ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-FİBONACCİ SAYILARININ YENİ AİLE DİZİLERİ, PERİYOTLARI VE ÖZELLİKLERİ

Nurdan AKSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2016

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Nurdan AKSU

k-Fibonacci Sayılarının Yeni Aile Dizileri, Periyotları Ve Özellikleri adlı Yüksek Lisans tezi, Erzincan Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi 'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Nurdan AKSU

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU danışmanlığında, Nurdan AKSU tarafından hazırlanan bu çalışma 18/07/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU	*İmza:*
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU	*İmza:*
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İsrafil OKUMUŞ	*İmza:*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

18/07/2016

Prof. Dr. Ali SÜLÜN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

k-FİBONACCİ SAYILARININ YENİ AİLE DİZİLERİ, PERİYOTLARI VE ÖZELLİKLERİ

Nurdan AKSU

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada n ve $k \neq 0$ doğal sayılar olmak üzere $n = mk + r\ (0 \leq r < k)$ için$F_n^{(k)} = \frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}$ bağıntısı ile tanımlanan yeni bir ailenin, $\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$ Fibonacci dizilerinin p moduna göre basit periyodik diziler olduğu gösterildi. Yeni aile ve bilinen Fibonacci sayıları arasındaki bazı ilişkiler verildi. Ayrıca, yeni aile ve Lucas sayıları ile ilgili bazı teoremler ispatlandı.

2016, 92 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, Periyot.

ABSTRACT

MS Thesis

THE SEQUENCES OF NEW FAMILY OF *k*-FIBONACCI NUMBERS, ITS PERIOD AND IDENTITIES

Nurdan AKSU

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this study, it was showed that Fibonacci sequences $\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$ of a new family defined by $F_n^{(k)} = \frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}$are simply periodic sequences according to modulo p for $n = mk + r\ (0 \leq r < k)$where n and $k \neq 0$ be natural numbers. It was given some relationship between the new family and ordinary Fibonacci numbers. Also, ıt was proved some theorems concerning the new family and Lucas numbers.

2016, 92 pages

Keywords: Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, Period.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye ve anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri başta Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na olmak üzere Sayın Yrd. Doç. Dr. İsrafil OKUMUŞ'a ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyuncakendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması "Erzincan Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi" tarafından "FEN-A-240215-0122" proje numarası ile desteklenmiş olup teşekkürlerimi sunarım.

Nurdan AKSU
Temmuz 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

1	Birim Eleman
c_n	Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$ nın m Modülüne Göre Değeri
$F_k\big(G\ ;\ x_0,\ x_1, \ldots, x_{j-1}\big)$	G grubunun k-nacci dizisi
$\{F_{k,n}\}_{n\in N_0}$	k-Fibonacci Sayı Dizisi
$F_{s,n}^{(k)}$	k-Fibonacci Sayılarının Farklı Yeni Bir Ailesi
F_n	Bilinen Fibonacci Sayı Dizisi
$f_n^{(k)}$	k -Basamak Fibonacci Dizisinin n Elemanı
$F_n^{(k)}$	Yeni Fibonacci Aile Dizisi
$\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$	$mod\ p$ ye Göre$k$-Fibonacci Sayılarının Yeni Ailesi
G	Grup
$\|G\|$	Grubun Mertebesi
G/N	Bölüm Grubu
$H \leq G$	Alt Grup

$h_{(k,p)}$	$\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$ nin En Küçük Periyodu
$\{j_n\}$	Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi
$\{J_n\}$	Jacobsthal Sayı Dizisi
$k(m)$	Wall Sayısı
$\{L_{k,n}\}_{n\in N_0}$	k-Lucas Sayı Dizisi
$L_{s,n}^{(k)}$	k-Lucas Sayılarının Farklı Yeni Bir Ailesi
$\{L_n\}$	Lucas Sayı Dizisi
$L_n^{(k)}$	Genelleştirilmiş k-Lucas Sayıları
$\{P_n\}$	Pell Sayı Dizisi
$\{q_n\}$	Modify-Pell Sayı Dizisi
$\{Q_n\}$	Pell –Lucas Sayı Dizisi
R	Halka
$T_n^{(k)}$	k −Tridiagonal matrisi
$\{U_{k,n}\}$	k-Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci İtalya'nın Pisa şehrinde doğmuş olan İtalyan bir matematikçidir. Bu nedenle Pisalı Leonardo olarak da anılmaktadır. 1202 yılında yazdığı Liber Abaci (Hesap Kitabı) adlı en ünlü eseri ile Hindu-Arabic sayısal sistemini Batı Avrupa'ya tanıttı. Bu kitap Arap sayı sisteminin batı Avrupa'ya girmesinde büyük rol oynamıştır. Bu kitapta bulunan bir problem, ortaçağ matematiğine büyük katkılarda bulunan Fibonacci'yi, 600 yıl sonra 19. yüzyılın başlarından günümüzde meşhur hale gelmesine büyük katkıda bulunmuştur.19. yüzyılda Edward Lucas bu eserde gördüğü bir problemdeki $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ dizisinin her bir terimine Fibonacci sayısı ve diziye Fibonacci dizisi adını verdi.

1960 da Wall m modülüne göre Fibonacci dizlerinin uzunluğu ile ilgilendi. Wall sayısı ilk olarak D. D. Wall tarafından 1960 da ileri sürüldü ve Fibonacci dizisinin Wall sayısı ile ilgili özellikler ve bazı teoremler verildi (Wall, 1960).

1968 yılında Shah kısmen $\mathbb{Z}_m$ rezidüe sistemini içeren m modüllü tamsayıların Fibonacci dizisini belirledi (Shah 1968). Knox ise 1990 yılında Wall ve Shah'in çalışmaları yönünde bir çalışma yaptı. Knox'un çalışması k-nacci dizisini de içerir ve abelyen olması gerekmeyen sonlu gruplar için de uygulanır (Knox, 1990).

A. F. Horadam genelleştirilmiş Fibonacci dizileri ile ilgili mevcut literatürü geliştiren yönde çalışmalar yapıştır (Horadam, 1961).

Fibonacci sayılarının özellikleri uzun yıllardır incelenmektedir. Bu sayılar $n \geq 2$ olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ile formülleştirildi (Vorobyov 1976, Vajda 1989).

Fibonacci sayı dizilerinin çeşitli modüller altında indirgenmesi sonucu elde edilen uzunluklar ve bu periyotlar arasındaki bağıntıları incelediği yüksek lisans tezinde bunların yanı sıra Fibonacci dizisinin özellikleri ve bazı özel sayı dizileri arasındaki bağıntılara da yer verdi (Renault, 1996).

Fibonacci dizisinin özelliği kendinden önceki iki ardışık sayının toplamının kendisine eşit olmasıdır. Fibonacci sayıları modern bilimde teorik ve uygulamalı olarak çok geniş alana sahiptir.

Fibonacci dizisi ve onun bağlantılı olduğu yüksek mertebeli diziler (tribonacci, quatranacci, k-nacci) genellikle tamsayılar dizisi olarak gösterilir. Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi yıllardır yoğun bir şekilde çalışılmış ve cebir ve birçok alanda ilginç bir konu halini almıştır.

Doostie and Hashemi (2005, 2006). k-basamak Fibonacci dizileri için Wall sayıları incelendi (Lü and Wang 2007)

Fibonacci sayıları, dizileri ve uzunlukları ile ilgili birçok çalışma yapıldı. Bu tarihten beri sonlu grupların Fibonacci uzunluğu ile ilgili çalışmalar bir kaç farklı yönde hareket etti. Belli grupların Fibonacci uzunluğu son yıllarda matematikçiler tarafından ele alındı (Campbell 2004, Campbell 2005, Karaduman and Aydın 2006).

Tridigonal matrislerin determinantının genelleştirilmesi Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine çalışmalar yürüttü (Nalli, Civciv 2009).

Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan k-Fibonacci sayılarını tanımladılar ve Fibonacci dizisi ile Pell dizisinin bu sayı dizisinden elde edilebileceğinin gösterdiler (Falcon and Plaza, 2009).

Son yıllarda yeni aile dizileri üzerine çalışmalar yapılmaktadır.k-Fibonacci sayılarının yeni bie ailesini tanımladılar. Bu çalışmaya göre n ve $k(k \neq 0)$ doğal sayılar olmak üzere $n = mk + r\ (0 \leq r < k)$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur.

Bu parametreleri kullanarak $F_n^{(k)}$ genelleştirilmiş k −Fibonacci sayıları

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r},\ n = mk + r\ (0 \leq r < k)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu ise k-Fibonacci sayılarına yeni bir boyut kazanmıştır (El-Mikkawy, Sogabe, 2010).

Genelleştirilmiş k-Fibonacci ve k-Lucas sayılarını tanımladılar. $F_{k,n}$ve $L_{k,n}$, k-Fibonacci ve k-Lucas sayıları genelleştirilmiş k-Fibonacci ve k-Lucas sayıları $G_{k,n}$, adı altında genelleştirildi. Buna göre her $k$pozitif reel sayısı için $G_{k,0} = a$ ve $G_{k,1} = b$, başlangıç koşulları altında

$$G_{k,n+1} = kG_{k,n} + G_{k,n-1}\ ,\quad n \geq 1$$

olarak tanımlanmıştır (Falcon, Uslu, Taskara and Köse, 2011).

Son yıllarda halka üzerinde de bazı çalışmalar yapılmıştır. Taşyurdu ve Gültekin mertebesi p^2 olan birimli halkaların ve Galois cisminin Fibonacci dizileri oluşturuldu ve periyotları hesaplandı (Taşyurdu, Gültekin 2013, 2016).

Fibonacci sayı dizilerinin yeni aileleri üzerine k-Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizileri ve tanımlanan bu dizinin özelliklerini inceleyen çalışmalar yaptı (Panwar, Singh 2014).

Ömür Deveci Fibonacci p-dizilerini m-modülü üzerine çalışma yaptı (Deveci, 2015).

Sunulan bu tezde Mikkawy ve Sogabe'nin çalışmasında tanımlanan yeni bir ailenin, $\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$ Fibonacci dizilerinin p moduna göre basit periyodik diziler olduğu gösterildi. k-Fibonacci yeni aile sayı dizileri, bilinen Fibonacci dizileri ve bilinen Lucas dizileri arasındaki bazı ilişkiler elde edildi (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen, 2016).

Çalışmamızın ikinci bölümünde tez çalışmamış süresince bizlere ışık tutan bazı temel tanım ve teoremlerinden bahsedildi. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar olarak verildi.

Çalışmamız üçüncü bölümünde ilk olarak Fibonacci sayıları, Fibonacci dizileri, bazı özel sayı dizileri ve bu dizilerin Fibonacci sayıları arasındaki bağlantıları, özellikleri, farklı yeni aile dizileri ve bu dizilere ait özellikleri ile ilgili mevcut bilgiler ve temel teoremler sunuldu. Ayrıca $k(n)$ Wall sayısı tanımlanarak iki ve üç adımlı Fibonacci sayılarının özellikleri teoremlerle verildi. Bir grubun k-nacci dizileri ve periyodu ile ilgili mevcut bilgiler temel teoremler sunuldu.

Dördüncü bölümde $\left\{F_n^{(k)}\right\}$ yeni aile dizisinin bilinen Fibonacci ve Lucas sayıları ile aralarındaki ilişkiyi veren bazı teoremler verildi ve $\left\{F_n^{(k)}\right\}$ yeni aile dizisinin periyodik olduğu gösterildi. Bu teoremlerin uygulamaları yapıldı.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız süresince kullandığımız ve temel teşkil eden bazı kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1.1:A boş olmayan bir küme olmak üzere

$$*: A \times A \rightarrow A$$

dönüşümüne A üzerinde ikili işlem denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.2: Boş kümeden farklı bir küme üzerinde bir veya daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlemlerle birlikte bu kümeye bir cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir " $*$ " işlemi tanımlanmışsa bu cebirsel yapı $(A,*)$ ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.1.3:G, boş olmayan bir küme ve G üzerinde bir ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer

i." $*$ " işlemi birleşme özelliğini sağlarsa yani her

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

ise,
ii. Her $a \in G$ için

$$a * e = e * a = a$$

olacak biçimde bir $e \in G$ varsa,

iii. Her $a \in G$ için

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak biçimde $a' \in G$ varsa o zaman $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.4:$(G,*)$ bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

oluyorsa $(G,*)$ grubuna değişmeli (abel ya da komütatif) grup denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.5:$(G,*)$ bir grup olsun. Eğer G kümesi sonlu ise o zaman bu gruba sonlu grup denir. Eğer G kümesi sonlu değilse bu durumda $(G,*)$ grubuna sonsuz grup denir. Sonlu bir grubun elemanlarının sayısına grubun mertebesi ya da kardinalitesi denir. $o(G)$ veya $|G|$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.6:$(G,*)$ bir grup ve H , G nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H , G grubundaki işleme göre bir grup teşkil ederse $(H,*)$ cebirsel yapısına $(G,*)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki tanım ve teoremlerde ikili işlem için çarpımsal gösterim kullanılacaktır.

Tanım 2.1.7:$(G,\cdot)$ bir grup olmak üzere H , G nin alt grubu olsun. $g \in G$ olmak üzere

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

kümesine H nin sağ yan kümesi

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

kümesine H ın sol yan kümesi denir.

Toplam notasyonunda sırasıyla ($H + g = \{h + g : h \in H\}$ ve $g + H = \{g + h : h \in H\}$ olur). Tüm sağ ve sol yan kümelerin sınıfı G/H ile gösterilir. Yani

$$G/H = \{gH : g \in G\} = \{Hg : g \in G\}$$

dir (Bayraktar 2006).

Teorem 2.1.8:$(G,\cdot)$ bir grup ve $N \leq G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i.Her $a \in G$, her $n \in N$ için $ana^{-1} \in N$ dir.
ii. Her $a \in G$ için $aNa \subset N$ dir.
iii. Her $a \in G$ için $aNa = N$ dir.
iv. Her $a \in G$ için $aN = Na$ dır (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.9: Teorem 2.1.8 de denk koşullarından birini sağlayan G nin bir N alt grubuna normal alt grup denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.10:$(G,\cdot)$ bir grup ve S de G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun S yi ihtiva eden G nin bütün normal alt gruplarının ara kesitine S nin normal kapanışı denir ve $\bar{S}$ ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.1.11:N , $(G,\cdot)$ grubunun bir normal alt grubu ise G/N kümesi

$$(Na) \cdot (Nb) = Nab \text{ ya da } (aN) \cdot (bN) = abN$$

olarak tarif edilen " $\cdot$ " işlemine göre bir grup teşkil eder. Bu gruba G nin N ye göre bölüm grubu veya faktör grubu denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.12:$(G,*)$ ve (G',o) iki grup $f: G \to G'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x\,, y \in G$ için

$$f(x * y) = f(x)\; o\; f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f ye G den G' ne bir grup homomorfizmi ya da kısaca homomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tamım 2.1.13:$(G,*)$ ve (G',o) iki grup ve $f: G \to G'$ bir dönüşüm olsun. Eğer

i.f birebir ve örten
ii. Her $x, y \in G$ için $f(x * y) = f(x) o f(y)$
şartları sağlanıyorsa f ye G ile G' arasında bir izomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.14:R boştan farklı bir kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem " $+$ " ve " $\cdot$ " olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +.\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i.$(R, +)$, bir değişmeli gruptur.
ii." $\cdot$ " işleminin R de birleşme özelliği vardır.
iii." $\cdot$ " işlemini " $+$ " işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır yani her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$
dir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.15:$(R, +,\cdot)$ bir halka olsun.

i. Her $a, b, \in R$ için

$$ab = ba$$

oluyorsa R ye değişmeli halka denir.
ii.$(R,\cdot)$ birimli ise $(R, +,\cdot)$ halkasına birimli halka ve $(R,\cdot)$ nın birim elemanına R halkasının birim elemanı denir. R halkasının birimi "1_R" veya sadece "1" olarak gösterilir.
iii.$(R, +,\cdot)$ halkasının " $+$ " işlemine göre birim elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve "0_R" veya sadece "0" olarak gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.1.16:$(R, +,\cdot)$ bir halka ve $x \in R$ olsun. x in R de çarpma işlemine göre tersi varsa x e R de aritmetik birim denir. Aksi halde x e R de aritmetik birim değildir denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.17:$(R, +,\cdot)$ bir halka, H kümesi R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $(H, +,\cdot)$ cebirsel yapısı bir halka ise bu halkaya $(R, +,\cdot)$ halkasının bir alt halkası denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.18: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise o zaman bu halkaya cisim denir ve F ile gösterilir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.19:$(F, +,\cdot)$ bir cisim olsun. F nin boş kümeden farklı bir S alt kümesi $(F, +,\cdot)$ deki işlemlere göre bir cisim olursa S ye F nin bir alt cismi denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.20:$(G,\cdot)$ bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin her elemanı S nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kümesi G grubunun gerenlerinin bir kümesi olarak adlandırılır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.21: Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.22:G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun.$s_1, s_2, \ldots, s_n S$ nin elemanları ve her bir $\alpha = \pm 1$ olmak üzere S deki bir kelime $s_1^{\alpha_1}, s_2^{\alpha_2}, \ldots, s_n^{\alpha_n}$ şeklinde ifade edilir.

S deki her bir kelime, G nin bir elemanını temsil eder.

Tanım 2.1.23:G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarını ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir.

Tanım 2.1.24:F bir grup ve S de F nin bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $\sigma : S \to G$ ye dönüşümü için bir tek $\sigma' : F \to G$ ye homomorfizmi varsa F ye X üzerinde serbesttir denir.

Burada σ' , σ nın genişlemesidir. Yani her $x \in X$ için $\sigma'(x) = \sigma(x)$ biçimindedir.

Tanım 2.1.25:X bir küme olsun. $F = F(x)$ ile X üzerinde bir serbest grubu R de F nin bir alt kümesini göstersin. $N = \bar{R}$ ile de R nin F deki normal kapanışını gösterelim ve $G = F/N$ olsun. Bu taktirde $G = \langle X|R\rangle$ye G nin temsili denir. Bir $\langle X|R\rangle$ temsilinde X kümesine gerenlerin kümesi ve R kümesine de bağıntıların kümesi adı verilir. Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere eğer bir G grubu $\langle X|R\rangle$ şeklinde temsil edilirse bu gruba sonlu temsil edilmiş grup denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Sayı Dizileri

Bu kısımda, literatürde yer alan, birçok matematikçinin çalışma konusu olmuş ve uygulama alanları geniş olan ikinci mertebeden lineer özel sayı dizileri hakkında temel tanım ve özellikler verilecektir.

3.1.1. Fibonacci sayıları ve dizileri

19. yüzyıl sayı teorisyenlerinden Edvard Lucas, Leonarda Pisa'nın Liber Abaci adlı eserinde gördüğü bir problemdeki $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$ sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi, bu dizinin terimlerine ise Fibonacci sayıları ismini verdi. Fibonacci dizisindeki her bir terim alışılmış olarak bir alt indisle gösterilir.F_n , n. Fibonacci sayısı, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$olmak üzere Fibonacci sayıları, $n \geq 2$ ise

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ve $n < 0$ ise

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

bağıntısı ile tanımlanan $(F_n)_{-\infty}^{\infty}$ dizisinin elemanlarıdır. Yani Fibonacci dizisindeki her terim kendinden önceki iki terimin toplamıdır. Bu şekilde olan dizilere iç içe dizi denir. Fibonacci sayıları ile ilgili bilinen birçok sonuç vardır (Vorobyov 1976, Vajda 1989).

Fibonacci dizisinin terimlerini yazabilmek için yalnızca için $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{3.1.1}$$

bağıntısını kullanmak yetmez. Çünkü F_0 veF_1 nin keyfi seçilmesi ile (3.1.1) şartını sağlayan birçok farklı dizi oluşturulabilir.

Örnek olarak

$$7, 2, 9, 11, 20, 31, 51, \ldots$$

$$-3, -5, -8, -13, -21, \ldots$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.1.1) $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ dizisini bir tek şekilde belirlemek için yeterli değildir. Bu nedenle (3.1.1) bağıntısına başka şartlar ilave edilmesi gerekir. O halde (3.1.1) bağıntısı kullanılarak dizinin bütün terimlerinin hesaplanabilmesi için dizinin ilk iki teriminin bilinmesi gerekir. F_2, F_1 ve F_0 sayılarının toplamı olarak yeniden temsil edilebilir.F_2 için belirlenen değere F_1 ilave ederek F_3 değeri, F_3 için belirlenen değere F_2 ilave ederek F_4değeri, F_4 için belirlenen değere F_3 ilave ederek F_5 değeri ve bu şekilde devam edilerek keyfi olarak büyük indisli terimler hesaplanabilir.

Yukarıda bahsedilen Fibonacci sayılarına iki adımlı Fibonacci sayıları denir. Şimdi bu sayıların bazı özellikleri aşağıdaki teoremler ile verilecektir.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n \geq 0$$

rekürens bağıntısı ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemi olduğundan, bu denkleme ait $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olup

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1.2}$$

ifadesine Fibonacci sayılarının Binet formülü denir. Binet formülünden hareketle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

olduğu kolayca görülmektedir. Buradan ardışık iki Fibonacci sayısının oranının altınorana yakınsadığı görülür.

Tanım 3.1.1.1:$L_0 = 2\ ve\ L_1 = 1$ olmak üzere

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad , \quad n \geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen$\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tam sayılar dizisine Lucas dizisi denir.

Lucas dizisinde her n tam sayısına karşılık gelen her bir değere n. Lucas sayısı denir. L_n, n. Lucas sayısını gösterir. Lucas sayılarının rekürans bağıntısı Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısıyla aynı olduğundan

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere Lucas sayılarına ait Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad , \quad n \geq 1$$

şeklindedir. Ayrıca Fibonacci ve Lucas sayıları arasında birçok bağıntı bulunmaktadır. Lucas sayı dizisini de en az Fibonacci sayı dizileri kadar önemli hale getirmiştir. Lucas sayılarının, Fibonacci sayıları ile olan

- $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$
- $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $F_{n+r} = L_r F_n + (-1)^n F_{n-r}$
- $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$
- $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$

bağıntıları ile bu önem kuvvet kazanmıştır. Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili uygulamalar için Koshy'nin kitabı değerli bir kaynaktır (Koshy, 2001).

Tanım 3.1.1.2:$P_0 = 0,\ P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n\,, \quad n \geq 0$$

lineer rekürens bağıntısı ile verilen $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki tam sayılar dizisine Pell dizisi denir.

Pell dizisine ait karakteristik denklem$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$olup denkleminin kökleri

$$\gamma = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \delta = 1 - \sqrt{2}$$

olmak üzere Pell sayılarının Binet formülü

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

şeklindedir. $P_n,\ n$. Pell sayısı ve $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ (gümüş oran) olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \gamma$$

dır.

Tanım 3.1.1.3:$Q_0 = 2$ ve$Q_1 = 2$ olmak üzere

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n\ , n \geq 0$$

lineer rekürens bağıntısı ile verilen $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$şeklindeki tam sayılar dizisine Pell-Lucas dizisi denir.

Pell-Lucas sayılarının Binet Formülü, $\gamma = 1 + \sqrt{2}\,,\ \delta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere,

$$Q_n = \gamma^n + \delta^n$$

şeklindedir.

Pell ve Pell-Lucas dizilerinin rekürans bağıntıları aynı olduğundan, Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntılar

- $Q_n = \frac{P_{n+1}+P_{n-1}}{2}$
- $Q_n^2 = 2P_n^2 + (-1)^n$

şeklindedir.

Tanım 3.1.1.4:$q_0 = 1$ ve $q_1 = 1$olmak üzere

$$q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n\,, \qquad n \geq 0$$

lineer rekürens bağıntısı ile verilen $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$şeklindeki tam sayılar dizisine Modify-Pell dizisi denir.

Modify-Pell sayılarının Binet Formülü, $\gamma = 1 + \sqrt{2}\,,\ \delta = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$$q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{\gamma + \delta}$$

dır. Modify-Pell ve Pell sayıları arasında

$$q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

ilişkisi vardır. Modify-Pell ve Pell-Lucas sayıları arasında ise

$$q_n = Q_n - Q_{n-1}$$

şeklinde bağıntı vardır.

Tanım 3.1.1.5:$J_0 = 0$ ve $J = 1$ olmak üzere

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n\,, \qquad n \geq 0$$

lineer rekürens bağıntısı ile verilen $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$şeklindeki tam sayılar dizisine Jacobsthal dizisi denir. Bu dizinin elemanlarına da Jacobsthal sayıları denir.

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n\,, \qquad n \geq 0$$

rekürans bağıntısına ait karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ olup denkleminin kökleri

$$\varphi = 2 \text{ ve } \omega = -1$$

dir. Jacobsthal sayılarının Binet Formülü ise

$$J_n = \frac{\varphi^n - \omega^n}{\varphi - \omega}$$

dir.

Tanım 3.1.1.6:$j_0 = 2\,,\ j_1 = 1$ olmak üzere

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n\,, \qquad n \geq 0$$

lineer rekürens bağıntısı ile verilen $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$şeklindeki tam sayılar dizisine Jacobsthal-Lucas dizisi denir. Bu dizinin elemanlarına da Jacobsthal-Lucas sayıları denir.

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n\,, \qquad n \geq 0$$

rekürans bağıntısına ait karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

olup denkleminin kökleri $\varphi = -2\,,\ \omega = 1$dir.

Buradan Jacobsthal-Lucas sayılarının Binet Formülü

$$j_n = \varphi^n + \omega^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir. Jacobsthal sayıları ile Jacobsthal-Lucas sayıları arasındaki bağıntılardan bazıları

- $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$
- $j_n J_n = J_{2n}$

şeklindedir.

Tablo 3.1. Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Modified Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin ilk terimleri

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	...
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	...
q_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119	...
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	...
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	2047	...

Aşağıda tez çalışmamız süresince kullandığımız bazı önemli eşitlikler ve ispatlarına yer verilmiştir.

Teorem 3.1.1.7:$F_n n$. Fibonacci sayısını ve L_n de n. Lucas sayısını göstermek üzere

- $F_{2n} = F_n^2 + 2F_{n-1}F_n$
- $F_{n+2}F_{n-1} = F_{n+1}^2 - F_n^2$
- $2(F_{n+1}^2 F_{n+2}^2) = F_{n+3}^3 F_n^2$
- $F_{2k+1}F_{2n+1} = F_{(n+k+1)}^2 + F_{n-k}^2$
- $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$
- $(-1)^{n-r}F_r^2 = F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r}$
- $(-1)^m F_{n-m} = F_n F_{m+1} + F_m F_{n+1}$
- $F_{n+m} = F_{n+1}F_{m+1} - F_{n-1}F_{m-1}$
- $F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1}F_{n-m}$
- $F_n F_{n+1} = F_{n-1}F_{n+2} + (-1)^{n-1}$

dir. (Vajda 1989; Renaut 1996).

Teorem 3.1.1.8:$F_0, F_1, F_2, \ \dots \ , F_n$ Fibonacci dizisi için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1$

(Taşyurdu 2013).

Tanım 3.1.1.9:$F_0 = 0,\ F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ için

$$F_3 = F_2 + F_1 + F_0, F_4 = F_3 + F_2 + F_1, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$$

şeklindeki sayılara ise 3-adımlı Fibonacci sayıları denir.

Şimdi 3-adımlı Fibonacci sayılarının bazı özelliklerini içeren teorem verilecektir.

Teorem 3.1.1.10: $F_0, F_1, F_2, \ \dots \ , F_n$, ... 3-adım Fibonacci dizisi için

- $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \frac{(F_{n+3} - F_{n+1} - 1)}{2}$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = \frac{(F_{2n+2} - F_{2n+1})}{2}$
- $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = \frac{(F_{2n+1} + F_{2n-1})}{2}$
- $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

yazılır (Taşyurdu 2013).

Teorem 3.1.1.11: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ dir.

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım Yani her n doğal sayısı için

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. İddianın $n = 1$ için

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup doğru olduğu görülür. İddianın n için doğru yani,

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Buradan

$$AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n+1} & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} = A^{n+1}$$

bulunur ki bu da iddianın $n + 1$ için doğru olduğunu gösterir. İspat tamamlanır.

Fibonacci sayıları ile ilgili en eski özdeşliktir. Fransız gökbilimci Dominique Cassini tarafından 1680 yılında keşfedildi.

Teorem 3.1.1.12: (Cassini Formülü)

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad n \geq 1$$

eşitliği mevcuttur.

İspat: Teorem 3.1.1.11. e göre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $\det(A) = -1$ dir. Ayrıca

$$(-1)^n = (\det A)^n = \det(A^n) = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$$

olduğundan $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ bulunur.

Teorem 3.1.1.13: (Honsberger Formülü)$m \geq 1$, $n \geq 1$ için

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

eşitliği mevcuttur.

İspat: Teorem 3.1.1.10. a göre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $A^{n+m} = A^nA^m$ olduğundan

$$A^nA^m = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m & F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} \\ F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m & F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1} \end{pmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$A^{n+m} = \begin{pmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{pmatrix}$$

olup buradan

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1.14: $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ dir.

İspat: Teorem 3.1.1.13. de $n = m$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_{n+n} &= F_{2n} \\ &= F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} \\ &= F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.1.1.15: $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ dir.

İspat: Teorem 3.1.1.13. de $m = n + 1$ alınırsa ve

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned} F_{2n+1} &= F_{n-1}F_{n+1} + F_nF_{n+2} \\ &= (F_{n+1} - F_n)F_{n+1} + F_n(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1}^2 - F_nF_{n+1} + F_n^2 + F_nF_{n+1} \\ &= F_{n+1}^2 + F_n^2 \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

3.1.2. k-nacci dizileri

Tanım 3.1.2.1:$j \leq k$ olsun. Sonlu bir G grubundaki k-nacci dizisi, verilen bir başlangıç kümesi $x_{0,}x_1, \ \ldots, x_{j-1}$ için her bir elemanı

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \ldots x_{n-1} & , \quad j \leq n < k \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \ldots x_{n-1} & , \quad n \geq k \end{cases}$$

ile tanımlanan $x_0, \ x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots, x_n, \ldots$ grup elemanlarının bir dizisidir. $x_0, \ x_1, \ldots, x_{j-1}$ ile gerilen bir G grubunun k-nacci dizisi $F_k\left(G \ ; \ x_0, \ x_1, \ldots, x_{j-1}\right)$ ile gösterilir (Campbell 2003).

Tanım 3.1.2.2: Sonlu bir G grubunun her elemanı dizide görülecek şekilde k-nacci dizisi varsa bu sonlu G grubuna k-nacci dizilendirilebilir denir (Knox 1990).

Örneğin, $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ için $(\mathbb{Z}_4, +)$ grubunun 3-nacci dizisi

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \ldots$$

şeklinde olup grubun her elemanı dizide mevcuttur. Dolayısıyla $(\mathbb{Z}_4, +)$ grubu 3-nacci dizilendirilebilirdir.

Tanım 3.1.2.3: Belli bir noktadan sonra grup elemanlarının dizisi sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyorsa grup elemanlarının dizisine periyodik denir (Knox 1990).

Tanım 3.1.2.4: Periyodik dizide tekrarlanan alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir (Knox 1990).

Örneğin;

$$a, b, c, d, e, b, c, d, e, \ldots$$

dizisi başlangıç elemanı olan a elemanından sonra periyodiktir ve periyodu 4 tür.

Tanım 3.1.2.5: Diziyi, ilk k elemanı tekrarlanan bir alt dizi oluşturuyorsa diziye k periyotlu basit periyodik dizi denir.

Örneğin;

$$a, b, c, d, e, f, a\ b, c, d, e, f, \ldots$$

dizisi 5 periyodu ile basit periyodiktir (Knox 1990).

Tanım 3.1.2.6: Her pozitif k reel sayısı için $F_{k,0} = 0\ , F_{k,1} = 1$ olmak üzere,

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}$$

ile tanımlanan $\{F_{k,n}\}\ , n \geq 0$ sayı dizisine k-Fibonacci dizisi ve bu dizinin elemanlarına da k-Fibonacci sayıları denir.

k-Fibonacci dizisi Fibonacci dizisinin bir genellemesidir. $k \geq 1$ tam sayısı için farklı diziler elde edilir. Eğer $F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}$ rekürans bağıntısında $k = 1$ alınırsa Fibonacci dizisi, $k = 2$ alınırsa Pell dizisi elde edilir. k-Fibonacci dizisine ait rekürans bağıntısının karakteristik denklemi olup bu denklemin kökleri

$$\alpha_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \text{ ve } \beta_k = -\frac{1}{\alpha_k} = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olmak üzere k-Fibonacci sayılarının Binet Formülü

$$F_{k,n} = \frac{\alpha_k^n - \beta_k^n}{\alpha_k - \beta_k}$$

şeklindedir.

Karakteristik denklemin pozitif kökü olan α_k ya k-altın oran denir. $k = 1, 2, 3$ değerleri için, $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ifadesine altın oran, $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ ifadesine gümüş oran, $\alpha_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ifadesine ise bronz oran adı verilir.

Tanım 3.1.2.7: Her pozitif k reel sayısı için $L_{k,0} = 2$, $L_{k,1} = k$ olmak üzere

$$L_{k,n+2} = kL_{k,n+1} + L_{k,n}$$

ile tanımlanan $\{L_{k,n}\}$, $n \geq 0$ sayı dizisine, k-Lucas dizisi ve bu dizinin elemanlarına da k-Lucas sayıları denir.

k-Lucas dizisi, Lucas dizisinin bir genellemesidir. $k \geq 1$ tam sayısı için farklı diziler elde edilir.

$$L_{k,n+2} = kL_{k,n+1} + L_{k,n}$$

rekürans bağıntısında $k = 1$alınırsa Lucas dizisi, $k = 2$ alınırsa Pell-Lucas dizisi elde edilir.

$$\alpha_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad , \qquad \beta_k = -\frac{1}{\alpha_k} = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

olmak üzere k-Lucas sayılarının Binet Formülü

$$L_{k,n} = \alpha_k^n + \beta_k^n$$

şeklindedir.

3.1.3. $m$modülüne göre sayı dizileri

3.1.3.1.$m$modülüne göre Fibonacci dizileri

F_n Fibonacci dizilerinin n. elemanını göstermek üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,, \qquad n \geq 1$$

dizisinin her F_n elemanı m modülüne indirgenebilirdir.

Tanım 3.1.3.1.1:$(F_n(mod\, m))_{n=-\infty}^{\infty}$ dizisinin periyodunun minimum uzunluğu Wall sayısı olarak adlandırılır.

$(F_n(mod\, m))_{n=-\infty}^{\infty}$ dizisinin periyodunun minimum uzunluğu $k = k(m)$ ile gösterilir ve Wall sayısının hesaplanmasına ilişkin bir örnek aşağıda verilmektedir.

Örnek 3.1.3.1.2:$m = 5$ ise Wall sayısı 20 dir ve $k(5) = 20$ olarak yazılır. Aşağıdaki tablo kullanılarak bu görülmektedir.

Tablo 3.2. Wall sayıları

n	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
$F_n\ mod\ 5$	1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 3 2 0 2 2 4 1 0 1 1 2 ...

Tam sayılarda her bir eleman m modülüne göre indirgendiğinde elde edilen klasik Fibonacci dizisi $\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}_m\,; 0, 1)$ olarak yazılır. Sonlu bir grubun Fibonacci dizisi, grup elemanlarının 2-nacci dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.3.1.3:$F_0 = a$, $F_1 = b$ ve $F_2 = c$ olmak üzere $k_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}(m)$, her bir terim m modülüne göre indirgendiğinde

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$$

bağıntısı ile tanımlanan F_n dizisinin minimal periyodunu gösterir (Campbell 2006).

Örnek 3.1.3.1.4:$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için F_n dizisi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \dots$$

olarak elde edilir. F_n dizisinin her bir elemanı 7 modülüne göre indirgenirse $F_n(mod\ 7)$ dizisi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, \dots$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $k(7) = 16$ dır.

Teorem 3.1.3.1.5:$F_{\boldsymbol{n}}(mod\ m)$ dizileri periyodiktir (Wall 1960).

İspat:$F_{\boldsymbol{n}}(mod\ m)$ dizileri sonlu sayıda m^2 çiftlerinden oluştuğundan elemanları tekrar eder. Fibonacci dizisi tanımından

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

dir. Bu bağıntı kullanılarak

$$F_{t+1} \equiv F_{s+1}(mod\ m)$$

$$F_t \equiv F_s(mod\ m)$$

olup

$$F_{t+1} - F_t \equiv F_{s+1} - F_s$$

$$F_{t-1} \equiv F_{s-1}$$

elde edilir.

Buradan aynı oranda indisleri arttırarak veya azaltarak elde edilen dizinin elemanlarının aynı olduğu görülür. Dolayısıyla

$$F_{t-1-s+2} \equiv F_{s-1-s+2}$$

$$F_{t-s+1} \equiv F_1$$

ve

$$F_{t-1-s+1} \equiv F_{s-1-s+1}$$

$$F_{t-s} \equiv F_0$$

dır. Yani

$$F_{t-1} \equiv F_{s-1}, \ldots, F_{t-s+1} \equiv F_1, F_{t-s} \equiv F_0$$

dir. Böylece diziler basit periyodiktir.

Teorem 3.1.3.1.6: Eğer m, $m = \prod {p_i}^{e_i}$ asal çarpanlamaya sahipse ve k_i, $F_n(mod\, p_i^{e_i})$ periyod uzunluğunu gösteriyorsa k , k_i nin en küçük ortak katı olan $lcm[k_i]$ ye eşittir. Yani $k = lcm[k_i]$ dir (Wall 1960).

İspat: "k_i, $F_n(mod\, p_i^{e_i})$ periyodunun uzunluğudur" ifadesi $F_n(mod\, p_i^{e_i})$ dizilerinin sadece ck_i uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar ettiğini vurgular. "k , $F_n(mod\, m)$periyodunun uzunluğudur" ifadesi ise $F_n(mod\, p_i^{e_i})$ nin tüm i değerleri için k terimlerinden sonra tekrar ettiğini vurgular. Dolayısıyla k, i nin tüm değerleri için ck_i şeklindedir. Böyle sayılar $F_n(mod\, m)$ nin bir periyodunu verdiği için $k = lcm[k_i]$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.3.1.7:$F_n \equiv 0(mod\, m)$ terimleri basit bir aritmetik sıra şeklindedir (Wall 1960).

Yani $x = 0,1,2,\ldots$ ve $d = d(m)$ olan bazı pozitif tam sayılar için $n = dx$ tüm $F_n \equiv 0(mod\, m)$ terimlerini sağlar

İspat:$i \geq j$ olmak üzere $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $F_{n+t} = F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1}$ bilinen bağıntılarından $F_i = 0(mod\, m)$ ve $F_{i+j} = 0(mod\, m)$den

$$F_{i+j} = 0(mod\, m)\ ve\ F_{i-j} = 0(mod\, m)$$

elde edilir. İlk olarak $n = i$ ve $t = j$ düzeni için

$$F_n = 0(mod\, m)$$

$$F_t = 0(mod\, m)$$

olur. $F_i = 0(mod\, m)$ ve $F_j = 0(mod\, m)$ kullanılarak

$$F_{n+t} = F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1}$$

$$F_{i+j} = F_{i+1}F_j + F_iF_{j-1}$$

$$F_{i+j} = 0(mod\, m)$$

elde edilir. Daha sonra $n + t = i$ ve $n = j$ düzeni için $F_j = 0(mod\, m)$ kullanılarak $t = i - j$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_i &= F_{n+t} \\ &= F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1} \\ &= F_{n+1}F_t + F_jF_{t-1} \\ &= F_{n+1}F_t \end{aligned}$$

elde edilir.$F_i = 0(mod\, m)$ olduğundan

$$F_{n+1}F_t \equiv (mod\, m)$$

dir.

$(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $F_n = 0(mod\ m)$ bağıntılarından

$$F_t = F_{i-j} \equiv 0(mod\ m)$$

ikinci bağıntı elde edilir. Dolayısıyla n değeri $n = xd$ şeklindeki gibi bir modülün negatif olmayan terimlerin içeriği ile ilgilidir. Teorem 3.1.3.1.7 e göre F_0 ın sadece$F_n \equiv 0(mod\ m)$ olmadığını ayrıca $d > 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla arada belli bir artış olacak ve $x = 0, 1, 2, ...$ için n ler dizide bulunacaktır.

Ayrıca $d|k$ olduğu belirtilmelidir.$d \leq k$ ile birçok m değeri bulunabilir (Wall 1960).

Şimdi $k(m)$ nin bilinen bazı özellikleri Teoremler ve örnekleri ile birlikte verilecektir.

Teorem 3.1.3.1.8:$m > 2$ ise $k(m)$ çift sayıdır (Wall 1960).

Örnek 3.1.3.1.9:$m = 2$ için

$$0, 1, 1, 0, 1, ...$$

olup Wall sayısı $k(2) = 3$ tür. $m = 3$ için

$$0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, ...$$

olup Wall sayısı $k(3) = 8$ dir. Benzer şekilde devam edilerek $k(5) = 20$, $k(6) = 24$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.3.1.10: Eğer $k(p^2) \neq k(p)$ ise $k(p^a) = p^{a-1}k(p)$ dir. Ayrıca t, $k(p^t) = k(p)$ eşitliğini sağlayan en büyük tam sayı ise $a > t$ olmak üzere $k(p^a) = p^{a-t}k(p)$ dir (Wall 1960).

Örnek 3.1.3.1.11:$p = 2$ için $k(2^2) = k(4) = 6$ ve $k(2) = 3$ dır. Dolayısıyla

$$k(2^2) \neq k(2)$$

olup

$$k(2^2) = 2^{2-1}k(2)$$

$$= 2 \cdot 3$$

tür.

Teorem 3.1.3.1.12:$m = p = 10x \pm 1$ ise $k(p)|(p-1)$ dir (Wall 1960).

Örnek 3.1.3.1.13:$x = 3$ için $p = 29$ ya da $p = 31$ olup $k(29) = 14$ ve $k(31) = 30$ dur. Buradan

$$k(29)|28$$

$$14|28$$

ve

$$k(31)|30$$

$$30|30$$

olur.

Lemma 3.1.3.1.14:$x^2 = x + 1 \ (mod\, p)$ denkliği sadece $p = 5$ olduğunda çift köke sahiptir (Wall 1960).

Teorem 3.1.3.1.15:$m = p = 10x \pm 3$ ise $k(p)|(2p+2)$ dir (Wall 1960).

3.1.3.2. $m$modülüne göre k-Fibonacci dizileri

Tanım 3.1.3.2.1:$n > k$ olmak üzere k-adım Fibonacci dizisinin n. terimi $f_n^{(k)}$ ile gösterilir ve

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \qquad (3.1.3.2.1)$$

olarak tanımlalnır. Burada $1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ dir.

$f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)}(mod\ m)$ olmak üzere bu diziyi m modülüne indirgeyerek

$$f(k,m) = (f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_n^{(k,m)}, \dots)$$

şeklinde tekrar eden bir dizi elde edilebilir. Buradan

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_k^{(k,m)}\right) = (0, 0, \dots,)$$

elde edilir. Bu ise (3.1.3.2.1) bağıntısı ile aynıdır (Lü and Wang 2007).

Teorem 3.1.3.2.2:$f(k,m)$ periyodik bir dizidir (Lü and Wang 2007).

İspat:$S_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : 0 \leq a_i \leq m-1\}$ olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur. Yani

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \dots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak sekilde $u \geq 0$ için $v \geq u$ sayısı vardır. Tanım (3.1.3.2.1) den,

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

dir.

Buradan

$$f_u^{(k.m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \dots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve

$$f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

elde edilir. Bu ise $f(k,m)$ dizisinin periyodik bir dizi olduğunu gösterir.$h_k(m)$ ile $f(k,m)$ nin en küçük periyodu gösterilir. $f(k,m)$ nin periyodu ya da m modülüne göre k-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır (Lü and Wang 2007).

Örnek 3.1.3.2.3:$k = 4$ adım için

$s(4{,}3) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 0{,}1, 0, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1, \dots,)$

dizisi ele alınırsa her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar eder. Dolayısıyla $h_4(3) = 26$ dır. p_i farklı asal sayılar, e_i pozitif tam sayılar olmak üzere

$m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ $(t \geq 1)$ ise bu durumda $h_k(m)$, $h_k(p_i^{e_i})$ lerin en küçük ortak katıdır (Lü and Wang 2007).Aşağıdaki tablolar ile bu sayıları doğrulayan bazı örnekler verilmiştir.

Tablo 3.3.3-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı

p	$h_3(p)$	Sonuç
5	31	$h_3(p)\|p^3-1$
13	168	$h_3(p)\|p^3-p^2$
23	553	$h_3(p)\|p^3-1$
67	1519	$h_3(p)\|p^3-1$
107	1272	$h_3(p)\|p^3-p$
179	32221	$h_3(p)\|p^3-1$
241	29040	$h_3(p)\|p^3-p$
317	100807	$h_3(p)\|p^3-1$
389	151711	$h_3(p)\|p^3-1$
557	103416	$h_3(p)\|p^3-p$
839	704761	$h_3(p)\|p^3-1$
881	777043	$h_3(p)\|p^3-1$
971	943813	$h_3(p)\|p^3-1$
1033	1067088	$h_3(p)\|p^3-p$
1103	1217713	$h_3(p)\|p^3-1$
1301	1693903	$h_3(p)\|p^3-p$
1447	2093808	$h_3(p)\|p^3-p$
1759	3094080	$h_3(p)\|p^3-p$
2851	8128200	$h_3(p)\|p^3-p$
3347	11205757	$h_3(p)\|p^3-1$
4831	11669280	$h_3(p)\|p^3-p$
13367	7444862	$h_3(p)\|p^3-p$
15791	10389820	$h_3(p)\|p^3-p$
17207	17206	$h_3(p)\|p^3-p^2$
18047	169324	$h_3(p)\|p^3-p$

Tablo 3.4. 4-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı

p	$h_4(p)$	Sonuç
5	312	$h_4(p)\|p^4-1$
11	120	$h_4(p)\|p^4-p^2$
13	84	$h_4(p)\|p^4-p^2$
19	6858	$h_4(p)\|p^4-p$
29	280	$h_4(p)\|p^4-p^2$
37	1368	$h_4(p)\|p^4-p^2$
41	240	$h_4(p)\|p^4-p^2$
67	100254	$h_4(p)\|p^4-p$
83	1157520	$h_4(p)\|p^4-1$
151	533216	$h_4(p)\|p^4-1$
211	9393930	$h_4(p)\|p^4-p$
433	23248760	$h_4(p)\|p^4-1$
907	822648	$h_4(p)\|p^4-p^2$
1277	1630728	$h_4(p)\|p^4-p^2$
1579	623310	$h_4(p)\|p^4-p^2$
1973	1946364	$h_4(p)\|p^4-p^2$
2593	1680912	$h_4(p)\|p^4-p^2$
2749	7557000	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3079	4740120	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3331	396270	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3581	3205890	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3733	2322548	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3823	3822	$h_4(p)\|p^4-p^2$
4019	8076180	$h_4(p)\|p^4-p^3$
4253	6029336	$h_4(p)\|p^4-p^2$

Tablo 3.5.5-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı

p	$h_5(p)$	Sonuç
5	781	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
7	2801	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
11	16105	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
19	13032	$h_5(p) \mid p^5 - p$
31	190861	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
41	2896405	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
53	8042221	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
79	39449441	$h_5(p) \mid p^5 - 1$
89	3690720	$h_5(p) \mid p^5 - p$
163	176477940	$h_5(p) \mid p^5 - p$
283	20022	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
419	35812	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
503	127263526	$h_5(p) \mid p^5 - p^2$
683	159305993	$h_5(p) \mid p^5 - p^2$
823	677328	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
1259	317016	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
1709	1460340	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2287	50292	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2549	6497400	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
2957	8743848	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
3163	3162	$h_5(p) \mid p^5 - p^4$
3541	12538680	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
3929	15437040	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
4159	17297280	$h_5(p) \mid p^5 - p^3$
		$h_5(p) \mid p^5 - p^3$

3.1.4. Fibonacci uzunluğu

$A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$ olmak üzere sonlu olarak gerilmiş bir $G = \langle a \rangle$ grubu için Fibonacci orbiti ve Fibonacci uzunluğu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1.4.1:G , $A = \{a_1,\ a_2, \dots, a_n\}$ geren kümesi ile sonlu olarak gerilmiş bir grup olsun. $A,\ (a_1,\ a_2, \dots, a_n)$ sıralı n-li olarak yazıldığında A geren kümesine ait G nin Fibonacci orbiti

$$x_0 = a_1, x_1 = a_2, \dots, x_{n-1} = a_n$$

ve

$$x_{n+i} = \prod_{j=1}^{n} x_{i+j+1} \qquad i \geq 0$$

Dizisi olup $F_A(G)$ ile gösterilir (Campbell 2006).

$$\{x_0 x_1, \dots, x_{j-1}, x_j = x_0 x_1 \dots x_{j-1}, x_{j+1} = x_0 x_1 \dots x_{j-1} x_j, \dots, x_{k-1} = x_o x_1 \dots x_{k-1} x_{k-2}\}$$

geren kümesine bağlı G nin Fibonacci orbiti $F_k\big(G\ ;\ x_0,\ x_1, \dots, x_{j-1}\big)$ dir. Örneğin $F_4(G\ ;\ x_0,\ x_1)$ için dizi

$$x_0, x_1, x_2 = x_0 x_1, x_3 = x_0 x_1 x_2 = x_o x_1 x_0 x_1, x_4 = x_0 x_1 x_2 x_3, x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4, \dots$$

olur. Bu ise $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ kümesine bağlı G nin Fibonacci orbitidir. $F_k\big(G\ ;\ x_0,\ x_1, \dots, x_{j-1}\big)k$-nacci dizisinin periyodu $P_k\big(G\ ;\ x_0,\ x_1, \dots, x_{j-1}\big)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4.2:A geren kümesi ve G bir grup olmak üzere $F_A(G)$ periyodik ise dizinin periyodunun minimum uzunluğuna A geren kümesine bağlı G nin Fibonacci uzunluğu denir ve $LEN_A(G)$ olarak yazılır.$F_A(G)$ periyodik değilse G , A geren kümesine bağlı sonsuz Fibonacci uzunluğuna sahiptir.

Örnek 3.1.4.3:$\langle a, b\ ;\ a^2, b^n, (ab)^2\rangle$ temsili ile tanımlanmış $2n$. mertebeden olan D_n dihedral grupların Fibonacci uzunluğu 6 dır. Gerçekten

$$a,\, b,\, ab,\, bab = a,\, aba = b^{-1},\, ab^{-1},\, b^{-1}ab^{-1} = a,\, ab^{-1}a = b,\, \ldots$$

olup

$$\{a, b, ab, a\ , b^{-1}, ab^{-1}, a, b, \ldots\}$$

elde edilir. Dolayısıyla $LEN_{(a,b)}(D_n) = 6$ dır.

3.2. Fibonacci Sayılarının Yeni Aile Dizileri

3.2.1. $\boldsymbol{k}$-Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi

Bu bölümde Moawwad El-Mikkawy ve Tomohiro Sogabe'nin çalışmalarında $F_n^{(k)}$ olarak gösterdikleri k-Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi verilecektir.

Tanım 3.2.1.1: ($\boldsymbol{k}$-Fibonacci Sayılar)n doğal sayı ve $k \neq 0$ doğal sayılar olmak üzere $n = mk + r$ $(0 \leq r < k)$ olacak şekilde m ve r sayıları vardır. Bu parametreleri kullanarak $F_n^{(k)}$ genelleştirilmiş k-Fibonacci sayıları,

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r},\, n = mk + r \qquad (3.2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır (Mikkawy, Sogabe 2010).

Bu çalışmada $\{F_n\}$ ile bilinen Fibonacci dizisi, $\left\{F_n^{(k)}\right\}$ ile de Fibonacci sayılarının yeni aile dizisi gösterildi.

Şimdi (3.2.1.1) bağıntısını inceleyelim:

- $k = 1$ için (3.2.1.1) denklemi göz önüne alındığında $0 \leq r < 1$ olup $r = 0$ ve $m = n$ bulunur. Bu durumda $n = mk + r,\ (n = n \cdot 1 + 0)$ olmak üzere

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^1}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})^0(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})^{1-0}$$

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(3.2.1.2)$$

denklemine dönüşür bu ise aslında (3.1.2) denkleminde verilen bilinen Fibonacci ailesinin Binet Formülüdür. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ değerleri (3.2.1.2) denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\left\{F_n^{(1)}\right\}_{n=0}^4 = \{0, 1, 1, 2, 3\}$$

alışılmış Fibonacci sayıları olan F_n elde edilir.

- $k = 2$ için (3.2.1.1.) denklemi göz önüne alındığında $n = mk + r$, $0 \leq r < k$ koşulu ile $\left\{F_n^{(2)}\right\}$ dizisinin ilk bir kaç terimini oluşturmaya çalışalım:

➢ $F_0^{(2)}$elemanı için $n = mk + r$ ise$0 = m \cdot 2 + r$ olmak üzere$r = 0,\ m = 0$ olup

$$F_0^{(2)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}(\alpha^{0+2} - \beta^{0+2})^0(\alpha^{0+1} - \beta^{0+1})^{2-0}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{20}{20}$$

$$= 1$$

- $F_1^{(2)}$elemanı için $n = mk + r$ ise $1 = 0 \cdot 2 + 1$ olmak olmak $r = 0$, $m = 0$ olup

$$F_1^{(2)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}(\alpha^{0+2} - \beta^{0+2})^1(\alpha^{1+1} - \beta^{1+1})^{2-1}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]^1\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]^1$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= 1$$

- $F_2^{(2)}$elemanı için $n = mk + r$ ise $2 = 1 \cdot 2 + 0$ olmak üzere$r = 0$, $m = 1$ olup

$$F_2^{(2)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}(\alpha^{1+2} - \beta^{1+2})^0(\alpha^{1+1} - \beta^{1+1})^{2-0}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]^2$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$= 1$$

- $F_3^{(2)}$ elemanı için $n = mk + r$ ise $3 = 1 \cdot 2 + 1$ olmak üzere $r = 1$, $m = 1$ olup

$$F_3^{(2)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}(\alpha^{1+2} - \beta^{1+2})^1(\alpha^{1+1} - \beta^{1+1})^{2-0}$$

$$F_3^{(2)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)^1\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^2$$

$$= 2$$

bulunur.

Yukarıda verilen metod ile 2. yeni aile dizisinin tüm terimleri hesaplanabilir. Benzer düşünce ile

$$\left\{F_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{10} = \{1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 15, 25, 40, 64\}$$

ile dizinin ilk 11 terimi verilmiştir.

- $k = 3$ için (3.2.1.1.) denklemi göz önüne alındığında $n = mk + r$, $0 \leq r < k$ koşulu ile, $\left\{F_n^{(3)}\right\}$ dizisinin ilk bir kaç terimini oluşturmaya çalışalım:

➢ $F_0^{(3)}$elemanı için $n = mk + r$ ise $0 = m \cdot 3 + r$olmak üzere$r = 0$, $m = 0$ olup

$$F_0^{(3)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^3}(\alpha^{0+2} - \beta^{0+2})^0(\alpha^{0+1} - \beta^{0+1})^{3-0}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}} \cdot (1) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

$$= 1,$$

➢ $F_1^{(3)}$ elemanı için $n = mk + r$ ise $1 = m \cdot 3 + r$ olmak üzere$r = 1$, $m = 0$ olup

$$F_1^{(3)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^3}(\alpha^{0+2} - \beta^{0+2})^1(\alpha^{0+1} - \beta^{0+1})^{3-1}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]^1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= 1,$$

değerleri bulunur.

Yukarıda verilen metod ile 3. yeni aile dizisinin de tüm terimleri hesaplanabilir. Benzer düşünce ile

$$\left\{F_n^{(3)}\right\}_{n=0}^{10} = \{1, 1, 1, 1, 2, 4, 8, 12, 18, 27, 45\}$$

dizisi 3. yeni aile dizisinin ilk 11 terimini verilmiştir.

Görüldüğü gibi (3.2.1.1) denklemi ile terimlerin hesaplanması pek kullanışlı bir yöntem değildir. Bunun için dizinin terimlerini daha pratik olarak elde etmemizi sağlayan bağıntı aşağıda verilmiştir.

(3.2.1.1) denkleminden yararlanarak

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}\underbrace{(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r}_{(F_{m+1})^r(\sqrt{5})^r}\underbrace{(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}}_{(F_m)^{k-r}\left(\sqrt{5}\right)^{k-r}}$$

yazılabilir. (3.1.2) denkleminden $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$olup yukarıdaki eşitlik

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}(F_{m+1})^r(\sqrt{5})^r(F_m)^{k-r}\left(\sqrt{5}\right)^{k-r}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}(F_{m+1})^r(F_m)^{k-r}\left(\sqrt{5}\right)^k$$

$$= (F_m)^{k-r}(F_{m+1})^r$$

olarak bulunur.

Buradan

$$F_n^{(k)} = (F_m)^{k-r}(F_{m+1})^r, n = mk + r \quad (0 \leq r < k) \tag{3.2.1.3}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı yardımıyla bilinen Fibonacci sayıları kullanarak yeni aile dizisinin elemanları oluşturulabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyebiliriz.

Örnek 3.2.1.2: (3.2.1.3) eşitliğini kullanarak aşağıdaki gibi bilinen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots,\}$ Fibonacci sayı dizisinin terimlerinin elde edilişini verelim. $k = 2$ için (3.2.1.3) eşitliğini kullanarak $\left\{F_n^{(2)}\right\}$ yeni aile dizisinin terimlerini hesaplayalım:

- $0 \leq r < k$ olmak üzere $n = mk + r \Rightarrow 0 = 0 \cdot 2 + 0$ olup

$$\begin{aligned} F_0^{(2)} &= (F_0)^{2-0}(F_1)^0 \\ &= (1)^2(1)^0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

- $0 \leq r < k$ olmak üzere $n = mk + r \Rightarrow 1 = 0 \cdot 2 + 1$ olup

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= (F_0)^{2-1}(F_1)^1 \\ &= (1)^1(1)^1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

- $0 \leq r < k$ olmak üzere $n = mk + r \Rightarrow 2 = 1 \cdot 2 + 0$ olup

$$\begin{aligned} F_2^{(2)} &= (F_1)^{2-0}(F_2)^0 \\ &= (1)^2(2)^0 \\ &= 1, \end{aligned}$$

- $0 \leq r < k$ olmak üzere $n = mk + r \Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1$ olup

$$F_3^{(2)} = (F_1)^{2-1}(F_2)^1$$
$$= (1)^2(2)^1$$
$$= 2,$$

- $0 \leq r < k$ olmak üzere $n = mk + r \Rightarrow 4 = 2 \cdot 2 + 0$ olup

$$F_4^{(2)} = (F_2)^{2-0}(F_2)^0$$
$$= (2)^2(3)^0$$
$$= 4,$$

- $0 \leq r < k$ olmak üzeren $= mk + r \Rightarrow \; 5 = 2 \cdot 2 + 1$olup

$$F_5^{(2)} = (F_2)^{2-1}(F_3)^1$$
$$= (2)^1(3)^1$$
$$= 6,$$

- $0 \leq r < k$ olmak üzere $n = mk + r \Rightarrow 6 = 3 \cdot 2 + 0$ olup

$$F_6^{(2)} = (F_3)^{2-0}(F_4)^0$$
$$= (3)^2(5)^0$$
$$= 9,$$

- $0 \leq r < k \; olmak$ üzere $n = mk + r \Rightarrow \; 7 = 3 \cdot 2 + 1$ olup

$$F_7^{(2)} = (F_3)^{2-1}(F_4)^1$$
$$= (3)^1(5)^1$$
$$= 15,$$

- $0 \leq r < k$ olmak üzere $n = mk + r \Rightarrow 8 = 4 \cdot 2 + 0$ olup

$$F_8^{(2)} = (F_4)^{2-0}(F_5)^0$$

$$= (5)^2(8)^0$$

$$= 25,$$

terimleri elde edilir. Örneklerden de görüldüğü gibi $(0 \leq r < k)$ koşulu kısıtlayıcı bir etken olduğundan m ve r sayıları için farklı bir alternatif bulunmamaktadır. Örneğin,$F_7^{(2)}$ terimini bulurken $n = 7$ ve $k = 2$ olduğunu biliyoruz ve $n = mk + r$ eşitliğinde $7 = m \cdot 2 + r$, $(0 \leq r < 2)$ koşulu $r = 1$ den başka bir altermatif olmadığını açıkça göstermektedir.

Teorem 3.2.1.3:$k, m \in \{1, 2, 3, \dots\}$olsun. k, m sabit sayıları için genelleştirilmişk-Fibonacci sayıları ve bilinen Fibonacci sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

i.$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}F_m F_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$

ii.$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = F_m F_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} = F_m(F_{m+2})^{(k-1)}$

iii.$\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \frac{F_m}{F_{m-1}}[(F_{m+1})^k - (F_m)^k] = \frac{F_m}{F_{m-1}}\left[F_{(m+1)k}^{(k)} - F_{mk}^{(k)}\right]$

İspat:i.$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{(k-1)} \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i}(F_m)^{k-i}(F_{m+1})^i$

$$= (-1)^{k-1}F_m \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(F_m)^{k-1-i}(F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1}F_m \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-F_m)^{k-1-i}(F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1}F_m(F_{m+1} - F_m)^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1}F_m(F_{m-1})^{k-1}$$

olur.

Burada $r = 0$ için (3.2.1.3) eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} F_m F_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$$

elde edilir.

ii. İspat i. deki benzer düşünce ile

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (F_m)^{k-i} (F_{m+1})^i$$

elde edilir. (3.2.1.3) eşitliğinden

$$F_{mk+i}^{(k)} = (F_m)^{k-i} (F_{m+1})^i$$

$$= (\frac{F_{m+1}}{F_m})^i (F_m)^k$$

$$= F_m (F_{m+1} + F_m)^{k-1} \text{(Binomial Teoreminden)}$$

$$= F_m (F_{m+2})^{k-1}$$

olupburadan $r = 0$ için (3.2.1.3) eşitliğinden

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} = F_{mk+i}^{(k)} F_m F_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)}$$

bulunur.

iii.$F_{mk+i}^{(k)} (F_{mk})^{i-1} (F_{m+1})^i = (\frac{F_{m+1}}{F_m})^i (F_m)^k$ eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-i} (F_m)^{k-i} (F_{m+1})^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)^i (F_m)^k$$

$$= (F_m)^k \sum_{i=0}^{k-1} (\frac{F_{m+1}}{F_m})^{\,i}$$

$$= (F_m)^k (\frac{\left(\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)^k - 1}{\frac{F_{m+1}}{F_m} - 1})$$

$$= (F_m)^k \frac{[(F_{m+1})^k - (F_m)^k]}{(F_m)^k} \frac{F_m}{F_{m+1} - F_m}$$

$$= \frac{F_m}{F_{m-1}} [(F_{m+1})^k - (F_m)^k]$$

$$= \frac{F_m}{F_{m-1}} \left(F_{(m+1)k}^{(k)} - F_{mk}^{k}\right)$$

elde edilir. Yani

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \frac{F_m}{F_{m-1}} \left(F_{(m+1)k}^{(k)} - F_{mk}^{k}\right)$$

dir. Fibonacci sayılarının özel tridiagonal matrislerin determinantlarından da elde edildiğini biliyoruz. Benzer şekilde, genelleştrilmiş k-Fibonacci sayıları, özel bir k-Tridiagonal matrisin determinantından da elde edilebilir.

k-Tridiagonal matrisin formu

$$T_n^{(k)} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-k} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-k} \\ b_{k+1} & 0 & \cdots & 0 & d_{n-k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{k+2} & \cdots & 0 & 0 & d_{n-k+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

olup bu durumda

$$d_1 = \ldots = d_n = a_1 = \ldots = a_n = 1 \; ve \; b_{k+1} = \ldots = b_n = -1$$

elde edilir.

Buradan

$$F_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & , \quad n \leq k \\ detT_n^{(k)}, & n > k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.1.4}$$

elde edelir. $T_n^{(k)}$ matrisindeki a_i elemanının $i = 1, 2, 3, \ldots, n-k$ değerlerinin her biri için sütun sayısı $(k+i)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca $T_n^{(k)}$ matrisinde d_i vea_i elemanlarının arasında da $(k-1)$ tane 0 elemanı olduğuna dikkat edilmelidir. Sonuç olarak $k = 1$ için bilinen tridiagonal matris elde edilir.

Teorem 3.2.1 4:$k = 2$ için yeni aile $n \geq 0$, $s \geq 0$ ve $n+s \geq 1$ için

$$F_{2(n+s-1)}^{(2)} - F_{(n+s)} F_{(n+s-2)} = (-1)^{n+s-1}$$

dir.

İspat:$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formunda Fibonacci matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve (3.2.1.3) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} F_{n+s} & F_{n+s-1} \\ F_{n+s-1} & F_{n+s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+s-1} & F_{n+s-2} \\ F_{n+s-2} & F_{n+s-3} \end{pmatrix} = C^{n+s-1} \begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ F_1 & F_{-1} \end{pmatrix} = C^{n+s}$$

elde edilir. Yani

$$\begin{pmatrix} F_{n+s} & F_{n+s-1} \\ F_{n+s-1} & F_{n+s-1} \end{pmatrix} = C^{n+s}$$

olup her iki tarafın determinantı alınırsa,

$$F_{n+s} F_{n+s-2} - (F_{n+s-1})^2 = (-1)^{n+s}$$

dir.$k = 2$ ve $r = 0$ için (3.2.1.3) denkleminden

$$(F_{n+s-1})^2 = F^{(2)}_{2(n+s-1)}$$

elde edilir.

Buradan

$$F^{(2)}_{2(n+s-1)} - F_{n+s}F_{n+s-2} = (-1)^{n+s-1}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1.5:$F_n^{(2)}$ ve $G_n^{(2)}$ üreteç fonksiyonu için

i.$F_n^{(2)} = F_{n-1}^{(2)} + F_{n-3}^{(2)} + F_{n-4}^{(2)}$, $n = 4, 5, ...$

ii.$G_n^{(2)}(x) = \frac{1}{1-x-x^3-x^4}$

dir.

İspat: i. Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyelim. Buradan

$$F_{2n}^{(2)} = F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n-3}^{(2)} + F_{2n-4}^{(2)}$$

denklemin doğruluğunu göstermek için

$$F_{2m}^{(2)} = (F_m)^2 \qquad (3.2.1.5)$$

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_m F_{m+1} \qquad (3.2.1.6)$$

Tanım 3.2.1.1 den elde edilen eşitliklerinden yararlanacağız. Buradan

$$\begin{aligned} F_{2m}^{(2)} = (F_m)^2 &= F_m(F_{m-1} + F_{m-2}) \\ &= F_{m-1}F_m + F_{m-2}F_m \\ &= F_{m-1}F_m + F_{m-2}(F_{m-1} + F_{m-2}) \\ &= F_{m-1}F_m + F_{m-2}F_{m-1}(F_{m-2})^2 \end{aligned}$$

$$= F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)} + F_{2m-4}^{(2)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, n sayısının tek sayı olması durumunu inceleyelim. Yani

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_{2m}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim. Buradan

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_m F_{m+1}$$

$$= F_m(F_m + F_{m-1})$$

$$= (F_m)^2 + F_m F_{m-1}$$

$$= (F_m)^2 + F_{m-1}(F_{m-1} + F_{m-2})$$

$$= (F_m)^2 + (F_{m-1})^2 + F_{m-1}F_{m-2}$$

$$= F_{2m}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

ii.$G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)} x^n$ (3.2.1.7)

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$xG_n^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(2)} x^n \quad (3.2.1.8)$$

olup benzer düşünce ile

$$x^3 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-3}^{(2)} x^n \quad (3.2.1.9)$$

$$x^4 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} F_{n-4}^{(2)} x^n \tag{3.2.1.10}$$

elde edilir. Buradan olmak üzere

$$(3.2.1.7) - \{(3.2.1.8) + (3.2.1.9) + (3.2.1.10)\}$$

işlemini düşünelim.

Bu işlem ve Teorem 3.2.1.5 i kullanarak

$$(1 - x - x^3 - x^4) G_n^{(2)}(x) = \left(F_0^{(2)} + F_1^{(2)} x + F_2^{(2)} x^2 + F_3^{(2)} x^3\right)$$

$$-\left(F_0^{(2)} x + F_1^{(2)} x^2 + F_2^{(2)} x^3\right) - \left(F_0^{(2)} x^3\right)$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty} (F_n^{(2)} - F_{n-1}^{(2)} - F_{n-3}^{(2)} - F_{n-4}^{(2)}) x^n$$

$$= (1 + x + x^2 + 2x^3) - (x + x^2 + x^3) - x^3 + 0$$

$$= 1$$

$$G_n^{(2)}(x) = \frac{1}{1 - x - x^3 - x^4}$$

eşitliği elde edilip ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1.5 in sonucu olarak

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_{2m}^{(2)} + F_{2m-1}^{(2)}$$

reküranss bağıntısını elde edilir. Burada $n = 2m + 1$ sayısının tek sayı olduğuna dikkat edilmelidir.

Benzer şekilde $n = 2m$ durumunda da

$$F_{2m}^{(2)} = \begin{cases} F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} - 1\,, & m \text{ tek} \\ F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} \quad\quad\,, & m \text{ çift} \end{cases}$$

elde ederiz.

Şimdi 3. yeni aile dizisinin n. terinini bulabilmek için kullanılacak bağıntıları vereceğiz.

Teorem 3.2.1.6:

i.$F_n^{(3)} = F_{n-1}^{(3)} + F_{n-2}^{(3)} - F_{n-3}^{(3)} + F_{n-4}^{(3)} + F_{n-5}^{(3)} + F_{n-6}^{(3)} - F_{n-7}^{(3)} - F_{n-8}^{(3)}, \quad n \geq 7$

ii.$G_n^{(3)} = \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3-x^4-x^5-x^6+x^7+x^8}$

dir.

Burada $F_{-1}^{(3)} = 0$olduğuna dikkat etmeliyiz. Daha genel haliyle, $k = 1,2,\dots,$ için $F_{-1}^{(3)} = 0$ olması durumuna dikkat edilmelidir. $k = 4, 5, \dots$ için $F_n^{(k)}$ yeni ailesinin üreteç fonksiyonu ve rekürans bağıntılarını ifade edelim: (i,j). elemanları $F_i^{(j)}$ olan A matrisi$A = \left[F_i^{(j)}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ ise

$$\det A = \begin{cases} 1 & , \; n \text{ tek} \\ -1 & , \; n \text{ çift} \end{cases}$$

olur. $k = n - 1$ olduğunda $m = r = 1$ olup $F_n^{(n-1)} = 2$ olduğunu görülür.

Şimdi bu teoremlerin dışında ispatsız olarak bazı özdeşlikleri verelim. k-Fibonacci sayılarının yeni ailesine ait bazı eşitlikler şöyledir:

- $2F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n}^{(2)} = F_{2n+1}$.

- $F_{2n}^{(2)} + F_{2n-2}^{(2)} = F_{2n} = 1 + \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}$.
- $F_{2n+2}^{(2)} - F_{2n-2}^{(2)} = F_{2n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} F_{2i}$.
- $F_{2n}^{(2)} - F_{n-i}F_{n+i} = (-1)^{n-i+1}F_{2i-2}^{(2)}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- $F_{2n}^{(2)} = (F_n)^2 = \begin{cases} F_{n-1}F_{n+1} - 1 & , \quad n \text{ tek} \\ F_{n-1}F_{n+1} + 1 & , \quad n \text{ çift.} \end{cases}$
- $F_{3n+3}^{(3)} + F_{3n}^{(3)} - F_{3n-3}^{(3)} = F_{3n+2}$.
- $F_{2n}^{(2)} = \frac{1}{5}[2L_{2n+2} - (L_{n+1})^2]$.
- $F_{4n+1}^{(2)} = L_{n+1}F_nF_{2n}$

3.2.2. k-Lucas sayılarının yeni bir ailesi

Tanım 3.2.2.1. (k-Lucas Sayılar) n ve $k \neq 0$ doğal sayılar olmak üzere $n = mk + r$, $0 \leq r < k$ olacak şekilde m ve r sayıları vardır. Bu parametreleri kullanarak $L_n^{(k)}$ genelleştirilmiş k-Lucas sayıları

$$L_n^{(k)} = (\alpha^{m+1} + \beta^{m+1})^r (\alpha^m + \beta^m)^{k-r} \qquad (3.2.2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi (3.2.2.1) denklemini inceleyelim:

$k = 1$ durumu göz önüne alındığında $0 \leq r < 1$ olacağından $r = 0$ ve $m = n$ bulunur. Bu durumda

$$\left\{L_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{4} = \{2, 1, 3, 4, 7\}$$

olup alışılmış Lucas sayıları olan L_n elde edilir. Yeni ailenin $k = 2, 3$ değerleri için

$$\left\{L_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{7} = \{4, 2, 1, 3, 9, 12, 16, 28\}$$

$$\left\{L_n^{(3)}\right\}_{n=0}^{7} = \{8,4,2,1,3,9,27,36\}$$

olup genelleştirilmiş k-Lucas ve Lucas sayıları arasında

$$L_n^{(k)} = (L_{m+1})^r (L_m)^{k-r} \quad (3.2.2.2)$$

bağıntısı yazılabilir.

Teorem 3.2.2.2:$k, m \in \{1,2,3,\ldots\}$ olsun. k, m sabit sayıları için genelleştirilmiş k-Lucas ve alışılmış Lucas sayıları arasında

i.$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}L_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}L_m L_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$

ii.$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}L_{mk+i}^{(k)} = L_m L_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} = L_m(L_{m+2})^{k-1}$

iii.$\sum_{i=0}^{k-1} L_{mk+i}^{(k)} = \frac{L_m}{L_{m-1}}[(L_{m+1})^k - (L_m)^k] = \frac{L_m}{L_{m-1}}\left[L_{(m+1)k}^{(k)} - L_{mk}^{(k)}\right]$

eşitlikleri vardır.

İspat: i.$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}L_{mk+i}^{(k)} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(L_m)^{k-i}(L_{m+1})^i$

$$(-1)^{k-1}L_m\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}(L_m)^{k-1-i}(L_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1}L_m\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(L_{m+1})^i(-L_m)^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1}L_m(L_{m+1}-L_m)^{k-1} \text{ (Binomial Teoremi'nden)}$$

$$= (-1)^{k-1}L_m(L_{m-1})^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} L_m L_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)} \qquad (r = 0 \text{ için})$$

elde edilir.

ii.$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} L_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (L_m)^{k-i} (L_{m+1})^i$

$$= L_m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (L_m)^{k-1-i} (L_{m+1})^i$$

$$= L_m (L_m + L_{m+1})^{k-1}$$

$$= L_m (L_{m+2})^{k-1}$$

$= L_m L_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} \quad (r = 0$ için)

elde edilir.

iii.$\sum_{i=0}^{k-1} L_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} (L_{m+1})^i (L_m)^{k-i}$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^i (L_m)^k$$

$$= (L_m)^k \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^i$$

$$= (L_m)^k \left(\frac{\left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^k - 1}{\frac{L_{m+1}}{L_m} - 1} \right)$$

$$= (L_m)^k \frac{[(L_{m+1})^k - (L_m)^k]}{(L_m)^k} \frac{L_m}{L_{m+1} - L_m}$$

$$= \frac{L_m}{L_{m-1}} [(L_{m+1})^k - (L_m)^k]$$

olup $r = 0$ için (3.2.2.2) denkleminden

$$\sum_{i=0}^{k-1} L_{mk+i}^{(k)} = \frac{L_m}{L_{m-1}}\left[L_{(m+1)k}^{(k)} - L_{mk}^{(k)}\right]$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.2.2.3:$k = 2$ için yeni aile $n \geq 0$, $s \geq 0$ ve $n + s \geq 1$ olduğunda

$$L_{2(n+s-1)}^{(2)} - L_{(n+s)}L_{(n+s-2)} = 5(-1)^{n+s-1}$$

bağıntısı elde edilir.

İspat:$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formunda Lucas matrisi olsun. Daha sonra C matrisini, (3.2.2.2) denklemini ve 3.1.1.11 Teoremini kullanarak

$$\begin{pmatrix} L_{n+s} & L_{n+s-1} \\ L_{n+s-1} & L_{n+s-2} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} L_{n+s-1} & L_{n+s-2} \\ L_{n+s-2} & L_{n+s-3} \end{pmatrix} = C^{n+s-1}\begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ L_0 & L_{-1} \end{pmatrix} = C^{n+s-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Her iki tarafın determinantını alınırsa

$$L_{n+s}L_{n+s-2} - (L_{n+s-1})^2 = (-5)(-1)^{n+s-1}$$

$$L_{n+s}L_{n+s-2} - (L_{n+s-1})^2 = 5(-1)^{n+s}$$

olup$k = 2$ ve $r = 0$ için (3.2.2.2) denkleminden

$$(L_{n+s-1})^2 = L_{2(n+s-1)}^{(2)}$$

olduğunu elde ederiz. Buradan

$$L_{2(n+s-1)}^{(2)} - L_{n+s}L_{n+s-2} = 5(-1)^{n+s-1}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2.4:$L_n^{(2)}$ ve $G_n^{(2)}$ için

i.$L_n^{(2)} = L_{n-1}^{(2)} + L_{n-3}^{(2)} + L_{n-4}^{(2)}, \ n = 4, 5, \ldots$

ii.$G_n^{(2)} = \frac{4-2x-x^2-2x^3}{1-x-x^3-x^4}$

eşitlikleri vardır.

İspat: i. Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyelim.

$$L_{2m}^{(2)} = L_{2m-1}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)} + L_{2m-4}^{(2)}$$

yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için

$$L_{2m}^{(2)} = (L_m)^2 \qquad (3.2.2.3)$$

$$L_{2m}^{(2)} = L_m \qquad (3.2.2.4)$$

şeklinde iki bağıntıyı kullanacağız.

Buradan

$$\begin{aligned} L_{2m}^{(2)} &= (L_m)^2 \\ &= L_m(L_{m-2} + L_{m-1}) \\ &= L_m L_{m-1} + L_m L_{m-2} \\ &= L_m L_{m-1} + L_{m-2}(L_{m-1} + L_{m-2}) \\ &= L_m L_{m-1} + L_{m-1} L_{m-2} + (L_{m-2})^2 \\ &= L_{2m-1}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)} + L_{2m-4}^{(2)} \text{((3.2.2.2) denklemnden)} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, n sayısının tek sayı olması durumunu inceleyelim. Yani

$$L_{2m+2}^{(2)} = L_{2m}^{(2)} + L_{2m-2}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim. Buradan

$$L_{2m+2}^{(2)} = L_m L_{m+1}$$

$$= L_m(L_m + L_{m-1})$$

$$= (L_m)^2 + L_m L_{m-1}$$

$$= (L_m)^2 + L_{m-1}(L_{m-1} + L_{m-2})$$

$$= (L_m)^2 + (L_{m-2})^2 + L_{m-1} + L_{m-2}$$

$$= L_{2m}^{(2)} + L_{2m-2}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)}$$

olur.

ii. $G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(2)} x^n$ (3.2.2.5)

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$xG_n^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}^{(2)} x^n \qquad (3.2.2.6)$$

olur.

Benzer düşünce ile

$$x^3 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} L_{n-3}^{(2)} x^n \qquad (3.2.2.7)$$

$$x^4 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} L_{n-4}^{(2)} x^n \qquad (3.2.2.7)$$

olmak üzere

$$(3.2.2.5) - \{(3.2.2.6) + (3.2.2.7) + (3.2.2.8)\}$$

işlemini kullanarak

$$(1 - x - x^3 - x^4) G_n^{(2)}(x) = \left(L_0^{(2)} + L_1^{(2)} x + L_2^{(2)} x^2 + L_3^{(2)} x^3\right)$$

$$-\left(L_0^{(2)}x+L_1^{(2)}x^2+L_2^{(2)}x^3+L_0^{(2)}x^3\right)$$

$$+\sum_{n=4}^{\infty}\left(L_n^{(2)}-L_{n-1}^{(2)}-L_{n-3}^{(2)}-L_{n-4}^{(2)}\right)x^n$$

$$=(4+2x+x^2+3x^3)-(4x+2x^2+x^3+4x^3)$$

$$=4-2x-x^2-2x^3$$

$$=\frac{4-2x-x^2-2x^3}{1-x-x^3-x^4}$$

olup

$$G_n^{(2)}=\frac{4-2x-x^2-2x^3}{1-x-x^3-x^4}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremin sonucu olarak

$$L_{2m+1}^{(2)}=L_{2m}^{(2)}+L_{2m-1}^{(2)}$$

rekürans bağıntısını elde edilir.

Burada $n=2m+1$ sayısının tek sayı olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer $n=2m$ alınırsa

$$L_{2m}^{(2)}=\begin{cases}L_{2m-1}^{(2)}+L_{2m-2}^{(2)}-5 & , \quad m \text{ tek ise}\\ L_{2m-1}^{(2)}+L_{2m-2}^{(2)}+5 & , \quad m \text{ çift ise}\end{cases}$$

bağıntısı elde edilir.

3.2.3. k-Fibonacci ve k-Lucas sayılarının farklı yeni bir ailesi

Tanım 3.2.3.1:n, $s \neq 0$ ve $k \neq 0$ doğal sayılar olsun. Bu durumda $0 \leq r < k$, $n = mk + r$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $F_{s,n}^{(k)}$ k-Fibonacci sayıları

$$F_{s,n}^{(k)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^k}(r_1^{m+1} - r_2^{m+1})^r (r_1^m - r_2^m)^{k-r} \quad (3.2.3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

(3.2.3.1) bağıntısı kullanarak yeni ailenin $k = 1,2,3$ için sayılarını bulalım:

- $k = 1$ durumu göz önüne alındığında $n = m + r$ ve $0 \leq r < 1$ olup
  - $n = 0$ için $0 = m + r$ için$m = 0$, $r = 0$ olmak üzere

$$F_{s,0}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1 - r_2)^0 (r_1^0 - r_2^0) = 0,$$

  - $n = 1$ için $1 = m + r$ için$m = 1$, $r = 0$ olmak üzere

$$F_{s,1}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^2 - r_2^2)^0 (r_1 - r_2) = 1,$$

  - $n = 2$ için $2 = m + r$ için$m = 2$, $r = 0$ olmak üzere

$$F_{s,2}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^3 - r_2^3)^0 (r_1^2 - r_2^2) = s,$$

  - $n = 3$ için $3 = m + r$ için$m = 3$, $r = 0$ olmak üzere

$$F_{s,3}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^4 - r_2^4)^0 (r_1^3 - r_2^3) = s^3 + 2s,$$

elde edilir. Buradan

$$\left\{F_{s,n}^{(1)}\right\}_{n=0}^{4} = \{0, 1, s, s^2 + 1, s^3 + 2s\}$$

alışılmış k-Fibonacci sayıları elde edilir. Yani

- $s = 1$ için $\{0, 1, 1, 2, 3, \dots\}$ Fibonacci dizisi,
- $s = 2$ için ise $\{0, 1, 2, 5, 12, \dots\}$ Pell dizisi,

elde edilir.

- $k = 2$ durumu göz önüne alındığında $n = 2m + r$ ve $0 \leq r < 2$ olup
  - $n = 1$ için $1 = 2m + r$ için$m = 1$, $r = 1$ olmak üzere

$$F_{s,1}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1 - r_2)(r_1^0 - r_2^0) = 0,$$

  - $n = 2$ için $2 = 2m + r$ için$m = 1$, $r = 0$ olmak üzere

$$F_{s,2}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1^2 - r_2^2)^0 (r_1 - r_2)^2 = 1,$$

  - $n = 3$ için $3 = 2m + r$ için$m = 1$, $r = 1$ olmak üzere

$$F_{s,3}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1^3 - r_2^3)(r_1 - r_2) = s,$$

  - $n = 4$ için $4 = 2m + r$ için$m = 2$, $r = 0$ olmak üzere

$$F_{s,4}^{(2)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}(r_1^3 - r_2^3)^0 (r_1^2 - r_2^2)^2 = s^2,$$

elde edilir.

Buradan

$$\left\{F_{s,n}^{(2)}\right\}_{n=0}^{6} = \{0, 0, 1, s, s^2, s^3 + s, s^4 + 2s^2 + 1\}$$

dir. Benzer şekilde yeni ailenin $k = 3$

$$\left\{F_{s,n}^{(3)}\right\}_{n=0}^{4} = \{0, 0, 0, 1, s, s^2, s^3, s^4 + s^2\}$$

sayı dizisi elde edilir.k-Fibonacci sayılarının Binet Formülü olan

$$F_{n,k} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eşitliği ve (3.2.3.1) denklemini kullanılarak

$$F_{s,n}^{(k)} = \left(F_{s,m+1}\right)^r \left(F_{s,m}\right)^{k-r}, \quad n = mk + r \ \ (0 \le r < k) \qquad (3.2.3.2)$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.2.3.2:$k, m \,\epsilon\{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. k, m sabit sayıları için k-Fibonacci sayılarının yeni ailesi ile alışılmış Fibonacci sayıları arasında

i.$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}F_{s,mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}F_{s,m}F_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$

ii.$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i F_{s,mk+i}^{(k)} = F_{s,m}(F_{s,m+2})^{k-1} = F_{s,m}F_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)}$

iii.$\sum_{i=0}^{k-1} s^{-i}F_{s,mk+i}^{(k)} = s^{1-k}\,\frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}}\left[\left(F_{s,m+1}\right)^k - \left(sF_{s,m}\right)^k\right]$

$$= s^{1-k}\,\frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}}\left[F_{s.(m+1)k}^{(k)} - sF_{s,mk}^{(k)}\right]$$

bağıntıları vardır.

İspat:

i.$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}F_{s,mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}\left(F_{s,m+1}\right)^i\left(F_{s,m}\right)^{k-i}$

$$= (-1)^{k-1}F_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\left(F_{s,m+1}\right)^i(-s)^{k-1-i}\left(F_{s,m}\right)^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1} F_{s,m} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(F_{s,m+1}\right)^{i} \left(-sF_{s,m}\right)^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1} F_{s,m} \left(F_{s,m+1} - sF_{s,m}\right)^{k-1} \text{(Binomial Teoremi'nden)}$$

$$= (-1)^{k-1} F_{s,m} \left(F_{s,m-1}\right)^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} F_{s,m} F_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)} (r = 0 \text{ için})$$

elde edilir.

ii.$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} s^{i} F_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} s^{i} \left(F_{s,m+1}\right)^{i} \left(F_{s,m}\right)^{k-i}$

$$= F_{s,m} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(sF_{s,m+1}\right)^{i} \left(F_{s,m}\right)^{k-1-i}$$

$$= F_{s,m} (sF_{s,m+1} + F_{s,m})^{k-1} \qquad \text{(Binomial Teoremi'nden)}$$

$$= F_{s,m} (F_{s,m+2})^{k-1}$$

$$= F_{s,m} F_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)} \qquad (r = 0 \text{ için})$$

elde edilir.

iii.$\sum_{i=0}^{k-1} s^{-i} F_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} s^{-i} \left(F_{s,m+1}\right)^{i} \left(F_{s,m}\right)^{k-i}$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}} \right)^i \left(F_{s,m}\right)^k$$

$$= \left(F_{s,m}\right)^k \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}} \right)^i$$

$$= \left(F_{s,m}\right)^k \left(\frac{\left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}}\right)^k - 1}{\left(\frac{F_{s,m+1}}{sF_{s,m}}\right) - 1} \right)$$

$$= s^{1-k} \frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}} \left[\left(F_{s,m+1}\right)^k - \left(sF_{s,m}\right)^k \right]$$

$$= s^{1-k} \frac{F_{s,m}}{F_{s,m-1}} \left[F^{(k)}_{s,(m+1)k} - s^k F^{(k)}_{s,mk} \right].$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3.3:$k = 2$ için yeni aile için $n \geq 0$, $t \geq 0$, $n + t \geq 1$ olmak üzere

$$F^{(2)}_{s,2(n+t-1)} - F_{s,n+t}F_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t} \qquad (3.2.3.3)$$

İspat:$C = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formunda k-Fibonacci matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve Tanım 3.2.3.2 kullanılırsa

$$\begin{pmatrix} F_{s,n+t} & F_{s,n+t-1} \\ F_{s,n+t-1} & F_{s,n+t-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{s,n+t-1} & F_{s,n+t-2} \\ F_{s,n+t-2} & F_{s,n+t-3} \end{pmatrix} = C^{n+t-1} \begin{pmatrix} F_{s,1} & F_{s,0} \\ F_{s,1} & F_{s,-1} \end{pmatrix}$$
$$= C^{n+s}$$

olup her iki tarafın determinantı alınırsa

$$\left(F_{s,n+t-1}\right)^2 - F_{s,n+t}F_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t}$$

$$F^{(2)}_{s,2(n+t-1)} - F_{s,n+t}F_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t} \qquad (r = 0\ için)$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 3.2.3.4:$F_{s,n}^{(2)}$ için ve $G_{s,n}^{(2)}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i.$F_{s,n}^{(2)} = sF_{s,n-1}^{(2)} + sF_{s,n-3}^{(2)} + F_{s,n-4}^{(2)}$, $n = 4, 5, \dots$

ii.$G_{s,n}^{(2)} = \frac{x^2}{1-sx-sx^3-x^4}$

İspat: i. Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyelim. $n = 2m$ için

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,2m-1}^{(2)} + sF_{s,2m-3}^{(2)} + F_{s,2m-4}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{s,2m}^{(2)} &= \left(F_{s,m}\right)^2 \\ &= F_{s,m}\left(sF_{s,m-1} + F_{s,m-2}\right) \\ &= sF_{s,m-1}F_{s,m} + F_{s,m-2}F_{s,m} \\ &= sF_{s,m-1}F_{s,m} + F_{s,m-2}(sF_{s,m-1}F_{s,m-2}) \\ &= sF_{s,m-1}F_{s,m} + sF_{s.m-2}F_{s,m-1}\left(F_{s,m-2}\right)^2 \\ &= sF_{s,2m-1}^{(2)} + sF_{s,2m-3}^{(2)} + F_{s,2m-4}^{(2)} \end{aligned}$$

olup benzer şekilde n sayısının tek olması durumunu için$n = 2m + 1$ olmak üzere

$$F_{s,2m+1}^{(2)} = sF_{s,2m}^{(2)} + sF_{s,2m-2}^{(2)} + F_{s,2m-3}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_{s,2m+1}^{(2)} &= \left(F_{s,m+1}\right)\left(F_{s,m}\right) \\ &= F_{s,m}\left(sF_{s,m} + F_{s,m-1}\right) \\ &= s(F_{s,m})^2 + F_{s,m-1}F_{s,m} \\ &= s(F_{s,m})^2 + F_{s,m-1}(sF_{s,m-1} + F_{s,m-2}) \\ &= s(F_{s,m})^2 + s(F_{s,m-1})^2 + F_{s,m-1}F_{s,m-2} \\ &= sF_{s,2m}^{(2)} + sF_{s,2m-2}^{(2)} + F_{s,2m-3}^{(2)} \end{aligned}$$

olur.

ii.$G_{s,n}^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{s,n}^{(2)} x^n$

$$sxG_{s,n}^{(2)}(x) = s\sum_{n=1}^{\infty} F_{s,n-1}^{(2)} x^n$$

$$sx^3G_{s,n}^{(2)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} F_{s,n-3}^{(2)} x^n$$

$$sx^4G_{s,n}^{(2)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} F_{s,n-4}^{(2)} x^n$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliklerden

$$(1 - sx - sx^3 - x^4)G_{s,n}^{(2)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} (F_{s,n}^{(2)} - sF_{s,n-1}^{(2)} - s\,F_{s,n-3}^{(2)} - F_{s,n-4}^{(2)})x^n$$

$$= (0 + 0x - 1x^2 + sx^3) - (s0x + s0x^2 + sx^3 + s0x^3)$$

$$= x^2$$

$$G_{s,n}^{(2)} = \frac{x^2}{1 - sx - sx^3 - x^4}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremden

$$F_{s,2m+1}^{(2)} = sF_{s,2m}^{(2)} + F_{s,2m-1}^{(2)}$$

olup burada $n = 2m + 1$ in tek sayı olduğuna dikkat etmeliyiz. Ayrıca

$$\begin{aligned} F_{s,2m+1}^{(2)} &= F_{s,m}F_{s,m+1} \\ &= F_{s,m}(sF_{s,m} + F_{s,m-1}) \\ &= s\left(F_{s,m}\right)^2 + F_{s,m-1}F_{s,m} \end{aligned}$$

$$= sF_{s,2m}^{(2)} + F_{s,2m-1}^{(2)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $n = 2m$ durumunda da

$$F_{s.2m}^{(2)} = \begin{cases} sF_{s,2m-1}^{(2)} + F_{s,2m-2}^{(2)} + 1 & , \quad m \text{ tek ise} \\ sF_{s,2m-1}^{(2)} + F_{s,2m-2}^{(2)} - 1 & , \quad m \text{ çift ise} \end{cases}$$

bağıntısı elde edilir. Son bağıntıdan

$$F_{s,2m}^{(2)} - F_{s,m+1}F_{s,m-1} = (-1)^{m+1}$$

$$F_{s,2m}^{(2)} = F_{s,m+1}F_{s,m-1} + (-1)^{m+1}$$

$$F_{s,2m}^{(2)} = F_{s,m-1}\big(sF_{s,m} + F_{s,m-1}\big) + (-1)^{m+1}$$

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,m-1}F_{s,m} + (F_{s,m-1})^2 + (-1)^{m+1}$$

olup, bu durumu m ye göre inceleyelim:

- m tek sayı ise

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,m-1}F_{s,m} + (F_{s,m-1})^2 + 1$$

- m çift sayı ise

$$F_{s,2m}^{(2)} = sF_{s,m-1}F_{s,m} + (F_{s,m-1})^2 - 1$$

elde edilir.

3.2.4. *k*-Fibonacci sayılarının farklı yeni ailesine ait bazı özdeşlikler

Teorem 3.2.4.1: $2F_{s,2n-1}^{(2)} + F_{s,2n}^{(2)} = F_{s,n}L_{s,n}$ dir.

İspat: Binet Formülü'nden $L_{s,n} = 2F_{s,n-1} + F_{s,n}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 2F_{s,2n-1}^{(2)} + F_{s,2n}^{(2)} &= 2F_{s,n}F_{s,n-1} + F_{s,n}F_{s,n} \\ &= F_{s,n}\left(2F_{s,n-1} + F_{s,n}\right) \\ &= F_{s,n}L_{s,n} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.2.4.2: $2F_{s,2n-1}^{(2)} + sF_{s,2n}^{(2)} = F_{s,2n}$ dir.

İspat: $2F_{s,2n-1}^{(2)} + sF_{s,2n}^{(2)} = 2F_{s,n-1}F_{s,n} + sF_{s,n}F_{s,n}$

$$\begin{aligned} &= F_{s,n}\left(2F_{s,n-1} + sF_{s,n}\right) \\ &= F_{s,n}\left(F_{s,n-1} + F_{s,n-1} + sF_{s,n}\right) \\ &= F_{s,n}\left(F_{s,n-1} + F_{s,n+1}\right) \\ &= F_{s,n}\frac{F_{s,2n}}{F_{s,n}} \\ &= F_{s,2n} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4.3: $F^{(2)}_{s,2n+2} - F^{(2)}_{s,2n-2} = sF_{s,2n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^{i+1}F_{s,i}$ dir.

İspat: $F^{(2)}_{s,2n+2} - F^{(2)}_{s,2n-2} = \left(F_{s,n+1}\right)^2 - \left(F_{s,n-1}\right)^2$

$$= (F_{s,n+1} - F_{s,n-1})(F_{s,n+1} - F_{s,n-1})$$

$$= F_{s,n}\frac{F_{s,2n}}{F_{s,n}}$$

$$= sF_{s,2n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}s^{i+1}F_{s,i}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4.4: $F^{(2)}_{s,2n} = \left(F_{s,n}\right)^2 = \begin{cases} F_{s,n-1}F_{s,n+1} + 1 & , \quad n\ tek\ ise \\ F_{s,n-1}F_{s,n+1} - 1 & , \quad n\ çift\ ise \end{cases}$ dir.

İspat: $F^2_{s,n} - F_{s,n-1}F_{s,n+1} = (-1)^{n+1}$ $\quad (r = 0$ için)

$$F^2_{s,2n} - F_{s,n-1}F_{s,n+1} = (-1)^{n+1}$$

$$F^2_{s,2n} = F_{s,n-1}F_{s,n+1} + (-1)^{n+1}$$

olup

$$F^{(2)}_{s,2n} = \left(F_{s,n}\right)^2 = \begin{cases} F_{s,n-1}F_{s,n+1} + 1 & , \quad n \text{ tek ise} \\ F_{s,n-1}F_{s,n+1} - 1 & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4.5: $F_{s,2n}^{(2)} - F_{s,n-r}F_{s,n+r} = (-1)^{n-r}F_{s,2r}^{(2)}$ dir.

İspat: $(F_{s,n})^2 - F_{s,n-r}F_{s,n+r} = (-1)^{n-r}F_{s,r}^2 \qquad (r = 0$ için)

$$F_{s,2n}^{(2)} - F_{s,n-r}F_{s,n+r} = (-1)^{n-r}F_{s,2r}^{(2)}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4.6: $F_{s,2n}^{(2)} + F_{s,2n-2}^{(2)} = F_{s,2n-1}$ dir.

İspat: $F_{s,2n}^{(2)} + F_{s,2n-2}^{(2)} = \left(F_{s,n}\right)^2 + \left(F_{s,n-1}\right)^2$

$$= \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}\right)^2 + \left(\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}\right)^2 \qquad \text{(Binet Formülü'nden)}$$

$$= \frac{r_1^{2n-1} - r_2^{2n-1}}{r_1 - r_2}$$

$$= F_{s,2n-1}$$

olup ispat tamamlanır.

3.2.5. *k*-Lucas sayılarının farklı yeni bir ailesi

Tanım 3.2.5.1: $n, s \neq 0$ ve $k \neq 0$doğal sayılar olsun. Bu taktirde $n = mk + r(0 \leq r < k)$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $L_{s,n}^{(k)}$, k-Lucas sayıları

$$L_{s,n}^{(k)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)^k}(Xr_1^{m+1} - Yr_2^{m+1})^r(Xr_1^m - Yr_2^m)^{k-r}, \quad (3.2.5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

- $k = 1$ durumu göz önüne alındığında $n = m + r$ ve $0 \leq r < 1$ olup

  - $n = 0$ için $0 = m + r$ olup $m = 0$, $r = 0$

$$L_{s,0}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(Xr_1 - Yr_2)^0(Xr_1^0 - Yr_2^0) = 2,$$

  - $n = 1$ için $1 = m + r$ olup $m = 1$, $r = 0$

$$L_{s,1}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(Xr_1^2 - Yr_2^2)^0(Xr_1 - Yr_2) = 1,$$

  - $n = 3$ için $3 = m + r$ olup $m = 3$, $r = 0$

$$L_{s,3}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(Xr_1^4 - Yr_2^4)^0(Xr_1^3 - Yr_2^3) = s^2 + 2s + 1,$$

  - $n = 4$ için $4 = m + r$ olup $m = 4$, $r = 0$

$$L_{s,4}^{(1)} = \frac{1}{r_1 - r_2}(Xr_1^5 - Yr_2^5)^0(Xr_1^4 - Yr_2^4) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1,$$

elde edilir. Buradan

$$\left\{L_{s,n}^{(1)}\right\}_{n=0}^{4} = \{2, 1, s + 2\ , s^2 + 2s + 1, s^3 + 2s^2 + 2s + 2\}$$

olur.

Yeni ailenin $k = 2$ ve $k = 3$ için Lucas sayıları benzer şekilde

$$\left\{L_{s,n}^{(2)}\right\}_{n=0}^{4} = \{4, 2, 1, s+2, s^2+4s+4\}$$

$$\left\{L_{s,n}^{(3)}\right\}_{n=0}^{4} = \{8, 4, 2, 1, S+2\}$$

bulunur. k-Lucas sayılarının Binet Formülü ve (3.2.5.1) denklemi kullanılarak

$$L_{s,n}^{(k)} = \left(L_{s,m+1}\right)^{r}\left(L_{s,m}\right)^{k-r} \quad , n = mk + r \ \ (0 \leq r < k) \qquad (3.2.5.2)$$

bağıntısını elde ederiz.

Teorem 3.2.5.2: $k, m \epsilon \{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. k, m sabit sayıları için k-Lucas sayılarının yeni ailesi ile alışılmış Lucas sayıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

i. $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}L_{s,mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}L_{s,m}L_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$

ii. $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^{i}L_{s,mk+i}^{(k)} = L_{s,m}(L_{s,m+2})^{k-1} = L_{s,m}L_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)}$

iii. $\sum_{i=0}^{k-1} s^{-i}L_{s,mk+i}^{(k)} = s^{1-k}\frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}}\left[\left(L_{s,m+1}\right)^{k} - \left(sL_{s,m}\right)^{k}\right]$

$$= s^{1-k}\frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}}\left[L_{s.(m+1)k}^{(k)} - sL_{s,mk}^{(k)}\right]$$

İspat:

i. $\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}L_{s,mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}s^{k-1-i}\binom{k-1}{i}\left(L_{s,m+1}\right)^i\left(L_{s,m}\right)^{k-i}$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\left(L_{s,m+1}\right)^i(-s)^{k-1-i}\left(L_{s,m}\right)^{k-1-i}$$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\left(L_{s,m+1}\right)^i\left(-sL_{s,m}\right)^{k-1-i}$$

$= (-1)^{k-1}L_{s,m}\left(L_{s,m+1} - sL_{s,m}\right)^{k-1}$ (Binomial Teorem'inden)

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}\left(L_{s,m-1}\right)^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1}L_{s,m}L_{s,(m-1)(k-1)}^{(k-1)} (r = 0 \text{ için})$$

olur.

ii. $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i L_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}s^i\left(L_{s,m+1}\right)^i\left(L_{s,m}\right)^{k-i}$

$$= L_{s,m}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\left(sL_{s,m+1}\right)^i\left(L_{s,m}\right)^{k-1-i}$$

$= L_{s,m}(sL_{s,m+1} + L_{s,m})^{k-1}$ (Binomial Teorem'inden)

$$= L_{s,m}(L_{s,m+2})^{k-1}$$

$$= L_{s,m}L_{s,(m+2)(k-1)}^{(k-1)} (r = 0 \text{ için})$$

olur.

iii.$\sum_{i=0}^{k-1} s^{-i} L_{s,mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} s^{-i} \left(L_{s,m+1}\right)^{i} \left(L_{s,m}\right)^{k-i}$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right)^{i} \left(L_{s,m}\right)^{k}$$

$$= \left(L_{s,m}\right)^{k} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right)^{i}$$

$$= \left(L_{s,m}\right)^{k} \left(\frac{\left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right)^{k} - 1}{\left(\frac{L_{s,m+1}}{sL_{s,m}}\right) - 1}\right)$$

$$= s^{1-k} \frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}} \left[\left(L_{s,m+1}\right)^{k} - \left(sL_{s,m}\right)^{k}\right]$$

$$= s^{1-k} \frac{L_{s,m}}{L_{s,m-1}} \left[L_{s,(m+1)k}^{(k)} - s^{k} L_{s,mk}^{(k)}\right]$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5.3:$k = 2$ için yeni aile için$n \geq 0\ ,\ t \geq 0\ ,\ n + t \geq 1$ olmak üzere

$$L_{s,2(n+t-1)}^{(2)} - L_{s,n+t} L_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t-1}(2s+3) \tag{3.2.5.3}$$

dir.

İspat:$C = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formunda k-Lucas matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve k-Lucas sayılarının tanımından tanımı kullanılırsa

$$\begin{pmatrix} L_{s,n+t} & L_{s,n+t-1} \\ L_{s,n+t-1} & L_{s,n+t-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{s,n+t-1} & L_{s,n+t-2} \\ L_{s,n+t-2} & L_{s,n+t-3} \end{pmatrix} = C^{n+t-1} \begin{pmatrix} L_{s,1} & L_{s,0} \\ L_{s,1} & L_{s,-1} \end{pmatrix}$$

olur.

Her iki tarafın determinantı alınırsa

$$\left(L_{s,n+t-1}\right)^2 - L_{s,n+t}L_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t-1}(2s+3)$$

olup

$$L^{(2)}_{s,2(n+t-1)} - L_{s,n+t}L_{s,n+t-2} = (-1)^{n+t-1}(2s+3) \qquad (r = 0 \text{ için})$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.5.4:$L^{(2)}_{s,n}$ için ve $G^{(2)}_{s,n}$ üreteç fonksiyonu için

i.$L^{(2)}_{s,n} = sL^{(2)}_{s,n-1} + sL^{(2)}_{s,n-3} + L^{(2)}_{s,n-4}$, $n = 4, 5, \ldots$

ii.$G^{(2)}_{s,n} = \frac{(2-4s)x^3+(1-2s)x^2+(2-4s)x+4}{1-sx-sx^3-x^4}$

dir.

İspat: i. Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyelim. $n = 2m$ için

$$L^{(2)}_{s,2m} = sL^{(2)}_{s,2m-1} + sL^{(2)}_{s,2m-3} + L^{(2)}_{s,2m-4}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} L^{(2)}_{s,2m} &= \left(L_{s,m}\right)^2 \\ &= L_{s,m}\left(sL_{s,m-1} + L_{s,m-2}\right) \\ &= sL_{s,m-1}L_{s,m} + L_{s,m-2}L_{s,m} \end{aligned}$$

$$= sL_{s,m-1}L_{s,m} + L_{s,m-2}(sL_{s,m-1}L_{s,m-2})$$

$$= sL_{s,m-1}L_{s,m} + sL_{s.m-2}L_{s,m-1}\left(L_{s,m-2}\right)^2$$

$$= sL_{s,2m-1}^{(2)} + sL_{s,2m-3}^{(2)} + L_{s,2m-4}^{(2)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde n sayısının tek olması durumunu inceleyelim.$n = 2m + 1$ için

$$L_{s,2m+1}^{(2)} = sL_{s,2m}^{(2)} + sL_{s,2m-2}^{(2)} + L_{s,2m-3}^{(2)}$$

olduğunu gösterelim.

$$L_{s,2m+1}^{(2)} = \left(L_{s,m+1}\right)\left(L_{s,m}\right)$$

$$= L_{s,m}\left(sL_{s,m} + L_{s,m-1}\right)$$

$$= s(L_{s,m})^2 + L_{s,m-1}L_{s,m}$$

$$= s(L_{s,m})^2 + L_{s,m-1}(sL_{s,m-1} + L_{s,m-2})$$

$$= s(L_{s,m})^2 + s(L_{s,m-1})^2 + L_{s,m-1}L_{s,m-2}$$

$$= sL_{s,2m}^{(2)} + sL_{s,2m-2}^{(2)} + L_{s,2m-3}^{(2)}$$

olur.

ii. $G_{s,n}^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{s,n}^{(2)} x^n$

$$sxG_{s,n}^{(2)}(x) = s\sum_{n=1}^{\infty} L_{s,n-1}^{(2)} x^n$$

$$sx^3G_{s,n}^{(2)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} L_{s,n-3}^{(2)} x^n$$

$$sx^4G_{s,n}^{(2)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} L_{s,n-4}^{(2)} x^n$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliklerden

$$(1-sx-sx^3-x^4)G_{s,n}^{(2)}(x)=\sum_{n=4}^{\infty}(L_{s,n}^{(2)}-sL_{s,n-1}^{(2)}-s\,L_{s,n-3}^{(2)}-L_{s,n-4}^{(2)})x^n$$

$$=(4+2x+x^2+sx^3+2x^3)-(4sx+2sx^2+sx^3+4sx^3)$$

$$=(2-4s)x^3+(1-2s)x^2+(2-4s)x+4$$

$$G_{s,n}^{(2)}=\frac{(2-4s)x^3+(1-2s)x^2+(2-4s)x+4}{1-sx-sx^3-x^4}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremden

$$L_{s,2m+1}^{(2)}=L_{s,2m}^{(2)}+L_{s,2m-1}^{(2)}$$

olup burada $n=2m+1$ in tek sayı olduğuna dikkat edilmelidir. Buradan

$$\begin{aligned}L_{s,2m+1}^{(2)}&=L_{s,m}L_{s,m+1}\\&=L_{s,m}(sL_{s,m}+L_{s,m-1})\\&=s\big(L_{s,m}\big)^2+L_{s,m-1}L_{s,m}\\&=sL_{s,2m}^{(2)}+L_{s,2m-1}^{(2)}\end{aligned}$$

olup benzer şekilde $n=2m$ durumunda da

$$L_{s.2m}^{(2)}=\begin{cases}sF_{s,2m-1}^{(2)}+F_{s,2m-2}^{(2)}-(2s+3) & , \quad m\ tek\ ise\\ sF_{s,2m-1}^{(2)}+F_{s,2m-2}^{(2)}+(2s+3) & , \quad m\ çift\ ise\end{cases}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı m in durumuna göre inceleyelim.

- m in tek olması durumu:

$$L_{s,2m}^{(2)} - L_{s,m+1}L_{s,m-1} = (-1)^m(2s+3)$$

$$L_{s,2m}^{(2)} = L_{s,m+1}L_{s,m-1} + (-1)^m(2s+3)$$

$$L_{s,2m}^{(2)} = L_{s,m-1}\left(sL_{s,m} + L_{s,m-1}\right) + (-1)^m(2s+3)$$

$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,m-1}L_{s,m} + (L_{s,m-1})^2 + (-1)^m(2s+3)$$

$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,2m-1}^{(2)} + L_{s,2m-2}^{(2)} + (-1)^m(2s+3)$$

$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,2m-1}^{(2)} + L_{s,2m-2}^{(2)} - (2s+3)$$

olur.

- m çift sayı olması durumu:

$$L_{s,2m}^{(2)} = sL_{s,2m-1}^{(2)} + L_{s,2m-2}^{(2)} + (2s+3)$$

olur.

3.2.6. k-Lucas sayılarının farklı yeni ailesine ait bazı özdeşlikler

Teorem 3.2.6.1: $L_{s,2n}^{(2)} = (L_{s,n})^2 = \begin{cases} L_{s,n-1}L_{s,n+1} - (2s+3) & , \quad n \text{ tek ise} \\ L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (2s+3) & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$ dir.

İspat: $L_{s,2n}^{(2)} - L_{s,n-1}L_{s,n+1} = (-1)(2s+3)^n$ bağıntısı kullanılarak

$$L_{s,n}^2 = L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (-1)(2s+3)^n$$

$$L_{s,2n}^2 = L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (-1)(2s+3)^n$$

elde edilir. Buradan

$$L_{s,2n}^{(2)} = (L_{s,n})^2 = \begin{cases} L_{s,n-1}L_{s,n+1} - (2s+3) & , \quad n \text{ tek ise} \\ L_{s,n-1}L_{s,n+1} + (2s+3) & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur.

Teorem 3.2.6.2: $L_{s,2n}^{(2)} - L_{s,n-r}L_{s,n+r} = (2s+3)(-1)^{n-r+1}F_{s,2r}^{(2)}$ dir.

İspat: $L_{s,2n}^{2} - L_{s,n-r}L_{s,n+r} = (2s+3)(-1)^{n-r+1}F_{s,2r}^{2}$ bağıntısı kullanılarak

$$L_{s,2n}^{(2)} - L_{s,n-r}L_{s,n+r} = (2s+3)(-1)^{n-r+1}F_{s,2r}^{(2)} \qquad (r=0 \text{ için})$$

elde edilir.

3.2.7. k-Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları

Bu bölümde genelleştirilmiş diğer k-Fibonacci sayı dizisi, bu dizinin Binet formülü ve farklı özellikleri incelenmektedir. Genelleştirilmiş sayı dizileri Gupta, Panwar ve Sikhwal tarafından sunulmuştur (2012). Yashwant K. Panwar ve Mamta Singh genelleştirilmiş k-Fibonacci dizilerinin bazı ilginç özelliklerini vermektedir. k-Fibonacci Falcon ve Plaza tarafından sadece k tamsayı parametresine bağlı kalarak tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2.7.1: Her pozitif gerçel k sayısı için$F_{k,0}=0$, $F_{k,1}=1$ olmak üzere k-Fibonacci dizisi

$$F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}\,, \qquad n \geq 2$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi Gupta, Panwar ve Sikhwal tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2.7.2:.$F_0 = a\,, F_1 = b$ olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci dizisi

$$F_n = pF_{n-1} + qF_{n-2}\,, \qquad n \geq 2$$

olarak tanımlanır.

Eğer $p = 1$, $q = a = 2$, $b = 0$ şeklinde seçilirse Tanım 3.2.7.2 rekürans bağıntısının daha özel bir şekli olan$U_0 = 2$, $U_1 = 0$ başlangıç terimleri ile $\{U_n\}$ şeklinde yeni bir bağıntı tanımlanmaktadır.

$$U_n = U_{n-1} + 2U_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

elde edilir.

Burada tanımlanmış olan bağıntılara göre $\{U_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin ilk birkaç terimi $2, 0, 4, 4, 12, 20, \ldots$ şeklindedir. Ayrıca elde edilen bu bağıntının Catalan's, Cassini's ve D'ocagnes gibi eşitlikleri de sağladığı görülmektedir.

Tanım 3.2.7.3:$U_{k,0} = 2$, $U_{k,1} = 0$ olmak üzere $\{U_{k,n}\}$$k$-genelleştirilmiş Fibonacci dizisi dizisi

$$U_{k,n} = kU_{k,n-1} + 2U_{k,n-2}, \qquad n \geq 2$$

olarak tanımlanır.

Bu durumda k-genelleştirirlmiş Fibonacci dizisinin ilk bir kaç terimi

$$U_{k,2} = 4$$

$$U_{k,3} = 4k$$

$$U_{k,4} = 4k^2 + 8$$

$$U_{k,5} = 4k^3 + 16k$$

$$U_{k,6} = 4k^4 + 24k^2 + 16$$

olarak yazılır. Özel olarak eğer $k = 1$ olarak seçilirse genelleştirilmiş Fibonacci dizisi elde edilmektedir.

Tanım 3.2.7.4:k-genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının

$$x^2 - kx - 2 = 0$$

karakteristik denklemin kökleri R_1veR_2olmak üzere

$$U_{k,n} = 4\frac{R_1^{n-1} - R_2^{n-1}}{R_1 - R_2} \quad , \qquad R_1 > R_2$$

Binet Formülü ile n. k-genelleştirilmiş Fibonacci sayılarıtanımlanır.

Fibonacci sayıları için Catalan's formülü Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan tarafından tanımlandı (1879).

Tanım 3.2.7.5: (Catalan's Formülü)k-genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için Catan's formülü

$$U_{k,n-r+1}U_{k,n+r+1} - U_{k,n+1}^2 = (-1)^{n-r+1}2^{n-r}U_{k,r+1}^2$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.7.6: (Cassini's Formülü)k-genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için Cassini's formülü

$$U_{k,n+2}U_{k,n} - U_{k,n+1}^2 = (-1)^n 2^{n+3}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.7.7: (D'Ocagne's Formülü)

$$U_{k,m+1}U_{k,n} - U_{k,m}U_{k,n+1} = \begin{cases} \frac{8}{3}(R_1^n + R_1^m)\ ;\ n\ çift\ ,\ \ m \text{ tek} \\ -\frac{8}{3}(R_1^n + R_1^m)\ ;\ n\ tek\ ,\ \ m \text{ çift} \end{cases}$$

Tanım 3.2.7.8: k-genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin ardışık iki teriminin limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{U_{k,n+1}}{U_{k,n}}\right) = R_1$$

olarak tanımlanır.

Üreteç fonksiyonlar lineer homojen denklemler arasındaki ilişkiyi çözebilmek için etkili bir yöntem oluşturmaktadır Aşağıda k-genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu verilmektedir.

Tanım 3.2.7.9:k-genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin katsayıları ile üreteç fonksiyonu arasındaki ilişki

$$U_k = U_{k,0} + xU_{k,1} + x^2U_{k,2} + x^3U_{k,3} + \cdots + x^nU_{k,n} + \cdots$$

$$kxU_k = kxU_{k,0} + kx^2U_{k,1} + kx^3U_{k,2} + \cdots + kx^{n+1}U_{k,n} + \cdots$$

$$2x^2U_k = 2x^2U_{k,0} + 2x^3U_{k,1} + 2x^4U_{k,2} + \cdots + 2x^{n+2}U_{k,n} + \cdots$$

U_k nın kx ve$2x^2$ ile çarpılarak elde edilen yeni eşitliler aracılığı ile aşağıdaki eşitlik oluşturulmaktadır.

$$(1 - kx - 2x^2)U_k = 2 - 2xk$$

$$U_k = \frac{2(1 - kx)}{(1 - kx - 2x^2)}$$

olarak verilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. k-Fibonacci Yeni Aile Dizisinin Periyodik Oluşu ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde Mikkawy ve Sogabe'nin, n ve $k \neq 0$ doğal sayılar olmak üzere$n = mk + r\ (0 \leq r < k)$ için

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}$$

bağıntısı ile tanımladıkları yeni $\left\{F_n^{(k)}\right\}$ Fibonacci dizisinin periyotları hesaplandı. Bunun için k-Fibonacci sayılarının yeni ailesi $mod\ p$ ye göre indirgenip tekrar eden bir dizi elde edildi. Bu dizi

$$\left\{F_n^{(k,p)}\right\} = \left\{F_0^{(k,p)}, F_1^{(k,p)}, \dots, F_n^{(k,p)}, \dots\right\}$$

şeklinde tanımladı. Burada $F_n^{(k,p)} = F_n^{(k)}(modp)$ olup $h_{(k,p)}$ ile de $\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$ nin en küçük periyodu gösterildi. Bu ise k-Fibonacci yeni aile sayı dizisinin $mod\ p$ ye göre periyodu olarak adlandırıldı. Ayrıca k-Fibonacci yeni aile sayı dizileri, bilinen Fibonacci dizileri ve bilinen Lucas dizileri arasında bazı ilişkiler elde edildi.

Teorem 4.1.1:$\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$ bir basit periyodik dizidir (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen 2016).

İspat:$\left(F_m^p\right)^{k\text{-}r}$ ve $\left(F_{m+1}^p\right)^r$ bilinen Fibonacci sayıları olmak üzere $n = mk + r$ için Tanım 3.2.1.1. den

$$F_n^{(k,p)} = \left(F_m^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{m+1}^p\right)^r$$

yazılabilir.

Buradan $t = sk + r$ için $\left\{\left(F_m^p\right)^{k\text{-}r}\right\}$ basit periyodik bir dizi olduğundan

$$F_t^{(k,P)} = \left(F_s^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{s+1}^p\right)^r$$

dir.$\left(F_m^p\right)^{k\text{-}r}$ ve $\left(F_{m+1}^p\right)^r$ bilinen Fibonacci sayıları olmak üzere, Tanım 3.2.1.1den

$$F_n^{(k,p)} = \left(F_m^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{m+1}^p\right)^r, \quad n = mk + r$$

elde edilir. $\left(F_m^p\right)^{k\text{-}r}$ basit periyodik olduğundan

$$\left(F_{m-1}^p\right)^{k\text{-}r} \equiv \left(F_{s-1}^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{m+1}^p\right)^{k\text{-}r} \equiv \left(F_{s+1}^p\right)^{k\text{-}r}\text{ve}\left(F_m^p\right)^{k\text{-}r} \equiv \left(F_s^p\right)^{k\text{-}r}$$

yazılır. Benzer düşünceyle, $\left(F_{m+1}^p\right)^r$ basit periyodik olduğundan

$$\left(F_m^p\right)^r \equiv \left(F_s^p\right)^r$$

elde edilir. Buradan $\left(F_{m+2}^p\right)^r \equiv \left(F_{s+2}^p\right)^r$ve $\left(F_{m+1}^p\right)^r \equiv \left(F_{s+1}^p\right)^r$ dir. Dizilerde periyodik olma koşulundan

$$(F_{m-1})^{k\text{-}r}(F_m)^r \equiv (F_{s-1})^{k\text{-}r}(F_s)^r \Rightarrow F_{n-1}^{(k,p)} \equiv F_{t-1}^{(k,p)}$$

dir. Ayrıca bilinen Fibonacci sayı dizileri arasındaki periyodik olma koşulundan

$$\left(F_{m+1}^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{m+2}^p\right)^r \equiv \left(F_{s+1}^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{s+2}^p\right)^r$$

elde edilir ve bunun sonucu olarak

$$F_{n+1}^{(k,p)} \equiv F_{t+1}^{(k,p)}$$

dir. Benzer şekilde Fibonacci sayı dizisi arasındaki

$$\left(F_m^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{m+1}^p\right)^r \equiv \left(F_s^p\right)^{k\text{-}r}\left(F_{s+1}^p\right)^r$$

olup

$$F_n^{(k,p)} \equiv F_t^{(k,p)}$$

yazılabilir.

Sonuç olarak,

$$F_{n+1}^{(k,p)} \equiv F_{t+1}^{(k,p)}\ , F_{n}^{(k,p)} \equiv F_{t}^{(k,p)}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $\left\{F_n^{(k,p)}\right\}$ basit periyodik dizidir.

Örnek 4.1.2:$\left\{F_n^{(2)}\right\} = \{1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 15, 25, 40, \dots,\}$ yeni aile dizisine$mod\ 2$ uygulayalım:

$$\left\{F_n^{(2,2)}\right\} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, \dots,\}$$

elde edilir ve dizinin periyodun $h_{(2,2)} = 6$olduğu görülür.

k-Fibonacci yeni aile sayı dizileri, bilinen Fibonacci dizileri ve bilinen Lucas dizileri arasındaki ilişkilerin bazıları aşağıdaki teoremlerde verilmiştir:

Teorem 4.1.3: $n \in \{1,2, \dots\}$ olmak üzere genelleştirilmiş 3-Fibonacci sayıları arasında

$$F_{3n-1}^{(3)} + F_{3n}^{(3)} = F_{3n+1}^{(3)}$$

eşitliği sağlanır (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen 2016).

İspat:$n = mk + r\ (0 \leq r < k)$ için $F_m^{(k)} = F_{nk+r}^{(k)} = F_n^{(k-r)} F_{n+1}^{(r)}$, olduğu bilinmektedir. $k = 3$ ve $m = n - 1$ için

$$F_{3n-1}^{(3)} = F_{3(n-1)+2}^{(3)} = (F_{n-1})^1 (F_n)^2 \quad (4.1.1)$$

elde edilir ve

$$F_{3n}^{(3)} = (F_n)^3 (F_{n+1})^0 = (F_n)^3 \quad (4.1.2)$$

yazılabilir.

(4.1.1) ve (4.1.2) eşitliklerinden

$$F_{3n-1}^{(3)} + F_{3n}^{(3)} = (F_{n-1})^1(F_n)^2 + (F_n)^3$$

$$= (F_n)^2\{F_{n-1} + F_n\}$$

$$= F_{n+1}(F_n)^2$$

$$= F_{3n+1}^{(3)}$$

olup $F_{3n-1}^{(3)} + F_{3n}^{(3)} = F_{3n+1}^{(3)}$ elde edilir.

Örnek 4.1.4: Teorem 4.1.3 ün uygulaması olarak $n = 2$ alınırsa

$$F_5^{(3)} + F_6^{(3)} = F_7^{(3)}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.2.1.3) den$F_5^{(3)} = 4$, $F_6^{(3)} = 8$, $F_7^{(3)} = 12$ olup

$$F_5^{(3)} + F_6^{(3)} = 4 + 8 = 12 = F_7^{(3)}$$

olduğu görülmektedir.

Teorem 4.1.5:$n \in \{2,3 \dots\}$,$n = 2k + 1$ olmak üzere n sayıları için genelleştirilmiş2-Fibonacci sayıları arasında

$$F_{2n+1}^{(2)} - F_{2n+2}^{(2)} + F_{2n}^{(2)} = (-1)^n$$

eşitliği sağlanır (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen 2016).

İspat:k-Fibonacci yeni aile sayı dizileri ile bilinen Fibonacci dizileri arasındaki

$$F_{2n}^{(2)} = (F_n)^2$$

$$F_{2n+2}^{(2)} = (F_{n+1})^2$$

$F_{2n+1}^{(2)} = (F_n)(F_{n+1})$
eşitlikleri vardır.

Bu eşitlikler kullanılarak

$$F_{2n+1}^{(2)} - F_{2n+2}^{(2)} + F_{2n}^{(2)} = (F_n)^2 - (F_{n+1})^2 + (F_n)(F_{n+1})$$

$$= (F_n)(F_n + F_{n+1}) - (F_{n+1})^2$$

$$= (F_n)(F_{n+1}) - (F_{n+1})^2$$

$$= -[(F_{n+1})^2 - (F_n)(F_{n+1})]$$

$$= -(-1)^{n+1}$$

$$= (-1)^n$$

olup $F_{2n+1}^{(2)} - F_{2n+2}^{(2)} + F_{2n}^{(2)} = (-1)^n$ elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.6: Teorem 4.1.5 in uygulaması olarak $n = 3$ alınırsa

$$F_7^{(2)} - F_8^{(2)} + F_6^{(2)} = (-1)^3$$

şeklindedir. Eşitlik (3.2.1.3) den$F_7^{(2)} = 15,\ F_8^{(2)} = 25,\ F_6^{(2)} = 9$olup

$$F_7^{(2)} - F_8^{(2)} + F_6^{(2)} = 15 - 25 + 9$$

$$= (-1)^3$$

$$= -1$$

olduğu görülmektedir.

Teorem 4.1.7:$k, n \in \{1,2,\ldots\}$ olmak üzere n sayıları için genelleştirilmiş k-Fibonacci sayıları arasında

$$F_{nk+k-1}^{(k)} + F_{nk+k}^{(k)} = F_{nk+k+1}^{(k)}$$

eşitliği sağlanır (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen 2016).

İspat: Eşitlik (3.2.1.3) den $F_{nk+k-1}^{(k)} = (F_n)^1(F_{n+1})^{k-1}$ ve $F_{nk+k}^{(k)} = (F_{n+1})^k(F_{n+2})^0$ yazılabilir. Buradan

$$F_{nk+k-1}^{(k)} + F_{nk+k}^{(k)} = [(F_n)^1(F_{n+1})^{k-1}] + [(F_{n+1})^k(F_{n+2})^0]$$

$$= [(F_n)^1(F_{n+1})^{k-1}]+(F_{n+1})^k$$

$$= (F_{n+1})^{k-1}[(F_n) + (F_{n+1})]$$

$$= (F_{n+1})^{k-1}F_{n+2}$$

$$= F_{nk+k+1}^{(k)}$$

olup $F_{nk+k-1}^{(k)} + F_{nk+k}^{(k)} = F_{nk+k+1}^{(k)}$ elde edilir.

Örnek 4.1.8: Teorem 4.1.7 in uygulaması olarak $k = 2,\ n = 3$alınırsa

$$F_7^{(2)} + F_8^{(2)} = F_9^{(2)}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.2.1.3) den$F_7^{(2)} = 15,\ F_8^{(2)} = 25,\ F_9^{(2)} = 40$olup

$$F_7^{(2)} + F_8^{(2)} = 15 + 25 = 40 = F_9^{(2)}$$

olduğu görülmektedir.

Teorem 4.1.9:$F_nL_n = F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n+1}^{(2)}$ dir. (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen 2016).

İspat: Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bilinen $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ bağıntısı ve (3.2.1.6) daki $F_{2m+1}^{(2)} = F_mF_{m+1}$ eşitliği kullanılarak

$$F_nL_n = F_n(F_{n-1} + F_{n+1})$$

$$= F_nF_{n-1} + F_nF_{n+1}$$

$$= F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n+1}^{(2)}$$

eldeedilir.

Örnek 4.1.10: Teorem 4.1.9 un uygulaması olarak $n = 3$ alınırsa

$$F_3L_3 = F_5^{(2)} + F_7^{(2)}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.2.1.3) den$F_5^{(2)} = 6,\ F_7^{(2)} = 15$dir. Ayrıca $F_3 = 3,\ L_3 = 7$ olup

$$F_3L_3 = 3 \cdot 7 = 6 + 15 = F_5^{(2)} + F_7^{(2)}$$

olduğu görülmektedir.

Teorem 4.1.11:$L_nL_{n+1} - F_{n-2}F_{n+1} = F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n-3}^{(2)}$ dir. (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen 2016).

İspat: Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bilinen $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ ilişki ve eşitlik (3.2.1.6) daki $F_{2m+1}^{(2)} = F_mF_{m+1}$ kullanılarak

$$\begin{aligned} L_nL_{n+1} - F_{n-2}F_{n+1} &= (F_n + F_{n-2})(F_{n+1} + F_{n-1}) - F_{n-2}F_{n+1} \\ &= F_nF_{n+1} + F_nF_{n-1} + F_{n-2}F_{n+1} + F_{n-2}F_{n+1} \\ &= F_nF_{n+1} + F_nF_{n-1} + F_{n-2}F_{n-1} \\ &= F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n-3}^{(2)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.12: Teorem 4.1.11 in uygulaması olarak $n = 4$ alınırsa

$$L_4L_5 - F_2F_5 = F_9^{(2)} + F_7^{(2)} + F_5^{(2)}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.2.1.3) den $F_5^{(2)} = 6,\ F_7^{(2)} = 15,\ F_9^{(2)} = 40$dir. Ayrıca$L_4 = 7$, $L_5 = 11,\ F_2 = 2,\ F_5 = 8$ olup

$$L_4L_5 - F_2F_5 = 7 \cdot 11 - 2 \cdot 8 = 40 + 15 + 6 = F_9^{(2)} + F_7^{(2)} + F_5^{(2)}$$

olduğu görülmektedir.

Teorem 4.1.13:$L_nF_{n-1} = F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n-3}^{(2)}$ dir. (Taşyurdu, Çobanoğlu, Dilmen 2016).

İspat: Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bilinen $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ ilişki ve eşitlik (3.2.1.6) daki $F_{2m+1}^{(2)} = F_mF_{m+1}$ kullanılarak

$$L_nF_{n-1} = (F_n + F_{n-2})F_{n-1}$$
$$= F_nF_{n-1} + F_{n-2}F_{n-1}$$
$$= F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n-3}^{(2)}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.14: Teorem 4.1.13 ün uygulaması olarak $n = 3$ alınırsa

$$F_7^{(2)} - F_8^{(2)} + F_6^{(2)} = (-1)^3$$

olur. Eşitlik (3.2.1.3) den$F_5^{(2)} = 6,\ F_3^{(2)} = 2$dir. Ayrıca $L_3 = 4,\ F_2 = 2$ olup

$$L_3F_2 = 4 \cdot 2 = 6 + 2 = F_5^{(2)} + F_3^{(2)}$$

olduğu görülmektedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada rekürans ilişkileri ile verilen dizileri tanımlamak ve tanımlanan dizilerinin özellikleri araştırıldı. Tanımlanan rekürans ilişkili diziler ile Fibonacci sayı dizisi ve arasındaki bağlantının kurulması ve böylece sayılar teorisi ile rekürens arasında farklı bir köprü oluşturmuş olması bakımından çalışmanın önemini artırması için çalışıldı. Kurulacak bu ilişki sayesinde, dizilerin özellikleri araştırılırken aynı zamanda Fibonacci sayı dizilerinin ve yeni Fibonacci ailesinin de özellikleri hakkında bilgi sahibi olundu.

n ve k $(k \neq 0)$ doğal sayılar olmak üzere $n = mk + r$ $(0 \leq r < k)$ için

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}\left(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2}\right)^r\left(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}\right)^{k-r}$$

bağıntısı ile tanımladıkları yeni $\left\{F_n^{(k)}\right\}$ Fiboancci dizisinin periyodik olduğu gösterildi.Ayrıca k-Fibonacci yeni aile sayı dizileri, bilinen Fibonacci dizileri ve bilinen Lucas dizileri arasındaki bazı ilişkiler elde edildi.

KAYNAKLAR

1. Akbulak M., Bozkurt D., , “On the Order-m Generalized Fibonacci *k*-Numbers”, ***Chaos Solitons and Fractals***, 42, 1347-1355 (2009).
2. Campbell, C. M. and Campbell, P. P., “ The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups”, J. ***Appl. Math. Comput*** , 19 (1-2), 231-240 (2005).
3. Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F., “Fibonacci length for certain metacyclic groups” , ***Algebra Colloq*** ,11 (2) 215-222 (2004).
4. Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F., “Fibonacci lengths of binary polyhedral groups and related groups”, ***Applications of Fibonacci numbers***, Vol. 10, Kluwer, Dordrecht, 83-91 (2006).
5. Çallıalp, F., “ Örneklerle Soyut Cebir”, ***Birsen Yayınevi***, 300 s, İstanbul (2001).
6. Doostie, H. and Hashemi, M., ” Fibonacci length of direct products of groups”, ***Vietnam J. Math***. 33 (2), 189-197 (2005).
7. Deveci Ö., Avcı M., “Fibonacci p-Sequences in Groups”, ***Maejo International Journal of Science and Technology***, 9(03), 301-311, (2015).
8. Doostie, H. and Hashemi, M., “Fibonacci length involving the Wall Number”. ***J. Appl. Math Comput***. 20 (1-2), 171-180 (2006).
9. Falcon S. and Plaza A., “On *k*-Fibonacci numbers of arithmetic indexes”, ***Applied Mathematics and Computation***, 208, 180-185 (2009).
10. Falcon, S., “On the k-Lucas numbers”, ***International Journal of ContemporaryMathematical Sciences***6(21), 1039-1050, (2011).
11. Falcon, S., Plaza A., “On the Fibonacci *k*-numbers”, **Chaos, Solitons and Fractals** 32, 1615-1624, (2009).
12. Falcon S. and Plaza A., ” the *k*-Fibonacci sequence and the Pascal 2- triangle, Chaos”, **Solitons & Fractals** , 33, 38-49 (2007).

13. Grabowski A., Wojtecki P.," Lucas Numbers and Generalized Fibonacci Numbers", ***Form. Math***., 12 , 329-334 (2004).
14. Horadam, A. F., "A Generalized Fibonacci Sequence", ***American Mathematical Monthly***, 68, 445-459 (1961).
15. Karaduman E., "On determinants of matrices with general Fibonacci numbers Entries", ***Appl. Math. Comput***, 167, 670-676 (2005).
16. Kilic E.," The Binet Formula, Sums and Representations of Generalized Fibonacci p-Numbers", ***Eur. J. Combin***, 29, 701-711 (2008).
17. Kilic E., "The generalized order k-Fibonacci–Pell sequence by matrix methods", ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 209, 133-145 (2007).
18. Kilic E., Tasci D., "Generalized order-k Fibonacci and Lucas Numbers", ***Rocky Montain J. Math***. 38,(1991-2008)
19. Knox, S. W., " Fibonacci Sequences in Finite Groups", ***The College of Wooster, Wooster***, 116-120 (1990).
20. Koshy T., " Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", ***John Wiley and Sons Inc***. NY (2001).
21. Koshy, T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", Myron B.,Allen III, David, A.,Cox.,Peter, L.***New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto,*** 1_489 (2001).
22. Lü, K., Wang, J., "k-step Fibonacci sequence modulo m" ***Util Math,*** 71 169-178 (2007).
23. Mikkawy, M.,Sogabe, T., "A new family of k-Fibonacci numbers, ***Applied,*** 215 4456-4461 (2010).Wall, D.D., "Fibonacci Series Modulo m" ***American Math Monthly,*** 67 525-532 (1960).
24. Nalli A., Civciv H., "A generalized of Tridiagonal Matrix Determinants, Fibonacci and Lucas Numbers", ***Chaos Solitons and Fractals***, 40, 355-361 (2009).
25. Öcal A., Tuglu N., Altinişik E., "On the representation of k-generalized Fibonacci and k-Lucas numbers", ***Applied Mathematics and Computation***, 170, 584-596 (2005).

26. Panwar K.Y., Singh M., “k-Generilazed Fibonacci Numbers” , ***Applied Mathematics and Physics,*** Vol. 2, 1, 10-12 (2014).
27. Renault, M., “The Fibonacci Sequence Under Various Moduli” Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, ***Wake Forest University*** 3-82 (1996).
28. Stanimirovic P. S., Nikolov J., Stanimirovic I., “A generalization of Fibonacci and Lucas matrices”, ***Discrete Appl. Math.***, 156, 2606-2619 (2008).
29. Taşçı, D.,“ Soyut Cebir”, ***Alp Yayınevi***, Ankara, 671 s., (2007).
30. Taşyurdu, Y.,“ Gruplarda Fibonacci Dizileri”, Yüksek Lisans Tezi, ***Fen Bilimleri Enstitüsü***, Atatürk Üniversi (2006).
31. Taşyurdu, Y.; Gültekin, İ., “On period of Fibonacci sequences in finite rings with identity of order p^2”,***Journal of Mathematics and System Science***, 3, 349-352 (2013).
32. Taşyurdu, Y.; Gültekin, İ., “The Period of Fibonacci Sequences Over The Finite Field of Order p^2”, ***New Trends in Mathematical Sciences***, 4, 248-255 (2016).
33. Uslu K., Taskara N., Kose H., “The Generalized k-Fibonacci and k-Lucas Numbers”, ***Ars Combinatoria***, 99, 25-32 (2011).
34. Vajda S., ” Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section”, ***Ellis Horwood Limited, Chicester***, England (1989).
35. Wall, D. D., “ Fibonacci Series Modulo” , ***American Math***, Monthly 67, 525-532 (1960).
36. Yang S. L., ” On the k-generalized Fibonacci Numbers and High-Order Linear Recurrence Relations”, ***Appl. Math. Comput.***, 196, 850-857 (2008).
37. Taşyurdu Y., Çobanoğlu N., Dilmen Z., “On The A New Family of k-Fibonacci Numbers”, ***Erzincan University Journal of Science and Technology,*** 9(1), 95-101 (2016).
38. Yilmaz N., Yazlik Y., Taskara N., “On the k-Generalized Fibonacci Numbers” (2012).
39. Yosma Z., “Fibonacci ve Lucas Sayıları, Yüksek Lisans Tezi”, ***Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü***, Sakarya (2008).

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. 2009 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.