bu ise mümkün değildir. Bundan dolayı lemma sağlanmış olur.

Yukarıda bahsedildiği gibi (4.2.1.6) – (4.2.1.8) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta+\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta=0$$

eşitliğinin kökleriyle çakışır. Bu denklemde (4.2.2.13)' de $\varphi_1(\pi,\lambda)$ ve $\varphi_2(\pi,\lambda)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\sin(\lambda\pi-v)+O(\frac{1}{\lambda})=0 \tag{4.2.2.17}$$

elde edilir. Burada v' nin değeri (4.2.2.12)'den

$$v=\beta-\alpha-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(p(t)+r(t)\right)dt \tag{4.2.2.18}$$

şeklindedir. (4.2.2.17) eşitliğindeki büyük $|\lambda|$'lar için açıkçası

$$\pi\lambda_n-v=n\pi+\delta_n \qquad (n=0,\pm1,\pm2,...)$$

çözümlerine sahiptir.

Bu değerler (4.2.2.17) de yerine yazılırsa

$$\sin\delta_n=O(\frac{1}{n}) \text{ yani } \delta_n=O(\frac{1}{n})$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\lambda_n=n+\frac{v}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n=0,\pm1,\pm2,...) \tag{4.2.2.19}$$

asimptotik formülü elde edilir. (4.2.2.19) formülü kullanılarak

$$\varphi_1(x,\lambda_n)=u_n(x) \quad , \quad \varphi_2(x,\lambda_n)=v_n(x)$$

yazılırsa

$$\xi_n=\xi(x,\lambda_n)=\lambda_n x-\frac{1}{2}\int_0^x \big(p(\tau)+r(\tau)\big)d\tau$$

yardımıyla

$$u_n(x)=\cos(\xi_n-\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.2.2.20}$$

$$v_n(x)=\sin(\xi_n-\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.2.2.21}$$

asimptotik formülleri elde edilir.

4.2.3. Kanonik Dirac Operatörü İçin Matris Dönüşüm Operatörü

A_1 ve A_2 iki lineer diferansiyel operatör, E_1 ve E_2 ise iki lineer fonksiyonel uzay olsun.

Tanım 4.2.3.1. $X:E_1\to E_2$ lineer sürekli operatör olmak üzere

1. $A_1X=XA_2$ (4.2.3.1)

2. X^{-1} mevcut ve sürekli

olması şartlarının sağlanması halinde X'e A_1 ve A_2 operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir.

Lemma 4.2.3.1. λ özdeğerine karşılık gelen A_2 operatörünün özfonksiyonu $\varphi_\lambda\in E_1$, yani

$$A_{2\varphi_\lambda}=\lambda\varphi_\lambda$$

olmak üzere aynı λ özdeğerine karşılık gelen $\psi_\lambda=X_{\varphi_\lambda}$, A_1 operatörünün özfonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$A_1\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

dır.

İspat : $A_1X = XA_2$ olduğundan

$$A_1\psi_\lambda = A_1X\varphi_\lambda = XA_2\varphi_\lambda = X\lambda\varphi_\lambda = \lambda X\varphi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.3.2. Lineer topolojik E uzayında A_1, A_2 ve A_3 lineer operatörleri ve E_1, E_2, E_3 kapalı alt uzayları verilmiş olsun. A_1 ve A_2 operatör çifti için X_{A_1,A_2} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1,A_2} : E_2 \to E_3$$

şeklinde, A_2 ve A_3 operatörler çifti için X_{A_2,A_3} dönüşüm operatörü ise

$$X_{A_2,A_3} : E_1 \to E_2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, A_1 ve A_3 operatör çifti için X_{A_1,A_3} dönüşüm operatörü

$$X_{A_1,A_3} : E_1 \to E_3$$

şeklinde olmak üzere

$$X_{A_1,A_3} = X_{A_1,A_2}X_{A_2,A_3}$$

formülü ile ifade ediliyor.

İspat : Dönüşüm operatörünün tanımından dolayı

$$A_1X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2}A_2$$
$$A_2X_{A_2,A_3} = X_{A_2,A_3}A_3$$

şeklinde olup, ikinci denklemden $A_2 = X_{A_2,A_3} A_3 X^{-1}_{A_2,A_3}$ elde edilir. Bu eşitliği birinci denklemde yerine yazarsak

$$A_1 X_{A_1,A_2} = X_{A_1,A_2} X_{A_2,A_3} A_3 X^{-1}_{A_2,A_3}$$

veya

$$A_1 X_{A_1,A_2} X_{A_2,A_3} = X_{A_1,A_2} X_{A_2,A_3} A_3$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

$p_i(x)$ ve $r_i(x)$, $(i=1,2)$, her sonlu aralıkta $(0 \le x \le b < \infty)$ integrallenebilir reel fonksiyonlar olacak şekilde

$$A_1 \cdot \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix} = B\frac{d}{dx} + Q_1(x) \qquad (4.2.3.2)$$

$$A_2 \cdot \equiv \begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix} = B\frac{d}{dx} + Q_2(x) \qquad (4.2.3.3)$$

operatörlerini gözönüne alalım. Keyfi sonlu reel h_1 sayısı için

$$f_2(0) - h_1 f_1(0) = 0 \qquad (4.2.3.4)$$

sınır şartını sağlayan, $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferensiyellenebilen

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonlarının cümlesi E_1 olsun. Keyfi sonlu reel h_2 sayısı için

$$g_2(0) - h_2 g_1(0) = 0 \qquad (4.2.3.5)$$

sınır şartını sağlayan $[0,b)$ aralığında tanımlı sürekli, diferensiyellenebilen

$$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

vektör fonksiyonların cümlesi E_2 olsun. X operatör matrisi $f(x)\in E_1$ için

$$X\{f(x)\}=R(x)f(x)+\int_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{4.2.3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu veya 2x2 boyutlu kare matrislerdir.

(4.2.3.2) ve (4.2.3.6) dan,

$$\begin{aligned} A_1X\{f(x)\} =& BR'(x)f(x)+BR(x)f'(x) \\ &+Q_1(x)R(x)f(x)+BK(x,x)f(x) \\ &+\int_0^x \{BK'_x(x,s)+Q_1(x)K(x,s)\}f(s)ds \end{aligned} \tag{4.2.3.7}$$

dir. Diğer taraftan (4.2.3.3) ve (4.2.3.6) dan dolayı

$$\begin{aligned} XA_2\{f(x)\} =& R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x) \\ &+\int_0^x K(x,s)\{Bf'(s)+Q_2(s)f(s)\}ds \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte kısmi integrasyondan faydalanarak

$$\begin{aligned} XA_2\{f(x)\} =& R(x)Bf'(x)+R(x)Q_2(x)f(x) \\ &+K(x,x)Bf(x)-K(x,0)Bf(0) \end{aligned}$$

$$+\int_0^x \left\{K\left(x,s\right)Q_2(s)-K_s'(x,s)B\right\} f(s)ds \tag{4.2.3.8}$$

elde ederiz. $f(x)$, E_1 uzayında keyfi vektör uzayı olduğu için (4.2.3.1) eşitliğinden dolayı $f(x)$ ve $f'(x)$ in katsayıları ve (4.2.3.7), (4.2.3.8) in integral altındaki ifadelerinin eşit olması gerekir. Bu sebeple $f'(x)$' lerin katsayıları için

$$BR(x)=R(x)B \tag{4.2.3.9}$$

elde ederiz. Eğer

$$R(x)=\begin{pmatrix} \alpha\left(x\right) & \beta\left(x\right) \\ \gamma\left(x\right) & \delta\left(x\right) \end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa (4.2.3.9)' dan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\left(x\right) & \beta\left(x\right) \\ \gamma\left(x\right) & \delta\left(x\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\left(x\right) & \beta\left(x\right) \\ \gamma\left(x\right) & \delta\left(x\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\delta\left(x\right)=\alpha\left(x\right),\quad \gamma(x)=-\beta(x)$$

buluruz, yani $R\left(x\right)$ matrisinin görüntüsü

$$R(x)=\begin{pmatrix} \alpha\left(x\right) & \beta\left(x\right) \\ -\beta\left(x\right) & \alpha\left(x\right) \end{pmatrix} \tag{4.2.3.10}$$

olur.

Şimdi $\alpha\left(x\right)$ ve $\beta\left(x\right)$ fonksiyonlarını hesaplayalım. Bunun için (4.2.3.7) ve (4.2.3.8) de, $f(x)$ in katsayılarını eşitlersek $R(x)$ matrisinin tanımlanması için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$BR'(x)+Q_1(x)R(x)-R(x)Q_2(x)=K(x,x)B-BK(x,x) \tag{4.2.3.11}$$

$$K(x,s)=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

olmak üzere $Q_1(x), Q_2(x), R(x)$ ve B matrislerinin görüntülerinden faydalanarak (4.2.3.11) denklemini

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x) & \alpha'(x) \\ -\alpha'(x) & -\beta'(x) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_1(x)\alpha(x) & p_1(x)\beta(x) \\ -r_1(x)\beta(x) & r_1(x)\alpha(x) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} p_2(x)\alpha(x) & r_2(x)\beta(x) \\ -p_2(x)\beta(x) & r_2(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s) \\ K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \\ -K_{11}(x,s) & -K_{12}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x) & \alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix} \qquad (4.2.3.12)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris içinde sağlanmalıdır. Bu sebeple (4.2.3.12) denklemlerinden

$$\alpha'(x)+\left[p_1(x)-r_2(x)\right]\beta(x)=-\alpha'(x)+\left[p_2(x)-r_1(x)\right]\beta(x)$$
$$\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)=-\beta'(x)+\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\alpha(x)$$

bulunur, yani

$$\begin{aligned} &2\alpha'(x)+q(x)\beta(x)=0 \\ &-2\beta'(x)+q(x)\alpha(x)=0 \end{aligned} \qquad (4.2.3.13)$$

burada

$$q(x) = p_1(x) - p_2(x) + r_1(x) - r_2(x) \tag{4.2.3.14}$$

dir. (4.2.3.13) sisteminde, bulunan birinci eşitliği $\alpha(x)$ ile ikinci eşitliği de $\beta(x)$ ile çarpıp, birinciden ikinciyi çıkarırsak

$$2\alpha(x)\alpha'(x) + 2\beta(x)\beta'(x) = 0$$

yani

$$\left(\alpha^2(x) + \beta^2(x)\right)' = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha^2(x) + \beta^2(x) = \alpha^2(0) + \beta^2(0) \tag{4.2.3.15}$$

buluruz.

$$f_1(0) = 1 \quad , \quad f_2(0) = h_1 \tag{4.2.3.16}$$

şartları sağlanmak üzere $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu sürekli, diferensiyellenebilir olsun. Bu taktirde $f(x)$ in (4.2.3.4) sınır koşulunu sağladığı açıktır ve bu sebeple $f(x) \in E_1$ dir. Yine kabul edelim ki, $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu, E_2 uzayının elemanı, dolayısıyla (4.2.3.5) sınır şartı sağlanacak şekilde

$$X\{f(x)\} = g(x) \tag{4.2.3.17}$$

olsun. Bu taktirde $x = 0$ için (4.2.3.17) eşitliğinden ve X matris operatörünün tanımından dolayı, yani (4.2.3.6) ve (4.2.3.10) bağıntılarına göre

$$X\{f(0)\} = g(0) = R(0)\, f(0)$$

veya

$$g_1(0) = \alpha(0)\, f_1(0) + \beta(0)\, f_2(0)$$
$$g_2(0) = -\beta(0)\, f_1(0) + \alpha(0)\, f_2(0)$$

elde ederiz. Bu denklemlerden (4.2.3.5) sınır şartını ve (4.2.3.16) şartlarını gözönüne almak üzere son eşitliklerin birincisini h_2 sayısı ile çarpıp, daha sonra ikinciden çıkardığımızda,

$$\beta(0) = \frac{h_1 - h_2}{1 + h_1 h_2}\alpha(0)$$

elde ederiz.

$$\alpha(0) = 1 \tag{4.2.3.18}$$

alırsak,

$$\beta(0) = \frac{h_1 - h_2}{1 + h_1 h_2} \tag{4.2.3.19}$$

olur. Buna göre,

$$\alpha^2(0) + \beta^2(0) = \frac{\left(1 + h_1^2\right)\left(1 + h_2^2\right)}{\left(1 + h_1 h_2\right)^2} = X^2 \tag{4.2.3.20}$$

olur. Şimdi (4.2.3.15), (4.2.3.18), (4.2.3.20) eşitliklerinden faydalanarak (4.2.3.13) sistemini çözelim. Eğer,

$$\alpha(x) = \chi \sin k(x)\, ve\, \beta(x) = \chi \cos k(x) \tag{4.2.3.20$'$}$$

olarak alınırsa,

$$\alpha'(x) = k'(x)\chi \cos k(x) \text{ ve } \beta'(x) = -k'(x)\chi \sin k(x)$$

bulunur. Bu değerler (4.2.3.13) de yerine yazılıp elde edilen denklemlerden birincisi $\cos k(x)$ ile ikincisi de $\sin k(x)$ ile çarpılıp, elde edilen denklemler toplanırsa

$$k(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x g(z)dz+\arcsin\frac{1}{x}$$

bulunur. Bu değerler (4.2.3.20′) de yerine yazılırsa, $q(x)$ fonksiyonu (4.2.3.14) formülü, χ sayısı ise (4.2.3.20) formülü ile tanımlanacak şekilde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları için

$$\alpha(x)=\chi\sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{4.2.3.21}$$

$$\beta(x)=\chi\cos\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x q(z)dz+\arcsin\frac{1}{\chi}\right\} \tag{4.2.3.22}$$

ifadeleri bulunur. Şimdi (4.2.3.7) ve (4.2.3.8) de integral altındaki ifadeleri eşitlersek, $K(x,s)$ matris çekirdeği için,

$$K_s'(x,s)B+BK_x'(x,s)=K(x,s)Q_2(s)-Q_1(x)K(x,s) \tag{4.2.3.23}$$

matris denklemini veya

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial s} & \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s} & \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2(s) & 0 \\ 0 & r_2(s) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & r_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} & \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} & \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_2(s)-p_1(x))K_{11}(x,s) & (r_2(s)-p_1((x))K_{12}(x,s) \\ (p_2(s)-r_1(x))K_{21}(x,s) & (r_2(s)-r_1(x))K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

buradan

$$\begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= \left(r_2(s)-p_1(x)\right)K_{12}(x,s) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= \left(p_2(s)-r_1(x)\right)K_{21}(x,s) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= \left(r_2(s)-r_1(x)\right)K_{22}(x,s) \end{aligned} \qquad (4.2.3.23')$$

denklem sistemini elde ederiz. Sonuç olarak (4.2.3.8) ifadesinde $f(0)'$ ı içeren terim ((4.2.3.7)' de benzer terim olmadığı için) sıfıra eşit olur. Böylece,

$$K(x,0)Bf(0)=0$$

yani,

$$\begin{pmatrix} -K_{12}(x,0) & K_{11}(x,0) \\ -K_{22}(x,0) & K_{21}(x,0) \end{pmatrix} f(0)=0$$

bu ise

$$\begin{aligned} K_{12}(x,0)f_1(0) &= K_{11}(x,0)f_2(0) \\ K_{22}(x,0)f_1(0) &= K_{21}(x,0)f_2(0) \end{aligned}$$

denklemler sistemine eşdeğerdir. (4.2.3.4) sınır koşulundan dolayı

$$K_{12}(x,0)=h_1K_{11}(x,0)\ ,\ \ K_{22}(x,0)=h_1K_{21}(x,0) \qquad (4.2.3.24)$$

elde ederiz. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ keyfi diferensiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olacak biçimde,

$$K_{11}(x,0)=\varphi(x)\ ,\ K_{21}(x,0)=\psi(x) \tag{4.2.3.25}$$

ele alırsak (3.2.3.24) ve (3.2.3.25) şartları, $K(x,s)$ matris çekirdeği için

$$K(x,s)\,|_{s=0}=\begin{pmatrix}\varphi(x) & h_1\varphi(x)\\ \psi(x) & h_1\psi(x)\end{pmatrix} \tag{4.2.3.26}$$

şartını tanımlıyor. Burada (4.2.3.26) şartı (4.2.3.23) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

Benzer şekilde Dirac operatörünün II. Kanonik formu için

$$A_1=\begin{pmatrix}p_1(x) & \dfrac{d}{dx}+q_1(x)\\ -\dfrac{d}{dx}+q_1(x) & -p_1(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix}p_1(x) & q_1(x)\\ q_1(x) & -p_1(x)\end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_1(x)$$

$$A_2=\begin{pmatrix}p_2(x) & \dfrac{d}{dx}+q_2(x)\\ -\dfrac{d}{dx}+q_2(x) & -p_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix}p_2(x) & q_2(x)\\ q_2(x) & -p_2(x)\end{pmatrix}=B\frac{d}{dx}+Q_2(x)$$

olmak üzere (4.2.3.11) denklemini

$$\begin{pmatrix}-\beta'(x) & \alpha'(x)\\ -\alpha'(x) & -\beta'(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_1(x)\alpha(x)-q_1(x)\beta(x) & p_1(x)\beta(x)+q_1(x)\alpha(x)\\ q_1(x)\alpha(x)+p_1(x)\beta(x) & q_1(x)\beta(x)+p_1(x)\alpha(x)\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}p_2(x)\alpha(x)+q_2(x)\beta(x) & q_2(x)\alpha(x)-p_2(x)\beta(x)\\ -p_2(x)\beta(x) & -q_2(x)\beta(x)-p_2(x)\alpha(x)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-K_{12}(x,s) & K_{11}(x,s)\\ -K_{22}(x,s) & K_{21}(x,s)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s)\\ -K_{11}(x,s) & -K_{11}(x,s)\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\beta'(x)+\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)-\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x) & \alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x) \\ -\alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x) & -\beta'(x)+\left[p_2(x)-p_1(x)\right]\alpha(x)+\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\left[K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x)\right] & K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x) & K_{12}(x,x)+K_{21}(x,x) \end{pmatrix}$$

şeklinde yazarız. Burada sağdaki matrisin esas köşegen elemanlarının sadece işaretleri farklıdır, diğer köşegen üzerinde bulunan elemanlar ise eşittir. Şimdi matrislerin eşitliklerinden dolayı, bu özellik sol taraftaki matris için de sağlanmalıdır. Bu sebeple

$$\alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x)$$
$$=-\alpha'(x)+\left[q_1(x)-q_2(x)\right]\alpha(x)+\left[p_1(x)+p_2(x)\right]\beta(x)$$

$$\beta'(x)-\left[p_1(x)-p_2(x)\right]\alpha(x)+\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x)$$
$$=-\beta'(x)+\left[p_2(x)-p_1(x)\right]\alpha(x)+\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\beta(x)$$

bulunur, yani

$$2\alpha'(x)=0 \quad , \quad 2\beta'(x)=0$$

dır. Burada c_1 ve c_2 birer sabit olmak üzere

$$\alpha(x)=c_1 \quad , \quad \beta(x)=c_2$$

bulunur. Ayrıca (4.2.3.23) denklemi

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial K}{\partial s} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{12}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{22}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2(s) & q_2(s) \\ q_2(s) & -p_2(s) \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} p_1(x) & q_1(x) \\ q_1(x) & -p_1(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{11}(x,s) & K_{12}(x,s) \\ K_{21}(x,s) & K_{22}(x,s) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial K_{12}}{\partial s}+\dfrac{\partial K_{21}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{11}}{\partial s}+\dfrac{\partial K_{22}}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial K_{22}}{\partial s}-\dfrac{\partial K_{11}}{\partial x} & \dfrac{\partial K_{21}}{\partial s}-\dfrac{\partial K_{12}}{\partial s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)+q_2(s)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) & q_2(s)K_{11}(x,s)-\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\ -q_1(x)K_{11}(x,s)+p_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) & -q_1(x)K_{12}(x,s)+q_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)K_{22}(x,s)\right) \end{pmatrix},$$

şeklindedir. Bu durumda aşağıdaki

$$\begin{aligned} -\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x} &= \left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)+q_2(s)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\ \frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x} &= q_2(s)K_{11}(x,s)-\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s) \\ -\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{11}(x,s)+p_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) \\ \frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x} &= -q_1(x)K_{12}(x,s)+q_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s) \end{aligned} \qquad (4.2.3.27)$$

denklemler sistemini elde ederiz. Burada (4.2.3.16) şartı (4.2.3.27) denklemi ile birlikte bir Cauchy problemini tanımlar ve bu problem çözülebilirdir.

4.3 Bessel Operatörü

4.3.1 Bessel Operatörü İçin Asimptotik Formüllerin Elde Edilmesi

$$y''+\left[\lambda-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]y=0 \qquad (4.3.1.1)$$

$$y(0)=0 \qquad (4.3.1.2)$$

$$y'(1,\lambda)+Hy(1,\lambda)=0 \qquad H\in R \qquad (4.3.1.3)$$

şeklinde verilen sınır değer problemini gözönüne alalım. Bu denklemin çözümü

$$y(x)=\sqrt{x}.J_v\left(\sqrt{\lambda}.x\right)$$

formundaki Bessel fonksiyonu olup, burada

$$J_v\left(\sqrt{\lambda}x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+v+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)^{2k+v}$$

dir. Şimdi

$$y''+\left[\lambda+q(x)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]y=0 \qquad (4.3.1.4)$$

$$y(0)=0 \qquad (4.3.1.5)$$

$$y'(1,\lambda)+Hy(1,\lambda)=0 \qquad H\in R \qquad (4.3.1.6)$$

problemini gözönüne alalım. Burada $q(x)$, $(0,1]$ aralığında sürekli ve türevlenebilen bir fonksiyon ve

$v-\frac{1}{2}=l$ olsun. Bu durumda (4.3.1.4) denklemi

$$y''+\left[\lambda+q(x)-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0$$

şeklinde elde edilir.

(4.3.1.1)-(4.3.1.3) sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışlarını bulmak zor değildir. Fakat (4.3.1.4)-(4.3.1.6) problemine dikkat edilirse, $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun (0,1] aralığındaki sürekliliği hariç başka bir özelliği bilinmemektedir.

Bu bölümdeki amaç ise böyle bir denklemin asimptotik formlarını bulmaktır. Bu formları bulmaya çalışırken yine (4.3.1.1)-(4.3.1.3) probleminin asimptotik formlarından faydalanacağız. Ayrıca $J_v(x) \in L^2(0,1]$ olduğundan asimptotik formları hesaplarken genel çözüm yerine $y = J_v(x)$ çözümünü almak yeterlidir. Şimdi bu formları bulmaya çalışalım.

Bessel fonksiyonları

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{2k}}\right] + \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{x^{2k}}\right]$$

şeklinde asimptotik forma sahiptir (Watson , 1944).

Eğer bu denklemde büyük x değerleri gözönüne alınırsa, $\sqrt{\lambda} = s$ olmak üzere

$$J_v(sx) = \sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\cos\left(sx - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] \tag{4.3.1.7}$$

$$J_v'(sx) = -\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\sin\left(sx - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{sx}\right)\right] \tag{4.3.1.8}$$

elde edilir.

Bu bölümde (4.3.1.4)-(4.3.1.6) probleminin çözümünü dönüşüm operatörü yardımıyla

$$\varphi(x,\lambda)=\sqrt{x}\,j_v\left(sx\right)+\int_0^x K\left(x,t\right)\sqrt{t}\,j_v(st)dt \tag{4.3.1.9}$$

şeklinde arayacağız. Eğer

$$\int_0^x K(x,t)\sqrt{t}\,j_v\left(st\right)dt=O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi\left(x,s\right)&=\sqrt{x}.\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\cos\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{s}}.\left[\cos\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\\&=\cos\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)\end{aligned} \tag{4.3.1.10}$$

olduğu sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\varphi_x\left(x,s\right)&=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}j_v\left(sx\right)+\sqrt{x}.sj_v\left(sx\right)+K(x,x)\sqrt{x}\,j_v\left(sx\right)+\int_0^x\frac{\partial K\left(x,t\right)}{\partial x}\sqrt{t}\,j_v\left(st\right)dt\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\cos\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]-\sqrt{x}\,s\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\sin\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]\\&=\cos\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-s.\sin\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)\end{aligned} \tag{4.3.1.11}$$

elde edilir.(4.3.1.4)-(4.3.1.6) probleminin özdeğerleri (4.3.1.6) denklemini sağlayan λ değerleri olduğundan (4.3.1.10) ve (4.3.1.11) değerleri (4.3.1.6) denkleminde yerine yazılırsa;

$$y'\left(1,\lambda\right)+Hy\left(1,\lambda\right)=0$$

$$\cos\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-s.\sin\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+H\cos\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

$$(1+H)\cos\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-s.\sin\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

olur. Sinüs fonksiyonunun sıfırdan farklı değerleri için,

$$-s.\sin\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+(1+H)\cot\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=0$$

olup, buradan

$$w(s)=s.\sin\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=0 \qquad (4.3.1.12)$$

denklemi elde edilir. Rouche teoreminden dolayı s'nin büyük değerleri için w(s) fonksiyonu ile $\left(s-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı aynıdır.

s_n, (4.3.1.12) denkleminin n. kökü olsun. Burada görülüyor ki $n\to\infty$ için $s_n\to\infty$ dir. n nin

tamsayılarının komşuluğunda yeterince büyük değerleri gözönüne alınırsa

$$\sin\left(s_n-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s_n}\right)=0$$

$$s_n-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi \qquad (n=0,1,2,...,)$$

$$s_n=\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi$$

$$s_n=\left[n+\frac{1}{2}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]\pi \qquad \left(\nu=l+\frac{1}{2}\right)$$

$$s_n=\left(n+\frac{l+1}{2}\right)\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$s_n=\left(n+\frac{l}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.3.1.13)$$

elde edilir. Şimdi bu formülü daha hassas hale getirmeye çalışalım. Bunun için

$$s_n = \left[n + \frac{(l+1)}{2} \right] \pi + \delta_n \qquad (4.3.1.13)'$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_x(x,\lambda) = \cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - s.\sin\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + K(x,x)\cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{sx} \right)$$

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\left(sx - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{sx} \right)$$

ifadelerinde $x=1$ alınıp bu ifadeler (4.3.1.6) da yerlerine yazılırsa

$$\varphi'(1,\lambda) + H\varphi(1,\lambda) = \cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - s.\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) +$$

$$+K(1,1)\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + H\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{s} \right) = 0$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$[1 + H + K(1,1)]\cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + s.\sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{s} \right) = 0$$

bulunur. Burada s'nin yerine $(4.3.1.13)'$ yazılırsa;

$$[1 + H + K(1,1)]\cos\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n \right) -$$

$$-\left(n + \frac{(l+1)}{2} \right)\pi \sin\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n \right) + +O\left(\frac{1}{n} \right) = 0 \qquad (4.3.1.13)''$$

olur. Buradan $\nu - \frac{1}{2} = l$ ifadesi gözönüne alınırsa

$$\cos\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n \right) = \cos(n\pi + \delta_n) = \cos n\pi \cos\delta_n - \sin n\pi \sin\delta_n \cong \cos\delta_n$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\sin\left(n\pi + \frac{l\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n \right) = \sin(n\pi + \delta_n) = \sin n\pi \cos\delta_n + \cos n\pi \sin\delta_n \cong \sin\delta_n$$

elde edilir. Bu değerler $(4.3.1.13)''$ de yerine yazılırsa

$$\left[1+H+K(1,1)\right]\cos\delta_n-\left[n\frac{(l+1)}{2}\right]\pi\sin\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

olur. Bu denklemde $n\to\infty$ için $O\left(\frac{1}{n}\right)=0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\tan\delta_n=\frac{\left[1+H+K(1,1)\right]}{\left[n+\frac{(l+1)}{2}\right]\pi}$$

yazılır. Burada n nin en büyük değerleri gözönüne alınırsa,

$$\delta_n=\frac{\left[1+H+K(1,1)\right]}{\left[n+\frac{(l+1)}{2}\right]\pi}$$

bulunur. Eğer $a=\frac{\left[1+H+K(1,1)\right]}{\pi}$ alınırsa,

$$\delta_n=\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Böylece (4.3.1.13) ifadesi

$$s_n=\left[n+\frac{(l+1)}{2}\right]\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.3.1.14}$$

şeklinde elde edilir. Bu da $H\neq\infty$ için (4.3.1.14) denkleminin *asimptotik formudur.* Şimdi

$$y(1,\lambda)\cos\beta+y'(1,\lambda)\sin\beta=0$$

sınır şartlarını gözönüne alalım. Bu eşitliğin iki tarafını $\sin\beta\neq0$ ile bölüp $\cot\beta=H$ olarak alırsak

$$y'\left(1,\lambda\right)+Hy\left(1,\lambda\right)=0$$

şeklindeki eşitliği elde ederiz. (4.3.1.14) denklemi $H \neq 0$ sayısının sonlu olması halinde elde edildi. Eğer $H=0$ $(\cos\beta=0)$ ise;

$$y(1,\lambda)\cos\beta+y'(1,\lambda)\sin\beta=y'(1,\lambda)=0$$

olur. Diğer taraftan (4.3.1.8) eşitliğinden

$$y'(sx)=\sqrt{x}J_v'(sx)=-\sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\sin\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]$$

bulunur. Burada $x=1$ alınırsa

$$y'(s)-\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\left[\sin\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=0$$

olur. Böylece $\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\neq 0$ olduğundan

$$\sin\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

olur. Buradan

$$s_n=\left[n+\frac{(l+1)}{2}\right]\pi+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.3.1.15)$$

elde edilir. Diğer taraftan $H=\infty$ $(\sin\beta=0)$ gözönüne alınırsa;

$$y(1,\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\left[\cos\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)\right]=0$$

$$\cos\left(s-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$s_n=\left[n+\left(l+1\right)\right]\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

bulunur.

Teorem 4.3.1: $q(x)$, $[0,1]$ aralığında reel ve sürekli bir fonksiyon, H ise sonlu reel bir sayı olmak üzere

$$y''+\left[\lambda+q(x)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]y=0 \tag{4.3.1.a}$$

$$y(0,\lambda)=0 \tag{4.3.1.b}$$

$$y'(1,\lambda)+Hy(1,\lambda)=0 \tag{4.3.1.c}$$

şeklindeki sınır değer probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $(0,1]$ aralığında ortagonaldir.

İspat: λ_1 ve λ_2 $(\lambda_1\neq\lambda_2)$ özdeğerlerine karşılık gelen çözümler $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_2)$ olsun. Bu durumda

$$y_1''+\left[\lambda_1+q(x)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]y_1=0$$

$$y_2''+\left[\lambda_2+q(x)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right]y_2=0$$

olur. Bu denklemleri sırası ile y_2 ve y_1 ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak

$$y_2y_1''+\lambda_1y_1y_2+qy_1y_2-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}y_1y_2-y_2''y_1-qy_1y_2-\lambda_2y_1y_2+\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}y_1y_2=0$$

elde edilir. Böylece

$$y_2 y_1'' - y_2'' y_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2$$

$$\frac{d}{dx}(y_1' y_2 - y_1 y_2') = (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2$$

bulunur. Son eşitliğin iki yanını $(0,1]$ aralığında integrallersek

$$(y_1' y_2 - y_1 y_2')|_0^1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \int_0^1 y_1 y_2 dx$$

elde edilir. Eğer (4.3.1.b) ve (4.3.1.c) sınır şartları gözönüne alınırsa sol tarafın sıfır olduğu sonucuna varılır ki böylece

$$\int_0^1 y_1(x,\lambda_1) y_2(x,\lambda_2) dx = 0$$

olur. Bu ise çözümlerin ortogonal olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.2. $q(x)$ ve H , Teorem 4.3.1 deki şartları sağlasın. Bu durumda (4.3.1.a)-(4.3.1.c) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat:

Aksine kabul edelim ki λ özdeğerleri $\lambda = u + iv$ şeklinde kompleks sayı olsun. Bu durumda $q(x)$ ve H reel olduğundan $\lambda = u - iv$ sayısı da bir özdeğer olur. Eğer (4.3.1.2) denkleminde iki tarafın eşleniği alınırsa,

$$\overline{y''} + \left[\overline{\lambda} + q(x) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right] \overline{y} = 0$$

elde edilir. Bu denklem ise $\overline{y}$ fonksiyonunun $\overline{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen bir çözüm olduğunu gösterir. Böylece Teorem 4.3.1' den

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 y(x,\lambda) \overline{y(x,\lambda)} dx = 0$$

$$\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)\int_0^1 |\, y\left(x,\lambda\right)|^2 \, dx = 0$$

elde edilir. İntegralin içerisindeki terim sıfırdan farklı olduğundan $\lambda = \overline{\lambda}$ elde edilir ki bu da λ özdeğerlerinin reel olduğunu gösterir.

Şimdi $\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)$ eşitliğini gözönüne alarak (4.3.1.14) asimptotik formuna karşılık gelen özfonksiyonların asimptotik formunu bulmaya çalışalım. Bunun için (4.3.1.7) gözönüne alınırsa

$$\varphi\left(x,\lambda\right)=\sqrt{x}\, j_v(sx)+\int_0^x K(x,t)\sqrt{t}\, j_v\left(st\right)dt$$

veya

$$\varphi\left(x,\lambda\right)=\sqrt{x}.\sqrt{\frac{2}{\pi sx}}\left[\cos\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{sx}\right)\right]+$$
$$+\int_0^x K\left(x,t\right)\sqrt{t}.\sqrt{\frac{2}{\pi st}}\left[\cos\left(st-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{st}\right)\right]dt \qquad (4.3.1.16)'$$

olur. Burada eşitliğin sağındaki ikinci terime kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\int_0^x K(x,t)\left[\cos\left(st-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{st}\right)\right]dt=\frac{1}{s}.\sqrt{\frac{2}{\pi s}}K(x,t)\sin\left(st-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^x -$$
$$-\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\int_0^x \frac{\partial K\left(x,t\right)}{\partial x}\sin\left(st-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\int_0^x K(x,t)\left[\cos\left(st-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{st}\right)\right]dt=K(x,x)\sin\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

bulunur. Bu ifade $(4.3.1.16)'$ de gözönüne alınırsa

$$\varphi_n\left(x\right)=\cos\left(n\pi x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Son eşitlikte eğer (4.3.1.14) ifadesi gözönüne alınırsa,

$$\varphi_n(x)=\cos\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.3.1.17)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade ise (4.3.1.4)-(4.3.1.6) probleminin özfoksiyonları için asimptotik formdur. Bunun için ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlara ait asimptotik

$$a_n^2=\int_0^1 \varphi_n^2 dx \qquad (4.3.1.17)'$$

formunu hesaplayalım.(4.3.1.17) de (4.3.1.17)′ gözönüne alınırsa

$$a_n^2=\int_0^1\left[\cos\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 dx$$

$$=\int_0^1\left[\cos^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K^2(x,x)\sin^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2 dx+$$

$$+\int_0^1 2K(x,x)\sin\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx \qquad (4.3.1.17)''$$

bulunur. Ayrıca $K(x,x)=\int_0^x q(\tau)d\tau \quad q(\tau)\in C(0,1]$ olduğundan,

$$\int_0^1 K^2(x,x)\sin^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Bu değer (4.3.1.17)″ de yerine yazılırsa

$$a_n^2=\int_0^1\cos^2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n^2=\frac{1}{2}\int_0^1\left[1+\cos\left[2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right]dx+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n\pi}\sin\left[2\left(n\pi x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big|_0^1$$

$$a_n^2=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n^2 = \frac{1}{2}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{1}{a_n} = \sqrt{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \| \varphi_n \|$$

elde edilir. Böylece ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlar

$$v_n = \frac{\varphi_n}{\| \varphi_n \|}$$

veya

$$v_n = \sqrt{2}\left[\cos\left(n\pi x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + K(x,x)\sin\left(n\pi x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

şeklinde bulunur.

Bütün bu ifadeler $H \neq 0$ sayısının sonsuzdan farklı olması halinde elde edildi. $H = 0$ ve $H = \infty$ olması halinde de özdeğer fonksiyonlar ve ortonormalleşmiş özfonksiyonlar için yukarıdakine benzer şekilde asimptotik formlar bulunabilir.

4.3.2. Bessel Denklemi İçin Dönüşüm Operatörünün Elde Edilmesi

Bu bölümde $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunu bulmak için kısmi türevli denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılan Riemann metodundan yararlanılmıştır. Bu metod Hiperbolik tip kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılır. Bu metodun uygulanışı şöyledir. Öncelikle çözümü aranan denklemin düzlemde keyfi bir noktadaki değeri araştırılır. Eğer bu noktadaki çözüm bulunabiliyorsa denklemin genel çözümü bulunmuş olur. Ayrıca bu metod yardımıyla çözüm araştırılırken Riemann fonksiyonu adını verdiğimiz eşlenik denklemin çözümünden yararlanılır.

$$xz'' + z' + \left(\lambda x - \frac{v^2}{x} \right) z = 0 \qquad (4.3.2.1)$$

şeklinde verilen Bessel diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu denklemde $y = \sqrt{xz}$ dönüşümü yapılırsa

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} z + \sqrt{x} z'$$

$$y'' = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} z + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} z' + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} z' + x^{\frac{1}{2}} z''$$

olup, buradan

$$z' = \frac{y' - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} z}{x^{\frac{1}{2}}} = y' x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-1} z$$

$$z'' = y'' x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} z x^{-2} - z' x^{-1}$$

olur. Elde edilen bu değerler (3.3.2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$y'' x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} z x^{-1} + y' x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-1} z + \lambda x y x^{-\frac{1}{2}} - \frac{v^2 y x^{-\frac{1}{2}}}{x} = 0$$

$$y'' x^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} + \lambda x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} v^2 \right] y = 0$$

$$y'' + \left[\frac{1}{4} x^{-2} + \lambda - x^{-2} v^2 \right] y = 0$$

$$y'' + \left[\lambda - \frac{\left(v^2 - \frac{1}{4} \right)}{x^2} \right] y = 0 \qquad (4.3.2.2)$$

şeklindeki Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Şimdi bu denklemi

$$y(0)=0 \tag{4.3.2.3}$$

$$y'(1)+H_1 y(1)=0 \tag{4.3.2.4}$$

şartları ile gözönüne alalım. Bu şekilde verilen denklemin çözümü, $y=\sqrt{x}\, j_v(x)=J_v(x)$ şeklinde Bessel fonksiyonudur. Şimdi

$$y''+\left[\lambda+q(x)-\frac{\left(v^2-\frac{1}{4}\right)}{x^2}\right]y=0 \tag{4.3.2.5}$$

$$y(0)=0 \tag{4.3.2.6}$$

$$y'(1)+H_1 y(1)=0 \tag{4.3.2.7}$$

probleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun. Bu durumda (4.3.2.2)- (4.3.2.4) problemi ile (4.3.2.5) – (4.3.2.7) problemi arasında dönüşüm operatörünün

$$X\left[J_v(x,\lambda)\right]=\varphi(x,\lambda)=J_v(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)J_v(t,\lambda)dt$$

şeklinde olduğu aranılacaktır. Kabul edelim ki

$$A=\frac{d^2}{dx^2}+\lambda-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}$$

$$B=\frac{d^2}{dx^2}+\lambda+q(x)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}$$

olsun. Burada dönüşüm operatörünün ikinci şartını gözönüne alacağız.

$$\varphi'(x,\lambda)=J_v'(x,\lambda)+K(x,x)J_v(x,\lambda)+\int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_v(t,\lambda)dt$$

$$\varphi''(x,\lambda) = J_v''(x,\lambda) + K'(x,x)J_v(x,\lambda) + K(x,x)J_v'(x,\lambda) + \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_v(t,\lambda)|_{t=x}$$

$$+\int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x^2}J_v(t,\lambda)\,dt$$

$$AXJ_v(x,\lambda) = A\varphi(x,\lambda) = \varphi''(x,\lambda) + \left[\lambda - \frac{v^2\,\frac{1}{4}}{x^2}\right]\varphi(x,\lambda)$$

$$\varphi''(x,\lambda) = J_v''(x,\lambda) + K'(x,x)J_v(x,\lambda) + K(x,x)J_v'(x,\lambda) + \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_v(t,\lambda)|_{t=x}$$

$$+\int_0^x \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}J_v(t,\lambda)\,dt + \left[\lambda - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]J_v(x,\lambda) +$$

$$+\left[\lambda - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]\int_0^x K(x,t)J_v(x,\lambda)\,dt \tag{4.3.2.8}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$XJ_v(x,\lambda)B = XBJ_v(x,\lambda) = J_v''(x,\lambda) + \left[\lambda + q(x) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]J_v(x,\lambda) +$$

$$+\int_0^x K(x,t)\left[J_v''(t,\lambda) + \left(\lambda + q(t) - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right)J_v(t,\lambda)\right]dt$$

$$= J_v''(x,\lambda) + q(x)J_v(x,\lambda) + \left(\lambda - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)J_v(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)J_v''(t,\lambda)\,dt +$$

$$+\int_0^x K(x,t)\left[\lambda+q(t)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right]J_v(t,\lambda)\,dt \tag{4.3.2.9}$$

olur. $AXJ_v(x,\lambda)=XBJ_v(x,\lambda)$ olduğundan (4.3.2.8) ve (4.3.2.9) ifadeleri bu eşitlikte yazılırsa,

$$J''(x,\lambda)+K'(x,x)J_v(x,\lambda)+K(x,x)J_v'(x,\lambda)+\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}J_v(t,\lambda)|_{t=x}+$$

$$+\int_0^x\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial x^2}J_v(t,\lambda)\,dt+\left(\lambda-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)J_v(x,\lambda)+\left(\lambda-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)\int_0^x K(x,t)J_v(t,\lambda)\,dt$$

$$=J_v''(x,\lambda)+q(x)J_v(t,\lambda)+\left(\lambda-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)J_v(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t)J_v''(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\left(\lambda+q(t)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)\int_0^x K(x,t)J_v(t,\lambda)\,dt$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\int_0^x K(x,t)J_v''(t,\lambda)\,dt=K(x,t)J_v'(t,\lambda)|_0^x-\int_0^x\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_v'(t,\lambda)\,dt$$

$$=K(x,t)J_v'(t,\lambda)|_0^x-\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_v'(t,\lambda)|_0^x+\int_0^x\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial t^2}J_v(t,\lambda)\,dt$$

$$=K(x,t)J_v'(t,\lambda)|_{t=x}-K(x,t)J_v'(t,\lambda)|_{t=0}-\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_v(t,\lambda)|_{t=x}+$$

$$+\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}J_v(t,\lambda)|_{t=0}+\int_0^x\frac{\partial^2K(x,t)}{\partial t^2}J_v(t,\lambda)\,dt$$

olduğundan, elde edilen bu değer yukarıdaki denklemde yazılıp benzer terimlerin katsayılarının eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)K(x,t)=\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}+\left[q(t)+\frac{v^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right]K(x,t) \qquad (4.3.2.10)$$

$$\left[\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=x}+\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=t}\right]J_v(x,\lambda)+K'(x,x)J_v(x,\lambda)=q(x)J_v(x,\lambda)$$

olur. Sol taraftaki ifadenin ilk terimi bir tam diferansiyel olduğundan

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau \qquad (4.3.2.11)$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir. Son olarak $J_v(0,\lambda)=0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$K(x,t)J_v'(x,\lambda)\big|_{t=0}=0$$

olup, $J_v'(0,\lambda)\neq 0$ olduğundan

$$K(x,0)=0$$

elde edilir. Böylece (4.3.2.10) denklemi ; (4.3.2.11) ve (4.3.2.12) şartları ile birlikte

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)K(x,t)=\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2}+\left[q(t)+\frac{v^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right]K(x,t) \qquad (4.3.2.13)$$

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau \qquad (4.3.2.14)$$

$$K(x,0)=0 \qquad (4.3.2.15)$$

şeklinde Hiperbolik tip kısmi türevli bir diferansiyel denklemi oluşturur. (4.3.2.15)-(4.3.2.15) problemini çözmek için

$$z=\frac{1}{4}\left(x+t\right)^2\ ,\quad s=\frac{1}{4}\left(x-t\right)^2,\quad K(x,t)=(z-s)^{-v+\frac{1}{2}}U\left(z,s\right) \tag{4.3.2.15$'$}$$

şeklindeki dönüşümleri gözönüne alalım. Ayrıca

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(x+t),\qquad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(x+t\right),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\ ,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{2}(x-t),\qquad \frac{\partial s}{\partial t}=-\frac{1}{2}\left(x-t\right),\qquad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\ ,\qquad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 K\left(x,t\right)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\frac{\left(x+t\right)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}+\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{(x^2-t^2)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{\left(x-t\right)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 K\left(x,t\right)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\frac{\left(x+t\right)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}+\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{(x^2-t^2)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{\left(x-1\right)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}$$

oldukları (4.3.2.13) denkleminde gözönüne alınırsa,

$$\frac{\partial^2 K\left(x+t\right)^2}{\partial z^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{\left(x^2-t^2\right)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{(x-t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}K-qK=$$

$$=\frac{\partial^2 K\left(x+t\right)^2}{\partial z^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\frac{\left(x^2-t^2\right)}{2}+\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\frac{(x-t)^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{\partial K}{\partial s}-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{t^2}K$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}\left(x^2-t^2\right)-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}K+\frac{v^2-\frac{1}{4}}{t^2}K-qK=0 \tag{4.3.2.16}$$

elde edilir. Eğer $-v+\dfrac{1}{2}=\alpha$ denirse;

$$K(x,t)=(z-s)^{-v+\frac{1}{2}}U\left(z,s\right)=\left(z-s\right)^{\alpha}U\left(z,s\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial z}=\alpha(z-s)^{\alpha-1}U\left(z,s\right)+\left(z-s\right)^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z\partial s}=-\alpha\left(\alpha-1\right)\left(z-s\right)^{\alpha-2}U\left(z,s\right)+\alpha\left(z-s\right)^{a-1}\frac{\partial U}{\partial s}-\alpha\left(z-s\right)^{a-1}\frac{\partial U}{\partial z}+\left(z-s\right)^{\alpha}\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial s}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{1}{4}\left(x+t\right)^2\\ s&=\frac{1}{4}\left(x-t\right)^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} x&=\sqrt{z}+\sqrt{s}\\ t&=\sqrt{z}-\sqrt{s}\end{aligned}$$

$$x^2-t^2=4\sqrt{z.s}$$

olduğundan, bu değerler (4.3.2.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-4\sqrt{zs}\alpha\left(\alpha-1\right)\left(z-s\right)^{\alpha-2}U\left(z,s\right)+4\sqrt{zs}\alpha\left(z-s\right)^{\alpha-1}\frac{\partial U}{\partial s}-4\sqrt{zs}\alpha\left(z-s\right)^{\alpha-1}\frac{\partial U}{\partial z}+$$

$$4\sqrt{zs}\alpha\left(z-s\right)^{\alpha}\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial s}-\frac{v^2-\frac{1}{4}}{\left(\sqrt{z}+\sqrt{s}\right)^2}\left(z-s\right)^{\alpha}U\left(z,s\right)+\frac{v^2-\frac{1}{4}}{\left(\sqrt{z}-\sqrt{s}\right)^2}\left(z-s\right)^{\alpha}U\left(z,s\right)-$$

$$-q\left(\sqrt{z}-\sqrt{s}\right)\left(z-s\right)^{\alpha}U\left(z,s\right)=0$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı $4\sqrt{zs}(z-s)^{\alpha}$ ile bölünüp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial s}-\frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{q(\sqrt{z}-\sqrt{s})U}{4\sqrt{zs}}$$

şeklindeki Euler-Poisson-Darbox denklemi elde edilir. Şimdi de bu denklem için yeni sınır şartlarını elde etmeye çalışalım:

$$t=x\Rightarrow z=\frac{1}{4}\left(x+t\right)^2=\frac{1}{4}\left(x+x\right)^2=x^2\Rightarrow x=\sqrt{z}$$

ve

$$s=\frac{1}{4}(x-t)^2=\frac{1}{4}\left(x-x\right)^2=0$$

olur. Böylece

$$K(x,t)=(z-s)^{-v+\frac{1}{2}}u(z,s)\Rightarrow K(x,x)=(z-0)^{-v+\frac{1}{2}}u(z,0)\Rightarrow K(x,x)=z^{-v+\frac{1}{2}}u(z,0)$$

$$\frac{dK(x,x)}{dx}=\left(-v+\frac{1}{2}\right)z^{-v+\frac{1}{2}-1}U(z,0)\frac{\partial z}{\partial x}+z^{-v+\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=2\sqrt{z}\left(-v+\frac{1}{2}\right)z^{-v+\frac{1}{2}}U\left(z,0\right)+2xz^{-v+\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial z}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{dK\left(x,x\right)}{dx}=\frac{1}{2}q(x)$$

olduğundan

$$\frac{\partial U}{\partial z}2\sqrt{z}z^{-v+\frac{1}{2}}+2\sqrt{z}\left(-v+\frac{1}{2}\right)z^{-v-\frac{1}{2}}U(z,0)=\frac{1}{2}q\left(\sqrt{z}\right)$$

olup, denklemin iki tarafı $2\sqrt{z}z^{-v+\frac{1}{2}}$ ile bölünürse,

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\alpha}{z}U=\frac{1}{4}q(\sqrt{z})z^{v-1}$$

şeklinde bir şart elde edilir. Eğer $t=0$ ise,

$$z=\frac{1}{4}\left(x+t\right)^2=\frac{x^2}{4} \qquad \text{ve} \qquad s=\frac{1}{4}(x-t)^2=\frac{x^2}{4}$$

denklemlerinden $z=s$ karakteristiği elde edilir. Bu durumda denklemin bazı katsayıları tekilliğe sahip olduğundan $\varepsilon>0$ olmak üzere $z=s+\varepsilon$ karakteristiğini gözönüne alacağız. Böylece

$$K(x,t)=(z-s)^{-v+\frac{1}{2}}U\left(z,s\right)$$

olduğundan,

$$K(x,0)=0=(s+\varepsilon-s)^{-v+\frac{1}{2}}U(z,z-\varepsilon)$$

olup, $\varepsilon\neq 0$ olduğundan $U(z,z-\varepsilon)=0$ elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial s}-\frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\alpha}{z-s}\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{qU}{4\sqrt{zs}} \qquad (4.3.2.17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\alpha}{z}U=\frac{1}{4}q(\sqrt{z})z^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \qquad (4.3.2.18)$$

$$U(z,z-\varepsilon)=0 \qquad (4.3.2.19)$$

şeklinde bir Euler- Darboux problemi elde edilir.

5. SONUÇ

Bu tezde Sturm-Liouville, Dirac ve Bessel operatörlerinin spektral teorileri incelenmiş olup aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmıştır:

1.Sturm-Liouville operatörü için;

(4.1.2.1) denkleminin (4.1.2.3) başlangıç şartlarını sağlayan denklemi

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

alınırsa

$h\neq\infty, H\neq\infty$ için

(4.1.2.1)-(4.1.2.2) Sturm-Liouville problemi gözönüne alnırsa

Özdeğerler için asimptotik formül;

$$s_n=n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad c=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau\right) \tag{4.1.2.18}$$

özfonksiyon için asimptotik formül;

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right) \tag{4.1.2.19}$$

Normlaştırıcı sayılar için asimptotik formül;

$$\frac{1}{a_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.20}$$

normlaştırılmış özfonksiyonların asimptotik formülü;

$$v_n(x)=\frac{1}{a_n}\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.21}$$

gibi olur.

$h = \infty$, $H \neq 0$ için

Özdeğerler için asimptotik formül;

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad H_1 = \left\{H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau\right\} \tag{4.1.2.26}$$

özfonksiyon için asimptotik formül;

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.27}$$

normlaştırılmış özfonksiyonlar için asimptotik formül;

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1.2.29}$$

normlaştırılmış katsayılar için asimttotik formülü;

$$\frac{1}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \tag{4.1.2.28}$$

gibi olur.

$h = \infty$, $H = \infty$ için

Özdeğerler için asimptotik formül;

$$s_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.31}$$

özfonksiyon için asimptotik formül;

$$\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.1.2.32}$$

normlaştırılmış katsayılar için asimptotik formül;

$$\frac{1}{\alpha_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}n\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \tag{4.1.2.33}$$

normlaştırılmış özfonksiyonların asimttotik formülü;

$$v_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1.2.34}$$

gibi olur.

Sturm-Liouville operatörü için dönüşüm operatörü bulunurken dönüşüm operatörü tanımından

$$A_1.=-\frac{d^2.}{dx^2}+q(x). \quad , \; A_2.=-\frac{d^2.}{dx^2}$$

alınırsa

$A_1X = XA_2$'den

$$\frac{d^2K}{dx^2}-q\left(x\right)=\frac{\partial^2K}{dt^2}$$
$$K\left(x,0\right)=0$$
$$K\left(x,x\right)-\frac{1}{2}\int_0^x q\left(s\right)ds$$

elde edilir.

2.Dirac operatörü için;

$$B\frac{dz}{dx}+Q(x)z=\lambda z\ ,\quad Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z(x)=\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere I. Kanonik form;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{4.2.1.4}$$

şeklinde olup II. Kanonik form;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{4.2.1.5}$$

şekildeki gibidir. Özdeğer için asimptotik formül;

$$\lambda_n=n+\frac{v}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right),\ (n=0,\pm1,\pm2,...)\ ,\ v=\beta-\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(p(t)+r(t)\right)dt \tag{4.2.2.19}$$

özfonksiyon için asimptotik formüller;

$$u_n(x)=\cos(\xi_n-\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.2.2.20}$$

$$v_n(x)=\sin(\xi_n-\alpha)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.2.2.21}$$

şeklindedir.

$$K_{12}(x,0)=h_1K_{11}(x,0)$$

$K_{22}(x,0)=h_1 K_{21}(x,0)$

$K_{11}(x,0)=\varphi(x)$

$K_{21}(x,0)=\psi(x)$

olmak üzere

$$K(x,s)|_{s=0}=\begin{pmatrix}\varphi(x) & h_1\varphi(x)\\ \psi(x) & h_1\psi(x)\end{pmatrix}$$

$$-\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x}=\left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)$$
$$\frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x}=\left(r_2(s)-p_1(x)\right)K_{12}(x,s)$$
$$-\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x}=\left(p_2(s)-r_1(x)\right)K_{21}(x,s)$$
$$\frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x}=\left(r_2(s)-r_1(x)\right)K_{22}(x,s)$$

I.Kanonik form için dönüşüm operatörü belirtir.

$f_1(0)=1$

$f_2(0)=h_1$

ve

$$-\frac{\partial K_{12}}{\partial s}+\frac{\partial K_{21}}{\partial x}=\left(p_2(s)-p_1(x)\right)K_{11}(x,s)+q_2(s)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s)$$
$$\frac{\partial K_{11}}{\partial s}+\frac{\partial K_{22}}{\partial x}=q_2(s)K_{11}(x,s)-\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{12}(x,s)-q_1(x)K_{22}(x,s)$$
$$-\frac{\partial K_{22}}{\partial s}-\frac{\partial K_{11}}{\partial x}=-q_1(x)K_{11}(x,s)+p_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s)$$
$$\frac{\partial K_{21}}{\partial s}-\frac{\partial K_{12}}{\partial x}=-q_1(x)K_{12}(x,s)+q_2(s)K_{21}(x,s)+\left(p_1(x)+p_2(s)\right)K_{22}(x,s)$$

II.Kanonik form için dönüşüm operatörü belirtir.

3. Bessel operatörü için;

$$\varphi(x,\lambda)=\sqrt{x}\,j_v\left(sx\right)+\int_0^x K\left(x,t\right)\sqrt{t}\,j_v(st)dt$$

çözüm fonksiyonu alındığında

$$s_n=\left[n+\left(l+1\right)\right]\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{2}\right)\quad (H=\infty)$$

$$s_n=\left[n+\frac{\left(l+1\right)}{2}\right]\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{a}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad (H\neq\infty)\qquad (v-\frac{1}{2}=l)$$

özdeğer için asimptotik formlar ve

$$\varphi\left(x,\lambda\right)=\cos\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+K(x,x)\sin\left(sx-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

özfonksiyon için asimptotik formlar şekildeki gibi olur. Buradaki $K(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözüm fonksiyonudur.

$$\frac{\partial^2K\left(x,t\right)}{\partial x^2}+\left(\frac{v^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)K\left(x,t\right)=\frac{\partial^2K\left(x,t\right)}{\partial t^2}+\left[q\left(t\right)+\frac{v^2-\frac{1}{4}}{t^2}\right]K\left(x,t\right)$$

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau$$

$$K\left(x,0\right)=0$$

KAYNAKLAR

Alekceev, A.A. and Lorenzi, A., Sturm-Liouville Inverse Problems with Functionally Symmetric Coefficients***, Universita Degli Studi Di Milano***, 52,1-10.

Ambartsumyan, V.A., 1929, Über Eine Frage Der Eigenwerttheorie. ***Z. Phys***. 53, 690-695

Başkan, T., 2000, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, ***Uludağ Üniv***., Bursa.

Borg, G., 1946, Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe. ***Acta Math***. 78(1), 1-96.

Churchill , R. V., 1963, Fourier Series and Boundary Value Problems. 2. ed. Ed. ***McGraw-Hill***, New York.

Coddington, E.H. and Levinson, N., 1955, Theory of Ordinary Differential Equations. ***McGraw-Hill***, New York.

Courant, R. and Hilbert, D., 1953, Methods of Mathematical Physics. ***New York***.

Delsarte, J. and Lions, J., 1957, Transmutations d'operateurs differentielles dans le domaine complexe. ***Comn. Math. Helv***. 32(2), 113-128.

Delsarte, J., (1938b), Sur Une Extension De La Formule de Taylor. ***J. Math. Pure Appl***. 17,213-231.

Gasymov, M.G., 1965, The Definition of Sturm-Liouville Operator from Two Spectra, ***DAN SSSR***, Vol.161,No:2, 274-276.

Gelfand, M., Levitan, B.M., 1955, On the Determination of a Differential Equation From Its Spectral Function. ***Amer. Math. Soc. Transl***. (2) 1, 253-304.

Hochstadt, H. and Lieberman, B., 1978, An Inverse Strum-Liouville Problem with Mixed Given Data. Siam **J. Appl. Math**., Vol.34 , No:4, 676-680.

Hochstadt, H., 1971, The Functions of Mathematical Physics, New York.

Hochstadt, H., 1973, The Inverse Sturm-Liouville Problem. ***Communications on Pure and Applied Mathematics***, Vol .26, 715-729.

İç, Ü., "Dirac Operatörü İçin Spektarl Analizin Bazı Problemleri", Yüksek Lisans Tezi, ***Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Elazığ, (1999).

İç, Ü., "Kanonik Dirac Operatörü İçin Kısmen Çakışmayan İki Spektruma Göre Ters Problem", Doktora Tezi, ***Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Elazığ, (2003).

Kayalar,M., "Sturm-Liouville Operatörü İçin Özdeğer ve Öz Fonksiyonların Asiptotik Formları Üzerine", Yüksek LisansTezi, ***Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Elazığ, (1998).

Kayalar, M., "Kısmen Çakışmayan iki Spektruma Göre Singüler Sturm-Liouville Operatörü İçin Ters Problem", Doktora Tezi, ***Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Erzurum, (2003).

Kostyuchenko, A.G. and Sargsyan, I.S., 1979, Distribution of eigenvalues, ***Nauka***, Moscow(Russian).

Koyunbakan, H., "Bessel Diferensiyel Denkleminin Spektral Analizi", Yüksek Lisans Tezi, ***Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Elazığ, (1998).

Krein, M.G., 1951, Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem. ***DAN SSSR*** 76(1), 21-24.

Kreysizig, E., 1978, Introductory Functional Analysis with Applications. ***New-York***.

Levin, B.Y., 1959, Interpolation by Entire Functions of Exponential Type. ***Trudy Fiz. Tekhnich. Inst***.

Levin, Ja., 1964, Distribution of Zeros of Entire Function. ***Amer. Math*. Soc.**

Levinson, N., 1951, A Simplified Proof The Expansion Theorem For Singular Second Order Linear Differential Equations. ***Duke Math.J***. 18, 57-71.

Levitan, B.M., 1964, Generalized Translation Operators and Some of Its Applications. ***Jerusalem***.

Levitan, B.M., Gasymov, M.G., 1964, Determination of a Differential Equation by two Its Spectra. ***Russian Math. Surveys*** 19, 1-63.

Levitan, B.M., On the Determination of the Sturm-Liouville Operator From One and Two Spectra, Math. ***USSR Izvestija*** Vol. 12, 1978,pp. 179-193.

Levitan, B.M., 1978, On The Determination of the Sturm-Liouville Operator from One and Two Spectra, Math. ***USSR Izvestija*** Vol. 12, 179-193.

Levitan, B.M., Sargsyan, I.S., 1970, Introduction to Spectral Theory, Moskov, ***Nauka***.

Levitan, B.M.,1987.Inverse Sturm-Liouville Problems. Utrecht,239,***Netherlands***.

Levitan, B.M., and Sargsyan, I.S.,1991. Sturm-Liouville and Dirac operators. Kluver Academic Publishers, 345, ***Netherlands***.

Liusternik, L.A. and Sobolev, V.J., 1961, Elements of Functional Analysis. Frederick Ungar Publishing Company, ***New York***.

Mackie, A.G., 1965, Boundary Value Problems. ***Edingburgh and London***.

Marchenko, V.A., 1973, Some questions of the theory of One dimensional linear differential operators II.***Amer.Math.Soc.Transl***. (2)101, 107-191

Marchenko, V.A., 1977, Sturm-Liouville Operators and Theirs Application, ***Kiev***.

Markushevich, A.I., and Markushevich, L.A., 1977. Introduction to Theory of Analitic Functions, 320, Moscow.

Naimark, M.A., 1968, Linear Differential Operators Part I,II, ***Frederik Ungar Publishing Co. Inc. London***.

Panakhov, E.S., 1980, About Inverse Problem on Two Spectrum for the Differential Operator with Peculiarity in Zero. ***DAN. Az. SSR, XXXVI, N.10,6-10***.

Panakhov, E.S., 1980, The Definition of Differential Operator with Peculiarity in Zero on Two Spectrum. ***VINITI,N*** 4407-80, Baku, , pp. 1-16.

Panakhov, E.S., 1985, Cauchy and Goursat Problem For The Second Order Hyberbolic Equations with Discontinuous Coefficients. ***Izv. Azerb***. Vol.3, No:6.

Panakhov, E. S., 1985, The defining of Dirac system in two incompletely set collection of eigenvalues, **DAN Az SSR**, v. XLI, nu:5, pp. 8-12.

Povzner, A.J., 1962, On Differential Equation Of Sturm-Liouville Type On A Half axis**. *Amer. Math. Soc. Transl***. (1) 4, 24-101.

Sat, M., "Singüler Dirac Operatörünün Spektral Teorisi", Doktora Tezi, ***Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Elazığ, (2012).

Stashevskaya, V.V., 1953, On Inverse Problems of Spectral Analysis for a Class of Differential Equations , ***Dokl. Akad. Nauk. SSSR*** 93, 409-411.

Titchmarsh, E.S., 1958, Eigenfunction Expansion with Assosicated with Second Order Differential Eguations Part I,II. ***Oxford Universiy Press***.

Volk, V.Y., 1953, On Inverse Formulas for a Differential Equation with a Singularity at x=0. ***Usp. Mat. Nauk*** (N.S) 8 (56), , 141-151.

Weyl, H. 1909-1910a,Gewöhnl. Lineare Diff. Gleichgn m.Singularen Stellen&ihre Eigenfunkt. Göttingen, ***Ges.D.Wiss.Nachr***. 37-64.

Weyl, H., 1910b, Gewöhnl. Lineare Diff. Gleichgn m. Singularitaten d. Zugehör. Entwick Willkür. ***Funktn. Math. Ann***. 68, 220-269.

Whitttaker, E. And Watson, G., 1972, A Course of Modern Analysis. ***Cambridge University Press,*** Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Mesut COŞKUN, 01.07.1982 yılında Tunceli'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tunceli'de tamamladı. Atatürk Üniversitesi Erzincan Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2008 yılında bitirdi. Aynı yıl Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde tezsiz yüksek lisans programına başlayarak, 2009 yılında bitirdi. Daha sonra Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim dalında tezli yüksek lisansa başladı. 2010 yılında Tunceli Namık Kemal Endüstri Meslek Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı. 2011 yılından beri Tunceli Üniversitesi Meslek Yüksekokulunda öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır.