**ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN KURULUŞU, TEK ve ÇİFT SERİLİ HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN KULLANIM YERİ ÖRNEKLERİ

**Erkan BİLGİN**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN**
**2010**

Doç. Dr. Murat ŞAT danışmanlığında, Erkan BİLGİN tarafından hazırlanan bu çalışma 16.06.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. A. Sinan ÖZKAN

İmza:

Üye : Doç. Dr. Murat ŞAT

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk ÇETİN

İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Ali SÜLÜN

Enstitü Müdürü

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN KURULUŞU, TEK ve ÇİFT SERİLİ HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN KULLANIM YERİ ÖRNEKLERİ

Erkan BİLGİN

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Murat ŞAT

Bu çalışmada hipergeometrik fonksiyonların kuruluşu örnek verilerek incelendi ve çift serili hipergeometrik fonksiyonların geniş kullanım alanlarından bazılarının örnekleri sonuçlarıyla birlikte verildi.

**2015, 64 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Hipergeometrik fonksiyonlar, çift serili hipergeometrik fonksiyonlar.

# ABSTRACT

Master Thesis

FORMING OF THE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS, THE USAGE AND EXAMPLES OF HYPERGEOMETRIC FUNTIONS WITH SINGLE AND DOUBLE SERIES

Erkan BİLGİN

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Murat ŞAT

In this study, Forming of the hypergeometric functions is examined by giving proper examples and the examples of some of the usage areas of the hypergeometric functions with double series are given with their results.

**2015, 64 pages**

**Keywords:** Hypergeometric function, double series of hypergeometric functions.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunun belirlenmesinde, çalışma sürecinde ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Murat ŞAT ve bu süreçte her türlü desteğiyle yanımda yer alan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk ÇETİN' e en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Çalışmalarım süresince gösterdikleri destekten dolayı aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Erkan BİLGİN

Haziran, 2015

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $[a]_q$ | a Tamsayısının q- Analogu |
| $[a;\sigma]$ | a' nın Trigonometrik Bozunumu |
| $B(x,y)$ | Beta Fonksiyonu |
| $J_\alpha(z)$ | Bessel Fonksiyonu |
| $(\alpha_n(a,k),\beta_n(a,k))$ | Dizi Çifti |
| $\mathbb{N}$ | Doğal Sayılar Kümesi |
| $\Gamma(x)$ | Gama Fonksiyonu |
| ${}_2F_1(a,b;c;z)$ | Gauss Hipergeometrik Seri |
| ${}_rF_s$ | Genişletilmiş Hipergeometrik Fonksiyonu |
| $C_n^\lambda(x)$ | Gegenbauer Polinomu |
| $H_n(x)$ | Hermite Polinomu |
| $\phi(a,b,c,q,z)$ | Heine Serisi |
| $\Omega(j)_{j=0}^{\infty}$ | Kompleks Dizi |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks Sayılar Kümesi |
| $L_n^\alpha(x)$ | Laguerre Polinomu |
| $P_n(x)$ | Legendre Polinomu |

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{N}$ | Sayma Sayılar Kümesi |
| $(a)_{-n}$ | Shifted Factorial |
| $(\alpha)_n$ | Pochhammer Sembolü |
| $\mathbb{Z}$ | Tam Sayılar Kümesi |
| ${}_r\phi_s$ | Temel Hipergeometrik Seri |
| $T_n(x)$ | Tchebichef Polinomu |
| $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ | Jacobi Polinomu |
| $(a;q)_{-n}$ | q- Shifted Factorial |
| $[n]_q!$ | q-Sayısı Faköriyeli |
| $[a]_{q;n}$ | q-Sayısı Shifted Factoriali |

# 1. GİRİŞ

Herhangi bir örüntünün temel öğelerini bilmeden, örüntüye ekleme yapmak zordur. Karmaşık bir örüntüye sahip olan Matematik için, bu işlem daha da zordur. Bir Matematik örüntüsüne yeni bir ekleme yapılmak istendiğinde araştırmacılar için en önemli zorluklardan biri, bu örüntüyü anlamalarına klavuzluk edecek örnekleri bulmaktır. Bu çalışmada hipergeometrik fonksiyonlar konusunda çalışacakların böyle bir zorluk yaşamamaları adına hipergeometrik fonksiyonların oluşumu, bu oluşumu oluşturan öğeler arasındaki ilişkiler örneklendirilerek verilmiştir. Hipergeometrik fonksiyonlar konusunda çalışan yetkin araştırmacılar çok çeşitli örüntüler oluşturmuştur. Bu örüntülerde tek ve çift serilerle elde edilen hipergeometrik fonksiyonların çok geniş kullanımı yer almaktadır. Bunlardan bazı örnekler sonuçlarıyla birlikte bu çalışmada verilmiştir. Bu örüntüleri takip edip ve yeni örüntüler eklemek isteyen araştırmacılar için bu çalışmanın bir klavuz niteliği taşıması beklenmektedir.

Özel fonksiyonların önemli bir bölümünü oluşturan hipergeometrik fonksiyonlar Matematik, Fizik, Mühendislik ve Olasılık Teorisinde kullanılmaktadır. İlk olarak Gauss tarafından ele alınan bu fonksiyonlar

$$\left\{\theta(\theta+\gamma-1)-x(\theta+\alpha)(\theta+\beta)\right\}y=0 \tag{1.1}$$

$$\left(\theta=x\frac{d}{dx}\right) \tag{1.2}$$

şeklinde bir diferansiyel denklemin çözümü olarak ortaya çıkmıştır (Gauss, 1866). Bu diferansiyel denklemin çözümü olarak tanımlanan hipergeometrik fonksiyon daha sonraki yıllarda Appell, Lauricella, Horn, Srivastava tarafından çok değişkenli hiper-geometrik fonksiyonlar kullanılarak genişletilmişdir. Bir türev operatörü kullanılarak, bu fonksiyonların çeşitli özellikleri ve genişletilmiş formları incelenmektedir (Chaudhry vd., 2004; Hasanov vd., 2006, 2007).

Diğer taraftan ortogonal polinomlarda hipergeometrik fonksiyonların kullanılması ve bazı özel diferansiyel denklemlerin çözümlerinin hipergeometrik fonksiyonlarla ifade edilmesi bu konuya olan ilgiyi arttırmıştır (Taşdelen ve Altın 2003; Erkuş ve Altın 2005).

Bu tezde önce, dizi, seri, kuvvet serileri, fonksiyonların seriye açılımı, taylor, maclaurin serisi ve binom açılımı incelenerek, serilerin özellikleri ve kuvvet serilerinde aritmetik işlemler ile kuvvet serilerinin tersinin bulunuşu verilerek örneklendirildi. Gama ve Beta fonksiyonları ve bu fonksiyonlarla ilgili özellikler verilerek örneklendirildi. Hipergeometrik seriler ve hipergeometrik fonksiyonlar ilgili özellikleriyle birlikte verilerek örneklendirildi. Temel hipergeometrik serilerin türevlerinden elde edilen bir yeni Bailey tipi dönüşüm arasındaki bazı özellikler, çift serili Hipergeometrik fonksiyonlar, formal kuvvet serileri yöntemi, çift seriler için indirgeme formülleri ve Watson'un ${}_3F_2$ toplamının q-eşlemesi yoluyla elde edilen dönüşümün türevi incelenerek tek ve çift serili Hipergeometrik fonksiyonların kullanımı ile ilgili örnekler sonuçlarıyla birlikte verilmiştir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1. Dizi, Seri ve Özellikleri

**Tanım 2.1.1.** A boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere her $f:\mathbb{N}$ fonksiyonuna dizi denir. $n\in\mathbb{N}$ için $f(n)=a_n$ ifadesine dizinin n. terimi veya genel terimi denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılır. Eğer değer kümesi reel sayılardan oluşuyorsa diziye reel sayılar dizisi, kompleks sayılardan oluşuyorsa kompleks sayılar dizisi, fonksiyonlardan oluşuyorsa fonksiyonel dizi adı verilir. Benzer şekilde örnekler çoğaltılabilir. Dizi küme olarak

$$f=\{(n,a_n):n\in\mathbb{N} \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Bir fonksiyon olan dizinin değer kümesi $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ şeklindedir. Bu kümede elamanların sırası önemli olduğundan küme parantezi yerine "( )" parantezi kullanılmaktadır. Başka bir ifade ile dizi

$$(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...) \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$a_1 \rightarrow 1.$ terimi

$a_2 \rightarrow 2.$ terimi

…

$a_n \rightarrow n.$ terimi göstermektedir (Yalçınkaya, 2013).

**Örnek 2.1.1.** $(2^n) = (2, 4, 8, 16, ..., 2^n, ...)$

**Tanım 2.1.2.** Herhangi bir $(a_n)$ dizisinin verilmiş toplamına seri veya sonsuz toplam adı verilir. Bir seride terimlerin sayısı sonlu ise seriye sonlu seri, sonsuz ise seriye sonsuz seri denir. Bir sonsuz seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \tag{2.3}$$

şeklinde gösterilir. Burada $a_n$ terimine serinin n. terimi veya genel terimi adı verilir. Bu terim serinin terimlerinin oluşum kuralını belirler (Yalçınkaya, 2013).

**Örnek 2.1.2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$

**Tanım 2.1.3.** Her $\sum a_n$ serisi için $S_n$ kısmi toplamlar dizisi

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse, burada elde edilen $S_n$ kısmi toplamlar dizisinin terimleri, integral hesaplanırken integral değişkeninde olduğu gibi, j indisinden bağımsızdır. Diğer bir değişle,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m \tag{2.5}$$

dir.

Dolayısıyla,

$$S_1 = a_1, \tag{2.6}$$

$$S_2 = a_1 + a_2, \tag{2.7}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \tag{2.8}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır (Özer, 2005).

**Tanım 2.1.4.** Kısmi toplamlar dizisi yakınsak olan bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine yakınsaktır, kısmi toplamlar dizisi ıraksak olan bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine ıraksaktır denir. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ve $S_n$ kısmi toplamlar dizisinin limiti S ise, S değerine sonsuz serinin toplamı denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \tag{2.10}$$

şeklinde yazılır. Böylece tanımdan, limit var ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j = \underset{n\to\infty}{S_n} \tag{2.11}$$

( $\underset{n\to\infty}{S_n}$ ifadesi $\lim_{n\to\infty} S_n$ i göstermektedir).

Eğer $\lim S_n = +\infty$ veya $\lim S_n = -\infty$

ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine tamamen ıraksak denir (Özer, 2005).

**Teorem 2.1.1.** Eğer her $n=1,2,...,$ için $a_n \geq 0$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak veya tamamen ıraksaktır.

**İspat.** $a_n \geq 0$ için,

$$S_1 = a_1 \leq S_2 = a_1 + a_2 \leq S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \leq ... \tag{2.12}$$

olduğundan, $S_n$ kısmi toplamlar dizisi monoton artan bir dizidir. Eğer dizi sınırlı ise, her sınırlı monoton dizi yakınsaktır teoremi gereğince yakınsaktır. Eğer dizi sınırsız ise $\lim S_n = \infty$ olacağından, seri tamamen ıraksaktır (Özer, 2005).

**Teorem 2.1.2.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serileri, toplamları sırasıyla A ve B olan yakınsak seriler ve k sabit bir sayı olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \tag{2.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n) = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = kA \tag{2.14}$$

olarak bulunur.

**İspat.** Bu seriler için kısmi toplamlar dizileri

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \; B_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n \tag{2.15}$$

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) \tag{2.16}$$

olduğundan, $S_n = A_n + B_n$ olduğu açıktır. $A_n$ kısmi toplamlar dizisi A ya ve $B_n$ kısmi toplamlar dizisi B ye yakınsadığından, $S_n$ kısmi toplamlar dizisi $A \pm B$ ye yakınsar.

Benzer şeklide $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \tag{2.17}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $S_n$ olsun.

$$S_n = kA_n = ka_1 + ka_2 + ka_3 + ... + ka_n\,, \tag{2.18}$$

$$S_n = kA_n = k\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\right) = kA \tag{2.19}$$

bulunur (Özer, 2005).

**Teorem 2.1.3.** Teorem 2.1.2. den yakınsak serilerin toplanabileceği, çıkartılabileceği,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right), \tag{2.20}$$

ve yakınsak bir serinin sabit bir sayı ile çarpılabileceği

$$k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \tag{2.21}$$

biliniyor. Bu kısımda, seriler üzerinde çarpma, gruplandırma ve yeniden (tekrar) düzenleme gibi işlemleri incelenecek. İlk önce gruplandırma işlemiyle, yani, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine parantezler ekleyerek terimlerini ayırma ile başlayalım. Örneğin, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi,

$$(a_1 + a_2) + ... + (a_{2n-1} + a_{2n}) + ... \tag{2.22}$$

serisi ile,

$b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ şeklinde bir seri ile değiştirilebilir (Özer, 2005).

**Teorem 2.1.4.** Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise, parantezler eklenerek bulunan yeni seri de yakınsaktır ve toplamı da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin toplamı ile aynıdır. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi tamamen ıraksak ise, parantezler eklenerek bulunan yeni seri de tamamen ıraksaktır.

**İspat.** Parantez ekleme işlemi bazı kısmi toplamların atlanmasına neden olacağından,

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + ... + (a_{2n-1} + a_{2n}) + ... \tag{2.23}$$

serisinin kısmi toplamları , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin

$$S_2, S_4, S_6, ..., S_{2n}, ... \tag{2.24}$$

kısmi toplamlarıdır. Eğer $S_n$ kısmi toplamlar dizisi, S limitine yakınsak ise, atlanarak elde edilen dizi de S limitine yakınsamak zorundadır. Eğer $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ise, atlanarak elde edilen dizi de $+\infty$ limitine ıraksamak zorundadır (Özer, 2005).

**Teorem 2.1.5.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsak ve bu serinin yeniden düzenlenmişi $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ serisi olsun. Bu durumda, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ serisi de mutlak yakınsaktır ve toplamı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin toplamına eşittir.

**İspat.** Yeniden düzenlenen $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ serisindeki her $b_m$ terimi, uygun n değeri ve aynı n değerine iki tane m değeri karşılık gelmemek koşuluyla, bir $a_n$ terimine eşit olduğundan,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2.25}$$

yazılabilir. Bu durumda $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ mutlak yakınsak olacak şekilde $\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$ serisi yakınsaktır. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamı ile toplamı, sırasıyla, $S_n$ ve $S$; $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ serisinin kısmı toplamı ile toplamı, sırasıyla, $S_m$ ve $S'$ olsun. Bu durumda, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olduğundan, verilmiş $\varepsilon > 0$ sayısı için $p \geq 1$ ve $n > N$ iken

$$|S_n - S| < \frac{1}{2}\varepsilon, \ |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{2.26}$$

olacak şekilde $N$ sayısı vardır. Çünkü $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $S$ limitine yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi için Cauchy kriteri sağlandığından, böyle bir $N$ sayısı her zaman bulunabilir.

Yeterince büyük m‘ ler için $S_m$, $a_1, a_2, ..., a_n$ ve belki de daha fazla terimden oluşan bir toplam olacağından, $k_1, k_2, ..., k_s$ ‘ lerin hepsi m’ den büyük olmak üzere,

$$S_m = S_n + a_{k_1} + a_{k_2} + ... + a_{k_s} \tag{2.27}$$

bulunur. Bu indislerin en büyüğü $k_0 = n + p_0$ olsun. Bu durumda,

$$|S_m - S_n| \leq |a_{k_1}| + |a_{k_2}| + ... + |a_{k_s}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p_0}| < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{2.28}$$

olduğundan,

$$|S_m - S| = |S_m - S_n + S_n - S| \leq |S_m - S_n| + |S_n - S| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \tag{2.29}$$

bulunur. Öyleyse $S_m$, $S$ limitine yakınsak olup, $S = S'$ olur. Serilerin çarpımını bulmak için bu teorem oldukça önemlidir (Özer, 2005).

**Tanım 2.1.5.** $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...)(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...)$

$$= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + ... + a_1 b_n + ... + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + ... \tag{2.30}$$

şeklinde herhangi bir özel sıralama olmaksızın $a_n b_n$ terimlerinin bir koleksiyonu bulunur. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ serileri mutlak yakınsak ise $a_n b_n$ çarpımları bir mutlak yakınsak sonsuz seri oluşturmak için yeniden düzenlenebilir. Teorem 2.1.5. den çarpımlar nasıl düzenlenirse düzenlensin, aynı sonuç ve toplam bulunacaktır. Böyle çok sayıda yeniden düzenlemeler olmasına rağmen, en çok kullanılan Cauchy çarpımı olarak bilinir ve

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + .... \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpım daha açık olarak;

$$\begin{array}{ccccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 & ... \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 & ... \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 & ... \\ a_4 b_1 & a_4 b_2 & a_4 b_3 & a_4 b_4 & ... \\ ... & ... & ... & ... & \end{array} \tag{2.32}$$

şeklinde hesaplanabilir (Özer, 2005).

**Teorem 2.1.6.** Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ mutlak yakınsak ise, bunların çarpımları bir mutlak yakınsak $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ serisini oluşturacak şekilde yeniden düzenlenebilir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \tag{2.33}$$

dir.

**İspat.** $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ serisini,

$$\begin{array}{llll}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\leftarrow a_2b_1 & \leftarrow a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \ldots \\
 & & \downarrow & \downarrow \\
\leftarrow a_3b_1 & \leftarrow a_3b_2 & \leftarrow a_3b_3 & a_3b_4 \ldots \\
 & & & \downarrow \\
\leftarrow a_4b_1 & \leftarrow a_4b_2 & \leftarrow a_4b_3 & \leftarrow a_4b_4 \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{2.34}$$

şeklinde,

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 \ldots \tag{2.35}$$

serisi olarak seçilir. Bu tanımdan, özel olarak,

$$a_1b_1 = c_1, \tag{2.36}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \tag{2.37}$$

alınarak, genelde

$$c_1 + (c_2 + c_3 + c_4) + \ldots + (\ldots + c_{n^2}) = (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \tag{2.38}$$

yazılabilir. Benzer olarak,

$$|c_1| + (|c_2| + |c_3| + |c_4|) + \ldots + (\ldots + |c_{n^2}|) = (|a_1| + \ldots + |a_n|)(|b_1| + \ldots + |b_n|) \tag{2.39}$$

bulunur.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ve $\sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$ serileri yakınsak olduklarından, bu son denklemin sol yanı $n \to \infty$ için bir limite sahiptir. Teorem 2.1.4. gereğince, parantezleri kaldırarak, $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|$

serisinin yakınsak ve dolayısıyla $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu buluruz. Bu da ispatı tamamlar (Özer, 2005).

## 2.2 Kuvvet Serileri ve Özellikleri

**Tanım 2.2.1.** $c, c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...$

'ler sabit ve x değişken olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ... \tag{2.39}$$

serisine x' in kuvvet serisi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + ... + c_n (x-a)^n + ... \tag{2.40}$$

serisine $(x-a)$' nın kuvvet serisi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [u(x)]^n = c_0 + c_1 [u(x)] + c_2 [u(x)]^2 + ... + c_n [u(x)]^n + ... \tag{2.41}$$

serisine de u(x)' in kuvvet serisi denir (Yalçınkaya, 2013).

**Örnek 2.2.1.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

**Tanım 2.2.2.** Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ kuvvet serisi verilsin. Eğer,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k {w_0}^k \tag{2.41}$$

kısmi toplamlar dizisi yakınsıyorsa, seri $w_0$ noktasında yakınsıyor denir. Eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n {w_0}^n \right| \tag{2.42}$$

serisi yakınsaksa, seri $w_0$ noktasında mutlak yakınsaktır, denir.

Eğer bir $f : S \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık tüm $n \geq n_0$ sayıları ve tüm $w \in S$ noktaları için,

$$\left|\sum a_n w^n - f(w)\right| < \varepsilon \tag{2.43}$$

olacak biçimde bir $n_0$ sayısı bulunabilirse,

$$\sum a_n w^n \tag{2.44}$$

serisi S üzerinde $f(w)$ ye düzgün (üniform) yakınsıyor, denir (Başkan, 2012).

**Örnek.2.2.2.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n!}$ serisinin mutlak yakınsak olduğu gösterilmek istendiğinde;

$$\left|\frac{(-2)^{n-1}}{n!}\right| = \frac{2^{n-1}}{n!} = a_n$$

olsun,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{(n+1)!}.\frac{n!}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{(n+1)}\right) = 0 < 1$$

olduğundan seri yakınsak, dolayısıyla seri mutlak yakınsaktır.

Kuvvet serileri aşağıdaki özelliklere sahiptir;

**1.)** Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ kuvvet serisi, eğer

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (x_1 - x_0)^n, \tag{2.45}$$

$a_0 \neq 0$ limiti varsa $x = x_1$ noktasında yakınsaktır.

**2.)** Bir kuvvet serisi, eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x_1 - x_0|^n, \; a_0 \neq 0 \tag{2.46}$$

serisi yakınsaksa, $x = x_1$ noktasında mutlak yakınsaktır.

**3.)** Her kuvvet serisi, seriyi yakınsak yapan bütün değerler kümesinden oluşan bir yakınsaklık aralığına sahiptir. Her yakınsaklık aralığı da bir $0 \leq R \leq \infty$ yakınsaklık yarıçapına sahiptir.

**4.)** Bir kuvvet serisi $|x-x_0|<R$ için mutlak yakınsak ve $|x-x_0|>R$ için ıraksaktır. $R=0$ iken yakınsaklık aralığı sadece $x_0$ sayısından oluşurken, $R=\infty$ için kuvvet serisi bütün x sayıları için yakınsaktır. $(x_0-R,x_0+R)$ aralığına, serinin yakınsaklık aralığı denir.

**5.)** Bir kuvvet serisinin mutlak yakınsaklığını belirlemek için en iyi metot "Oran Testi" dir. Eğer $a_n \neq 0$ ve her bir x değeri için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \tag{2.47}$$

ve $L<1$ ise, seri mutlak yakınsaktır. Mutlak yakınsak olan her seri yakınsaktır, fakat tersi her zaman doğru değildir. Eğer $L>1$ ise, seri ıraksak ve eğer $L=1$ ise, test bir durum belirtmez.

**6.)** Bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \tag{2.48}$$

veya

$$R\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.49}$$

olarak belirlendiğinden, $|x-x_0|<R$ eşitsizliğini sağlayan x değerleri için kuvvet serisi yakınsaktır.

**7.)** Eğer yakınsaklık aralığındaki her x sayısı için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0 \tag{2.50}$$

ise, her n için $a_n = 0$ olmalıdır.

**8.)** Bir kuvvet serisi yakınsaklık aralığında sürekli bir f fonksiyonuyla temsil edilir ve bu aralıktaki her bir x noktasındaki $f(x)$ değeri serinin noktadaki toplamıdır.

**9.)** $|x-x_0|<R$ iken

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,\ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n \tag{2.51}$$

olsun. Bu durumda her k reel sayısı için

$$kf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}ka_n(x-x_0)^n, \tag{2.52}$$

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm d_n)(x-x_0)^n \tag{2.53}$$

ve

$$b_n=a_0d_n+a_1d_{n-1}+...+a_nd_0=\sum_{k=0}^{\infty}a_kd_{n-k}=\sum_{k=0}^{\infty}d_ka_{n-k} \tag{2.54}$$

olmak üzere;

$$f(x).g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n \tag{2.55}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca eğer $g(x_0)\neq 0$ ise,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n \tag{2.56}$$

şeklinde seriler bölünebilir. $d_n$ katsayıları,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}d_kb_{n-k}\right)(x-x_0)^n \tag{2.57}$$

özdeşlik bağıntısındaki katsayıları eşitleyerek kolayca bulunabilir.

**10.)** $|x-x_0|<R$ iken

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{2.58}$$

ise, $f(x)$ fonksiyonu $(x_0-R,x_0+R)$ yakınsaklık aralığında terim terim türevlenebilir ve integrallenebilir. Bunlar sırasıyla,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}, \tag{2.59}$$

$$\int_a^x f(u)du=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \tag{2.60}$$

şeklinde tanımlanır (Özer, 2005).

## 2.3 Fonksiyonların Seriye Açılımı

$y = f(x)$ az veya çok karmaşık bir fonksiyon olsun. x' in verilmiş farklı nümerik değerleri için $f(x)$' in değerlerini hesaplamak, genel olarak zahmetli ve zaman alır.

Örneğin,

$$y = \frac{1}{a}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right); \tag{2.61}$$

$$y = \text{Arctan}\,\frac{1}{1+e^{x}}; \tag{2.62}$$

$$y = \sqrt{1+\sin^2 x} \tag{2.63}$$

fonksiyonlarının x' in verilmiş bir değerine karşılık olan değerini doğrudan doğruya hesaplamak çok zordur.

Aynı şekilde olasılık teorisinde çok karşılaşılan

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx \tag{2.64}$$

integrali, adi fonksiyonlar yardımıyla hesaplanamaz.

Halbuki fonksiyonları çok daha basit şekillere sokmak suretiyle, değerlerini küçük yaklaşıklıklarla bu ifadelerden hesaplamak mümkündür. Fonksiyonların seriye açılımı bu yöntemlerden biridir. Bu sayede $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$'i veren trigonometrik oran tabloları gibi birçok tabloların meydana getirilmesi mümkün olmuştur.

Bir fonksiyon, bağımsız değişkenin yakınsaklık aralığındaki değerleri için, bir kuvvet serisi ile gösterilebilir. Bağımsız değişkenin verilen bir değeri için, fonksiyonun yaklaşık bir değeri, serinin baştan az sayıda terimleri kullanılarak hesaplanabilir. Fonksiyonların seriye açılımları Taylor ve Maclaurin serileri adı verilen iki tür seri yardımıyla yapılır (Karadeniz, 2007).

### 2.3.1. Taylor serisi

$f(x)$ fonksiyonunu $x-a$' nın artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir kuvvet serisi ile gösterilir ise,

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+b_3(x-a)^3+b_4(x-a)^4+... \quad (2.65)$$

olsun. Şimdi bu eşitliğin doğru olması için $b_i$ katsayılarının neler olması gerektiğini araştıralım. Bunun için de yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevlerini eşitleyelim. Buna göre

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+b_3(x-a)^3+b_4(x-a)^4+... \quad (2.66)$$

$$f'(x)=b_1+2b_2(x-a)+3b_3(x-a)^2+4b_4(x-a)^3+5b_5(x-a)^4+... \quad (2.67)$$

$$f''(x)=1.2b_2+2.3b_3(x-a)+3.4b_4(x-a)^2+4.5b_5(x-a)^3+... \quad (2.68)$$

$$f'''(x)=1.2.3b_3+2.3.4b_4(x-a)+3.4.5b_5(x-a)^2+... \quad (2.69)$$

$$f^{(4)}(x)=1.2.3.4b_4(x-a)+2.3.4.5b_5(x-a)+... \quad (2.70)$$

…

…

ve bunlarda $x=a$ yapılırsa;

$$f(a)=b_0 \qquad b_0=f(a) \quad (2.71)$$

$$f'(a)=b_1 \qquad b_1=\frac{1}{1!}f'(a) \quad (2.72)$$

$$f''(a)=1.2b_2 \qquad b_2=\frac{1}{2!}f''(a) \quad (2.73)$$

$$f'''(a)=1.2.3b_3 \qquad b_3=\frac{1}{3!}f'''(a) \quad (2.74)$$

… …

… …

$$f^{(n)}(a)=1.2.3.4...nb_n \qquad b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) \quad (2.75)$$

… …

… …

elde edilir. Bunlar $f(x)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+... \quad (2.76)$$

bulunur, ki bu seriye de $f(x)$ ‘in $x-a$ ‘ nın kuvvetlerine göre düzenlenmiş Taylor serisi denir.

$f(x)$ fonksiyonunun böyle bir Taylor serisine açılabilmesi için $f(x)$ ve türevlerinin $x=a$ için tanımlı ve sürekli olması gerekmektedir.

Taylor serisi, $f(x)$’ i, x’ in yakınsaklık aralığındaki değerleri için temsil eder.

Zorunlu olmamakla beraber Taylor serisi $f(x)$ ‘ in x’ in a civarındaki değerlerine karşılık olan değerlerinin hesabında kullanılmalıdır. Yukarıda elde edilen Taylor serisinde $x=b$ yapılırsa;

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\ldots \tag{2.77}$$

ve bu seride $b=a+h$ yapılırsa;

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(h)+\frac{f''(a)}{2!}(h)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(h)^n+\ldots \tag{2.78}$$

elde edilir (Karadeniz, 2007).

**Örnek 2.3.1.**

$e^x$ fonksiyonunu $x-1$’ in artan kuvvetlerine göre seriye açıldığında;

$f(x)=e^x$ $\qquad$ $f(1)=e$

$f'(x)=e^x$ $\qquad$ $f'(1)=e$

$f''(x)=e^x$ $\qquad$ $f''(1)=e$

…

olarak,

$$e^x=e\left[1+\frac{x-1}{1!}+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\ldots\right]$$

elde edilir.

### 2.3.2. Maclaurin serisi

Maclaurin XVII. Yüzyılda yaşamış bir matematikçi olup, bir fonksiyonun, bağımsız değişkeninin artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir tam çok terimli ile gösterilmesi fikrini ortaya atmıştır.

Bu şekilde bir ifadeden yapılacak hesaplama, hiç şüphesiz çok kolay olacaktır. Zira, x‘ in verilmiş bir değerinden fonksiyon değerinin hesaplamak için $ax^m$ şeklindeki terimleri hesaplayıp toplamak gerekecektir ki bu da en basit hesaplama şeklidir.

Bunun mümkün olabilmesi için, çok terimlinin terimleri, mutlak değer bakımından, gittikçe küçülmeli ve toplamları sonsuz olmamalı yani seri yakınsak olmalıdır.

Maclaurin serisi elde etmek üzere $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... \qquad (2.79)$$

şeklinde ifade etmek isteyelim. Şimdi de bu açılımın mümkün olabilmesi için $a_i$’ lerin neler olduğunu araştıralım. Bunun için ifadenin kendisi ve türevleri yazılır.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ... \qquad (2.80)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + ... \qquad (2.81)$$

$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3 x + 3.4a_4 x^2 + ... \qquad (2.82)$$

$$f'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + ... \qquad (2.83)$$

$$f^{(4)}(x) = 1.2.3.4a_4 + ... \qquad (2.84)$$

…

…

şimdi de $x = 0$ için bu eşitliklerin alacağı değerler bulunursa;

$$f(0) = a_0, \qquad a_0 = f(0) \qquad (2.85)$$

$$f'(0) = a_1, \qquad a_1 = \frac{1}{1!} f'(0) \qquad (2.86)$$

$$f''(0) = 1.2a_2, \qquad a_2 = \frac{1}{2!} f''(0) \qquad (2.87)$$

$$f'''(0) = 1.2.3a_3, \qquad a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) \qquad (2.88)$$

$f^{(4)}(0) = 1.2.3.4a_4,$ $\qquad a_4 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(0) \qquad (2.89)$

… …

$f^{(n)}(0) = 1.2.3....na_n$ $\qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \qquad (2.90)$

… …

elde edilir. Bu değerler "Eş. 2.79" ifadesinde yerine yazıldığında;

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + ... \qquad (2.91)$$

sonucuna varılır ki bu ifadeye $f(x)$' in Maclaurin serisi denir. Bu ifadeden kolayca görülebilir ki, $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisine açılabilmesi için $f(x)$ ve türevlerinin $x = 0$ için tanımlı ve sürekli olması gerekir.

Maclaurin serisi, $f(x)$'i, x' in yakınsaklık aralığı içindeki değerleri için temsil etmekle beraber, bu seri, $f(x)$' in x' in sıfır civarındaki değerlerine karşılık olan değerlerinin hesabında kullanılmalıdır (Karadeniz, 2007).

**Örnek 2.3.2.** $y = e^x$ fonksiyonunu Maclaurin serisine açıldığında;

$f(x) = e^x$ $\qquad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x$ $\qquad f'(0) = e^0 = 1$

… …

$f^{(n)}(x) = e^x$ $\qquad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

olduğundan ,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

bulunur.

### 2.3.3. Binom formülü

$(a+b)^m$ veya $(a-b)^m$' in açılımını veren formülü bulmak isteyelim. Burada m pozitif, negatif, tam veya kesirli bir sayı olarak kabul edilir. Bunu elde etmek üzere $y=(a+x)^m$ fonksiyonu Maclaurin serisine açılır.

$$f(x)=(a+x)^m \qquad f(0)=(a)^m \tag{2.92}$$

$$f'(x)=m(a+x)^{m-1} \qquad f'(0)=m(a)^{m-1} \tag{2.93}$$

$$f''(x)=m(m-1)(a+x)^{m-2} \qquad f''(0)=m(m-1)(a)^{m-2} \tag{2.94}$$

$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3} \qquad f'''(0)=m(m-1)(m-2)(a)^{m-3} \tag{2.95}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$(a+x)^m=a^m+\frac{m}{1!}a^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}x^3+\ldots \tag{2.96}$$

bulunur. Bu açılımda $x=b$ yapılırsa Newton' un Binom formülü elde edilir. Buna göre

$$(a+b)^m=a^m+\frac{m}{1!}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}b^3+\ldots \tag{2.97}$$

elde edilir.

$(a-b)^m$'i elde etmek için yukarıdaki formülde işaretleri alternatif olarak + ve − yapmak gerekir.

m tam ve pozitif olursa açılımda $m+1$ terim bulunur, diğer hallerde açılımda sonsuz terim bulunur.

Açılımın herhangi bir r numaralı terimi,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+2)}{(r-1)!}a^{m-r+1}b^{r-1} \tag{2.98}$$

dir (Karadeniz, 2007).

**Örnek 2.3.3.** $\sqrt[3]{1+x}$ 'i binom formülüyle açıldığında;

$$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{1}{3}.1.x+\frac{1}{2!}.\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)x^2+\frac{1}{3!}.\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)x^3+...$$

$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+...$ bulunur.

## 2.4 Kuvvet Serilerinde Aritmetik İşlemler

### 2.4.1. Kuvvet serilerinde toplama-çıkarma işlemi

Yakınsaklık yarıçapları sırasıyla $R_a$ ve $R_b$ olan,

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...,\ \sigma(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n+... \qquad (2.99)$$

kuvvet serileri verilmiş olsun.

Sayı serilerine benzer olarak, kuvvet serilerinin toplamı ve farkı, sırasıyla

$$s(x)+\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n \qquad \left(|x|<R=\min\{R_a,R_b\}\right) \qquad (2.100)$$

ve

$$s(x)-\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n \qquad \left(|x|<R=\min\{R_a,R_b\}\right) \qquad (2.101)$$

dir.(Hacısalihoğlu ve Halilov, 2009).

**Örnek 2.4.1** $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$ ve $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

serilerini ele alalım. $f(x)$ in yakınsaklık aralığı (-1,1], $g(x)$ in yakınsaklık aralığı ise [-1,1) dir.

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{5}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}+...$$

ve

$$g(x)=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+...+\frac{x^n}{n+1}+...$$

olup

$$f(x)+g(x)=2\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^5}{6}+...+\frac{x^{2n}}{2n}+...\right)$$

dir. Şimdi $f(x)+g(x)$ in yakınsaklık aralığını belirleyelim:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+2}}{2n+2}}{\frac{x^{2n}}{2n}}\right|=\left|x^2\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n}{2n+2}\right|=\left|x^2\right|=x^2$$

olduğundan verilen seri $x^2<1$ yani $-1<x<1$ için yakınsaktır. Ayrıca verilen seri $x=-1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

şeklinde olup ıraksaktır. x=1 için de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

şeklinde olup yine ıraksaktır. Bu durumda serinin yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ dir. Yani $f(x)+g(x)$in yakınsaklık aralığı $f(x)$ ve $g(x)$ serilerinin ortak yakınsaklık aralığına eşittir.

### 2.4.2. Kuvvet serilerinde çarpma işlemi

Yakınsaklık yarıçapları sırasıyla $R_a$ ve $R_b$ olan,

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \tag{2.102}$$

ve

$$\sigma(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n+... \tag{2.103}$$

kuvvet serileri verilmiş olsun. Bu serilerin çarpımı sayı serilerinde olduğu gibi,

$$s(x).\sigma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}a_ib_j\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+...+a_nb_0\right)x^n \tag{2.104}$$

$$\left(|x|<R=\min\{R_a,R_b\}\right)$$

şeklinde tanımlanır. “Eş. 2.100”, “Eş. 2.101” ve “Eş. 2.104” deki serilerinin $(-R,R)$ aralığında mutlak yakınsaklığı açıktır (sözü edilen aralıkta “Eş. 2.98” ve “Eş. 2.99” serileri mutlak yakınsak olduğundan).

“Eş. 2.98” ve “Eş. 2.99” serilerinin çarpımını, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ olarak yazabilir, “Eş. 2.104” göre, $c_n$ ’ ler için

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{2.105}$$

formülünü yazabiliriz (Hacısalihoğlu ve Halilov, 2009).

**Örnek 2.4.2** $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ve $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}$

serilerini ele alalım.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

ve

$$g(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots$$

olup

$$f(x).g(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n-2} + \ldots$$

şeklindedir.

### 2.4.3. Kuvvet serilerinde bölme işlemi

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{2.106}$$

serisinin

$$\sigma(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots \tag{2.107}$$

serisine bölümü, $b_0 \neq 0$ durumunda, yeteri kadar küçük $|x|$ ’ ler için,

$$\frac{s(x)}{\sigma(x)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \tag{2.108}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu serinin $p_n\,(n=0,1,2,...)$ katsayıları, belirsiz katsayılar yöntemi ile,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}b_ip_j\right)x^n \tag{2.109}$$

eşitliğinden, yani,

$$a_n=b_0p_n+b_1p_{n-1}+b_2p_{n-2}+...+b_np_0 \qquad (n=0,1,2,...) \tag{2.110}$$

eşitliklerinden belirlenir.

Gerçekten, $p_n$ katsayıları için "Eş. 2.110" eşitliğinden, $n=0,1,2,...$ değerlerinde, ardışık olarak,

$$a_0=b_0p_0\Rightarrow p_0=\frac{a_0}{b_0}, \tag{2.111}$$

$$a_1=b_0p_1+b_1p_0\Rightarrow p_1=\frac{1}{b_0}\left(a_1-\frac{a_0b_1}{b_0}\right), \tag{2.112}$$

$$a_2=b_0p_2+b_1p_1+b_2p_0\Rightarrow p_2=\frac{1}{b_0}\left(a_2-\frac{a_1b_1}{b_0}-\frac{a_0b_2}{b_0}+\frac{a_0b_1^{\,2}}{b_0^{\,2}}\right) \tag{2.113}$$

vs. bulunur.

Bölüm serisinin $p_n$ katsayıları, çokterimlilerin bölünme kuralına benzer olarak, "Eş. 2.106" serisini "Eş. 2.107" serisine bölerek de bulunabilir (Hacısalihoğlu ve Halilov, 2009).

**Örnek 2.4.3.** $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+...$

$g(x)=\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...$ olsun, $f(x)$ i $g(x)$ e bölelim.

$$\frac{1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+...}{1-x+x^2-x^3+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...}=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$$

$$1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+...=\left(1-x+x^2-x^3+...+(-1)^{n-1}x^{n-1}+...\right)\sum_{n=0}^{\infty}P_nx^n$$

$$a_n=b_0p_n+b_1p_{n-1}+b_2p_{n-2}+...+b_np_0$$

$$a_0=b_0p_0 \qquad 1=1.p_0 \qquad p_0=1$$

$$a_1=b_0p_1+b_1p_0 \qquad 1=1.p_1+(-1).1 \qquad p_1=2$$

$$a_2=b_0p_2+b_1p_1+b_2p_0 \qquad 1=1.p_2+(-1).2+1.1 \qquad p_2=2$$

$$a_3=b_0p_3+b_1p_2+b_2p_1+b_3p_0 \qquad 1=1.p_3+(-1).2+1.2+(-1).1 \qquad p_3=2$$

$\dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n=p_0x^0+p_1x^1+p_2x^2+p_3x^3+...p_nx^n+...$$

$$=1.x^0+2.x^1+2.x^2+2.x^3+...p_nx^n+...$$

$$=1+2x^1+2x^2+2x^3+...+p_nx^n+..$$

## 2.5 Kuvvet Serisinin Tersi

**Tanım 2.5.1.** $f=\sum a_nT^n$ bir kuvvet serisi olsun. Eğer, f.g=1 olacak şekilde bir $g=\sum b_nT^n$ serisi mevcutsa, bu g kuvvet serisine f' nin inversi (tersi) denir.

Bu tanımlara göre belirtmeliyiz ki, eğer bir ters kuvvet serisi mevcutsa der f=der g=0 yazabiliriz. Başka bir deyişle, f ve g kuvvet serileri sabit terimle başlamaktadır. Bu düşüncenin tersi de doğrudur. Yani, sabit terimle (sıfırdan farklı) başlayan her kuvvet serisinin tersi mevcuttur. Çünkü, f yerine $a_0f^{-1}$ kuvvet serisinin düşünürsek bu seri 1 sabit terimi ile başlar. Buna göre şunu da belirtelim ki, bütün geometrik seriler formal bir inverse sahiptirler.

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+....+r^n+... \tag{2.114}$$

$$(1-r)\left(1+r+r^2+....+r^n+...\right)=1+r+r^2+...(-r)\left(1+r+r^2+...\right) \tag{2.115}$$

$$=1+r+r^2+....-r-r^2-r^3-... \quad (2.116)$$

=1

Şimdi

$$f=1-h \quad (2.117)$$

ve

$$h=-\left(a_1T+a_2T^2+a_3T^3+...\right) \quad (2.118)$$

alalım. O zaman $\left(1-h\right)^{-1}$ ‘i yani inversi (tersi) bulmak kolaydır. Şöyle ki,

$$1+h+h^2+h^3+.... \quad (2.119)$$

şeklinde bir kuvvet serisidir.

$$\left(1-h\right)\varphi=\left(1-h\right)\left(1+h+h^2+...\right) \quad (2.120)$$

$$\left(1-h\right)\varphi=1 \quad (2.121)$$

olacaktır. Böylece f’ nin istenen inversini (tersini) bulunmuş olur.

F(T) serisinin tersi ,

g(T).f(T)=1

ile belirlenir ve

$$g\left(T\right)=\frac{1}{f\left(T\right)}=\frac{1}{a_0+a_1T+a_2T^2+...}=\frac{1}{a_0}\frac{1}{1-\left(-\frac{a_1}{a_0}T-\frac{a_2}{a_0}T^2-...\right)} \quad (2.122)$$

$$g\left(T\right)=\frac{1}{a_0}.\frac{1}{1-h}=\frac{1}{a_0}\left(1+h+h^2+...\right) \quad (2.123)$$

olur. Yani, f(T)’ nin tersi,

$$\varphi\left(h\right)=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_0}h+\frac{1}{a_0}h^2+... \quad (2.124)$$

serisinde

$$h=-\frac{a_1}{a_0}T-\frac{a_2}{a_0}T^2-... \quad (2.125)$$

yazılmasıyla ile elde edilir (Ocak, 1986).

**Örnek 2.5.1.** $\left(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+...+nx^{n-1}+...\right)$

kuvvet serisinin tersini

$$\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + ... + p_nx^{n-1} + ...\right)$$

olsun

$$\left(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+...+nx^{n-1}+...\right).\left(p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + ... + p_nx^{n-1} + ...\right)=1$$

$$a_n = b_0p_n + b_1p_{n-1} + b_2p_{n-2} + ... + b_np_0$$

| | | |
|---|---|---|
| $a_0 = b_0p_0$ | $1 = 1.p_0$ | $p_0 = 1$ |
| $a_1 = b_0p_1 + b_1p_0$ | $0 = 1.p_1 + 2.1$ | $p_1 = -2$ |
| $a_2 = b_0p_2 + b_1p_1 + b_2p_0$ | $0 = 1.p_2 + 2.(-2) + 3.1$ | $p_2 = 1$ |
| $a_3 = b_0p_3 + b_1p_2 + b_2p_1 + b_3p_0$ | $0 = 1.p_3 + 2.1 + 3.(-2) + 4.1$ | $p_3 = 0$ |
| $a_4 = b_0p_4 + b_1p_3 + b_2p_2 + b_3p_1 + b_4p_0$ | $0 = 1.p_4 + 2.0 + 3.1 + 4.(-2) + 5.1$ | $p_4 = 0$ |

…

şeklinde devam edilirse diğer katsayılar da sıfır bulunacaktır.

$$\left(1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}+...\right)$$

serisinin tersi olan seri

$$\left(1-2x+x^2\right)$$

bulunur.

## 2.6. Gamma ve Beta Fonksiyonları

### 2.6.1.Gamma fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{2.126}$$

genelleştirmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Şöyle ki,

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ut}dt = \frac{1}{u} \tag{2.127}$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. $c>0$ olmak üzere bu integral her $c \le u \le d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. “Eş. 2.127” den u ya göre türevler alarak devam ettiğimizde n. türev için;

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^\infty t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}} \tag{2.128}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte u=1 alındığında;

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! = \int_0^\infty t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(n+1) \tag{2.129}$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n’ nin $n>-1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $x>-1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1) \tag{2.130}$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki, -1 den büyük tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gamma fonksiyonu genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılır. $x=0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -(0-1) = 1 \tag{2.131}$$

dir. Bu sonuç 0!‘in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar. Elementer matematikte n faktöriyel,

$$n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1 \tag{2.132}$$

çarpımı ile verilir. Bu özellik,

$$n! = n(n-1)! \tag{2.133}$$

eşitliğini içerdiğine göre, eğer $x=n$ bir tamsayı ise,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n) \tag{2.134}$$

yazılabilir.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt = \underbrace{\lim\left(-t^x e^{-t}\right)\Big|^b}_{0} + x\int^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x) \tag{2.135}$$

olduğundan $\Gamma$ fonksiyonu

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.136}$$

eşitliğini tüm x>0 değerleri için gerçekler. Bu özellik yardımıyla Gamma fonksiyonu için argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçlarının bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanabilir (Yağmur, 2010).

**Örnek 2.6.1.** $\Gamma(4) = 3! = 3.2.1 = 6$

### 2.6.2. Beta fonksiyonu

$B(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,;\ \operatorname{Re}(x) > 0,\ \operatorname{Re}(y) > 0 \tag{2.137}$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta \tag{2.138}$$

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \tag{2.139}$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.140}$$

biçimlerinde de ifade edilir.

“Eş. 2.137” de $t = \sin^2\theta$ alınırsa “Eş. 2.138”; $t = \dfrac{u}{1+u}$ alınırsa, “Eş. 2.139” elde edilir. “Eş. 2.140” de Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi verilmiştir. Bunu görmek için $\Gamma(x)$ in tanımlandığı integralde $t = s^2$ dönüşümü yapıldığında;

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds \tag{2.141}$$

olur. $\Gamma(x)$ in bu ifadesinden dolayı

$$\Gamma(y)=2\int_{0}^{\infty}t^{2y-1}e^{-t^{2}}dt \tag{2.142}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\Gamma(x).\Gamma(y)=4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}s^{2x-1}t^{2y-1}e^{-\left(s^{2}+t^{2}\right)}dtds \tag{2.143}$$

olup,

$$s=r\cos\theta,\ t=r\sin\theta \tag{2.144}$$

kutupsal koordinatlarına geçildiğinde,

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty}r^{2(x+y)-2}e^{-r^{2}}\left(\cos\theta\right)^{2x-1}\left(\sin\theta\right)^{2y-1}rdrd\theta \tag{2.145}$$

$$=\left(2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\right)^{2x-1}\left(\sin\theta\right)^{2y-1}d\theta\right)\left(2\int_{0}^{\infty}r^{2(x+y)-1}e^{-r^{2}}dr\right) \tag{2.146}$$

$$=\mathrm{B}(x,y)\Gamma(x+y) \tag{2.147}$$

bulunur. Bu ise istenilendir. Ayrıca “Eş. 2.140” den görülmektedir ki,

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x) \tag{2.148}$$

olup bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özeliği olarak adlandırılır (Rainville, 1973).

**Örnek 2.6.2.** $B(3,2)=\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(3+2)}=\dfrac{2!.3!}{4!}=\dfrac{1}{2}$

**Tanım 2.6.1** $\lambda$ reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\lambda)_n$ ifadesi

$$(\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+n-1) \tag{2.149}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade ‘Pochhammer sembolü’ olarak bilinir (Şahin, 2010).

**Örnek 2.6.3** $(5)_3=5.6.7=210$

**Lemma (önteorem) 2.6.1.** Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} \tag{2.150}$$

$$(\lambda)_{n+1} = \lambda(\lambda+1)_n \tag{2.151}$$

**İspat.** "Eş. 2.136" kullanılarak $\Gamma(\lambda+n)$ ifadesi

$$\Gamma(\lambda+n) = (\lambda+n-1)\Gamma(\lambda+n-1) \tag{2.152}$$

$$= (\lambda+n-1)(\lambda+n-2)\Gamma(\lambda+n-2) \tag{2.153}$$

$$= (\lambda+n-1)(\lambda+n-2)...(\lambda+1)\lambda\Gamma(\lambda) \tag{2.154}$$

$$= (\lambda)_n\Gamma(\lambda) \tag{2.155}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(\lambda)$ ile bölünürse "Eş. 2.150" ifadesi elde edilir. "Eş. 2.151" ise

$$(\lambda)_{n+1} = \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda\Gamma(\lambda+n+1)}{\lambda\Gamma(\lambda)} = \lambda\frac{\Gamma((\lambda+1)+n)}{\Gamma(\lambda+1)} = \lambda(\lambda+1)_n \tag{2.156}$$

den görülmektedir. Özel olarak "Eş. 2.150" de $n=0$ alındığında $(\lambda)_0 = 1$ dir (Şahin, 2010).

**Örnek 2.6.4.** $(5)_3 = \dfrac{\Gamma(5+3)}{\Gamma(5)} = \dfrac{\Gamma(8)}{\Gamma(5)} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7.6.5 = 210$

**Lemma (önteorem) 2.6.2.** $(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\alpha)_n}{n!}x^n$ , $|x|<1$ (2.157)

dir.

**İspat.** "Eş. 2.157" ü ispat etmek için

$$f(x) = (1-x)^{-\alpha} \tag{2.158}$$

fonksiyonunu x = 0 noktası komşuluğunda Taylor serisine (Maclaurin serisi) açmak yeterlidir. $\alpha \in \mathbb{Z}$ olması halinde "Eş. 2.157" sonlu binom açılımıdır (Şahin, 2010).

**Örnek 2.6.5.** $x=\frac{1}{2}$, $\alpha=2$

için,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2)_n\,x^n}{n!}=A$$

olsun.

$$=\frac{(2)_0\,x^0}{0!}+\frac{(2)_1\,x^1}{1!}+\frac{(2)_2\,x^2}{2!}+\frac{(2)_3\,x^3}{3!}+\frac{(2)_4\,x^4}{4!}+\ldots$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{2.x}{1}+\frac{2.3.x^2}{2}+\frac{2.3.4.x^3}{3.2}+\frac{2.3.4.5.x^4}{4.3.2}+\ldots$$

$$A=1+2.x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots+n.x^{n-1}$$

$$Ax=1x+2.x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\ldots+n.x^n$$

$$A-Ax=A(1-x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots+x^n$$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ için x!in sonsuzuncu kuvveti sıfır olduğundan

$$A(1-x)=\frac{1-\cancel{x^{n+1}}}{1-x}$$

$$A=\frac{1}{(1-x)^2},$$

olup, bu ifadede

$$x=\frac{1}{2}$$

değeri yerine yazıldığında,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$4=4$$

elde edilir.

## 2.7. Hipergeometrik Seriler ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

$\alpha$, $\beta$ ve $\gamma$ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\dots \tag{2.159}$$

olarak ifade edilen seriye Gauss hipergeometrik serisi veya hipergeometrik seri denir. “Eş. 2.159” ifadesi

$1+x+x^2+\dots$

geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan bu adı alır. “Eş. 2.159” den görülmektedir ki $\gamma$ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. “Eş. 2.159” hipergeometrik serisi $|x|<1$ için yakınsak, $|x|>1$ için ıraksaktır. $|x|=1$ olduğu zaman $\gamma>\alpha+\beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $x=-1$ iken $\gamma>\alpha+\beta-1$ ise seri yakınsaktır. “Eş. 2.149” gösterimi dikkate alınarak “Eş. 2.159” hipergeometrik serisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$${}_2F_1=(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{2.160}$$

“Eş. 2.160” de görülen F’ nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F’ nin yapısında biri $\alpha$ ve $\beta$ diğeri $\gamma$ olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. “Eş. 2.160” in genelleştirilmiş ifadesi

$${}_pF_q=(\alpha_1,\dots,\alpha_p;\gamma_1,\dots,\gamma_q;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\cdots(\gamma_q)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{2.161}$$

dir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine F gösterimi de kullanılır. Yani

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\alpha,\beta;\gamma;x) \tag{2.162}$$

olup, bu fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyonu veya hipergeometrik fonksiyon olarak bilinir (Srivastava ve Karlsson, 1985).

**Lemma (önteorem) 2.7.1.** ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ fonksiyonu

$$ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;x\right)=\frac{1}{B\left(\beta,\gamma-\beta\right)}\int_0^1 u^{\beta-1}\left(1-u\right)^{\gamma-\beta-1}\left(1-ux\right)^{-\alpha}du \tag{2.163} $$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

**İspat.** Beta fonksiyonun

$$ B\left(x,y\right)=\int_0^1 u^{x-1}\left(1-u\right)^{y-1}du \tag{2.164} $$

tanımından ve Pochhammer sembolünün özelliklerinden dolayı

$$ \frac{\left(\beta\right)_n}{\left(\gamma\right)_n}=\frac{B\left(\beta+n,\gamma-\beta\right)}{B\left(\beta,\gamma-\beta\right)}=\frac{1}{B\left(\beta,\gamma-\beta\right)}\int_0^1 u^{\beta+n-1}\left(1-u\right)^{\gamma-\beta-1}du \tag{2.165} $$

yazılabilir. Buradan, "Eş. 2.165" ifadesi "Eş. 2.161" de yerine yazılırsa

$$ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;x\right)=\frac{1}{B\left(\beta,\gamma-\beta\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_n}{n!}x^n\int_0^1 u^{\beta+n-1}\left(1-u\right)^{\gamma-\beta-1}du \tag{2.166} $$

olur. Seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirdiğinde

$$ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;x\right)=\frac{1}{B\left(\beta,\gamma-\beta\right)}\int_0^1 u^{\beta-1}\left(1-u\right)^{\gamma-\beta-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_n}{n!}\left(ux\right)^n\right\}du \tag{2.167} $$

elde edilir. Diğer taraftan "Eş. 2.157" den

$$ \left(1-ux\right)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_n}{n!}\left(ux\right)^n \tag{2.168} $$

olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Hipergeometrik fonksiyonun bir integral gösterimini veren bu formül $|x|<1$ ve $\alpha>\beta>0$ için geçerlidir (Şahin, 2010).

**Lemma (önteorem) 2.7.2.** $\mathrm{Re}\left(\gamma-\alpha-\beta\right)>0$ için,

$$ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;1\right)=\frac{\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\gamma-\beta-\alpha\right)}{\Gamma\left(\gamma-\alpha\right)\Gamma\left(\gamma-\beta\right)}=\frac{B\left(\beta,\gamma-\alpha-\beta\right)}{B\left(\beta,\gamma-\beta\right)} \tag{2.169} $$

dir (Bailey, 1964).

**Örnek 2.7.1.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=7$ için

$$ {}_2F_1(2,3;7;1)=\frac{\Gamma(7)\Gamma(7-3-2)}{\Gamma(7-2)\Gamma(7-3)}=\frac{B(3,7-2-3)}{B(3,7-3)} $$

$$ =\frac{\Gamma(7)\Gamma(2)}{\Gamma(5)\Gamma(4)}=\frac{B(3,2)}{B(3,4)} $$

$$ =\frac{\Gamma(7)\Gamma(2)}{\Gamma(5)\Gamma(4)}=\frac{\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)}}{\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)}} $$

$$ =\frac{6!.1!}{4!.3!}=\frac{\frac{2!.1!}{4!}}{\frac{2!.3!}{6!}} $$

$$ =\frac{\cancel{6}.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}.\cancel{3!}}=\frac{\cancel{2!}.1!}{\cancel{4!}}.\frac{\cancel{6}.5.\cancel{4!}}{\cancel{2!}.\cancel{3!}} $$

$=5=5$ bulunur.

**Lemma (önteorem) 2.7.3.**

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k) \tag{2.170} $$

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+k) \tag{2.171} $$

eşitlikleri geçerlidir (Rainville, 1973).

**Lemma (önteorem) 2.7.4.** $|x|<\frac{1}{2}$ için,

$$ {}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x)=(1-x)^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;-\frac{x}{1-x}\right) \tag{2.172} $$

dir.

**İspat.** "Eş. 2.172" nin sağ tarafındaki ifade

$$ (1-x)^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;-\frac{x}{1-x}\right)=(1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n\,n!}(-1)^n x^n(1-x)^{-n} \tag{2.173} $$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n x^n (1-x)^{-(\alpha+n)} \tag{2.174}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n x^n \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_r}{r!}x^r \tag{2.175}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_r}{r!}x^{n+r} \tag{2.176}$$

şeklinde yazılabilir. "Eş. 2.170" i göz önüne alınarak r yerine $r-n$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, son ifadenin eşiti

$$=\sum_{n=0}^{r}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_{r-n}}{(r-n)!}x^r \tag{2.177}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{r}\frac{(\alpha)_n(\alpha)_r(\beta)_n(-1)^n}{(\alpha)_n(\gamma)_n n!}\frac{(-r)_n(-1)^n}{r!}x^r \tag{2.178}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}\sum_{n=0}^{r}\frac{(-r)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^r \tag{2.179}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}\,{}_2F_1(-r,\beta;\gamma;1)x^r \tag{2.180}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta+r)}{\Gamma(\gamma+r)\Gamma(\gamma-\beta)}x^r \tag{2.181}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\gamma-\beta)_r}{(\gamma)_r r!}x^r \tag{2.182}$$

$$={}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x) \tag{2.183}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar (Şahin, 2010).

**Lemma (önteorem) 2.7.5.** n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\alpha)_{-n}=\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}=\frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n} \tag{2.184}$$

şeklinde tanımlanır (Horn, 1931).

**Örnek 2.7.2.** $(5)_{-3} = \dfrac{(-1)^3}{(1-5)_3}$

$$\frac{1}{(5-1)(5-2)(5-3)} = \frac{-1}{(-4)(-3)(-2)}$$

$$\frac{1}{4.3.2} = \frac{-1}{-24}$$

**Lemma (önteorem) 2.7.6.**

$$(\alpha)_{2r} = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)_r \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)_r \left(2^2\right)^r \tag{2.185}$$

dir (Bailey, 1964).

**Örnek 2.7.3.** $\alpha = 6$, $r = 2$ için

$$(6)_{2.2} = \left(\frac{1}{2}.6\right)_2 \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.6\right)_2 \left(2^2\right)^2 = (3)_2 \left(\frac{7}{2}\right)_2 (4)^2$$

$$6.7.8.9 = (3.4)\left(\frac{7}{2}.\frac{9}{2}\right).16$$

$$6.7.8.9 = 12.\frac{7.9}{\cancel{4}}.\cancel{16}$$

$$6.7.8.9 = 12.7.9.4$$

olur.

**Lemma (önteorem) 2.7.7.** $n \geq r$ için

$$(\alpha + r)_{n-r} = \frac{(\alpha)_n}{(\alpha)_r} \tag{2.186}$$

dir (Slater, 1985).

**Örnek 2.7.4.** $\alpha = 5, r = 2, n = 4$ için

$$(5+2)_{4-2} = \frac{(5)_4}{(5)_2}$$

$$(7)_2 = \frac{(5)_4}{(5)_2}$$

$$(7)(7+1) = \frac{(5)(5+1)(5+2)(5+3)}{(5)(5+1)}$$

$$7.8 = \frac{\cancel{5.6}.7.8}{\cancel{5.6}}$$

bulunur.

**Lemma (önteorem) 2.7.8.** $$(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{2.187}$$

$(k, n = 0,1,2,....)$ dir.

**İspat.** $$(-n)_k = (-n)(-n+1)...(-n+k-1) \tag{2.188}$$

$$= (-1)^k (n)(n-1)...(n-k+1) \tag{2.189}$$

$$= \frac{(-1)^k (n)(n-1)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...3.2.1}{(n-k)(n-k-1)...3.2.1} \tag{2.190}$$

$$= \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, \qquad 0 \le k \le n \tag{2.191}$$

dir. k > n için

$$(-n)_k = (-n)(-n+1)...(-n+k-1) \tag{2.192}$$

eşitliğinin sağ tarafı mutlaka sıfır olacaktır (Srivastava ve Karlsson, 1985).

**Örnek 2.7.5.** $n = 5$, $k = 3$ ve $0 \le 3 \le 5$ için

$$(-5)_3 = \frac{(-1)^3 5!}{(5-3)!}$$

$$(-5)(-4)(-3) = \frac{(-1)5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}}$$

$-5.4.3=(-1)5.4.3$ olur.

**Teorem 2.7.1. (Saalschützian Teoremi)** a, b veya c negatif tamsayı ve

d + e = a + b + c + 1

olmak üzere,

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,c; \\ d,e \end{matrix}\ 1\right]=\frac{\Gamma(d)\Gamma(1+a-e)\Gamma(1+b-e)\Gamma(1+c-e)}{\Gamma(1-e)\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)\Gamma(d-c)} \tag{2.193}$$

dir. Bu teoremin farklı bir gösterimi

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & -n; \\ c, & 1+a+b-c-n & \end{matrix}\ 1\right]=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n} \tag{2.194}$$

şeklindedir (Bailey, 1964).

**Örnek 2.7.6.** $d=6$, $e=-1$, $a=-1$, $b=2$, $c=3$

için

$6+(-1)=(-1)+2+3+1$

şartı sağlandığından Saalschützian Teoremi uygulandığında;

$$ {}_3F_2=\left[\begin{matrix} -1,2,3; \\ 6,-1; \end{matrix}\ 1\right]=\frac{\Gamma(6)\Gamma(1+(-1)-(-1))\Gamma(1+2-(-1))\Gamma(1+3-(-1))}{\Gamma(1-(-1))\Gamma(6-(-1))\Gamma(6-2)\Gamma(6-3)},$$

$$=\frac{\Gamma(6)\Gamma(1)\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(2)\Gamma(7)\Gamma(4)\Gamma(3)}=\frac{5!.0!.3!.4!}{1!.6!.3!.2!}=2$$

bulunur.

Gasper ve Rahman, 2004'ün aktarımıyla;

Gauss 1813 de,

$$1+\frac{ab}{1.c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c.(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3.c.(c+1)(c+2)}z^3+... \tag{2.195}$$

sonsuz serisinin terimleri anlamlı olabilsin diye $c\neq 0,-1,-2,...,$ koşuluyla a, b, c, z 'ye bağlı bir fonksiyon olarak $F(a,b,c,z)$ şeklinde ilk defa tanıttı. Ayrıca bu serinin

$|z|<1$ ve $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ için $|z|=1$ ‘de mutlak yakınsadığını gösterdi. Fakat, bu seri yakınsaksa bugün Gauss’un $F(a,b,c,z)$ gösterini yerine ${}_2F_1(a,b;c;z)$ veya

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix} ;z\right] \tag{2.196}$$

kullanılmaktadır. Seride özel olarak a=1 ve b=c alınırsa geometrik serisi temel hipergeometrik seri ya da Gauss hipergeometrik seri olarak adlandırılan

$$1+z+z^2+z^3+... \tag{2.197}$$

serisi elde edilir. Sıkça kullanılan fonksiyonların Gauss gösterimi $|z|<1$ için şöyledir;

$$(1+z)^a = F(-a,b;b;-z) \tag{2.198}$$

$$\log(1+z) = zF(1,1;2;-z) \tag{2.199}$$

$$\sin^{-1} z = zF(1/2,1/2;3/2;z^2) \tag{2.200}$$

$$\tan^{-1} z = zF(1/2,1;3/2;-z^2) \tag{2.201}$$

Ayrıca, bazı polinomlarda Gauss serisi kullanılarak şöyle ifade edilebilir:

Birinci ve ikinci tür Tchebichef polinomu;

$$T_n(x) = F(-n,n;1/2;(1-x)/2), \tag{2.202}$$

$$U_n(x) = (n+1)F(-n,n+2;3/2;(1-x)/2) \tag{2.203}$$

Legendre polinomu;

$$P_n(x) = F(-n,n+1;1;(1-x)/2) \tag{2.204}$$

Gegenbauer polinomu;

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} F(-n,n+2\lambda;\lambda+1/2;(1-x)/2) \tag{2.205}$$

ve

Jacobi polinomu;

$$n=0,1,...,\ (\alpha)_n,\ (\alpha)_0=1, \tag{2.206}$$

$$(\alpha)_n = a(a+1)...(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{2.207}$$

ve $n=1,2,...$ olmak üzere,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;(1-x)/2\right) \tag{2.208}$$

'dır.

Gauss'tan önce Vandermonde ya da Chu-Vandermonde formülü olarak bilinen

$$F(-n,b;c;1)=\frac{(c-b)_n}{(c)_n}\ ,\ \ n=0,1,... \tag{2.209}$$

için toplam formülü ispatlanmıştır.

Ayrıca Euler 1748'de kendi dönüşüm formülü olan

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z), \tag{2.210}$$

$|z|<1$ ile hipergeometrik serilerin önemli sonuçlarını elde etti. Bunlardan biri

$$F(-n,b;c;1)=\frac{(c-b)_n}{(c)_n} \tag{2.211}$$

toplam formülünde $a=-n$ alınarak

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\ \mathrm{Re}(c-a-b)>0 \tag{2.212}$$

elde edilmesidir.

Gauss'tan sonra Heine,

$q\neq 1$ , $c\neq 0,-1,-2,...$

koşullarında,

$$1+\frac{(1-q^a)(1-q^b)}{(1-q)(1-q^c)}z+\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})(1-q^b)(1-q^{b+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^c)(1-q^{c+1})}z^2+... \tag{2.213}$$

Heine serisi ya da q' ya bağlı olduğundan q-hipergeometrik serisi olarak adlandırılan seriyi elde etti. Bu seri $|q|<1$ iken $|z|<1$ de mutlak yakınsaktır.

Ayrıca,

$$\lim_{q\to 1}\frac{(1-q^a)}{(1-q)}=a \tag{2.214}$$

olduğundan, $q\to 1$ için Heine serisi Gauss serisine dönüşür. Heine kendi serisini ifade etmek için, $\phi(a,b,c,q,z)$ gösterimini kullandı. Bu gösterimde a, b, c yerine sıfır yazılabilme olasılığı dikkate alınarak bunu engellemek için aşağıdaki gösterimler kullanılmaktadır.

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}), & n=1,2,\dots, \end{cases} \tag{2.215}$$

$c \neq q^{-m}$ , $m = 0,1,\dots$ olmak üzere,

$$\phi(a,b;c;q,z) \equiv {}_2\phi_1(a,b;c;q,z) \equiv {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix} ;q,z\right] \tag{2.216}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(q;q)_n (c;q)_n} z^n \tag{2.217}$$

dır.

Yukarıda verilen $(a;q)_n$ ‘ nin yerine alan yazınında,

$(a)_{q,n}$, $[a]_n$ ve hatta $(a)_n$ kullanılabilmektedir.

Gauss serisinin bir diğer genelleştirilmiş serisi, genelleştirilmiş hipergeometrik seri olarak da adlandırılan seri; $a_1,\dots,a_r$ parametrelerinin damgalayanı r; $b_1,\dots,b_s$ parametrelerinin damgalayanı s olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$${}_rF_s(a_1,a_2,\dots,a_r;b_1,\dots,b_s;z) \equiv {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1,a_2,\dots,a_r \\ b_1,\dots,b_s \end{matrix} ;z\right] \tag{2.218}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_r)_n}{n!(b_1)_n \dots (b_s)_n} z^n \tag{2.219}$$

Bu durumda bazı özel tanımlı fonksiyonlar;

Üstel fonksiyon;

$$e^z = {}_0F_0(-;-;z), \tag{2.220}$$

Trigonometrik fonksiyonlar;

$$\sin z = z\,{}_0F_1\left(-;3/2;-z^2/4\right), \tag{2.221}$$

$$\cos z = {}_0F_1\left(-;1/2;-z^2/4\right) \tag{2.222}$$

ve

Bessel fonksiyonu;

$$J_\alpha(z) = (z/2)^\alpha\,{}_0F_1\left(-;\alpha+1;-z^2/4\right)/\Gamma(\alpha+1) \tag{2.223}$$

Formüller içinde geçen “—“ işareti, parametrelerdeki r damgalayanın ya da s damgalayanın sıfır olduğunu göstermek için kullanılmıştır. Benzer şekilde sıkça kullanılan polinomlardan Hermite polinomu;

$$H_n(x)=(2x)^n\,{}_2F_0\left(-n/2,(1-n)/2;-;-x^{-2}\right), \tag{2.224}$$

Laguerre polinomu;

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1(-n;\alpha+1;x) \tag{2.225}$$

şeklinde gösterilir. Temel hipergeometrik serinin ${}_r\phi_s$ gösterimi $r>s+1$ iken $q\neq 0$ için

$$\binom{n}{2}=n(n-1)/2 \tag{2.226}$$

alınarak;

$${}_r\phi_s(a_1,a_2,...,a_r;b_1,...,b_s;q,z)\equiv {}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,a_2,...,a_r\\ b_1,...,b_s\end{matrix};q,z\right] \tag{2.227}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_n(a_2;q)_n...(a_r;q)_n}{(q;q)_n(b_1;q)_n...(b_s;q)_n}\left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r}z^n \tag{2.228}$$

dır.

Temel hipergeometrik serilerde aksi belirtilmedikçe $|q|<1$ ve parametre, değişkenler serinin mutlak yakınsaklığını sağlayacak şekilde alınır.

Şayet $|q|>1$ ise $p=q^{-1}$ alınarak $|p|<1$ ile p’ ye bağlı bir seriye,

$$(a;q)_n=\left(a^{-1};p\right)_n(-a)^n p^{-\binom{n}{2}} \tag{2.229}$$

ile dönüştürülür. q’ ya bağlı serinin yakınsaklık yarıçapı sonlu ise $p=q^{-1}$ bağlı serinin de yakınsaklık yarıçapı sonludur.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_r)_n}{n!(b_1)_n...(b_s)_n}z^n \tag{2.230}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_n(a_2;q)_n\ldots(a_r;q)_n}{(q;q)_n(b_1;q)_n\ldots(b_s;q)_n}\left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} z^n \tag{2.231}$$

serilerinde $z^n$ ' nin katsayıları sırasıyla $u_n$ ve $v_n$ ile değiştirilerek

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(a_1+n)(a_2+n)\ldots(a_r+n)}{(1+n)(b_1+n)\ldots(b_s+n)}z \tag{2.232}$$

n' ye bağlı,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(1-a_1q^n)(1-a_2q^n)\ldots(1-a_rq^n)}{(1-q^{n+1})(1-b_1q^n)\ldots(1-b_sq^n)}(-q^n)^{1+s-r} z \tag{2.233}$$

de $q^n$ ' e bağlı rasyonel fonksiyonlardır.

Oran testi kullanılarak ${}_rF_s$ serisi $r \le s$ ise her z için, $r = s+1$ ise $|z|<1$ için mutlak yakınsaklığı gösterilir.

Şayet $0<|q|<1$ ise ${}_r\phi_s$ serisi $r \le s$ ise her z için, $r = s+1$ ise $|z|<1$ için mutlak yakınsaktır.

Ayrıca bu seri $|q|>1$ ve

$$|z|<|b_1.b_2...b_sq|/|a_1.a_2...a_r| \tag{2.234}$$

için mutlak yakınsaktır.

$z \ne 0$, $0<|q|<1$ ve $r > s+1$ için ayrıca $|q|>1$ ve

$$|z|>|b_1.b_2...b_sq|/|a_1.a_2...a_r| \tag{2.235}$$

için seri ıraksaktır. ${}_rF_s$ ve ${}_r\phi_s$ gösterimleri yakınsaklık çemberi içinde bu serilerin toplamları için ve yakınsaklık çemberleri dışında bu serilerin analitik devamları için kullanılır.

Bir ${}_{r+1}F_r$ serisi şayet

$$b_1+b_2+\ldots+b_r = k+a_1+a_2+\ldots+a_{r+1} \tag{2.236}$$

ve $|z|=1$ ise k-dengeli (k-balanced) serisi olarak adlandırılır. 1-dengeli seri kısaca dengeli seri olarak adlandırılır. Benzer şekilde ${}_{r+1}\phi_r$ serisi

$$b_1.b_2....b_r = q^k.a_1.a_2...a_{r+1}$$

ve z=q ise k-dengeli (k-balanced) serisi olarak adlandırılır.

Bir negatif damgalayan için shifted factorial ve q-shifted aşağıdaki şekilde tanımlanır. $n=0,1,...$ olmak üzere shifted factorial

$$(a)_{-n}=\frac{1}{(a-1)(a-2)...(a-n)}=\frac{1}{(a-n)_n}=\frac{(-1)^n}{(1-a)_n} \tag{2.237}$$

ve q-shifted de

$$(a;q)_{-n}=\frac{1}{\left(1-aq^{-1}\right)\left(1-aq^{-2}\right)...\left(1-aq^{-n}\right)}=\frac{1}{\left(aq^{-n};q\right)_n}=\frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n} \tag{2.238}$$

dır. Benzer şekilde

$$(a;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^k\right) \tag{2.239}$$

tanımlanır. Bu ifade $a\neq 0$ ve $|q|\geq 1$ olduğunda ıraksar. Bu yüzden formüldeki $(a;q)_\infty$ gösterimi kullanıldığında $|q|<1$ alınmış ve bu gösterim kullanılarak elde edilen kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

k, n tamsayı olmak üzere;

$$(a;q)_n=\frac{(a;q)_\infty}{\left(aq^n;q\right)_\infty} \tag{2.240}$$

$$\left(a^{-1}q^{1-n};q\right)_n=(a;q)_n\left(-a^{-1}\right)^n q^{-\binom{n}{2}} \tag{2.241}$$

$$(a;q)_{n-k}=\frac{(a;q)_n}{\left(a^{-1}q^{1-n};q\right)_k}\left(-qa^{-1}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{2.242}$$

$$(a;q)_{n+k}=(a;q)_n\left(aq^n;q\right)_k \tag{2.243}$$

$$\left(aq^n;q\right)_k=\frac{(a;q)_k\left(aq^k;q\right)_n}{(a;q)_n} \tag{2.244}$$

$$\left(aq^k;q\right)_{n-k}=\frac{(a;q)_n}{(a;q)_k} \tag{2.245}$$

$$\left(aq^{2k};q\right)_{n-k}=\frac{(a;q)_n\left(aq^n;q\right)_k}{(a;q)_{2k}} \tag{2.246}$$

$$\left(q^{-n};q\right)_k = \frac{\left(q;q\right)_n}{\left(q;q\right)_{n-k}}\left(-1\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \tag{2.247}$$

$$\left(aq^{-n};q\right)_k = \frac{\left(a;q\right)_k\left(qa^{-1};q\right)_n}{\left(a^{-1}q^{1-k};q\right)_n} q^{-nk} \tag{2.248}$$

$$\left(a;q\right)_{2n} = \left(a;q^2\right)_n\left(aq;q^2\right)_n \tag{2.249}$$

$$\left(a^2;q^2\right)_n = \left(a;q\right)_n\left(-a;q\right)_n \tag{2.250}$$

Yukarıdakilerin çarpımları için ise aşağıdaki gösterimler kullanılır.

$$\left(a_1,a_2,...,a_m;q\right)_n = \left(a_1;q\right)_n\left(a_2;q\right)_n...\left(a_m;q\right)_n \tag{2.251}$$

$$\left(a_1,a_1,...,a_m;q\right)_\infty = \left(a_1;q\right)_\infty\left(a_2;q\right)_\infty...\left(a_m;q\right)_\infty \tag{2.252}$$

$$\left(1-q^a\right)/\left(1-q\right) \tag{2.253}$$

oranı

$$\lim_{q\to 1}\frac{\left(1-q^a\right)}{\left(1-q\right)} = a \tag{2.254}$$

ile

$$\left[a\right]_q = \frac{1-q^a}{1-q},\ q\neq 1 \tag{2.255}$$

bir q-sayısı (ya da temel-taban sayı) olarak adlandırılır ve ayrıca bir a kompleks sayısının q-analogu (benzeşim), q-deformasyonu (bozulumu), q-extensionu (genişleme) ya da bir q-generalization (genellemesi) olarak adlandırılır. q-sayısı ile ilgili olarak q-sayısı faktöriyeli $\left[n\right]_q!$ ile gösterilir, negatif olmayan bir n tamsayısı için

$$\left[n\right]_q! = \prod_{k=1}^{n}\left[k\right]_q \tag{2.256}$$

şeklinde tanımlanır.

Buna bağlı olarak q-sayısı shifted factorial' i

$$\left[a\right]_{q;n} = \prod_{k=0}^{n-1}\left[a+k\right]_q \tag{2.257}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\lim_{q\to 1}[n]_q! = n!, \tag{2.258}$$

$$\lim_{q\to 1}[a]_q = a \tag{2.259}$$

ile

$$[a]_{q;n} = (1-q)^{-n}\left(q^a;q\right)_n, \tag{2.260}$$

ve

$$\lim_{q\to 1}[a]_{q;n} = (a)_n \tag{2.261}$$

olduğu açıktır. Buna göre

$$\left(a_1,a_2,...,a_m;q\right)_n = \left(a_1;q\right)_n\left(a_2;q\right)_n...\left(a_m;q\right)_n \tag{2.262}$$

ifadesine de

$$\left[a_1,a_2,...,a_m\right]_{q;n} = \left[a_1\right]_{q;n}\left[a_2\right]_{q;n}...\left[a_m\right]_{q;n} \tag{2.263}$$

karşılık getirilecektir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[a_1,a_2,...,a_r\right]_{q;n}}{[n]_q!\left[b_1,b_2,...,b_s\right]_{q;n}}\left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} z^n \tag{2.264}$$

$$= {}_r\phi_s\left(q^{a_1},q^{a_2},...,q^{a_r};q^{b_1},q^{b_2},...,q^{b_s};q,z(1-q)^{1+s-r}\right) \tag{2.265}$$

eşitliğinden dolayı sol taraftaki toplamda sıfır olmayan değişkenler $q^{\tau\eta}$ değişkeni ile değiştirilerek ${}_r\phi_s$ formülleri kullanılabilir. Bir trigonometrik $[a;\sigma]$ sayısı Frenkel ve Turaev [1995] ‘lerdeki gibi $\sigma$ tamsayı olmayan değerleri için $[a;\sigma]=\dfrac{\sin(\pi\sigma a)}{\sin(\pi\sigma)}$ şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca $\lim_{\sigma\to 0}[a;\sigma]=a$ ’den dolayı $[a;\sigma]$ ifadesi a’ nın bir trigonometrik deformasyonu (bozunumu) olarak da görülebilir. Bu kullanılarak ${}_rt_s$ trigonometrik hipergeometrik serisi,

$$[n;\sigma]! = \prod_{k=1}^{n}[k;\sigma], \tag{2.266}$$

$$[a;\sigma]_n = \prod_{k=0}^{n-1}[a+k;\sigma] \tag{2.267}$$

ve

$$\left[a_1,a_2,...,a_m;\sigma\right]_n=\left[a_1;\sigma\right]_n\left[a_2;\sigma\right]_n...\left[a_m;\sigma\right]_n \tag{2.268}$$

olmak üzere

$${}_rt_s\left(a_1,a_2,...,a_r;b_1,b_2,...,b_s;\sigma,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[a_1,a_2,...,a_r;\sigma\right]_n}{\left[n;\sigma\right]!\left[b_1,b_2,...,b_s;\sigma\right]_n}\left[\left(-1\right)^n e^{\pi i\sigma\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} z^n \tag{2.269}$$

olarak tanımlanır.

Burada $q=e^{2\pi i\sigma}$ olmak üzere,

$$\left[a;\sigma\right]=\frac{e^{\pi i\sigma a}-e^{-\pi i\sigma a}}{e^{\pi i\sigma}-e^{-\pi i\sigma}}=\frac{q^{a/2}-q^{-a/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}=\frac{1-q^a}{1-q}q^{(1-a)/2} \tag{2.270}$$

eşitliği ve

$$\left[a;\sigma\right]_n=\frac{\left(q^a;q\right)_n}{\left(1-q\right)^n}q^{n(1-a)/2-n(n-1)/4} \tag{2.271}$$

ifadesi ile

$$c=\left(1-q\right)^{1+s-r}q^{r/2-s/2+(b_1+...+b_s)/2-(a_1+...+a_r)/2} \tag{2.272}$$

olmak üzere

$${}_rt_s\left(a_1,a_2,...,a_r;b_1,b_2,...,b_s;\sigma,z\right)={}_r\phi_s\left(q^{a_1},q^{a_2},...,q^{a_r};q^{b_1},q^{b_2},...,q^{b_s};q,cz\right) \tag{2.273}$$

dir. Bu da bize ${}_rt_s$ serisin ${}_r\phi_s$ serisine eşit olduğunu gösterir.

q-serilerinin türevlenmesinde ortaya çıkan q’ nun üstlerini bulmada, binom katsayıları için aşağıdaki eşitlikler kullanılır.

$$\binom{n+k}{2}=\binom{n}{2}+\binom{k}{2}+kn \tag{2.274}$$

$$\binom{n-k}{2}=\binom{n}{2}+\binom{k}{2}+k-kn \tag{2.275}$$

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışmada materyal olarak makale, tez ve kaynak kitaplar kullanılmıştır. Makaleler ve tezlere Erzincan Üniversitesi Kütüphanesi ve YÖK veri tabanı kullanılarak ulaşılmıştır.
Çalışma konusu ile ilgili tanımlar, teoremler ve sonuçlar örneklendirilerek sunulmuştur.

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve SONUÇLAR

Bu bölümde tek ve çift serili hipergeometrik fonksiyonların kullanımı ile ilgili örnekler sonuçları ile birlikte verilmiştir.

**Tek ve Çift Serili Hipergeometrik Fonksiyonların Kullanım Örnekleri**

## 4.1. Temel Hipergeometrik Serilerin Türevlerinden Elde Edilen Bir Yeni Bailey Tipi Dönüşüm Arasındaki Bazı Özellikler

Bailey dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir:

**Lemma (önteorem) 4.1.1.**

$$\beta_n = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r U_{n-r} V_{n+r} \tag{4.1}$$

ve

$$\gamma_n = \sum_{r=n}^{\infty} \delta_r U_{r-n} V_{n+r} \tag{4.2}$$

yakınsak ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta_n \tag{4.3}$$

eşitliği sağlanır. Bu teoremin kanıtı toplamın mertebesi değiştirilerek yapılır.

$$U_n = \frac{1}{(q;q)_n},\ V_n = \frac{1}{(x;q)_n} \text{ ve } \delta_n = (y,z;q)_n \left(\frac{x}{yz}\right)^n \tag{4.4}$$

Bailey kümeleri ve q- Gauss toplamı kullanılır,

$${}_2\phi_1(a,b;c;q,c/ab) = \frac{(c/a,c/b;q)_\infty}{(c,c/ab;q)_\infty} \tag{4.5}$$

ile

$$\sum_{n=0}^{\infty}(y,z;q)_n\left(\frac{x}{yz}\right)^n\beta_n=\frac{(x/y,x/z;q)_\infty}{(x,x/yz;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y,z;q)_n}{(x/y,x/z;q)_n}\left(\frac{x}{yz}\right)^n\alpha_n \tag{4.6}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $\alpha_0=1$ ve

$$\beta_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{\alpha_r}{(q;q)_{n-r}(x;q)_{n+r}} \tag{4.7}$$

dır.

Aşağıdaki ifadelerde a ve q karmaşık sayılar ve $|q|<1$ dir.

$n\in N$ için

$$(a)_0=(a;q)_0:=1,\ (a)_n=(a;q)_n:=\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-aq^j\right), \tag{4.8}$$

$$(a_1;q)_n(a_2;q)_n...(a_k;q)_n=(a_1,a_2,...,a_k;q)_n \tag{4.9}$$

$$(a;q)_\infty:=\prod_{j=0}^{\infty}\left(1-aq^j\right) \tag{4.10}$$

$$(a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty...(a_k;q)_\infty=(a_1,a_2,...,a_k;q)_\infty \tag{4.11}$$

dir. Bir ${}_r\phi_s$ temel hipergeometrik seri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix}a_1,a_2,...,a_r\\ b_1,...,b_s\end{matrix};q,x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_n(a_2;q)_n...(a_r;q)_n}{(q;q)_n(b_1;q)_n...(b_s;q)_n}\left((-1)^n q^{n(n-1)/2}\right)^{s+1-r}x^n \tag{4.12}$$

$(\alpha_n,\beta_n)$ dizi çifti $x/q$ Bailey çifti ile ilişkilendirilir (Andrews, vd., 1999).

**Tanım 4.1.1** $(\alpha_n(a,k),\beta_n(a,k))$

dizi çiftinin oluşturduğu bir WP–Bailey çifti

$$\beta_n(a,k)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(k/a)_{n-j}(k)_{n+j}}{(q)_{n-j}(aq)_{n+j}}\alpha_j(a,k) \tag{4.13}$$

eşitliğini sağlar.

$k=0$ için yukarıdaki tanım standart Bailey çifti tanımı elde edilir.

Andrews çalışmasında verilen bir dizi çiftinden farklı iki yolla yani bir WP–Bailey çifti oluşturmuştur.

$(\alpha_n(a,k),\beta_n(a,k))$ dizi çifti "Eş. 4.13" ü sağlasın ve

$\left(\alpha_n'\left(a,k\right),\beta_n'\left(a,k\right)\right)$ ve $\left(\alpha_n\left(a,k\right),\beta_n\left(a,k\right)\right)$

yeni WP Bailey çiftini aşağıdaki şekilde belirlemiştir.

$$\alpha_n'\left(a,k\right)=\frac{\left(\rho_1,\rho_2\right)_n}{\left(aq/\rho_1,aq/\rho_2\right)_n}\left(\frac{k}{c}\right)^n\alpha_n\left(a,c\right), \tag{4.14}$$

$$\beta_n'\left(a,k\right)=\frac{\left(k\rho_1/a,k\rho_2/a\right)_n}{\left(aq/\rho_1,aq/\rho_2\right)_n}$$

$$.\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(1-cq^{2j}\right)\left(\rho_1,\rho_2\right)_j\left(k/c\right)_{n-j}\left(k\right)_{n+j}}{\left(1-c\right)\left(k\rho_1/a,k\rho_2/a\right)_j\left(q\right)_{n-j}\left(qc\right)_{n+j}}\left(\frac{k}{c}\right)^j\beta_j\left(a,c\right) \tag{4.15}$$

Burada

$c=k\rho_1\rho_2/aq$

dır. Ve böylece

$$\alpha_n\left(a,k\right)=\frac{\left(qa^2/k\right)_{2n}}{\left(k\right)_{2n}}\left(\frac{k^2}{qa^2}\right)^n\alpha_n\left(a,\frac{qa^2}{k}\right) \tag{4.16}$$

$$\beta_n\left(a,k\right)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(k^2/qa^2\right)_{n-j}}{\left(q\right)_{n-j}}\left(\frac{k^2}{qa^2}\right)^j\beta_j\left(a,\frac{qa^2}{k}\right) \tag{4.17}$$

olur (Andrews, 2000)

**Teorem 4.1.1.** $\left(\alpha_n\left(a,k\right),\beta_n\left(a,k\right)\right)$ dizi çifti

$$\beta_n\left(a,k\right)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(k/a\right)_{n-j}\left(k\right)_{n+j}}{\left(q\right)_{n-j}\left(aq\right)_{n+j}}\alpha_j\left(a,k\right) \tag{4.18}$$

eşitliği sağlandığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-kq^{2n}\right)\left(\rho_1,\rho_2;q\right)_n}{\left(1-k\right)\left(kq/\rho_1,kq/\rho_2;q\right)_n}\left(\frac{aq}{\rho_1\rho_2}\right)^n\beta_n\left(a,k\right)$$

$$=\frac{\left(kq,kq/\rho_1\rho_2,aq/\rho_1,aq/\rho_2;q\right)_\infty}{\left(kq/\rho_1,kq/\rho_2,aq/\rho_1\rho_2,aq;q\right)_\infty}\sum_{n=0}^{n}\frac{\left(\rho_1,\rho_2;q\right)_n}{\left(aq/\rho_1,aq/\rho_2;q\right)_n}\left(\frac{aq}{\rho_1\rho_2}\right)^n\alpha_n\left(a,k\right) \tag{4.19}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{qa^2}{k^2}\right)^n\beta_n\left(a,k\right)=\frac{\left(qa/k,qa^2/k;q\right)_\infty}{\left(qa,qa^2/k^2;q\right)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(k;q\right)_{2n}}{\left(qa^2/k;q\right)_{2n}}\left(\frac{qa^2}{k^2}\right)^n\alpha_n\left(a,k\right) \tag{4.20}$$

olur.

Andrews'in birinci yapılanması "Eş. 4.15" elde edilmeden önce "Eş. 4.19" daki dönüşüm "Eş. 4.6" Bailey türevlenmesine benzer bir yöntemle türevlenebilir. Bu sonuç "Eş. 4.20" deki dönüşüme eşdeğerdir (Bressoud,1981).

**Teorem 4.1.2.** Şayet $\beta_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{(k/a;q)_{n-r}}{(q;q)_{n-r}} \frac{(k;q)_{n+r}}{(aq;q)_{n+r}} \alpha_r$ ise (4.21)

$$\frac{(qab/k, kq/b;q)_\infty \left(q, k^2q/a, q^2a, q^2a^2/k^2;q^2\right)_\infty}{(kq, qa/k;q)_\infty}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, k^2/ab, b, \sqrt{qa}, -\sqrt{qa};q\right)_n}{\left(\sqrt{k}, -\sqrt{k}, qab/k, kq/b, k\sqrt{q/a}, -k\sqrt{q/a};q\right)_n} \left(\frac{-qa}{k}\right)^n \beta_n$$

$$= \left(\frac{qk^2}{ab}, bq, \frac{q^2a^2b}{k^2}, \frac{q^2a}{b};q^2\right)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k^2}{ab}, b;q^2\right)_n}{\left(\frac{q^2a^2b}{k^2}, \frac{q^2a}{b};q^2\right)_n} \left(\frac{-qa}{k}\right)^{2n} \alpha_{2n}$$

$$+ \left(\frac{k^2}{ab}, b, \frac{q^3a^2b}{k^2}, \frac{q^3a}{b};q^2\right)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k^2q}{ab}, bq;q^2\right)_n}{\left(\frac{q^3a^2b}{k^2}, \frac{q^3a}{b};q^2\right)_n} \left(\frac{-qa}{k}\right)^{2n+1} \alpha_{2n+1} \tag{4.22}$$

elde edilir. Bu dönüşüm temel hipergeometrik seriler arasındaki yeni 3- end 4- dönüşümleri türevlemede kullanılır (Laughlin ve Zimmer, 2008).

## 4.2. Çift Serili Hipergeometrik Fonksiyonlar

$\lambda$ kompleks sayısı ve bir n doğal sayısı için, Pochhammer sembolü olarak adlandırılan $(\lambda)_n$ aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$(\lambda)_n := \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} = \begin{cases} 1 & (n=0; \lambda \neq 0) \\ \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1) & (n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{C} \end{cases} \tag{4.23}$$

$(\mathbb{N} \quad \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \quad ...\})$

r, $a_1,...,a_r$ damgalayanı ve s de $b_1,...,b_s$ damgalayanı olmak üzere

Genellikle ${}_rF_s\left(r,s\in\mathbb{N}\right)$ genelleştirilmiş hipergeometrik serisi eşitliğin sağ taraftaki payda sıfırdan farklı olmak koşuluyla,

$$ {}_rF_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r; \\ b_1,\ldots,b_s;\end{matrix}\; z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_k\ldots\left(a_r\right)_k}{\left(b_1\right)_k\ldots\left(b_s\right)_k}\frac{z^k}{k!} \tag{4.24}$$

şeklinde tanımlanır.

Appell' in indirgeme formülleriyle

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b; & \dfrac{x-y}{1-y} \\ c; & \end{matrix}\right]=\left(1-y\right)^a F_1\left[a,b,c-b;c;x,y\right] \tag{4.25}$$

$$=\left(1-y\right)^a\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_{i+j}\left(b\right)_i\left(c-b\right)_j}{\left(c\right)_{i+j}}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!} \tag{4.26}$$

eşitliği yazılır (Lee, vd., 2001).

**Teorem 4.2.1.**

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_{i+j}\left(b\right)_{i+j}}{\left(a+b\right)_{i+j}}\frac{\left(c+c'-1\right)_{i+j}}{\left(c\right)_i\left(c'\right)_j}\frac{\left\{x\left(1-y\right)\right\}^i}{i!}\frac{\left\{y\left(1-x\right)\right\}^j}{j!} \tag{4.27}$$

$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(c+c'-1\right)_{i+j}}{\left(a+b\right)_{i+j}}\frac{\left(a\right)_i\left(b\right)_i}{\left(c\right)_i}\frac{\left(a\right)_j\left(b\right)_j}{\left(c'\right)_j}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!} \tag{4.28}$$

eşitliği geçerlidir (Lee, vd., 2001).

## 4.3. Formal Kuvvet Serileri Yöntemi

Teorem 4.2.1 ile formal kuvvet serileri yöntemi kullanılarak aşağıda teorem 4.3.1 de verilen çift terimli seri dönüşümü elde edilir.

**Teorem 4.3.1.**

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(a\right)_{i+j}\left(b\right)_{i+j}\left(c+c'-1\right)_{i+j}}{\left(a+b\right)_{i+j}\left(e\right)_{i+j}\left(e'\right)_{i+j}}\frac{\left(-m\right)_i\left(e'+n\right)_i}{i!\left(c\right)_i}\frac{\left(-n\right)_j\left(e+m\right)_j}{j!\left(c'\right)_j} \tag{4.29}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(c+c'-1\right)_{i+j}}{\left(a+b\right)_{i+j}}\frac{\left(-m\right)_i\left(a\right)_i\left(b\right)_i}{i!\left(c\right)_i\left(e\right)_i}\frac{\left(-n\right)_j\left(a\right)_j\left(b\right)_j}{j!\left(c'\right)_j\left(e'\right)_j} \tag{4.30}$$

eşitliği geçerlidir. Bu son eşitlikte $e=b$ ve $e'=a$ alınarak teorem 4.3.1 deki eşitlik teorem 4.2.1 de verilen eşitliğin bir dengine indirgenebilir (Karlsson, vd., 2000).

**Sonuç 4.3.1.** $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i(a+n)_i}{i!(c)_i}\frac{(-n)_j(b+m)_j}{j!(c')_j}$ (4.31)

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i(a)_i}{i!(c)_i}\frac{(-n)_j(b)_j}{j!(c')_j} \tag{4.32}$$

eşitliği geçerlidir (Karlsson, vd., 2000).

**Teorem 4.3.1.'in İspatı.** Formal Kuvvet serilerinde terslenme yöntemi kullanılarak negatif olmayan bir k tamsayısı ve bir kompleks $\lambda$ parametresi için Binom açılımı yardımıyla

$$\frac{z^k}{(1-z)^{\lambda+k}}=\sum_{l=k}^{\infty}\frac{(\lambda+k)_{l-k}}{(l-k)!}z^l \tag{4.33}$$

den

$$z^k=\sum_{l=k}^{\infty}\frac{(\lambda+k)_{l-k}}{(l-k)!}\frac{(-1)^{k+l}z^l}{(1-z)^{\lambda+l}} \tag{4.34}$$

elde edilir.

f(z) formal kuvvet serisi ve

$$\left\{z^k/(1-z)^{\lambda+k}\right\}_{k=0}^{\infty} \tag{4.35}$$

dizisi kullanılarak elde edilen f(z) genişlemesini

$$\left[z^l/(1-z)^{\lambda+l}\right]f(z) \tag{4.36}$$

ile gösterelim. Bu durumda,

$$\left[\frac{z^l}{(1-z)^{\lambda+l}}\right]z^k=(-1)^l\frac{(\lambda)_l}{l!}\frac{(-l)_k}{(\lambda)_k} \tag{4.37}$$

ve

$$\left[\frac{z^l}{(1-z)^{\lambda+l}}\right]z^i(1-z)^j=(-1)^l\frac{(\lambda)_l}{l!}\frac{(-l)_i(\lambda+l)_j}{(\lambda)_{i+j}} \tag{4.38}$$

dır. Son eşitlik

$$\left[\frac{z^l}{(1-z)^{\lambda+l}}\right] z^i(1-z)^j = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k \binom{j}{k}\left[\frac{z^l}{(1-z)^{\lambda+l}}\right] z^{i+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{j}(-1)^{i+l}\binom{j}{k}\frac{(\lambda+i+k)_{l-i-k}}{(l-i-k)!} = \frac{(-1)^{l-i}}{(l-i)!}\frac{(\lambda)_l}{(\lambda)_i}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-j, i-l; \\ i+\lambda;\end{matrix}\ 1\right] \tag{4.39}$$

şeklinde ifade edilebilir (Chu ve Srivastava, 2008).

## 4.4. Çift Seriler İçin İndirgeme Formülleri

**Teorem 4.4.1. (**Çift seri dönüşümü ) herhangi bir kompleks $\Omega(j)_{j=0}^{\infty}$ dizisi için aşağıdaki dönüşüm formülleri geçerlidir.

$$\frac{(c)_m}{(1-c')_m}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i(a)_i}{i!(c)_i}\frac{(-n)_j(b)_j}{j!(c')_j}\Omega(j) \tag{4.40}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}(b)_{i+j}}{(c'-m)_{i+j}(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i}{i!}\frac{(-n)_j}{j!}\Omega(j) \tag{4.41}$$

**İspat.** Chu - Vandermonde toplam teoremi kullanılarak

$$\frac{(1-c'-j)_{m-i}}{(c+i)_{m-i}} = {}_2F_1\left[\begin{matrix}-m+i, c+c'-1+i+j; \\ c+i;\end{matrix}\ 1\right] = (-1)^i\frac{(1-c')_m}{(c)_m}\frac{(c)_i(c')_j}{(c'-m)_{i+j}} \tag{4.42}$$

eşitliği elde edilir.

$$\text{“Eş. 4.41”} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(c)_i(c')_j}\frac{(b)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i}{i!}\frac{(-n)_j}{j!}\Omega(j)$$

$$.(-1)^i\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-m+i, c+c'-1+i+j; \\ c+i;\end{matrix}\ 1\right]\frac{(c)_m}{(1-c')_m}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(c)_i(c')_j}\frac{(b)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i}{i!}\frac{(-n)_j}{j!}\Omega(j)$$

$$.\left(-1\right)^{i}\frac{\left(c\right)_{m}}{\left(1-c'\right)_{m}}\sum_{l=i}^{m}\frac{\left(-m+i\right)_{l-i}\left(c+c'-1+i+j\right)_{l-i}}{\left(l-i\right)!\left(c+i\right)_{l-i}}$$

$$=\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(c+c'-1\right)_{l+j}}{\left(c\right)_{l}\left(c'\right)_{j}}\frac{\left(-m\right)_{l}\left(-n\right)_{j}}{l!\,j!}\frac{\left(b\right)_{j}}{\left(a+b\right)_{j}}\Omega\left(j\right).\frac{\left(c\right)_{m}}{\left(1-c'\right)_{m}}\sum_{i=0}^{l}\frac{\left(-l\right)_{i}}{i!}\frac{\left(b+j\right)_{i}}{\left(a+b+j\right)_{i}} \qquad (4.43)$$

En son eşitlikte Chu – Vandermonde teoremi kullanılarak elde edilen

$${}_{2}F_{1}\left[\begin{matrix}-l, & b+j; \\ a+b+j; & \end{matrix}\;1\right]=\frac{\left(a\right)_{l}}{\left(a+b+j\right)_{l}}\;\left(l\in\mathbb{N}\right. \qquad (4.44)$$

Eşitliği kullanılarak ispat tamamlanır.

Teoremde $\Omega\left(j\right)\equiv 1$ ve “Eş. 4.41” de $i+j=k$ alınarak

“Eş. 4.41” =

$$\sum_{k=0}^{m+n}\frac{\left(b\right)_{k}\left(c+c'-1\right)_{k}}{\left(a+b\right)_{k}\left(c'-m\right)_{k}}\left(-1\right)^{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\sum_{k=0}^{m+n}\left(-1\right)^{k}\binom{m+n}{k}\frac{\left(b\right)_{k}\left(c+c'-1\right)_{k}}{\left(a+b\right)_{k}\left(c'-m\right)_{k}} \qquad (4.45)$$

Eşitliği Vandermonde convolution formülü kullanılarak elde edilir (Slater, 1966).

**Sonuç 4.4.1.** (Çift seri için indirgeme formülleri)

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(c+c'-1\right)_{i+j}}{\left(a+b\right)_{i+j}}\frac{\left(-m\right)_{i}\left(a\right)_{i}}{i!\left(c\right)_{i}}\frac{\left(-n\right)_{j}\left(b\right)_{j}}{j!\left(c'\right)_{j}} \qquad (4.45)$$

$$=\frac{\left(1-c'\right)_{m}}{\left(c\right)_{m}}\,{}_{3}F_{2}\left[\begin{matrix}-m-n,b,c+c'-1; \\ a+b,c'-m;\end{matrix}\;1\right] \qquad (4.46)$$

ve

$${}_{3}F_{2}\left[\begin{matrix}-m,a,b; \\ c,d;\end{matrix}\;1\right]=\frac{\left(c-a\right)_{m}}{\left(c\right)_{m}}\,{}_{3}F_{2}\left[\begin{matrix}-m,a,d-b; \\ 1+a-c-m,d;\end{matrix}\;1\right] \qquad (4.47)$$

hipergeometrik dönüşümüyle Chu – Vandermonde iki kez kullanılarak

$${}_{3}F_{2}\left[\begin{matrix}-m,a,b; \\ c,d;\end{matrix}\;1\right]=\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(-m\right)_{k}\left(a\right)_{k}}{k!\left(c\right)_{k}}\,{}_{2}F_{1}\left[\begin{matrix}-k,d-b; \\ d;\end{matrix}\;1\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^{l}\frac{\left(d-b\right)_{l}}{l!\left(d\right)_{l}}\frac{\left(-m\right)_{k}\left(a\right)_{k}}{\left(k-l\right)!\left(c\right)_{k}}=\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\left(a\right)_{l}\left(d-b\right)_{l}}{\left(c\right)_{l}\left(d\right)_{l}}\,{}_{2}F_{1}\left[\begin{matrix}-m+l,a+l; \\ c+l;\end{matrix}\;1\right] \qquad (4.48)$$

elde edilir.

$${}_{3}F_{2}\left[\begin{matrix}-m-n,b,c+c'-1; \\ a+b,c'-m;\end{matrix}\;1\right]=\frac{\left(a\right)_{m+n}}{\left(a+b\right)_{m+n}}\,{}_{3}F_{2}\left[\begin{matrix}-m-n,b,1-c-m; \\ 1-a-m-n,c'-m;\end{matrix}\;1\right] \qquad (4.49)$$

eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuç 4.4.2 elde edilir (Bailey, 1935).

**Sonuç 4.4.2.** Aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(a)_i(-m)_i}{i!(c)_i}\frac{(b)_j(-n)_j}{j!(c')_j} \tag{4.50}$$

$$=\frac{(a)_{m+n}(1-c')_m}{(c)_m(a+b)_{m+n}}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-m-n,b,1-c-m;\\1-a-m-n,c'-m;\end{matrix}\;1\right] \tag{4.51}$$

$$\Omega(j)=\frac{(v+m)_j}{(v-n)_j}\;(j\in\mathbb{N} \tag{4.52}$$

ve "Eş. 4.41" de $i+j=k$ alınarak tekrar bir indirgeme

$$\text{“Eş. 4.41”}=\sum_{k=0}^{m+n}\frac{(c+c'-1)_k(b)_k}{(c'-m)_k(a+b)_k}\frac{(-m)_k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-n)_j(-k)_j(v+m)_j}{j!(1+m-k)_j(v-n)_j} \tag{4.53}$$

eşitliği ve buradan da Pfaff–Saalschütz teoremi kullanılarak

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,-k,v+m;\\1+m-k,v-n;\end{matrix}\;1\right]=\frac{(-m-n)_k(v)_k}{(-m)_k(v-n)_k} \tag{4.54}$$

elde edilir (Karlsson, vd.,2000)

**Önerme 4.4.1.** (Çift serisi için indirgeme formülleri)

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i(a)_i}{i!(c)_i}\frac{(-n)_j(b)_j}{j!(c')_j}\frac{(v+m)_j}{(v-n)_j}$$

$$=\frac{(1-c')_m}{(c)_m}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}-m-n,b,c+c'-1,v;\\a+b,c'-m,v-n;\end{matrix}\;1\right] \tag{4.55}$$

eşitliği doğrudur. Burada

$a\to a+n$, $b\to b-n$ ve $v\to b$

alınırsa sonuç 4.4.3 elde edilir (Karlsson, vd., 2000).

**Sonuç 4.4.3.** $\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c+c'-1)_{i+j}}{(a+b)_{i+j}}\frac{(-m)_i(a+n)_i}{i!(c)_i}\frac{(-n)_j(b+m)_j}{j!(c')_j}$

$$=\frac{(1-c')_m}{(c)_m}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-m-n,b,c+c'-1; & \\ a+b,c'-m; & \end{matrix}\;1\right] \tag{4.56}$$

dır (Karlsson, vd., 2000).

## 4.5. Watson'un ${}_3F_2$ Toplamının q-eşlemesi yoluyla elde edilen dönüşümün türevi

Watson'un ${}_3F_2$ toplamının q- eşlemesi aşağıdadır.

$${}_8\phi_7\left[\begin{matrix}\lambda,q\sqrt{\lambda},-q\sqrt{\lambda},a,b,\lambda\sqrt{q/ab},-\lambda\sqrt{q/ab},ab/\lambda \\ \sqrt{\lambda},-\sqrt{\lambda},\lambda q/a,\lambda q/b,\lambda^2q/ab,\sqrt{qab},-\sqrt{qab}\end{matrix};q,-\frac{q\lambda}{ab}\right]$$

$$=\frac{(\lambda q,\lambda q/ab;q)_\infty}{(\lambda q/a,\lambda q/b;q)_\infty}\frac{(aq,bq,q^2\lambda^2/a^2b,q^2\lambda^2/ab^2;q^2)_\infty}{(q,abq,q^2\lambda^2/ab,q^2\lambda^2/a^2b^2;q^2)_\infty} \tag{4.57}$$

**İspatı.** Lemma (önteorem) 4.1.1.'den

$$U_r=\frac{(ab/\lambda;q)_r}{(q;q)_r} \tag{4.58}$$

$$V_r=\frac{(\lambda;q)_r}{(\lambda^2q/ab;q)_r} \tag{4.59}$$

$$\delta_r=\frac{(q\sqrt{\lambda},-q\sqrt{\lambda},a,b,\lambda\sqrt{q/ab},-\lambda\sqrt{q/ab};q)_r}{(\sqrt{\lambda},-\sqrt{\lambda},\lambda q/a,\lambda q/b,\sqrt{qab},-\sqrt{qab};q)_r}\left(\frac{-q\lambda}{ab}\right)^r \tag{4.60}$$

alınıp,

$$\begin{aligned}\gamma_n&=\sum_{r=n}^{\infty}\delta_rU_{r-n}V_{r+n}=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_{m+n}U_mV_{m+2n}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q\sqrt{\lambda},-q\sqrt{\lambda},a,b,\lambda\sqrt{q/ab},-\lambda\sqrt{q/ab};q)_{m+n}}{(\sqrt{\lambda},-\sqrt{\lambda},\lambda q/a,\lambda q/b,\sqrt{qab},-\sqrt{qab};q)_{m+n}}\frac{(ab/\lambda;q)_m}{(q;q)_m}\frac{(\lambda;q)_{m+2n}}{(\lambda^2q/ab;q)_{m+2n}}\left(\frac{-q\lambda}{ab}\right)^{m+n}\\&=\frac{(q\sqrt{\lambda},-q\sqrt{\lambda},a,b,\lambda\sqrt{q/ab},-\lambda\sqrt{q/ab};q)_n}{(\sqrt{\lambda},-\sqrt{\lambda},\lambda q/a,\lambda q/b,\sqrt{qab},-\sqrt{qab};q)_n}\frac{(\lambda;q)_{2n}}{(\lambda^2q/ab;q)_{2n}}\left(\frac{-q\lambda}{ab}\right)^n\end{aligned}$$

(4.61)

Eşitlikteki toplamda "Eş. 4.57" uygulanarak sırasıyla $\lambda$, a, b yerine $\lambda q^{2n}$, $aq^n$, $bq^n$ alınarak

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(q\sqrt{\lambda},-q\sqrt{\lambda},a,b,\lambda\sqrt{q/ab},-\lambda\sqrt{q/ab};q\right)_n}{\left(\sqrt{\lambda},-\sqrt{\lambda},\lambda q/a,\lambda q/b,\sqrt{qab},-\sqrt{qab};q\right)_n}\frac{(\lambda;q)_{2n}}{\left(\lambda^2 q/ab;q\right)_{2n}}\left(\frac{-q\lambda}{ab}\right)^n \\
&\times \frac{\left(\lambda q^{1+2n},\lambda q/ab;q\right)_\infty}{\left(\lambda q^{1+n}/a,\lambda q^{1+n}/b;q\right)_\infty}\frac{\left(aq^{1+n},bq^{1+n},q^{2+n}\lambda^2/a^2b,q^{2+n}\lambda^2/ab^2;q^2\right)_\infty}{\left(q,abq^{1+2n},q^2\lambda^{2+2n}/ab,q^2\lambda^2/a^2b^2;q^2\right)_\infty} \\
&= \frac{\left(\lambda q,\lambda q/ab;q\right)_\infty}{\left(\lambda q/a,\lambda q/b;q\right)_\infty}\frac{\left(aq^{1+n},bq^{1+n},\lambda^2q^{2+n}/a^2b,\lambda^2q^{2+n}/ab^2;q^2\right)_\infty}{\left(q,abq,\lambda^2q^2/ab,\lambda^2q^2/a^2b^2;q^2\right)_\infty}(a,b;q)_n\left(\frac{-q\lambda}{ab}\right)^n \\
&= \frac{\left(\lambda q,\lambda q/ab;q\right)_\infty}{\left(\lambda q/a,\lambda q/b;q\right)_\infty}\left(\frac{-q\lambda}{ab}\right)^n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\left(aq,bq,\lambda^2q^2/a^2b,\lambda^2q^2/ab^2;q^2\right)_\infty}{\left(q,qab,\lambda^2q^2/ab,\lambda^2q^2/a^2b^2;q^2\right)_\infty}\dfrac{\left(a,b;q^2\right)_{\frac{n}{2}}}{\left(\lambda^2q^2/a^2b,\lambda^2q^2/ab^2;q^2\right)_{\frac{n}{2}}} & n \;\; \textit{çift} \\[2ex]
\dfrac{\left(a,b,\lambda^2q^3/a^2b,\lambda^2q^3/ab^2;q^2\right)_\infty}{\left(q,qab,\lambda^2q^2/ab,\lambda^2q^2/a^2b^2;q^2\right)_\infty}\dfrac{\left(aq,bq;q^2\right)_{\frac{n-1}{2}}}{\left(\lambda^2q^3/a^2b,\lambda^2q^3/ab^2;q^2\right)_{\frac{n-1}{2}}} & n \;\; \textit{tek}
\end{cases}
\tag{4.62}
$$

şeklinde elde edilir.

$\lambda \to k$, $a \to k^2/bc$ ve $c \to a$ yapılarak $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizilerini

$$
\beta_n = \sum_{r=0}^{n}\alpha_r U_{n-r}V_{n+r} = \sum_{r=0}^{n}\frac{(k/a;q)_{n-r}}{(q;q)_{n-r}}\frac{(k;q)_{n+r}}{(aq;q)_{n+r}}\alpha_r \tag{4.63}
$$

olacak şekilde alınmıştır. Bu teorem WP-Bailey

$$
\alpha_n(a,k) = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n>0, \end{cases} \tag{4.64}
$$

$$
\beta_n(a,k) = \frac{(k/a,k;q)_n}{(q,aq;q)_n} \tag{4.65}
$$

aşikâr çifti için kullanılır. Gösterim kolaylığı için

$$
{}_{r+1}W_r\left(a_1;a_4,\ldots,a_{r+1};q,z\right) = {}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix} a_1, q\sqrt{a_1}, -q\sqrt{a_1}, a_4, \ldots, a_{r+1} \\ \sqrt{a_1}, -\sqrt{a_1}, \dfrac{a_1q}{a_4}, \ldots, \dfrac{a_1q}{a_{r+1}} \end{matrix} ;q,z\right] \tag{4.66}
$$

şeklinde alınacaktır. WP-Blaiy çifti birimi eklenerek

$$\alpha_n(a,k)=\frac{\left(q\sqrt{a},-q\sqrt{a},a,a/k;q\right)_n}{\left(\sqrt{a},-\sqrt{a},q,kq;q\right)_n}\left(\frac{k}{a}\right)^n \tag{4.67}$$

$$\beta_n(a,k)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n>0,\end{cases} \tag{4.68}$$

q yerine $\sqrt{q}$ alınarak elde edilir.

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{q}ab}{k},\frac{qab}{k},\frac{k\sqrt{q}}{b},\frac{kq}{b},-\frac{a\sqrt{q}}{k},-\frac{aq}{k},\sqrt{q},\frac{k^2\sqrt{q}}{a},qa;q\right)_\infty}{\left(kq,k\sqrt{q};q\right)_\infty}$$

$$=\left(\frac{k^2\sqrt{q}}{ab},b\sqrt{q},\frac{a^2bq}{k^2},\frac{qa}{b};q\right)_\infty {}_8W_7\left(a;a\sqrt{q},\frac{a}{k},\frac{a\sqrt{q}}{k},\frac{k^2}{ab},b;q,q\right)$$

$$-q^{1/2}\frac{(1-aq)(1-a/k)}{\left(1-\sqrt{q}\right)\left(1-k\sqrt{q}\right)}\left(\frac{k^2}{ab},b,\frac{a^2bq^{3/2}}{k^2},\frac{q^{3/2}a}{b};q\right)_\infty .$$

$${}_8W_7\left(aq;a\sqrt{q},\frac{a\sqrt{q}}{k},\frac{aq}{k},\frac{k^2\sqrt{q}}{ab},b\sqrt{q};q,q\right) \tag{4.69}$$

dır ( Gasper ve Rahman, 2004).

**Sonuç 4.5.1.**

$$\alpha_n(a,k)=\frac{\left(q\sqrt{a},-q\sqrt{a},a,y,z,a^2q/kyz;q\right)_n}{\left(\sqrt{a},-\sqrt{a},q,aq/y,aq/z,kyz/a;q\right)_n}\left(\frac{k}{a}\right)^n, \tag{4.70}$$

$$\beta_n(a,k)=\frac{\left(ky/a,kz/a,k,aq/yz;q\right)_n}{\left(aq/y,aq/z,kyz/a,q;q\right)_n} \tag{4.71}$$

alınarak,

$$\frac{\left(qab/k,kq/b;q\right)_\infty\left(q,k^2q/a,q^2a,q^2a^2/k^2;q^2\right)_\infty}{\left(kq,qa/k;q\right)_\infty}{}_{10}W_9\left(k;\frac{k^2}{ab},b,\sqrt{qa},-\sqrt{qa},\frac{ky}{a},\frac{kz}{a},\frac{aq}{yz};q,-\frac{qa}{k}\right)$$

$$=\left(\frac{k^2q}{ab},bq,\frac{a^2bq^2}{k^2},\frac{q^2a}{b};q^2\right)_\infty {}_{12}W_{11}\left(a;\frac{k^2}{ab},b,aq,y,yq,z,zq,\frac{a^2q}{kyz},\frac{a^2q^2}{kyz};q^2,q^2\right)$$

$$-q\frac{\left(1-aq^2\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)\left(1-a^2q/kyz\right)}{\left(1-q\right)\left(1-aq/y\right)\left(1-aq/z\right)\left(1-kyz/a\right)}\left(\frac{k^2}{ab},b,\frac{a^2bq^3}{k^2},\frac{q^3a}{b};q^2\right)_\infty .$$

$$ {}_{12}W_{11}\left(q^2a;\frac{k^2q}{ab},bq,aq,yq,yq^2zq,zq^2,\frac{a^2q^2}{kyz},\frac{a^2q^3}{kyz};q^2,q^2\right) \tag{4.72}$$

dönüşümü elde edilir.

(Yukarıdaki eşitlikte y=1 alınırsa "Eş. 4.57" in genişlemesi elde edilir.)

(Laughlin ve Zimmer, 2008)

**Sonuç 4.5.2.** Yukarıdaki teorem bazı WP-Baliey çiftine uygulanarak Anderws ve Berkoviç'in sonucu elde edilir.

$$\frac{\left(qab/k,kq/b;q\right)_\infty\left(q,k^2q/a,q^2a,q^2a^2/k^2;q^2\right)_\infty}{\left(kq,qa/k;q\right)_\infty}.$$

$$ {}_7\phi_6\left[\begin{matrix} q\sqrt{k},-q\sqrt{k},\frac{k^2}{ab},b,\sqrt{qa},-\sqrt{qa},\frac{k^2}{qa^2} \\ \sqrt{k},-\sqrt{k},\frac{qab}{k},\frac{qk}{b},k\sqrt{\frac{q}{a}},-k\sqrt{\frac{q}{a}}\end{matrix};q,-\frac{qa}{k}\right]=\left(\frac{k^2q}{ab},bq,\frac{a^2bq^2}{k^2},\frac{q^2a}{b};q^2\right)_\infty$$

$$\times{}_{16}W_{15}\left(a;\frac{k^2}{ab},b,aq,\frac{k}{aq},\frac{k}{a},a\sqrt{\frac{q}{k}},-a\sqrt{\frac{q}{k}},\frac{aq}{\sqrt{k}},-\frac{aq}{\sqrt{k}},a\sqrt{\frac{q^3}{k}},-a\sqrt{\frac{q^3}{k}},\frac{aq^2}{\sqrt{k}},-\frac{aq^2}{\sqrt{k}};q^2,q^2\right)$$

$$-q\frac{\left(1-aq^2\right)\left(1-qa^2/k\right)\left(1-q^2a^2/k\right)\left(1-k/aq\right)}{\left(1-q\right)\left(1-k\right)\left(1-kq\right)\left(1-a^2q^2/k\right)}\left(\frac{k^2}{ab},b,\frac{a^2bq^3}{k^2},\frac{q^3a}{b};q^2\right)_\infty$$

$$\times{}_{16}W_{15}\left(aq^2;\frac{k^2q}{ab},bq,aq,\frac{kq}{a},\frac{k}{a},a\sqrt{\frac{q^3}{k}},-a\sqrt{\frac{q^3}{k}},\frac{aq^2}{\sqrt{k}},-\frac{aq^2}{\sqrt{k}},a\sqrt{\frac{q^5}{k}},-a\sqrt{\frac{q^5}{k}},\frac{aq^3}{\sqrt{k}},-\frac{aq^3}{\sqrt{k}};q^2,q^2\right) \tag{4.73}$$

**İspat:** WP-Baliey çifti

$$\alpha_n\left(a,k\right)=\frac{\left(a,q\sqrt{a},-q\sqrt{a},k/aq;q\right)_n}{\left(q,\sqrt{a},-\sqrt{a},a^2q^2/k;q\right)_n}\frac{\left(qa^2/k;q\right)_{2n}}{\left(k;q\right)_{2n}}\left(\frac{k}{a}\right)^n, \tag{4.74}$$

$$\beta_n\left(a,k\right)=\frac{\left(k^2/qa^2;q\right)_n}{\left(k;q\right)_n} \tag{4.75}$$

alınarak "Eş. 4.22" dan elde edilir (Andrews ve Berkovich, 2002).

# KAYNAKLAR


Andrews,G.E., Askey, R., Roy, R., Special Functions, Encyclopedia Math. Appl., vol. 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1-644, (1999).

Andrews G., Berkovich A., The WP-Bailey tree and its implications, J. London Math. Soc. (2) 66 (3) ,529–549, (2002).

Başkan, T., "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", ***Uludağ Üniversitesi***, 170-194, (2102).

Bailey, W.N., " Generalized Hypergeometric Series", Stechert-Hafner Service Agency , New York and London, (1964).

Bressoud, D., "Some identities for terminating *q*-series", Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 89 (2) 211–223, (1981)

Chaudhry, M.A., Qadir A., Srivastava, H.M. and Paris, R.B., "Extended Hypergeometric and Con.uent Hypergeometric Functions", Applied Mathematics and Computation, 159; 589-602, (2004).

Chu, W. C., & Srivastava, H. M., "Ordinary and basic bivariate hypergeometric transformations associated with the Appell and Kampé de Fériet functions", *Journal of computational and applied mathematics*, *156*(2), 355-370, (2003).

Doran, R. S., Flajolet, P., Ismail, M., y'Lam, T., & Lutwak, E. Basic Hypergeometric Series Second Edition, Cambridge University Press, (2004).

Erkuş, E., Altn A., "A note on the Lagrange polynomials in several variables", J. Math. Anal. Appl., 310 no.1; 338-341, (2005).

Gasper G., Rahman M., "Basic Hypergeometric Series, with a foreword by Richard Askey, second ed., Encyclopedia Math. Appl., vol. 96, Cambridge Univ. Press, Cambridge, xxvi+428 pp, (2004).

Gauss, C.F., Disquisitiones generals circa seriem in.nitam. Ges. Werke 3; 123-163 and 207-229, (1866).

George E., Andrews, Bailey's transform, lemma, chains and tree, in: Special Functions, pp. 1–22, (2000)

Hasanov, A., Srivastava, H.M. and Turaev, M., "Decomposition formulas for some triple hypergeometric functions", J. Math. Anal. Appl., 324; 955-969, (2006).

Hacısalihoğlu, H., Halilov H.," Yüksek Matematik Klavuzu 1", Ankara, 443-495 (2009)

Horn, J., “Hypergeometrische Funktionen Zweier Veränderlichen”, Math. Ann., 105; 381-407, (1931).

Karadeniz,A.A.,”Yüksek Matematik, Cilt II”, İstanbul,1-62 (2007)

Karlsson P.W., Krupnikov E.D., Srivastava H.M., “Some hypergeometric transformation and reduction formulas involving Kampe de Feriet functions”, Internat.J.Math.Statist.Sci.9,211–226, (2000).

Lee P.A., Ong S.-H., Srivastava H.M., Some integrals of the products of Laguerre polynomials, Internat.J.Comput. Math.78, 303–321, (2001).

Mc Laughlin, J., & Zimmer, P., Some identities between basic hypergeometric series deriving from a new Bailey-type transformation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *345*(2), 670-677, (2008).

Ocak, R. “Kompleks Analiz Ders Notları”, Erzurum,1-197 (1986).

Özer, M., N., ”Matematik Analiz IV”, Ankara,1-56 (2005).

Rainville, E.D. 1973. Special functions. Macmillan Company, New York, (1973).

Slater, L.J. 1966. Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge.

Srivastava, H.M., Karlsson, P.W.,” Multiple Gaussian Hpergeometric Se-

ries”, Halsted Press (John Wiley and Sons), New York, (1985).

Şahin, R. “Çok Değişkenli Hipergeometrik Fonksiyonlar”, ***Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara, 1-77 (2011).

Şahin, R., Altın, A., “An extension of F1,F2,F3 Appell.s hypergeometric Functions”, Ars Combinatoria, In press, (2010).

Taşdelen, F., Altın, A., “Some solutions and Almansi expansion for a
class of higher order equations with variable coe¢ cients”, Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl., 4 no.4; 355-369, (2003).

Yağmur, “P-Değerli Fonksiyon Sınıfları Üzerinde Tanımlanan Lineer Operatörler”, ***Erzincan Üniversitesi Fen Fakültesi***, Erzincan, 1-60 (2010)

# ÖZGEÇMİŞ

01.02.1978 yılında Tunceli’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tunceli’de tamamladı. Lisans eğitimine 2004 yılında, Erzurum Atatürk Üniversitesi Erzincan yerleşkesinde, Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde başladı. Haziran 2008 de mezun oldu. 2008-2012 yılları arasında özel dershanelerde matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2012 yılında Erzincan Mesleki ve Teknik Anadolu lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı ve bu görevini devam ettirmektedir.