ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STURM LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN DÜZENLEŞTİRİLMİŞ İZ'İN HESABI VE İNTEGRAL DENKLEMLERİ METODU İLE AÇILIM TEOREMİNİN İSPATI

Sevcan DEMİRKALE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2016

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Sevcan DEMİRKALE
İmza :

SturmLiouville Problemi İçin Düzenleştirilmişİz'in Hesabı ve İntegral Denklemleri Metodu İle Açılım Teoreminin İspatı adlı Yüksek Lisans tezi, Erzincan Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi 'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Sevcan DEMİRKALE

Danışman
Doç. Dr. Murat ŞAT

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ.. ABD Başkanı
Ad Soyad İmza

Doç. Dr. Murat ŞAT danışmanlığında, Sevcan DEMİRKALE tarafından hazırlanan bu çalışma .22/07/2016.......tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ	İmza:
Üye	:Doç. Dr. Murat ŞAT	İmza:
Üye	:Yrd. Doç. Dr. Ö. Faruk ÇETİN	İmza:
Üye	:.......................................	İmza:
Üye	:.......................................	İmza:

Yukarıdaki sonucu onaylarım.
22/07/2016

Prof. Dr. Ali SÜLÜN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STURM LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN DÜZENLEŞTİRİLMİŞ İZ'İN HESABI VE İNTEGRAL DENKLEMLERİ METODU İLE AÇILIM TEOREMİNİN İSPATI

Sevcan DEMİRKALE

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat ŞAT

Bu çalışma dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde; diferansiyel operetörlerin spektral teorisinde sık kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde; Sturm-Liouville operatörü için genel bilgiler, regüler ve singüler Sturm-Liouville problemi, özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller, Sturm-Liouville operatörü için düzenleştirilmiş iz hesabı incelenmiştir. Dördüncü bölümde; integral denklemleri metodu ile açılım teoreminin ispatı yapılmıştır.

2016, 40 sayfa

Anahtar Kelimeler: Düzenleştirilmiş iz, integral denklem, özdeğer, özfonksiyon, Sturm- Liouville Operatörü.

ABSTRACT

Master Thesis

CALCULATION OF THE REGULARIZED TRACE FOR STURM-LIOUVILLE PROBLEM AND PROOF OF THE EXPANSION THEOREM BY THE METHOD OF INTEGRAL EQUATION

Sevcan DEMİRKALE

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat ŞAT

This study consists of four chapters. In the first chapter; introduction part is given. In the second chapter; some fundamental definitions and theorems that use often in spectral theory of differential operators are given. In the third chapter; general informations of Sturm Liouville operators, regular and singular Sturm-Liouville operators, asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions, calculation of the regularized trace for Sturm-Liouville operators are examined. In the fourth chapter; proof of the expansion theorem by the method of integral equation are done.

2016, 40 pages

Keywords: Eigenfunction, eigenvalues, integral equation, regularized trace, Sturm-Liouville Operators.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde hazırlanmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Murat ŞAT' a şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Sevcan DEMİRKALE

Temmuz, 2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER LİSTESİ

$G(x,t;\lambda)$: Green fonksiyonu

H : Hilbert uzayı

L : Lineer operatör

λ : Özdeğer

$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$: Özdeğerler cümlesi

$o(1)$: Sonsuz küçük değerler

$O(1)$: Sınırlı değerler

$W(f,g)$: Wronskian Determinantı

$y(x,\lambda)$: Özfonksiyon

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi, matematik, fizik ve mekaniğin pek çok alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları aynı zamanda lineer cebir ve titreşim teorisinin problemleridir. Lineer cebir problemleri ve titreşim problemleri arasındaki benzerliklerin tanımlanması çok eskilere dayanmaktadır. İntegral denklemler teorisiyle ilgili yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden yararlanan ilk bilim adamı Hilbert olmuştur. Özellikle l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra Hilbert uzayında lineer self adjoint operatörlerin teorisi hızla gelişmeye başlamıştır ve özellikle XIX.-XX. asırlarda bu konularda çalışan birçok matematikçi tarafından söz konusu teori oldukça geliştirilerek üst seviyelere ulaşmıştır. Bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle, veriler yardımıyla asimptotik formüller bulunmuştur. Ayrıca spektral teori için önemli yere sahip olan açılım teoremleri ispatlanmıştır. Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış, bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları sonlu sayıda süreksiz nokta olan diferansiyel operatörlere singülerdir denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektrumuna sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı özellikle Kuantum mekaniğinde oldukça önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl H. tarafından incelenmiştir. Daha sonra Riesz F., Von Neumann J., Friedrichs K.O. ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi elde edilmiştir.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşım 1946 yılında Titchmarsh E.C. tarafından verilmiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan veya artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \tag{1.1}$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger operatörü de denir. Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında Levitan B.M. tarafından yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotikliğine ve özfonksiyonların tamlığına ilşkin konular Courant R. , Birman M. S., Salamyak M. Z., Maslov V. P., Keldish M. V. gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir. Bir ters problem, onları üreten sıradan faktörlerin bir takım gözlemlerinden hesaplama yapma sürecidir. Örneğin bilgisayar tomografisindeki bir sembolü hesaplamak, seste kaynak aranması veya yerçekim alanının ölçümlerinden dünyanın yoğunluğunu hesaplamak ters problem diye adlandırılır. Ona ters problem denir. Çünkü o, sonuçlarla başlar ve sonra da nedenleri hesaplar. Bu nedenlerle başlayan sonra da sonuçları hesaplayan ileriki problemin tersidir. Ters problem, bilimde ve matematikte en önemli matematiksel problemlerden biridir. Çünkü onlar bize direkt olarak gözlemleyemediğimiz parametreler hakkında bir şeyler söyler. Onlar, optikte, radarda, seslerde, iletişim teorisinde, sinyal sürecinde, ilaç alanında, bilgisayar gösteriminde, coğrafyada, okyanus biliminde, astronomide, uzak duyularda, doğal dil sürecinde, makine öğrenmede, tahribatsız muayene ve birçok diğer alanda geniş uygulamaya sahiptir. Ters problem, çalışma alanı ilk olarak fizikçi Viktor Ambartsumian tarafından keşfedildi ve tanıtıldı. Viktor Ambartsumian hala bir öğrenciyken atomik yapıların teorisi, enerji seviyelerinin değişimi ve Schrodinger denklemi ve onun özellikleri hakkında yoğun bir şekilde çalıştı. Diferansiyel denklemlerin özdeğerleri teorisinde uzmanlaştığında, soyut enerji seviyeleri ve diferansiyel denklemlerin özdeğerleri arasındaki açık benzerliğe dikkat çekti. O, ‘verilen bir özdeğerler kümesinde özdeğerleri olan denklem formlarını bulmak mümkün müdür?’ diye sordu. Temel olarak Ambartsumian titreşen yayın denklemlerini belirlemeyle ilgili olan ters Sturm Liouville problemini inceledi. Bu çalışmalar 1929'da Almanya fizik dergisi Zeitschrift für physik dergisinde basıldı ve uzun bir zaman belirsizlikte kaldı. Birçok yıl sonra bu durumu tanımlarken Ambartsumian 'Eğer bir gökbilimci bir fizik dergisinde matematiksel konu ile ilgili bir makale yayınlarsa, o zaman ona olacak en muhtemel şey unutulmaktır.' dedi. Buna rağmen ikinci dünya savaşının sonuna doğru 20 yaşındaki Ambartsumian tarafından yazılan bu makale İsveç matematikçiler tarafından bulundu ve ters problem hakkında tüm araştırma alanları için başlangıç noktasını şekillendirdi. Tüm disiplinlerin kuruluşu oldu. Son yıllarda regüler ve singüler Sturm Liouville operatörleri için ters problem (Amirov, 2013; Buterin, 2007; Hochstadt et. al., 1978; Yang, 2012; Freiling and Yurko, 2010) yazarları tarafından çalışılmaktadır. Şimdi de tezde geçen iz kavramından bahsedelim. Sonlu boyutlu iz bütün özdeğerlerin toplamı olarak tanımlanır. Fakat sonsuz boyutta genellikle adi diferansiyel operatörler sonlu ize sahip değildir. İlk olarak (Gelfand ve Levitan, 1953) tarafından Self adjoint Sturm Liouville diferansiyel denklemi için bir iz formülü elde edildi. Daha sonra (Dikii, 1957; Lax, 1994; Lidskii ve Sadovnichii, 1967; Papanicolaou, 1995) yazarları tarafından izlerle ilgili çalışmalar yapıldı. Son yıllarda da Levitan yöntemi kullanılarak (Guliyev,2005) tarafından koşulları spektral parametreye bağlı Sturm Liouville denklemi için iz formülü hesaplandı. (Adiguzelov et. al., 2001; Yang, 2010) tarafından Lax P. D. yöntemi kullanılarak iz formülü hesaplandı. Bu tezde de derleme olarak Gelfand Levitan yöntemi kullanılarak hesaplanmış iz formülü detaylı bir şekilde açıklandı.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1. (Hilbert Uzayı) x, y, z elemanlarından oluşan herhangi bir cümle H olsun ve aşağıdaki aksiyomlar sağlansın:

1. H lineer kompleks uzay

2. H nin her x, y ikili elamanına karşılık gelen $\langle x, y\rangle$ kompleks sayısı için

a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

b) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle \qquad (x_1, x_2 \in H)$

c) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ (Her λ kompleks sayısı için)

d) $\langle x, x\rangle \geq 0\,; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0\,;\;\; (\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle})$

3. $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği anlamında H tamdır.

4. Her n doğal sayısı için H de n sayıda lineer bağımsız elaman vardır. Yani H sonsuz boyutludur.

Bu takdirde 1-4 sınır şartlarını sağlayan uzaya Soyut Hilbert uzayı, 1-3 şartlarını sağlayan uzaya ise Üniter Hilbert uzayı denir. (Liusternik ve Sobolev, 1961)

Tanım 2.2. (Operatör) Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım 2.3. (Lineer Operatör) E_x ve E_y herhangi iki vektör uzay olsun.

$A: E_x \to E_y$ operatör dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa:

i) $x_1, x_2 \in E_x,\;\; A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = Ax_1 + Ax_2$

ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax,\; \lambda \in R$

A operatörüne lineerdir denir. (Kolmogorov ve Fomin, 1972)

Tanım 2.4. (Sürekli Operatör) $A: S(x, \delta) \to S(Ax, \varepsilon)$ olsun.

$$|x - x_0| < \delta \text{ için } |Ax - Ax_0| < \varepsilon$$

ise A operatörüne süreklidir denir. (Balcı, 1999)

Tanım 2.5. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım cümlesi olsun. Eğer

$$\|Lx\| \le c\|x\| \qquad (2.1)$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. (Kreyszig, 1978)

Tanım 2.6. (Adjoint Operatör) H_1 ve H_2 iki Hilbert uzay ve $L: H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun.

Eğer $L^*: H_2 \to H_1$ operatörü $\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^* y\rangle$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin adjointi denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint operatör denir. (Kreyszig, 1978)

Tanım 2.7. L, $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y \qquad (2.2)$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise ona karşılık gelen bir özfonksiyon denir. (Kostyuchenko, 1979)

Tanım 2.8. $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olacak şekilde

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)dx \qquad (2.3)$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir.

Tanım 2.9. (**Dönüşüm Operatörü)** E lineer topolojik uzay, A ve B operatörleri $A: E \to E$, $B: E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ve E_2 ise E lineer uzayın kapalı alt uzayları olmak üzere E lineer uzayın kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanıyor

şartlarını sağlıyorsa A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir. (Levitan ve Sargsyan, 1975)

Tanım 2.10. *f(z)* kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferansiyellenebiliyor ise *f(z)* fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. (Markusheyich, 1977)

Tanım 2.11. *f(z)* kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise *f(z)*'ye tam fonksiyon denir. (Bayraktar, 1994)

Tanım 2.12. Bir *f(z)* fonksiyonuna karşılık gelen A ve α pozitif sayıları bulunabiliyorsa, öyle ki $r = |z| \to \infty$ iken

$$|f(z)| < Ae^{r^{\alpha}} \qquad (2.4)$$

ise *f(z)* fonksiyonu sonlu mertebeden bir tam fonksiyondur, α sayılarının en küçüğü olan *r* ye ise tam fonksiyonun mertebesi denir.

Tanım 2.13. $x \to x_0$ iken eğer $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ ve $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ sınırlı ise $x \to x_0$ iken x_0 komşuluğundaki tüm x ' ler için $|f(x)| \le c|g(x)|$ olacak biçimde bir $c\rangle 0$ sayısı varsa $x\rangle x_0$ için $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir.

Tanım 2.14. (Parseval Eşitliği) *H* bir Hilbert uzayı $x \in H$ ve (e_k) ortonormal bir dizi olsun. Bu durumda Parseval eşitliği

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \qquad (2.5)$$

olarak tanımlanır. (Kreyszig, 1978)

Tanım 2.15. $a \le t \le b$ olmak üzere $L^2[a,b]$ uzayı,

$$L^2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty \right\} \qquad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \qquad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. (Kreyszig, 1978)

3. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

3.1 Sturm-Liouville Operatörü için Genel Bilgiler

L herhangi elemanlar cümlesinde tanımlı lineer bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y fonksiyonuna L operatörünün özfonksiyonu λ ' ya ise özdeğeri denir.

Operatörlerin spektral teorisinde sık göz önüne alınan Sturm-Liouville operatörü

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur.

L operatörü için sınır şartları genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. tür sınır şartı: Bunlara ayrık sınır şartları denir ve

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha &= 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

2. tür sınır şartı: Bunlar periyodik ve antiperiyodik sınır şartları olarak bilinir ve sırası ile

$$\begin{aligned} y(a) &= -y(b) \\ y'(a) &= -y'(b) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

3. tür sınır şartı: Bunlar uçları bağlı sınır şartları olarak bilinir ve

$$y(a) = y(b) = 0 \text{ veya } y'(a) = y'(b) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

$$Ly(x) = -\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \qquad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha &= 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanan (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir.

p(x), *l(x)* ve *r(x)* fonksiyonları reel ve sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim. *p(x)* ve *r(x),* $[a,b]$ aralığında pozitif fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denkleminin genel

$$L=-\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}+l(x)y=\lambda r(x)y \qquad (a\le x\le b) \tag{3.1.3}$$

ifadesini göz önüne alalım. *p(x)* birinci mertebeden ve *p(x)r(x)* ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olacak şekilde

$$z=\frac{1}{c}\int_a^x\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{\frac{1}{2}}dx,\quad u=\left(r(x)p(x)\right)^{\frac{1}{4}}y,\quad \mu=c\lambda$$

dönüşümleri yapılırsa (3.1.3) denklemi

$$c=\frac{1}{\pi}\int_a^b\left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$q(z)=\frac{Q''(z)}{Q(z)}-c^2\frac{l(x)}{r(x)}$$

$$Q(z)=\left(r(x)p(x)\right)^{\frac{1}{4}}$$

olmak üzere

$$-y''+q(x)y=\lambda y$$

şeklinde yazılır.

Herhangi λ_1 için göz önüne alınan sınır değer probleminin $y(x,\lambda_1)\neq 0$ aşikar olmayan çözüme sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda bu bölümün başlangıcında verilen tanımda (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer probleminin özdeğeri λ_1 ve buna karşılık gelen özfonksiyonu da $y(x,\lambda_1)$ olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.1. $\lambda_1\neq\lambda_2$ farklı özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortagonaldir. Yani

$$\int_0^{\pi} y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx=0 \qquad \lambda_1\neq\lambda_2$$

dir.

İspat. *f(x)* ve *g(x)* sürekli ve iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$Lf = f''(x) - q(x)f(x)$$

alalım.

$$W_x\{f,g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(x)' & g(x)' \end{vmatrix}$$

olmak üzere bu ifadeyi iki kez kısmi intergralini alırsak

$$\int_0^\pi Lfg(x)dx = W_\pi(f,g) - W_0(f,g) + \int_0^\pi f(x)Lgdx \qquad (3.1.4)$$

denklimini elde ederiz. $f(x) = y(x,\lambda_1)$ ve $g(x) = y(x,\lambda_2)$ olsun. (3.1.2) sınır şartlarından $W_0\{f,g\} = W_\pi\{f,g\} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bundan dolayı (3.1.4) denkleminden

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0$$

ve dolayısıyla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan Lemma ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.2. (3.1.1)- (3.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. $\lambda_1 = u + iv$ kompleks bir özdeğer olsun. *q(x)* reel değerli bir fonksiyon α ve β sayıları reel olduğundan dolayı $\overline{y(x,\lambda_1)}$ özfonksiyonu $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısına sahip bir özdeğer olur. Bu takdirde bir önceki Lemma'dan

$$\int_0^\pi |y(x,\lambda_1)|^2 dx = 0$$

elde ederiz ki buradan da $y(x,\lambda_1) = 0$ olduğu bulunur.

Teorem 3.1.3. Eğer *q(x),* $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve

$$\varphi(a,\lambda) = \sin\alpha \ , \ \varphi_x'(a,\lambda) = -\cos\alpha$$

başlangıç şartları sağlanırsa (3.1.1) denkleminin $(a \le x \le b)$ aralığında her α için bir tek $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır. Her $x \in [a,b]$ sabiti için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre bir tam fonksiyondur.

İspat. $\varphi_0(x,\lambda) = \sin\alpha - (x-\alpha)\cos\alpha$ alalım ve $n > 0$ için

$$\varphi_n(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_0^x \{q(t) - \lambda\}\varphi_{n-1}(t,\lambda)(x-t)dt$$

olsun. q sürekli bir fonksiyon olduğundan $(a \le x \le b)$ için $|q(x)| < M$ elde ederiz. $|\lambda| \le N$ olsun. O zaman $(a \le x \le b)$ için $|\varphi_0(x,\lambda)| < K$ olur. Bundan dolayı $n = 1$ için,

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\}\varphi_0(t,\lambda)(x-t)dt$$

$$\varphi_1(x,\lambda) - \varphi_0(x,\lambda) = +\int_a^x \{q(t) - \lambda\}\varphi_0(t,\lambda)(x-t)dt$$

$$|\varphi_1(x,\lambda) - \varphi_0(x,\lambda)| \le \int_a^x |q(t) - \lambda| \varphi_0(t,\lambda)| x-t| dt$$

$$\le \int_a^x \{|q(t) + \lambda|\} |\varphi_0(t,\lambda)||x-t| dt$$

$$\le \int_a^x (M+N)K(x-t) = \frac{1}{2}K(M+N)(x-a)^2$$

$n = 2$ için

$$\varphi_2(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\}\varphi_1(t,\lambda)(x-t)dt$$

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int_a^x \{q(t) - \lambda\}\varphi_0(t,\lambda)(x-t)dt$$

ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi_2(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\}\{\varphi_1(t,\lambda) - \varphi_0(t,\lambda)\}(x-t)dt$$

elde ederiz. Buradan da $n \ge 2$ için

$$\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda) = \int_a^x \{q(t) - \lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)\}(x-t)dt$$

$$|\varphi_n(x,\lambda) - \varphi_{n-1}(x,\lambda)| \le (M+N)(b-a)\int_a^x |\varphi_{n-1}(t,\lambda) - \varphi_{n-2}(t,\lambda)| dt$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$|\varphi_2(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)| \le \int_a^x \{|q(t)| + |\lambda|\}\{\varphi_1(t,\lambda) - \varphi_0(t,\lambda)\}|x-t| dt$$

$$\leq \int_a^b (M+N)\frac{1}{2}K(M+N)(t-a)^2(x-t)dx$$

$$=\frac{1}{2}K(M+N)^2(b-a)\int_a^x (t-a)^2 dx$$

$$=\frac{K(M+N)^2(b-a)(x-a)^3}{3!}$$

ve genel olarak

$$\left|\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\right| \leq \frac{K(M+N)^n(b-a)^{n-1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n(x,\lambda)-\varphi_{n-1}(x,\lambda)\right\} \qquad (3.1.5)$$

$(a \leq x \leq b)$ için x'e göre düzgün ve $|\lambda| \leq N$ için λ ya göre düzgün yakınsak bir seridir.

$n \geq 2$ için

$$\varphi_n'(x,\lambda)=\varphi_0'(x,\lambda)+\int_a^x \{q(t)-\lambda\}\varphi_{n-1}(t,\lambda)dt$$

$$\varphi_{n-1}'(x,\lambda)=\varphi_0'(x,\lambda)+\int_a^x \{q(t)-\lambda\}\varphi_{n-2}(t,\lambda)dt$$

olduğundan, bu ifadeleri taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi_n'(x,\lambda)-\varphi_{n-1}'(x,\lambda)=\int_a^x \{q(t)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(t,\lambda)-\varphi_{n-2}(t,\lambda)\}dt$$

olur.

$$\varphi_n''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\varphi_{n-1}(x,\lambda)$$

$$\varphi_{n-1}''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\varphi_{n-2}(x,\lambda)$$

ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak

$$\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)=\{q(x)-\lambda\}\{\varphi_{n-1}(x,\lambda)-\varphi_{n-2}(x,\lambda)\}$$

elde ederiz. (3.1.5) serisini bir veya iki kez diferansiyellersek

$$\varphi''(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varphi_n''(x,\lambda)-\varphi_{n-1}''(x,\lambda)\right\}$$

$$= \varphi_1''(x,\lambda) - \varphi_0''(x,\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \varphi_n''(x,\lambda) - \varphi_{n-1}''(x,\lambda) \right\}$$

$$= \left(q(x) - \lambda\right) \left(\varphi_0(x,\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \varphi_{n-1}(x,\lambda) - \varphi_{n-2}(x,\lambda) \right\} \right)$$

$$= \left\{ q(x) - \lambda \right\} \varphi(x,\lambda)$$

buluruz. Dolayısıyla $\varphi(x,\lambda)$, (3.1.1) denklemini sağlar. Ayrıca $\varphi_n(x,\lambda)$ fonksiyonunun yapısı ve (3.1.5) serisinin düzgün yakınsak olmasından dolayı $\varphi(x,\lambda)$, λ değişkenine göre tam fonksiyondur.

3.2. Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Problemi

Sturm-Liouville problemi için

$$Ly(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \qquad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $\sin\alpha \neq 0$ ve $\sin\beta \neq 0$ olmak üzere (3.2.2) sınır şartlarını sırası ile $\sin\alpha$ ve $\sin\beta$ ifadelerine bölersek

$$\begin{aligned} y(a)\cot\alpha + y'(a) = 0 \\ y(b)\cot\beta + y'(b) = 0 \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

elde ederiz. $\cot\alpha = -h$ ve $\cot\beta = H$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) = 0 \\ y'(b) + Hy(b) = 0 \end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

yazılır. Böylece (3.2.3)-(3.2.4) probleminde eğer $q(x)$ sürekli reel değerli bir fonksiyon h ve H reel sayıları da sonlu ise bu probleme Regüler Sturm-Liouville Problemi denir. Bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme Singüler Sturm Liouville Problemi denir.

3.3 Özdeğerler ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller

1. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki Sturm-Liouville problemini

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in [0,\pi] \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

göz önüne alalım. (3.3.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \ \varphi'(0,\lambda) = h \tag{3.3.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\varphi(x,\lambda)$ ile gösterelim. Aynı denklemin

$$\psi(0,\lambda) = 0, \ \psi'(0,\lambda) = 1 \tag{3.3.4}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü de $\psi(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Lemma 3.3.1. $\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau\} q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau \tag{3.3.5}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau\} q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau \tag{3.3.6}$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle (3.3.5) eşitliğini ispatlayalım. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denklemini sağladığı için

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\} q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau = \int_0^x \sin\{s(x-\tau\} \varphi''(\tau,\lambda)d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\} \varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

yazılabilir. Daha sonra sağdaki integralin iki kez kısmi integrasyonunu alalım ve (3.3.3) şartlarını göz önüne alarak

$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\} \varphi''(\tau,\lambda)d\tau$ integralini hesaplayalım.

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau =$$

$$=\varphi'(x,\lambda)\sin\{s(x-x)\}-\varphi'(0,\lambda)\sin\{s(x-0)\}+s\int_0^x \cos\{s(x-\tau\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin x+s\int_0^x \cos\{s(x-\tau\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin x+s\left\{\varphi(x,\lambda)\cos\{s(x-x)\}-\varphi(0,\lambda)\cos\{s(x-0)\}-s\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

$$=-h\sin sx+s\left\{\varphi(x,\lambda)-\cos sx-s\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau=\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)d\tau+s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin sx+s\{\varphi(x,\lambda)-\cos sx\}-s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau+s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$=-h\sin sx+s\varphi(x,\lambda)-s\cos sx$$

elde edilir. (3.3.6) bağıntısının ispatı da benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.3.2. $s=\sigma+it$ olsun. Bu durumda öyle $s_0>0$ vardır ki $|s|>s_0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\varphi(x,\lambda)=O(e^{|t|x}),\qquad \psi(x,\lambda)=O(|s|^{-1}e^{|t|x}) \tag{3.3.7}$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O(|s|^{-1}e^{|t|x}) \tag{3.3.8}$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}) \tag{3.3.9}$$

$0\le x\le\pi$ için x in aldığı tüm değerlerde bu ifadeler sağlanır.

2. Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formülleri hesaplayalım.

(3.3.1)-(3.3.2) Sturm Liouville problemini göz önüne alalım. Lemma 3.3.1 ve Lemma 3.3.2 den dolayı

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O(|s|^{-1}e^{|t|x})$$

şeklindedir.

$h\neq\infty$ ve $H\neq\infty$olsun. $\varphi(x,\lambda)$, (3.3.1) denkleminin (3.3.2) sınır şartlarını sağlayan bir çözümü olduğundan bu fonksiyonun π noktasındaki değerini (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde yazdığımızda özdeğerleri buluruz. Lemma 3.1.2 den dolayı özdeğerler reeldir. Negatif özdeğerlerin sayısı sonludur. λ pozitif sayısı için $\operatorname{Im} s=0$ dır. Bu sebeple (3.3.8) formülünden

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O(\frac{1}{|s|}) \qquad (3.3.10)$$

yazılabilir. Daha sonra (3.3.5) ifadesini x ‘ e göre diferansiyelini alıp ve (3.3.10) bağıntısını da kullanırsak

$$\varphi_x'(x,\lambda)=-s\sin sx+h\cos sx+O(\frac{1}{s}) \qquad (3.3.11)$$

ifadesini elde ederiz. (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde (3.3.8) ve (3.3.11) ifadelerini yerlerine yazarsak özdeğerleri bulmak için aşağıdaki

$$-s\sin s\pi+(h+H)\cos s\pi+O(\frac{1}{s})=0 \qquad (3.3.12)$$

denklemini elde ederiz.

s nin büyük değerleri için (3.3.12) denkleminin tam doğal sayıların komşuluğunda kökleri olmak üzere çözümlerin varlığı açıktır. Buradan özdeğerlerin sonsuz bir cümlesinin var olduğunu elde ederiz. Herhangi yeteri kadar büyük tam n'den başlayarak her n'nin komşuluğunda (3.3.12) denkleminin sadece bir kökünün bulunduğunu gösterelim. Bu amaçla (3.3.12) denkleminin sol kısmının s'ye göre diferansiyeli alınırsa

$$-\pi s\cos s\pi-\sin s\pi-\pi(h+H)\sin s\pi+O(1)=0$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadenin s büyük tam değerleri komşuluğunda sıfıra eşit olmadığını göstermek mümkündür.

s_n ile (3.3.12) denkleminin n. kökünü gösterelim. Sturm'un osilasyon teoreminden ve (3.3.8) formülünden s_n için s nin sıfırlarını yalnız tam n ler komşuluğunda elde ederiz. Bu iddianın Sturm' un teoremine bağlı kalmadan başka bir ifadesini de söyleyebiliriz.

$\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde özdeğerler

$$\varphi(\pi,\lambda) + H\varphi_x'(\pi,\lambda) \equiv w(\lambda) = 0$$

denkleminin kökleri olduğu için $w(\lambda) = w_1(s)$ dir. (3.3.5) ifadesinden dolayı $w_1(s)$, s ye göre tam fonksiyondur. Buna ilaveten (3.3.10) ve (3.3.11) formüllerinden $\sin s\pi \neq 0$ için $w(\lambda) = w_1(s)$ ifadesinden

$$w_1(s) = -Hs\sin s\pi \left\{1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right\} \tag{3.3.13}$$

elde edilir.

S düzleminde $R = N + \frac{1}{2}$ yarıçaplı ve merkezi orijinde olan D_R dairesini göz önüne alalım. Rouche teoreminden ve (3.3.13) asimptotik formülünden D_R dairesinin içinde $w_1(s)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısına eşit olup bu sayı $2n$+2 dir. $w_1(s)$ fonksiyonu çift olduğundan onun sadece pozitif sıfırlarını göz önüne almak yeterlidir. $w_1(s)$ nin her pozitif sıfırına bir özdeğer karşılık gelir. Yani $N + \frac{1}{2}$ den küçük olan s_k özdeğerinin sayısı $N+1$ olacaktır. s_n için asimptotik formül aşagıdaki gibi olur.

$$s_n = n + o(1) \tag{3.3.14}$$

$s_n = n + \delta_n$ olsun. O zaman (2.3.12) denklemini

$n\sin\delta_n\pi + O(1) = 0$ şeklinde olur. Buradan $\sin\delta_n\pi = o(\frac{1}{n})$ yani $\delta_n = o(\frac{1}{n})$ olur. Buna göre (3.3.12) denkleminin köklerini büyük n ler için

$$s_n = n + o(\frac{1}{n}) \tag{3.3.15}$$

elde ederiz.

Eğer (3.1.1) denkleminde $q(x)$ fonksiyonu sınırlı türeve sahipse (3.3.15) formülü yeteri kadar düzgün sayılır. Şayet (3.3.5) eşitliğinin x göre türevini alıp daha sonra $\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi_x'(x,\lambda)$ ifadelerinin (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde kullanıp birkaç dönüşüm yaparsak

$$A = h + H + \int_0^{\pi} \left\{ \cos s\tau + \frac{H}{s} \sin s\tau \right\} q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$B = \frac{hH}{s} + \int_0^{\pi} \left\{ \sin s\tau + \frac{H}{s} \right\} q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

olacak şekilde

$$(-s + B)\sin s\pi + A\cos s\pi = 0 \qquad (3.3.16)$$

ifadesini elde ederiz. (3.3.10) ifadesinden dolayı A ve B için

$$A = h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\cos 2s\tau\, d\tau + O(\frac{1}{s})$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\sin 2s\tau\, d\tau + O(\frac{1}{s})$$

olur. Hipotezimizden dolayı $q(x)$ potansiyel fonksiyonu sınırlı türeve sahip olduğu için kısmi integral alınırsa

$$\int_0^{\pi} q(\tau)\cos 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad \int_0^{\pi} q(\tau)\sin 2s\tau d\tau = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Dolayısıyla A ve B ifadeleri için

$$A = h + H + h_1 + O(\frac{1}{s}) \qquad h_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau$$

$$B = O(\frac{1}{s})$$

elde edilir. Bu sebeple (3.3.16) denklemini

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O(\frac{1}{s})}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Tekrar $s_n = n + \delta_n$ alınırsa

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\tan \pi\delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir ve

$$c = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau\right)$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.3.17}$$

elde ederiz. $q(x) \in C^2(0,\pi)$ olduğunu kabul edersek daha yaklaşık bir asimptotik formül buluruz. c_1 sabit olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{3.3.18}$$

olur.

Şimdi (3.3.17) formülünden faydalanarak $\varphi(x,\lambda_n) = \varphi_n(x)$ özfonksiyonları için asimptotik formül bulalım. Bunun için (3.3.5) eşitliğinde $\varphi(x,\lambda)$ yerine (3.3.10) ifadesini yazarsak

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\left\{s(x-\tau\right\}\cos s\tau q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

elde edilir. (3.3.17) formülünde s için her yerde s_n alınırsa

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)=\cos nx-\frac{cx}{n}\sin nx+\frac{h}{n}\sin nx+\frac{\sin nx}{2n}\int_0^x q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz. $\varphi_n(x)$ normlaştırılmış özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini bulmak için

$$a_n^2=\int_0^\pi \varphi_n^2(x)dx=\int_0^\pi \cos^2 nxdx+\frac{1}{n}\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

integralini göz önüne alalım. $\beta(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan

$$\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir. Bundan dolayı $a_n^2=\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ve dolayısıyla

$$\frac{1}{a_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Böylece normlu özfonksiyonlar için asimptotik formül

$$v_n(x)=\frac{1}{a_n}\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.3.19)$$

şeklinde olur.

3. Şimdi $h=\infty$, $H\neq\infty$ olduğu durumu inceleyelim. (3.3.2) sınır şartlarının birincisinde

$$y(0)=0 \qquad (3.3.20)$$

olduğunu kabul edelim. $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.3.20) şartını sağlar. Bundan dolayı araştırdığımız durum için (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinde $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonunu yazarak özdeğerlerini araştırabiliriz. (3.3.6) ifadesinin x' e göre diferansiyelini alırsak

$$\psi_x'(x,\lambda)=\cos sx+\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau$$

elde ederiz. Bundan dolayı (3.3.2) sınır şartlarının ikincisinden

$$\begin{aligned}&\cos s\pi+\int_0^{\pi}\cos\{s(\pi-\tau\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau\\&+H\left\{\frac{\sin s\pi}{s}+\frac{1}{s}\int_0^{x}\sin\{s(\pi-\tau\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau\right\}=0\end{aligned} \qquad (3.3.21)$$

elde ederiz. (3.3.9) ifadesinden dolayı (3.3.21) den

$$\cos s\pi+\frac{1}{s}\int_0^{x}\cos\{s(\pi-\tau\}\sin s\tau q(\tau)d\tau+\frac{\sin s\pi}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0 \qquad (3.3.22)$$

bulunur. $q(x)$ sınırlı türeve sahip olduğundan

$$\int_0^{\pi}q(\tau)\cos\{s(\pi-\tau\}\sin s\tau d\tau=\varphi(x,\lambda)=\cos s\pi\int_0^{\pi}\sin s\tau\cos s\tau q(\tau)d\tau+\sin s\tau\int_0^{\pi}\sin^2 s\tau d\tau$$

$$=\frac{\sin s\pi}{2}\int_0^{\pi}q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Bundan dolayı (3.3.22) eşitliğinden

$$\cos s\pi+\frac{\sin s\pi}{s}\left\{H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(\tau)d\tau\right\}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=\cos s\pi+H_1\frac{\sin s\pi}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right)=0 \quad (3.3.23)$$

olur.

$s_n=n+\frac{1}{2}+\delta_n$ olsun. O zaman (3.3.23) ifadesinden

$$\delta_n=\frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\cot\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)\pi=-\tan\delta_n\pi=-\frac{H_1}{n+\frac{1}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur ve

$$H_1=H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz.

Şimdi (3.3.6) da s_n değerini yerleştirirsek $\psi(x,\lambda_n) = \psi_n(x)$ özfonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formülü

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı bu durum için $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$ normlu özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (3.3.24)$$

şeklinde olur.

4. Son olarak $h = \infty$ ve $H = \infty$ durumunu araştıralım. (3.3.2) sınır şartlarında $y(0) = y(\pi) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz ve bundan dolayı $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu özel olarak $\psi(x,\lambda) = 0$ şartını sağlamalıdır. (3.3.6) ifadesinden

$$\sin s\pi + \int_0^{\pi} \sin\{s(\pi - \tau\} q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau = 0$$

ya da

$$\sin s\pi \left\{1 + \int_0^{\pi} \cos s\tau q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau\right\} - \cos s\pi \int_0^{\pi} \sin s\tau q(\tau)\psi(\tau,\lambda)d\tau = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.3.9) ifadesinden dolayı ($q(x)$ sınırlı)

$$\sin s\pi - \frac{1}{2s}\cos s\pi \int_0^{\pi} q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \sin s\pi - \frac{\alpha}{s}\cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \qquad (3.3.25)$$

elde ederiz. Bu denklem (3.3.12) denklemi ile aynıdır. Bundan dolayı (3.3.25) denkleminin s_n kökleri $\alpha_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau$ olmak üzere

$$s_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.3.26}$$

şeklindedir.

(3.3.6) da s_n nin değerini yerine yazarsak $\psi(x,\lambda_n) = \psi_n(x)$ özfonksiyonları için

$$\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik formülünü elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$ normlaştırılmış özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.3.27}$$

olur.

3.4 Sturm-Liouville Operatörü için Düzenleştirilmiş İz'in Hesabı

1. $$y'' + y(\lambda - q(x)) = 0 \quad x \in [0, \pi] \tag{3.4.1}$$

$$\begin{aligned} y'(0,\lambda) - hy(0,\lambda) &= 0 \\ y'(\pi,\lambda) + Hy(\pi,\lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

sınır değer problemini düşünelim. Burada $q(x) \in \mathrm{C}^2(0,\pi)$ ve h ve H sonlu reel sayılardır. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ile bu problemin özdeğerlerini gösterelim. (3.3) te gösterildigi gibi yeterince büyük n ler için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.4.3}$$

asimptotik formülü elde edilmişti. Burada

$$c = \frac{2}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx\right) \tag{3.4.4}$$

biçimindedir. (3.4.3) eşitliğinden her iki tarafının karesi alınırsa

$$\lambda_n = n^2 + c + \frac{c^2}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = n^2 + c + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.4.5}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda_n - n^2 - c\right) < \infty \tag{3.4.6}$$

yazılır. (3.4.6) serisine Sturm-Liouville operatörü için düzenleştirilmiş iz denir.

2. $\varphi(x,\lambda)$ ile $\varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'_x(0,\lambda) = h$ başlangıç şartlarını sağlayan (3.4.1) denkleminin çözümünü gösterelim. O zaman λ_n özdeğerleri $\varphi'_x(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda)$ tam analitik fonksiyonlarının kökleridir. Böylece

$$\varphi'_x(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = A\Phi(\lambda) \tag{3.4.7}$$

açılımına sahiptir. Burada A bir sabit ve

$$\Phi(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \tag{3.4.8}$$

şeklindedir.

$\lambda = -\mu$ negatifleri için (3.4.7) nin her iki tarafının asimptotik davranışını inceleyelim.

(3.4.8) de $\lambda=-\mu$ yazılırsa, $\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$, $\frac{\sin iz}{i}=\sinh z$ ve $\frac{\sin iz}{i}=\sinh z=\frac{iz}{i}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ ifadelerinden yararlanırsa

$$\Phi(-\mu)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_n}\right)=\left(1+\frac{\mu}{\lambda_0}\right)\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{n^2}\right)}\frac{\sinh\pi\sqrt{\mu}}{\pi\sqrt{\mu}}$$

$$=c_1\left(\lambda_0+\mu\right)\Psi(\mu)\frac{\sinh\pi\sqrt{\mu}}{\pi\sqrt{\mu}} \tag{3.4.9}$$

elde edilir. Burada

$$c_1=\frac{1}{\lambda_0}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n} \tag{3.4.10}$$

ve

$$\Psi(\mu)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right) \tag{3.4.11}$$

şeklindedir. Gerçekten de;

$$\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{n^2}\right)}=\frac{\left(1+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)\left(1+\frac{\mu}{\lambda_2}\right)\left(1+\frac{\mu}{\lambda_3}\right)\ldots}{\left(1+\mu\right)\left(1+\frac{\mu}{4}\right)\left(1+\frac{\mu}{9}\right)\ldots}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadeler biraz daha düzenlenirse

$$\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\lambda_n}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{n^2}\right)}=\frac{\left(\frac{\lambda_1+\mu}{\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2+\mu}{\lambda_2}\right)\left(\frac{\lambda_3+\mu}{\lambda_3}\right)\ldots}{\left(1+\mu\right)\left(\frac{4+\mu}{4}\right)\left(\frac{9+\mu}{9}\right)\ldots}$$

$$=\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\frac{4}{\lambda_2}\right)\left(\frac{9}{\lambda_3}\right)\ldots\left(\frac{\mu+\lambda_1}{\mu+1}\right)\left(\frac{\mu+\lambda_2}{\mu+4}\right)\left(\frac{\mu+\lambda_3}{\mu+9}\right)\ldots$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)$$

elde edilir. Buradan $c_1=\frac{1}{\lambda_0}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}$ ve $\Psi(\mu)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)$ elde edilir.

μ pozitif sayıları için $\Psi(\mu)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını elde etmeye çalışalım. (3.4.11) eşitliğinde her iki tarafın doğal logaritması alınırsa yani;

$$\ln\left(\Psi(\mu)\right)=\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)\right)$$

olursa ve $\ln\left(ab\right)=\ln a+\ln b$ den yararlanılırsa

$$\ln\left(\Psi(\mu)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)^k$$

şeklini alır. Burada

$$\ln\left(1+\left(-\frac{(n^2-\lambda_n)}{\mu+n^2}\right)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)^k=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)^k$$ şeklindedir.

$\ln\left(\Psi(\mu)\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)^k$ elde edilir. Şimdi teoremin ispatında kullanacağımız bir Lemmayı ve ispatını verelim.

Lemma 3.4.1 Eğer $\left|n^2-\lambda_n\right|\le a$ ise o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|n^2-\lambda_n\right|^k}{(\mu+n^2)^k}\le\frac{\pi}{2}\frac{a^k}{\mu^{k-\frac{1}{2}}} \tag{3.4.11}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Gerçekten de $\left|n^2-\lambda_n\right|\le a$ ve ifadesinden yararlanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|n^2-\lambda_n\right|^k}{(\mu+n^2)^k}\le a^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu+n^2)^k}\le a^k\int_0^{\infty}\frac{dx}{(\mu+x^2)^k}=a^k\int_0^{\infty}\frac{dx}{\mu^k(1+\frac{x^2}{\mu})^k}=\left(\frac{a}{\mu}\right)^k\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+\frac{x^2}{\mu})^k}$$

şeklini alır. Burada $\frac{x^2}{\mu}=t^2$ dönüşümü yapılırsa $\frac{2x}{\mu}dx=2tdt$ elde edilir. Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$=\frac{a^k}{\mu^k}\int_0^\infty \frac{2t\mu dt}{2t\sqrt{\mu}(1+t^2)^k}=\frac{a^k}{\mu^k}\int_0^\infty \frac{\mu dt}{\sqrt{\mu}(1+t^2)^k}=\frac{a^k}{\mu^{k-\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^k}$$

olur.

Şimdi biz $\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^k}$ integralini hesaplayalım.

Burada $\int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}\Big|_0^a+\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$ integralinden yararlanılırsa

$$\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a \frac{dt}{(1+t^2)^k}\right)=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{a}{(2n-2)(1+a^2)^{n-1}}+\frac{a}{(2n-2)(1+a^2)^{n-1}}+\ldots+\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}\right)$$

yazılır. Buradan

$\lim_{a\to\infty}\left(\arctan x\big|_0^a\right)=\arctan\infty=\frac{\pi}{2}$ bulunur. Denklemde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|n^2-\lambda_n\right|^k}{(\mu+n^2)^k}\le\frac{\pi}{2}\frac{a^k}{\mu^{k-\frac{1}{2}}}$$

eşitsizliğini almış oluruz. Bununla Lemma'nın ispatı yapılmış olur. O halde tekrar toplam ifadesine dönülürse;

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}\right)^k=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|n^2-\lambda_n\right|^k}{(\mu+n^2)^k}$$

yazılabilir. Öncelikle

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|n^2-\lambda_n\right|^k}{(\mu+n^2)^k}\le\frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a^k}{\mu^{k-\frac{1}{2}}}=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+2}}{\mu^{k+\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2}\frac{a^2}{\mu^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\mu}\right)^k=O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad (3.4.12)$$

elde ederiz. (3.4.12) de

$$\frac{\pi}{2}\frac{a^2}{\mu^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\mu}\right)^k=O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right)$$

olduğunu gösterelim.

yani $\lim\limits_{\mu\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}\dfrac{a^2}{\mu^{\frac{3}{2}}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{\mu}\right)^k}{\dfrac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}}$ limitinin sonlu olduğunu gösterelim. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{\mu}\right)^k$ serisi geometrik bir seri olup $\left|\dfrac{a}{\mu}\right|<1$ olduğundan bu limitin sonucu sonludur.

Buna ilaveten

$$
\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\lambda_n}{\mu+n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-c\right)\frac{1}{\mu+n^2}+c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+n^2}\\
&= c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+n^2}+\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c)-\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c)\frac{n^2}{\mu+n^2} \qquad (3.4.13)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $\sup_n\left|\left(\lambda_n-n^2-c\right)n^2\right|<\infty$ olduğu için

$$
\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c)n^2\,\frac{1}{\mu+n^2}=O\left(\mu^{\frac{-3}{2}}\right) \qquad (3.4.14)
$$

yazılabilir. Gerçekten de (3.4.12) ve (3.4.14) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\mu}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c)n^2\,\dfrac{1}{\mu+n^2}}{\mu^{\frac{-3}{2}}} &= \lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\mu}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c)n^2\,\dfrac{1}{\mu(1+\frac{n^2}{\mu})}}{\mu^{\frac{-3}{2}}}\\
&= \lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c)\frac{1}{(1+\frac{n^2}{\mu})}<\infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.4.14) ve (3.4.12) den

$$
\ln\left(\Psi(\mu)\right)=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+n^2}+\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-n^2-c)+O\left(\mu^{\frac{-3}{2}}\right) \qquad (3.4.15)
$$

yazılabilir. Bilindiği gibi

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+n^2}=\frac{\pi\coth\pi\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}}-\frac{1}{2\mu}=\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}-\frac{1}{2\mu}+O\left(e^{-2\pi\sqrt{\mu}}\right)
$$

şeklindeydi.

O halde

$$\ln\psi(\mu)=\frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}}+\frac{1}{\mu}\left(s_\lambda-\lambda_0+\frac{1}{2}c\right)+O\left(\mu^{\frac{-3}{2}}\right) \tag{3.4.16}$$

halini alır. Burada

$$s_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda_n-n^2-c\right)<\infty$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$\psi(\mu)=\exp\left\{\frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}}+\frac{1}{\mu}\left(s_\lambda-\lambda_0+\frac{1}{2}c\right)+O\left(\mu^{\frac{-3}{2}}\right)\right\}$$

halini alır. Burada da üstel fonksiyonun seri açılımından faydalanılırsa

$$=1+\frac{c\pi}{2\sqrt{\mu}}+\frac{1}{\mu}\left(s_\lambda-\lambda_0+\frac{1}{2}c+\frac{c^2\pi^2}{8}\right)+O\left(\mu^{\frac{-3}{2}}\right) \tag{3.4.17}$$

elde edilir. (3.4.17) den

$$\Phi(-\mu)=\frac{1}{2\pi}c_1e^{\pi\sqrt{\mu}}\left\{\sqrt{\mu}+\frac{1}{2}c\pi+\frac{1}{\mu}\left(s_\lambda+\frac{1}{2}c+\frac{c^2\pi^2}{8}\right)+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\} \tag{3.4.18}$$

elde edilir.

3. Liouville integral denklemini kullanarak $\lambda=-\mu$ sayıları için $H\varphi(\pi,\lambda)+\varphi_x{}'(\pi,\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını inceleyelim. Hesaplamayı kolaylaştırmak için $h=0$ ve $\int_0^\pi q(x)dx=0$ alalım. (3.3.5) formülünden ve $\cosh(-\sqrt{\mu}x)=\cosh\sqrt{\mu}x$ ifadesinden yararlanılırsa

$$\varphi(x,-\mu)=\cosh\sqrt{\mu}x+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^x\sinh\left\{\sqrt{\mu}(x-t)\right\}q(t)\varphi(t,-\mu)dt$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.8) den yararlanılırsa

$$\varphi(\pi,-\mu)=\frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left\{1+\frac{1}{\mu}\int_0^\pi\sinh\left\{\sqrt{\mu}(\pi-t)\right\}q(t)\cosh\sqrt{\mu}tdt+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\} \tag{3.4.19}$$

elde edilir. Aynı şekilde *x'* e göre türev alınırsa

$$\varphi_x'(x,-\mu)=\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}x+\int_0^x\cosh\left\{\sqrt{\mu}(x-t)\right\}q(t)\varphi(t,-\mu)dt$$

elde edilir. $x=\pi$ yazılırsa

$$\varphi_x'(\pi,-\mu)=\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\pi+\int_0^x\cosh\left\{\sqrt{\mu}(\pi-t)\right\}q(t)\Big[\cosh\sqrt{\mu}t$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^\pi\sinh\left\{\sqrt{\mu}(t-s)\right\}q(s)\cosh\sqrt{\mu}sds\Big]dt+O\left(\frac{e^{\pi\sqrt{\mu}}}{\mu}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left\{\sqrt{\mu}+\frac{1}{4\sqrt{\mu}}\left[q(0)+q(\pi)\right]+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\} \tag{3.4.20}$$

elde edilir. O halde

$$H\varphi(\pi,\lambda)+\varphi_x'(\pi,\lambda)=\frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}}\left\{\sqrt{\mu}+H+\frac{1}{4\sqrt{\mu}}\left[q(0)+q(\pi)\right]+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\} \tag{3.4.21}$$

yazılır. $A=\frac{\pi}{c_1}$ Yazılırsa (3.4.18) ve (3.4.21) den

$$H+\frac{1}{4\sqrt{\mu}}\left[q(0)+q(\pi)\right]+O\left(\frac{1}{\mu}\right)=\frac{c\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(s_\lambda+\frac{1}{2}c+\frac{c^2\pi^2}{8}\right)+O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

yazılır. Burada $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ katsayılarını eşitlersek ve (3.4.4) eşitliğini dikkate alırsak

$$s_\lambda=\frac{1}{4}\left[q(0)+q(\pi)\right]-\frac{H}{\pi}-\frac{H^2}{2}$$

elde edilir.

4. İNTEGRAL DENKLEMLERİ METODU ile AÇILIM TEOREMİNİN İSPATI

1. $$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = f(x) \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &y(0,\lambda)\cos\alpha + y'(0,\lambda)\sin\alpha = 0 \\ &y(\pi,\lambda)\cos\beta + y'(\pi,\lambda)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

sınır değer problemini düşünelim. Burada *f(x)* sürekli bir fonksiyondur. λ sabit bir kompleks sayı olsun. $u(x,\lambda)$ ile $u(0,\lambda) = \sin\alpha$ $, u'(0,\lambda) = -\cos\alpha$ başlangıç şartlarını sağlayan (3.2.1) denkleminin çözümünü, $v(x,\lambda)$ ile de $v(\pi,\lambda) = \sin\beta$ $, v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$ başlangıç şartlarını sağlayan aynı denklemin çözümünü gösterelim.

Eğer $u(x,\lambda)$ ve $v(x,\lambda)$ lineer bağımsız ise yani $u(x,\lambda)$ (3.2.1)-(3.2.2) probleminin özfonksiyonu değilse o zaman Wronskian determinantı sıfırdan farklıdır.Yani

$$W\{u,v\} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0$$

şeklindedir.

Tersine bazı λ lar için Wronskian determinantı 0 ise o zaman $u = cv$ şeklidedir ve buradan $u(x,\lambda)$ bir özfonksiyondur. Böylece (3.2.1)-(3.2.2) probleminin özdeğerleri Wronskian determinantıyla bağlantılıdır. Sturm-Liouville denklemindeki birinci mertebeden türevin katsayısı 0 olduğu için Wronskian *x'* e bağımlı değildir. Yani $W\{u,v\} = w(\lambda)$ şeklindedir. Şimdi Green fonksiyonu olarak adlandırılan

$$G(x,t;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{w(\lambda)} u(x,\lambda)v(t,\lambda), & x \le t \\ \dfrac{1}{w(\lambda)} u(t,\lambda)v(x,\lambda), & x \ge t \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.Bu fonksiyon x' e ve *t'* ye göre simetriktir ve λ reel sayıları için reeldir. Biz

$$y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t;\lambda) f(t)\,dt \tag{4.3}$$

fonksiyonunun (4.1)-(4.2) sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim. Burada Leibnitz formülün den faydalanacağız. Leibnitz formülü

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{d(f(x,t))}{dx}dt$$

şeklindeydi.

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{v(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)dt + u(x,\lambda)\int_x^\pi v(t,\lambda)f(t)dt\right\} \qquad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Leibnitz formülünden

$$y'(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{v(x,\lambda)u(x,\lambda)f(x) + \int_0^x v'(x,\lambda)u(t,\lambda)f(t)dt - v(x,\lambda)u(x,\lambda)f(x) + \int_x^\pi u'(x,\lambda)v(t,\lambda)f(t)dt\right\}$$

$$y'(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{\int_0^x v'(x,\lambda)u(t,\lambda)f(t)dt + \int_x^\pi u'(x,\lambda)v(t,\lambda)f(t)dt\right\}$$

elde edilir. Benzer mantıkla ikinci türevinden de

$$y''(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{v'(x,\lambda)u(x,\lambda)f(x) + \int_0^x v''(x,\lambda)u(t,\lambda)f(t)dt - u'(x,\lambda)v(x,\lambda)f(x) + \int_x^\pi u''(x,\lambda)v(t,\lambda)f(t)dt\right\}$$

$w(\lambda) = u(v,\lambda)v'(x,\lambda) - u'(v,\lambda)v(x,\lambda)$ olduğundan ve $u(x,\lambda)$, $v(x,\lambda)$ özfonksiyonları (3.1.1) denklemini sağladığından dolayı

$$y''(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{\begin{array}{l} f(x)\big(v'(x,\lambda)u(x,\lambda) - u'(x,\lambda)v(x,\lambda)\big) + \\ \int_0^x v(x,\lambda)(q(x)-\lambda)u(t,\lambda)f(t)dt + \int_x^\pi u(x,\lambda)(q(x)-\lambda)v(t,\lambda)f(t)dt \end{array}\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$y''(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}\left\{f(x)w(\lambda) + (q(x)-\lambda)\left(\int_0^x v(x,\lambda)u(t,\lambda)f(t)dt + \int_x^\pi u(x,\lambda)v(t,\lambda)f(t)dt\right)\right\}$$

elde edilir. Buradan da

$y''(x,\lambda) = \left[q(x)-\lambda\right]y(x,\lambda) + f(x)$ yani;

$y''(x,\lambda) + \left[\lambda - q(x)\right]y(x,\lambda) = f(x)$ elde edilir. (4.3) fonksiyonunun (4.2) sınır şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. 1. şartı sağladığını gösterelim.

$u(0,\lambda)=\sin\alpha \quad ,u'(0,\lambda)=-\cos\alpha$ şartlarını göz önüne alırsak

$$y(0,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left\{v(0,\lambda)\int_0^0 u(t,\lambda)\,f(t)dt+u(0,\lambda)\int_0^\pi v(t,\lambda)\,f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{w(\lambda)}\left\{u(0,\lambda)\int_0^\pi v(t,\lambda)\,f(t)dt\right\}=\frac{\sin\alpha}{w(\lambda)}\int_0^\pi v(t,\lambda)\,f(t)dt$$

elde edilir.

$$y'(0,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left\{\int_0^0 v'(0,\lambda)u(t,\lambda)\,f(t)dt+\int_0^\pi u'(0,\lambda)v(t,\lambda)\,f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{w(\lambda)}\left\{u'(0,\lambda)\int_0^\pi v(t,\lambda)\,f(t)\right\}=-\frac{\cos\alpha}{w(\lambda)}\int_0^\pi v(t,\lambda)\,f(t)dt$$

elde edilir. Bu fonksiyonlar (4.2) nin birinci şartında yerine yazılırsa

$$\left(\frac{\sin\alpha}{w(\lambda)}\int_0^\pi v(t,\lambda)\,f(t)dt\right)\cos\alpha-\left(\frac{\cos\alpha}{w(\lambda)}\int_0^\pi v(t,\lambda)\,f(t)dt\right)\sin\alpha=0$$

olduğu görülür. Benzer şekilde ikinci şartta kolaylıkla gösterilebilir.

Böylece λ, (3.2.1)-(3.2.2) homojen problemin bir özdeğeri degilse o zaman (4.1)-(4.2) homojen olmayan sistemi herhangi bir *f(x)* fonksiyonu için çözüme sahiptir. Çözümü de (4.3) te verilmiştir. Tersine λ homojen problemin özdeğeri ise o zaman (4.1)-(4.2) homojen olmayan sistemi çözülemez.

Eğer λ, homojen problemin özdeğeri degilse o zaman (4.1)-(4.2) sistemi tek bir çözüme sahiptir. Gerçekten de homojen olmayan problemin iki çözümünün farkı açıkça homojen problemin bir özfonksiyonudur.

$\lambda=0$ sayısının bir özdeğer olmadığını farzedelim. μ sayısını seçelim ve

$$y''+\{(\lambda+\mu)-q(x)\}\,y=0$$

$$y(0,\lambda)\cos\alpha+y'(0,\lambda)\sin\alpha=0$$
$$y(\pi,\lambda)\cos\beta+y'(\pi,\lambda)\sin\beta=0$$

sınır değer problemini düşünelim. Bu sistemin özfonksiyonları (3.2.1)-(3.2.2) sistemi ile aynıdır. $G(x,t;0)=G(x,t)$ olarak alalım. O zaman

$$y(x)=\int_0^{\pi} G\left(x,t\right)f(t)dt \tag{4.5}$$

fonksiyonu (4.2) sınır koşullarını sağlayan $y''-q(x)y=f(x)$ denkleminin bir çözümüdür. $y''-q(x)y=f(x)-\lambda y$ formülünü tekrar yazalım. (4.1)-(4.2) sisteminin

$$y+\lambda\int_0^{\pi} G(x,t)y(t)dt=\int_0^{\pi} G(x,t)f(t)dt\equiv g(x)$$

integral denklemine denk olduğunu söyleyebiliriz.

$f(x)=0$ homojen problemi

$$y(x)+\lambda\int_0^{\pi} G(x,t)y(t)dt=0 \tag{4.6}$$

integral denklemine denktir.

2. $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots$ ile (3.2.1)-(3.2.2)probleminin özdeğerlerinin kümesini ve $v_0(x),v_1(x),\ldots$ ile de bu sisteme karşılık gelen normalleştirilmiş özfonksiyonları gösterelim.

$$H(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

çekirdeğini alalım. 3. kısımda elde edilen asimptotik formüllere göre ,$H(x,\xi)$ serileri mutlak ve düzgün yakınsaktır ve böylece $H(x,\xi)$ çekirdeği süreklidir.

$$Q(x,\xi)=G(x,\xi)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

çekirdeğini ele alalım. Bu çekirdek açıkça sürekli ve simetriktir. İntegral denklemlerinden bilindiği gibi her simetrik $Q(x,\xi)\neq 0$ çekirdeği en azından bir özfonksiyona sahiptir. Yani

$$u(x)+\lambda_0\int_0^{\pi} Q(x,\xi)u(\xi)d\xi=0 \tag{4.6}$$

denklemini sağlayan $u(x)\neq 0$ fonksiyonu ve λ_0 sayısı vardır.

Böylece $Q(x,\xi)$ çekirdeği özfonksiyona sahip degilse $Q(x,\xi)\equiv 0$ sonucuna varılabilir. Yani

$$G(x,\xi)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\lambda_n} \qquad (4.6)$$

yazılır. (4.6) denkleminden

$$\int_0^{\pi} G(x,\xi)v_n(\xi)d\xi=-\frac{1}{\lambda_n}v_n(x)$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^{\pi} Q(x,\xi)v_n(\xi)d\xi=0$$

olur. Yani $Q(x,\xi)$ çekirdeği (3.2.1)-(3.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına ortogonaldir.

$u(x)$, (4.6) integral denkleminin bir çözümü olsun. $u(x)$' in tüm $v_n(x)$' lere ortogonal olduğunu göstereceğiz. (4.6) dan

$$0=\int_0^{\pi} u(x)v_n(x)dx+\lambda_0\int_0^{\pi} v_n(x)\left\{\int_0^{\pi} Q(x,\xi)u(\xi)d\xi\right\}dx$$

$$=\int_0^{\pi} u(x)v_n(x)dx+\lambda_0\int_0^{\pi} u(\xi)\left\{\int_0^{\pi} Q(x,\xi)v_n(x)dx\right\}d\xi=\int_0^{\pi} u(x)v_n(x)dx$$

elde edilir. Böylece

$$0=u(x)+\lambda_0\int_0^{\pi} Q(x,\xi)u(\xi)d\xi=u(x)+\lambda_0\int_0^{\pi} G(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

olur. Yani $u(x)$, (3.2.1)-(3.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır. Böylece $u(x)$, tüm $v_n(x)$' lere ortogonal olduğu için $u(x)=0$ alırız. Sonuç olarak $Q(x,\xi)\equiv 0$ elde edilir.

Teorem 4.1. (Açılım Teoremi) $f(x)$**,** ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip ve (3.2.2) sınır koşullarını sağlarsa o zaman $f(x)$ fonksiyonu (3.2.1)-(3.2.2) sınır değer probleminin öz fonksiyonlarına göre mutlak ve düzgün yakınsak Fourier serilerine açılabilir. Burada ,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \qquad a_n=\int_0^{\pi} f(x)v_n(x)dx \tag{4.6}$$

şeklindedir.

İspat: $f''-q(x)f(x)=h(x)$ denklemini alalım. (4.3) ve (4.6) yardımıyla

$$f(x)=\int_0^{\pi} G(x,\xi)h(\xi)d\xi=-\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\pi} v_n(\xi)h(\xi)d\xi \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x)$$ elde edilir.

$v_n(x)$ fonksiyonlarının ortonormal olmasından

$$a_n=\int_0^{\pi} f(x)v_n(x)dx$$

elde edilir.

Teorem 4.2. $[0,\pi]$ aralığında karesi integrallenebilir olan her $f(x)$ fonksiyonu için Parseval eşitliği vardır. Yani

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}$$

şeklindedir.

İspat. Gerçekten de

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} f(x)v_n(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

elde edilir.

3. (4.6) formülüne tekrar dönelim. Bu formülün sağ tarafına resolvent denilir.

Biz (3.2.1)-(3.2.2) sınır değer probleminin özdeğerleri olmayan tüm λ lar için resolventin olduğunu biliyoruz.

Şimdi biz *f(x)* fonksiyonunun açılımı bilinirse resolventin Fourier açılımı ile nasıl elde edilebileceğini gösterelim.

(4.6) ile tanımlı $y(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.2) sınır şartlarını sağlar. O halde

$y''(x,\lambda)-q(x)y(x,\lambda)=\lambda y$ ve $v''(x,\lambda)-q(x)v(x,\lambda)=\lambda v_n$ yazılabilir. Birinci eşitliği $v_n(x)$ ikinci eşitliğide $y(x)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak ve daha sonra integrallersek

$$\int_0^{\pi}\left\{y''(x,\lambda)-q(x)y(x,\lambda)\right\}v_n(x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{v_n''(x)-q(x)v_n(x)\right\}y(x,\lambda)dx \tag{4.7}$$

$$=-\lambda_n\int_0^{\pi}y(x,\lambda)v_n(x)dx=-\lambda_n d_n(\lambda)$$

elde edilir.

$$y(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(\lambda)v_n(x),\qquad a_n=\int_0^{\pi}f(x)v_n(x)dx$$

olsun. O zaman (4.1) ve (4.7) den

$$a_n=\int_0^{\pi}\left\{y''(x,\lambda)+\left[\lambda-q(x)\right]y(x,\lambda)\right\}v_n(x)dx=-\lambda_n d_n(\lambda)+\lambda d_n(\lambda)$$

elde edilir. Böylece

$$d_n(\lambda)=\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}$$

olur. Sonuç olarak resolvent açılımı

$$y(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}v_n(x)$$

formuna sahiptir.

KAYNAKLAR

Adıgüzelov, E. E., Baykal, O. and Bayramov, A., "On the spectrum and regularized trace of the Sturm-Liouville problem with spectral parameter on the boundary condition and with the operator coefficient." *International Journal of differential equations and applications* 2, 317-333, (2001).

Amırov, Rauf Kh, and A. Adiloglu Nabıev, "Inverse problems for the quadratic pencil of the Sturm-Liouville Equations with impulse" *Abstract and Applied Analysis*. Vol. 2013. Hindawi Publishing Corporation, (2013).

Balcı, M., Analiz I, Balcı Yayınları, Ankara, 341s, (1999).

Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, Atatürk üniversitesi yayınları, Erzurum, 314s, (1994).

Buterin, S. A., "On inverse spectral problem for non-selfadjoint Sturm–Liouville operator on a finite interval" *Journal of mathematical analysis and applications*335.1, 739-749, (2007).

Dikii, L. A., New method of computing approximate eigenvalues of the Sturm-Liouville problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR 116, 12-14, (1957).

Freiling, G., and Yurko, V., Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, Nova Science Pub. Inc., 305p, (2001).

Gelfand, I. M. and Levitan, B. M., On a simple identity for eigenvalues of the differential operator of second order, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 88, no. 4, 593-596, (1953).

Guliyev, N. J., The regularized trace formula for the Sturm-Liouville equation with spectral parameter in the boundary conditions, Proc. Inst. Math. Natc. Acad. Sci. Azerb., 22, 99-102 (2005).

Freiling, G., and Yurko V. A., "Inverse problems for Sturm–Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter" *Inverse Problems* 26.5, 055003, (2010).

Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L. M., İbikli, E., Brown, S., Matematik Terimleri Sözlüğü, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 678s, (2000).

Hochstadt, Harry, and Burton Lieberman, "An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data" *SIAM Journal on Applied Mathematics* 34.4 676-680, (1978).

Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., Elementary of Functional Analysis and Theory of Functions, Moscow, Russia, 327p, (1972)

Kostyuchenko, A. G., and Sargsyan, I. S., Distribution of eigen values, Nauka Moscov, (1979).

Kreyszig, E., Introductory to Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York, 688p, (1978).

Levitan, B.M., Sargsyan, I. S., Introduction to spektral Theory; Selfadjoint Ordinary Differential Operators, American Mathemetical Society, Providence, Rhode Island, 525p, (1975).

Liusternik, L. A. and Sobolev, V. J., Elements of Fuctional Analysis. Frederick Ungar Publishing Company, New York, (1961).

Markushevich, A. I. and Markushevich, L. A., Introduction to Theory of analytic Fuctions. Moscov, (1977).

Musayev, B., Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 470s, (2000).
Freiling, G., and Yurko, V., Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, Nova Science Pub. Inc., 305p, (2001).

Olver, F. W. J., Introduction to asymtotics and special functions, Academic press, New York and London, 375p, (1994).

Sadovnichii, V. A. and Podol’skii, V. E., Traces of differential operators, Differential Equations, 45, no. 4,, 477-493, (2009).

Shieh, Chung-Tsun, and Yurko V.A., "Inverse nodal and inverse spectral problems for discontinuous boundary value problems" *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 347.1, 266-272, (2008).

Şuhubi, E.S., Fonksiyonel Analiz. İ.T.Ü, 638. İstanbul, (2001).

Yang, C. F., New trace formulae for a quadratic pencil of the Schrödinger operator, Journal of Mathematical Physics, 51, 033506 (2010).

Yang, C.F., and Xiao-Ping Yang, "An interior inverse problem for the Sturm–Liouville operator with discontinuous conditions" *Applied Mathematics Letters* 22.9, 1315-1319, (2009)a.

Yang, C.F., and Zhen-You Huang, "Inverse spectral problems for 2m-dimensional can Yang, Chuan-Fu, and Xiao-Ping Yang, "Some Ambarzumyan-type theorems for Dirac operators" *Inverse Problems* 25.9, 095012, (2009)b

Yang, C.F., "Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph" *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 365.2, 742-749, (2010)a.

Yang, C.F., "New trace formulae for a quadratic pencil of the Schrödinger operator." *Journal of Mathematical Physics* 51.3, 033506, (2010)b.

Yang, C.F., Zhen-You Huang, and Xiao-Ping Yang, "Ambarzumyan's theorems for vectorial Sturm-Liouville systems with coupled boundary conditions" *Taiwanese Journal of Mathematics* 14.4, pp-1429 (2010)c.

Yang, C.F., and Xiao-Ping Yang, "Inverse nodal problems for the Sturm-Liouville equation with polynomially dependent on the eigenparameter" *Inverse Problems in Science and Engineering* 19.7, 951-961, (2011).

Yang, C.F., "Trace and inverse problem of a discontinuous Sturm–Liouville operator with retarded argument" *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 395.1, 30-41, (2012)a.

Yang, C.F., "Inverse nodal problems for the Sturm-Liouville operator with eigenparameter dependent boundary conditions" *Operator and matrices* 6.1, 6377, (2012)b.

ÖZGEÇMİŞ

29.07.1988 yılında Ankara' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara' da tamamladı. 2006 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2010 yılında mezun oldu. 2013 yılında Erzincan Tercan Anadolu Lisesi' nde matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı ve bu görevini hala devam ettirmektedir.