ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARINDA YENİ AİLE

İpek ALTUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Engin ÖZKAN

ERZİNCAN
2016

Prof. Dr. Engin ÖZKAN danışmanlığında, İpek ALTUN tarafından hazırlanan bu çalışma 01/02/2016tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Cebir Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI	*İmza:*
Üye	:Prof. Dr Engin ÖZKAN	*İmza:*
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Nihat YAĞMUR	*İmza:*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

01/02/2016

Prof. Dr. Ali SÜLÜN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARINDA YENİ AİLE

İpek ALTUN

Erzincan Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu çalışmada, Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan $F_n^{(k)}$ tanımı verildi. Bu tanımdan faydalanılarak Lucas sayılarının yeni bir ailesi olan $L_n^{(k)}$ elde edildi. Ayrıca $F_n^{(k)}$ ve $L_n^{(k)}$ sayıları için çeşitli teoremler, ispatlarıyla birlikte verildi.

Daha sonra genelleştirilmiş Lucas polinomlarının tanımı verildi. Genelleştirilmiş Q-matris ile yeni bir matris elde edilerek bunun yardımıyla genelleştirilmiş Lucas polinomlarının elemanları bulundu. Ayrıca Lucas polinomları ve bağıntılarının genelleştirilmiş durumları elde edildi.

Son olarak bu bağıntılardan yola çıkılarak Fibonacci ve Lucas polinomlarında yeni aile ile ilgili teorem ve özellikler bulundu.

2016, 71 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, k-Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesi, k-Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesi, Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları, Genelleştirilmiş Lucas Polinomları, Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomlarında Yeni Aile, Genelleştirilmiş Lucas Polinomlarında Yeni Aile.

ABSTRACT

Master Thesis

ON A NEW FAMİLY OF GENERALİZED FİBONACCİ AND LUCAS POLYNOMİALS

İpek ALTUN

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

We prove some theorems concerning a new family of Fibonacci numbers. We give some relationship between the family and Fibonacci and Lucas number. Then we give a new family of k-Lucas numbers and establish some properties of the relation to the Lucas numbers and the family of Lucas numbers.

Then, we define the Lucas polynomials and find elements of the Lucas polynomial by aid of the generalized Q-matrix. Also, the Lucas polynomial and their relationship are generalized in this paper. Therefore, we define a new generalized Fibonacci and Lucas polynomial by using new family of k-Fibonacci numbers. We give some properties and identities related to the polynomials.

2016, 71 pages

Keywords: Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, Generalized Fibonacci Numbers, On A New Family Of k-Fibonacci Numbers, On A New Family Of k-Lucas Numbers, On A New Family Of Generalized Fibonacci Polynomials, On A New Family Of Generalized Lucas Polynomials.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında desteğini gördüğüm, bilgi ve birikimlerinden faydalandığım çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a, çalışmalarım boyunca beni yalnız bırakmayan, her zaman desteğini hissettiğim, benim için çok değerli olan Ferhat UÇAR'a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İpek ALTUN
Şubat 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Bu çalışmada yer alan bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler

F_n	*n*. Fibonacci Sayısı
L_n	*n*. Lucas Sayısı
$F_n^{(k)}$	*k*-Fibonacci Sayısının Yeni Ailesinin *n*. Sayısı
$L_n^{(k)}$	*k*-Lucas Sayısının Yeni Ailesinin *n*. Sayısı
$\{F_n^{(k)}\}$	*k*-Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesinin Dizisi
$\{L_n^{(k)}\}$	*k*-Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesinin Dizisi
$F_n(\mathrm{x})$	*n*. Fibonacci Polinomu
$L_n(\mathrm{x})$	*n*. Lucas Polinomu
$F_n^{(k)}(\mathrm{x})$	*k*-Fibonacci Polinomunun Yeni Ailesinin *n*. Sayısı
$L_n^{(k)}(\mathrm{x})$	*k*-Lucas Polinomunun Yeni Ailesinin *n*. Sayısı

1. GİRİŞ

Pisa’lı olan Leonardo Fibonacci, Rönesans öncesi Avrupa'nın en önde gelen Matematikçilerindendir. Fibonacci için, "Matematik'i Araplar'dan alıp, Avrupa'ya aktaran kişi" denilebilir.

Fibonacci'nin yaşamı hakkında matematik yazıları dışında pek az şey biliniyor. İlk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 dolayında doğmuş olabileceği sanılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olması olasılığı var. Fibonacci henüz çocuk yaştayken, Pisa'lı bir tüccar olan babası Guglielmo, Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanır. (Bu liman, şimdiki Bejaya'dır ve Cezayir'dedir.) Babası burada oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Fibonacci daha sonra Liber Abaci'de hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatacaktır.

Fibonacci'nin Liber Abaci adlı kitabının yayınlandığı yıllarda, Hindu-Arap sayılarını, Avrupa'da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın eserlerinin çevirilerini okuyabilmiş bir kaç "aydın" dışında kimse bilmiyordu. Fibonacci, kitabında bu rakamları anlatmaya şöyle başlar: "Dokuz Hint Rakamı 9 8 7 6 5 4 3 2 1 dir . Bu dokuz rakama "0" işaretinin de eklenmesiyle, her hangi bir sayı yazılabilir. Kitap Avrupa’da eğitim almış insanlar arasında hızlı bir şekilde yayılmıştır ve Avrupa’nın müspet bilimde ilerlemesinde önemli etkileri olmuştur. Yayınladığı bu kitapta Hint-Arap Sayı Sistemi'ni tüm Avrupa’ya duyurmuştur (King, 1963).

Fibonacci’nin 1202’de yazdığı Liber Abaci kitabının dışında, “Practica Geometria”(The Practice of Geometry) (1220), “Flos” (The flower) (1225) ve “Liber Quadratorum” (The Book of Square Numbers) (1225) kitapları da matematik alanında yapmış olduğu diğer eserleridir. Bu eserlerin içinde en ünlü olan, Fibonacci sayılarıyla Altın Oran’ın anlatıldığı “Liber Abaci” adlı eseridir. Liber Abaci, 13.yy. Avrupasında büyük ilgi görür, çok sayıda kopya edilir ve kilisenin yasaklamasına karşın Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılır. Kitap Kutsal Roma

İmparatoru II. Frederick'in dikkatini çeker. Frederick bilime düşkün bir imparatordur. Bilim adamlarını korur, bu nedenle kendisine Stupor Mudi (Dünya Harikası) denilmektedir. 1220 yılında Fibonacci huzura çağrılır. Frederick'in bilim adamlarından biri tarafından sınava çekilir. Sonunda Fibonacci göze girer. Yıllarca hem imparatorla, hem de imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225 yılında yazdığı Liber Quadratornum'u (Kare Sayıların Kitabı) imparatora ithaf eder. "Diyofan Denklemleri" ne ayrılan bu kitap Fibonacci'nin baş yapıtıdır.
Fibonacci, Liber Abacci adlı kitabında tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir soru sorar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapamazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift tavşan her ay bir çift yavru yapar. Tavşanların ölmedikleri kabul edilecek olursa, herhangi n. ayda çiftlikte toplam kaç çift tavşan vardır?

İlk ay yeni doğmuş bir çift tavşan olsun. İkinci ayda bu tavşanlar henüz yavrulamadıkları için hala bir çift tavşan olacaktır. Üçüncü ay bu tavşanlar bir çift yavru verecek ve iki çift tavşan olacak. Yeni doğan çift dördüncü ay yavrulamayacak ancak ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşan olacak.

Buna göre Fibonacci dizisi şöyle tanımlanır. Eğer $n.$ aydaki tavşan çiftlerinin sayısını F_n ile gösterirsek, Fibonacci dizisi

$$F_n = 1,\ F_n = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad , \qquad n \geq 1$$

bağıntısı ile tanımlanır. Buna göre Fibonacci sayılarının ilk bir kaç tanesi aşağıda verilmiştir:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,
610, 987, …

Bir ayçiçeğinin göbeğindeki spiraller incelendiğinde, saat yönündeki spirallerin sayısı 55, ters yöndekilerin sayısı 34 veya 89 dur. Kozalakta bu oran 5'e 8 olup, bunlar ardışık Fibonacci sayılarıdır. Aynı şekilde papatya çiçeğinde de bir Fibonacci dizisi mevcuttur.

Pascal üçgeni olarak da bilinen Ömer Hayyam üçgeni tüm katsayılar veya terimler yazılıp çapraz toplamları alındığında yine Fibonacci dizisi ortaya çıkar.

Çam kozalağındaki taneler kozalağın altındaki sabit bir noktadan kozalağın tepesindeki başka bir sabit noktaya doğru eğriler oluşturarak çıkarlar ve bu taneler soldan sağa ve sağdan sola sayıldığında çıkan sayılar, Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir. Ayrıca bitkilerin yapraklarının dizilişinde de Fibonacci dizisi vardır.

Mimar Sinan'ın da birçok eserinde Fibonacci dizisi görülmektedir. Örneğin Süleymaniye ve Selimiye Camileri'nin minarelerinde bu dizi mevcuttur.

Fibonacci sayıları ile Altın Oran arasında ilginç bir ilişki vardır. Dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar büyüdükçe Altın Oran'a yaklaşır.

Altın oran, doğada sayısız canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında bulunan özel bir orandır. Doğada bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, yüzyıllarca sanat ve mimaride uygulanmış, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır.

Bu sayılar arasında daha pek çok ilişki vardır. Fibonacci bu sayı dizilerini aslında yeniden keşfetmiştir. Bunun nedeni, antik Yunan ve Mısırlı matematikçilerin 1,618 ya da 0,618 oranını biliyor olmalarıdır. Oran, Altın Oranı ya da Altın Ortalama olarak biliniyordu. Bu sayılar müzikte, sanatta, mimaride ve biyolojide kullanılmıştı. Yunanlılar Altın Ortalama'yı Parthenon tapınağının yapımında kullanmışlardı. Mısırlılar, Altın Oran'ı Gize Piramidinin yapımında kullandılar.

Ressamlarda altın oranı kullanıp göze daha güzel görünen sanat eserleri meydana getirmişledir. Bu eserler arasında en ünlü olanı Leonardo da Vinci'nin "Mona Lisa" tablosudur. Bu tablonun boyunun enine oranı yine altın oranı verir.

1228'de Fibonacci, Liber Abaci'yi yeniden gözden geçirir ve kitabın bu ikinci yazılımını imparatorun baş bilimcisi Michael Socott'a ithaf eder. Bu tarihten 1240 yılına kadar Fibonacci hakkında hiç bir şey bilinmiyor. 1240'ta Pisa kenti kendisine kente yaptığı hizmetlerden dolayı "20 Pisa Lirası" yıllık bağlar. Bundan sonra Matematikçimiz ne kadar yaşadı, o da bilinmiyor. 19. yüzyılda Pisa'da Fibonacci heykeli yapılarak buraya dikilmiştir. Heykel bugün Camposanto'nun batı galerisinde ve Piazza dei Miracoli tarihi mezarlığında bulunmaktadır (King, 1963).

Son yıllarda Fibonacci sayıları ile ilgili bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir:

Akbulak, M. and Bozkurt, D., "*On the order-m generalized Fibonacci k-numbers*" isimli çalışmalarında, *m* basamak genelleştirilmiş Fibonacci *k* sayılarını matris gösterimi ile tanımlamışlardır. Bu matris gösterimini kullanarak *m* basamak genelleştirilmiş Fibonacci *k* sayılarının genelleştirilmiş Binet formülü ve bazı özdeşlikleri elde etmişlerdir.

Campbell, C. M. and Campbell, P. P., "*The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups*" adlı çalışmalarında, belirli centro-polihedral gruplarının orbitlerini tanımlamışlardır. Ayrıca bu grupların Fibonacci uzunluğunu incelemiş ve bazı durumlarda uzunlukların tribonacci dizilerine bağlı olduğunu göstermişlerdir.

Hoggatt, V. E. Jr., & Marjorie Bicknell, "Generalized Fibonacci polynomials", adlı çalışmalarında, Fibonacci polinomlarını ve bu polinomların Pascal üçgeniyle ilişkilerine yer vermişlerdir.

lvie , J., "A General Q-Matrix", adlı çalışmasında, genelleştirilmiş Fibonacci dizileri için Q-matris formunun genel şeklinin tanımını vererek Q-matrisinin bazı özelliklerine yer vermiştir.

Kiliç, E. and Tasci, D., "*Generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers*" adlı bu çalışmalarında, alışılmış Lucas sayıları ve genelleştirilmiş *k* basamak Fibonacci sayıları üzerinde durmuşlardır. Daha sonra Lucas sayılarının genelleştirilmesi için yeni bir tanım vermişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş *k* basamak Fibonacci ve *k* basamak Lucas fonksiyonlarını verip bu fonksiyonlar arasında yeni bağıntılar ortaya çıkarmışlardır.

Koshy, T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications" adlı kitapta Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili çok sayıda özelliğe yer verilmiştir.

Mikkawy, M. and Sogabe, T., "*A new family of k-Fibonacci numbers*" adlı çalışmalarında k -Fibonacci sayılarında yeni aile tanımını vermişlerdir. Bu tanıma göre; n ve k ($k \neq 0$) doğal sayılar olsun. Bu taktirde $n = mk + r$ ($0 \leq r < k$) olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $F_n^{(k)}$, genelleştirilmiş k -Fibonacci sayıları

$$F_n^{(k)} := \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}(\alpha^{m+2}\text{-}\beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1}\text{-}\beta^{m+1})^{k\text{-}r}, \quad n = mk + r$$

şeklinde ifade edilir. Buradan,

$$F_n^{(k)} = (F_m)^{k\text{-}r}(F_{m+1})^r, \quad n = mk + r$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca bu çalışmada Fibonacci sayıları ve k-Fibonacci sayılarında yeni aile ile ilgili bazı bağıntılar vermişlerdir.

Öcal, A.A. , Tuglu, N. and Altinisik, E., "*On the representation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers*" isimli çalışmalarında, k-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını temsil eden bazı gösterimleri vermişlerdir. Bu temsiller yardımıyla, k-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülünü elde etmişlerdir.

Özkan, E., Aydın, H. and Dikici, R. "3-step Fibonacci series modulo m", adlı çalışmalarında, 3-adım Fibonacci dizilerinin Wall sayılarına ilişkin iki yeni teorem ispatlamışlardır. Bununla birlikte 3-adım Fibonacci dizileriyle ilgili beş varsayım vermişlerdir. Ayrıca 5×10^5 den küçük asal sayılar için bu varsayımların bilgisayar doğrulamasını vermişlerdir.

Bu çalışmanın birinci bölümünde gerekli ön bilgiler verilmiştir. Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki özdeşlikler ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarına değinilmiştir.

İkinci bölümde, kaynaklar kısmında kullanılan çalışmalarla ilgili kısa bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, k -Fibonacci ve k-Lucas sayılarının yeni bir ailesi, genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarının tanımları verilmiş ve bunlarla ilgili bazı özellikler, teoremler sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Lucas polinomlarının tanımı verilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Q-matris ile yeni bir matris elde edilerek bunun yardımıyla genelleştirilmiş Lucas polinomlarının elemanları bulunmuştur. Ayrıca Fibonacci ve Lucas polinomlarında yeni aile ile ilgili teorem ve özellikler bulunmuştur.

2) KURAMSAL TEMELLER

2.1. Fibonacci Sayıları

Tanım 2.1.1. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 0$ için,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan sayılara **Fibonacci Sayıları** adı verilir (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(2.1) den hareketle , $F_n = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ .\ .\ .$ elde edilir.

2.2. Fibonacci Sayıları İle İlgili Özdeşlikler

Şimdi Fibonacci sayıları ile ilgili literatürde bilinen bazı özellikleri verelim:

a) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} {F_s}^2 = F_n\, F_{n-1}, \tag{2.2}$$

b) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_s\, F_{s-1} = \begin{cases} F_{n-1}^2, & n\ tek\ ise \\ F_{n-1}^2 - 1, & n\ çift\ ise \end{cases}, \tag{2.3}$$

c) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_{s-1}^2 = F_{n-2}\, F_{n-1} + 1, \tag{2.4}$$

d) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}\, F_n, \tag{2.5}$$

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(2.1) bağıntısı geriye doğru da aşağıdaki şekilde kullanılabilir. Yani,

$$F_{-1} = F_1 - F_0 \ , \qquad F_{-2} = F_0 - F_{-1}\, , \ ...$$

eşitliklerinden hareketle $n \geq 0$ için, $F_{-n} = 0,\ 1, -1,\ 2, -3,\ 5, -8,\ 13,\ ...$ elde edilir.

Fibonacci dizisinin indirgeme kuralı için karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ olmak üzere, bu denklemin köklerini,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ile gösterelim.

O halde fark denklemlerinde bu dizinin genel terimi,

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

biçimindedir. Şimdi A ve B sabitlerini bulalım.

$n = 0$ için,

$$F_0 = A + B = 0,$$

n = 1 için

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$

dir.

Yukarıdaki denklem sistemi çözüldüğü zaman,

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur. Böylece Fibonacci sayıları

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde yazılır. Literatürde bu formül Fibonacci sayıları için **"Binet Formülü"** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matrise Q- matrisi denir (Koshy, 2001).

Teorem 2.1.1. $n \geq 1$ olsun. Bu takdirde

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: İspatı n üzerinden tümevarımla verelim.

n = 1 için,

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

olup, n = 1 için iddia doğrudur.

n = k için iddia doğru olsun. O halde,

$$Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}$$

dir.

Bu takdirde;

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

n = k +1 için,

$$Q^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

olup, ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.1. $n \geq 1$ olsun. Bu takdirde,

$$F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: | Q | = (-1) ve | Q^n | = $(-1)^n$ dir. Teorem 2.1.1'den

$$|\, Q^n \,| = F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2 \text{ dir.}$$

O halde,

$$F_{n-1}\,F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir.

2.3. Lucas Sayıları

Tanım 2.1.3. $L_0 = 2,\ \ L = 1$ ve $n\ \geq 0$ için,

$$L_{n+2} = L_{n+1}\ +\ L_n \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanan sayılara **Lucas Sayıları** adı verilir (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(2.6) den hareketle , $L_n\ = 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ \ldots$

elde edilir.

2.4. Lucas Sayıları ile İlgili Özdeşlikler

Şimdi Lucas Sayıları ile ilgili literatürde bilinen bazı özellikleri verelim:

a) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} {L_s}^2 =\ L_n L_{n-1} + 2, \tag{2.7}$$

dir.

b) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} L_s\,L_{s-1} = \begin{cases} L_{n-1}^2 - 6\,, & n\ tek\ ise \\ L_{n-1}^2 - 1, & n\ çift\ ise \end{cases}, \tag{2.8}$$

dir.

c) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} L_{s-1}^2 =\ L_{n-2} L_{n-1} + 3, \tag{2.9}$$

dir.

d) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$L_{-n} = (-1)^n L_n, \tag{2.10}$$

dir.

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(2.6) bağıntısı geriye doğru da aşağıdaki şekilde kullanılabilir. Yani,

$$L_{-1} = L_1 - L_0\,, \qquad L_{-2} = L_0 - L_{-1}\,, \; ...$$

eşitliklerinden hareketle $n \geq 0$ için,

$$L_{-n} = 2, -1,\; 3, -4,\; 7, -11,\; 18, -29,\; ...$$

elde edilir.

Lucas dizisinin indirgeme kuralı için karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ olmak üzere, bu denklemin köklerini,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ile gösterelim.

O halde fark denklemlerinde bu dizinin genel terimi,

$$L_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

biçimindedir. Şimdi A ve B sabitlerini bulalım.

$n = 0$ için,

$$L_0 = A + B = 2$$

$n = 1$ için,

$$L_1 = A\alpha + B\beta = 1$$

dir.

Yukarıdaki denklem sistemi çözüldüğü zaman,

$A = 1$ ve $B = 1$

bulunur.

Böylece Lucas sayıları,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde yazılır. Literatürde bu formül Lucas sayıları için **“Binet Formülü”** olarak adlandırılır.

2.5. Fibonacci ve Lucas Sayıları Arasındaki Özdeşlikler

Fibonacci ve Lucas sayıları için birçok özdeşlik çeşitli yazarlar tarafından elde edilmiştir. Bunlardan bazılarını burada hatırlatalım:

- $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$
- $L_{n+1} + L_{n-1} = 5\,F_n$
- $F_n L_n = F_{2n}$
- $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
- $L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1}$
- $L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n$
- $F_m F_n - F_{m+k} F_{n-k} = (-1)^{n-k} F_{m+k-n} F_k$

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

2.6. Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

Tanım 2.1.4. $G_0 = a$, $G_1 = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ve $n \geq 0$ için,

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanan sayılara **Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları** adı verilir (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(2.11) den

$$G_n = a,\ b,\ (a+b),\ (a+2b),\ (2a+3b),\ (3a+5b),\ (5a+8b),\ ...$$

elde edilir.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili literatürde bilinen bazı özellikleri ve ispatlarını verelim:

a) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} {G_s}^2 = G_{n-1}G_n - G_0G_1 + {G_0}^2$$

dir.

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

İspat:

$$\sum_{s=0}^{n-1} {G_s}^2 = \sum_{s=0}^{n-1} G_s(G_{s+1} - G_{s-1}) = \sum_{s=0}^{n-1} G_s\, G_{s+1} - \sum_{s=0}^{n-1} G_s\, G_{s-1}$$

$$= G_0G_1 - G_0G_{-1} + G_1G_2 - G_1G_0 + \cdots + G_{n-1}G_n - G_{n-1}G_{n-2}$$

$$= G_{n-1}G_n - G_0G_{-1} = G_{n-1}G_n - G_0(G_1 - G_0)$$

$$= G_{n-1}G_n - G_0G_1 + {G_0}^2$$

denklemi elde edilir.

b) $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s\, G_{s-1} = \begin{cases} G_{n-1}^2 - G_{-1}^2 - G_0^2 + G_{-1}G_1\,, & n\ tek\ ise \\ G_{n-1}^2 - G_{-1}^2, & n\ çift\ ise \end{cases}$$

dir.

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

İspat:

$$\begin{pmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_n & G_{n-1} \\ G_{n-1} & G_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \ \dots$$

$$= \begin{pmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}^{\boldsymbol{n-1}} \qquad (2.12)$$

$$\begin{vmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{vmatrix} = G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2$$

$$\begin{vmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{vmatrix}^{\boldsymbol{n-1}} = (G_2G_0 - G_1^2)(F_0F_2 - F_1^2)^{n-1}$$

$$= (G_2G_0 - G_1^2)(-1)^{n-1}$$
$$= (-1)^n(G_1^2 - G_2G_0).$$

Yukarıda bulunan sonuçlar (2.12)’de yerine yazılırsa,

$$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = (-1)^n(G_1^2 - G_2G_0)$$

$$G_nG_{n-1} + G_{n-1}^2 - G_n^2 = (-1)^n(G_1^2 - G_2G_0)$$

elde edilir.

$$G_0G_{-1}+G_{-1}^2-G_0^2=(-1)^0(G_1-G_2G_0)$$

$$G_1G_0+G_0^2-G_1^2=(-1)^1(G_1-G_2G_0) \tag{2.13}$$

.

.

.

$$G_{2n}G_{2n-1}+G_{2n-1}^2-G_{2n}^2=(-1)^{2n}(G_1^2-G_2G_0).$$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{n-1} G_s\,G_{s-1} &= G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1^2-G_2G_0\,, \qquad n\ tek\ ise\\ &= G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1^2-(G_1+G_0)G_0\\ &= G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1^2-G_1G_0-G_0^2\\ &= G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1(G_1-G_0)G_0-G_0^2\end{aligned}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s\,G_{s-1}=G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1G_{-1}-G_0^2\ , \qquad n\ tek\ ise$$

denklemi elde edilir.

(2.13)’e

$$G_{2n+1}G_{2n}+G_{2n}^2-G_{2n+1}^2=(-1)^{2n+1}(G_1^2-G_2G_0)$$

($2n$ +1). terim eklenirse,

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s\,G_{s-1}=G_{n-1}^2-G_{-1}\quad , \qquad n\ çift\ ise$$

denklemi elde edilir.

c) $n\in\mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_{s-1}^2 = G_{n-2}G_{n-1} - G_0G_{-1} + G_{-1}^2$$

dir.

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

İspat: a şıkkına benzer olarak elde edilir.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. k -Fibonacci Sayılarının Yeni Bir Ailesi

Tanım 3.1.1. (k -Fibonacci Sayıları) n ve k ($k \neq 0$) doğal sayılar olsun. Bu taktirde $n = mk + r$ ($0 \leq r < k$) olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $F_n^{(k)}$, genelleştirilmiş k-Fibonacci sayıları

$$F_n^{(k)} := \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^k}\left(\alpha^{m+2}-\beta^{m+2}\right)^r\left(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}\right)^{k-r}, \quad n = mk + r \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Mikkawy ve Sogabe, 2010).
$k = 1$ durumu göz önüne alındığında $0 \leq r < 1$ olacağından $r = 0$ ve $m = n$ bulunur. Bu durumda

$$\left\{F_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{10} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\}$$

alışılmış Fibonacci sayıları olan F_n elde edilir.
Yeni ailenin $k = 2, 3$ için farklı sayı dizileri aşağıdaki şekildedir:

$$\left\{F_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{10} = \{1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 15, 25, 40, 64\},$$
$$\left\{F_n^{(3)}\right\}_{n=0}^{10} = \{1, 1, 2, 4, 8, 12, 18, 27, 45\}.$$

Tanım 3.1.1 ve (3.1) denkleminden genelleştirilmiş k-Fibonacci ve Fibonacci sayıları arasındaki

$$F_n^{(k)} = (F_m)^{k-r}(F_{m+1})^r, \quad n = mk + r \tag{3.2}$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.1.1. $k, m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. k, m sabit sayıları için genelleştirilmiş k-Fibonacci sayıları ve alışılmış Fibonacci sayıları arasında;

i)

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} F_m F_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)},$$

ii)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = F_m F_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} = F_m (F_{m+2})^{(k-1)} ,$$

iii)

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \frac{F_m}{F_{m-1}} [\,(F_{m+1})^k - (F_m)^k] = \frac{F_m}{F_{m-1}} [F_{(m+1)k}^{(k)} - F_{mk}^{(k)}] ,$$

eşitlikleri bulunur (Mikkawy ve Sogabe 2010).

İspat: i)

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} (F_m)^{(k-i)} (F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1} . F_m \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} (F_m)^{(k-1-i)} (F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1} . F_m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . (-F_m)^{(k-1-i)} \, (F_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1} \, .F_m.(F_{m+1} - F_m)^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} \, .F_m.(F_{m-1})^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} F_m F_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)}$$

eşitliği sağlanır.

ii) Benzer yolla,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} F_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (F_m)^{(k-i)} (F_{m+1})^i \qquad ((3.2) denkleminden)$$

$$= F_{mk+i}^{(k)} = (F_m)^{(k-i)} (F_{m+1})^i = \left(\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)^i (F_m)^k$$

$$= F_m.(F_{m+1} + F_m)^{k-1} \qquad (binomial\ teoremi\ kullanılarak)$$

$$= F_m.(F_{m+2})^{k-1}$$

$$= F_m F_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} \qquad (r = 0\ için\ (3.1)\ denkleminden)$$

eşitliği sağlanır.

iii) $F_{mk+i}^{(k)} = (F_m)^{(k-i)} (F_{m+1})^i = \left(\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)^i (F_m)^k$

eşitliğinden faydalanarak,

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} (F_m)^{(k-i)} (F_{m+1})^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)^i (F_m)^k$$

$$= (F_m)^k \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)^i$$

$$= (F_m)^k \left(\frac{\left(\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)^k - 1}{\frac{F_{m+1}}{F_m} - 1} \right)$$

$$= (F_m)^k \left[\frac{(F_{m+1})^k - (F_m)^k}{(F_m)^k} \right] \frac{F_m}{F_{m+1} - F_m}$$

$$= \frac{F_m}{F_{m-1}} [(F_{m+1})^k - (F_m)^k]$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. k = 2 için yeni aile $n \geq 0,\ s \geq 0$ ve n +$s \geq 1$ olduğunda,

$$F^{(2)}_{2(n+s-1)} - F_{(n+s)} F_{(n+s-2)} = (-1)^{n+s-1}$$

bağıntısı elde edilir (Mikkawy ve Sogabe 2010).

İspat: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formunda Fibonacci matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve (3.1) denkleminden

$$\begin{pmatrix} F_{n+s} & F_{n+s-1} \\ F_{n+s-1} & F_{n+s-2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} F_{n+s-1} & F_{n+s-2} \\ F_{n+s-2} & F_{n+s-3} \end{pmatrix} = C^{n+s-1} \begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{pmatrix} = C^{n+s}$$

elde edilir. Her iki tarafın determinantı alınırsa,

$$F_{n+s}.F_{n+s-2} - (F_{n+s-1})^2 = (-1)^{n+s}$$

elde edilir.

$$(F_{n+s-1})^2 = F^{(2)}_{2(n+s-1)}$$

olduğunu k = 2 ve r = 0 için (3.1) denkleminden elde ederiz.

$$F^{(2)}_{2(n+s-1)} - F_{(n+s)}F_{(n+s-2)} = (-1)^{n+s-1}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.3. $F^{(2)}_n$ve $G^{(2)}_n$ üreteç fonksiyonu için,

i) $F^{(2)}_n = F^{(2)}_{n-1} + F^{(2)}_{n-3} + F^{(2)}_{n-4}$, n = 4, 5, …
ii) $G^{(2)}_n(x) = \frac{1}{1-x^2-x^3-x^4}$,
eşitlikleri verilebilir (Mikkawy ve Sogabe 2010).

İspat: i) Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyeceğiz.

$$F^{(2)}_{2m} = F^{(2)}_{2m-1} + F^{(2)}_{2m-3} + F^{(2)}_{2m-4}$$

yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için,

$$F^{(2)}_{2m} = (F_m)^2 \tag{3.3}$$
$$F^{(2)}_{2m+1} = F_m F_{m+1} \tag{3.4}$$

eşitliklerinden yararlanacağız. Bu bağıntılar Tanım 3.1.1 den rahatlıkla elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
F^{(2)}_{2m} = (F_m)^2 &= F_m(F_{m-1}+F_{m-2}) \\
&= F_{m-1}F_m+F_{m-2}F_m \\
&= F_{m-1}F_m+F_{m-2}(F_{m-1}+F_{m-2}) \\
&= F_{m-1}F_m+F_{m-2}F_{m-1}+(F_{m-2})^2 \\
&= F^{(2)}_{2m-1} + F^{(2)}_{2m-3} + F^{(2)}_{2m-4}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, n sayısının tek sayı olması durumunu inceleyeceğiz. Yani,

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_{2m}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)}.$$

Yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için sol kısmını yazalım.

$$\begin{aligned} F_{2m+1}^{(2)} &= F_m F_{m+1} \\ &= F_m(F_m + F_{m-1}) \\ &= (F_m)^2 + F_m F_{m-1} \\ &= (F_m)^2 + F_{m-1}(F_{m-1} + F_{m-2}) \\ &= F_{2m}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} + F_{2m-3}^{(2)} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

ii)

$$G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)}.x^n \tag{3.5}$$

olsun.

$$xG_n^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1}^{(2)}.x^n \ , \tag{3.6}$$

$$x^3 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-3}^{(2)}.x^n \ , \tag{3.7}$$

$$x^4 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} F_{n-4}^{(2)}.x^n \ , \tag{3.8}$$

(3.5)-{(3.6)+(3.7)+(3.8)} işlemini ve Teorem 3.3’ü kullanarak

$$(1-x^2-x^3-x^4)\,G_n^{(2)}(x) = \left(F_0^{(2)}+F_1^{(2)}x+F_2^{(2)}x^2+F_3^{(2)}x^3\right) - \left(F_0^{(2)}x+F_1^{(2)}x^2+F_2^{(2)}x^3+F_3^{(2)}x^3\right) - \left(F_0^{(2)}x^3\right) + \sum_{n=4}^{\infty}\left(F_n^{(2)} - F_{n-1}^{(2)} - F_{n-3}^{(2)} - F_{n-4}^{(2)}\right)x^n$$

$$= (1+x+x^2+2x^3) - (x+x^2+x^3) - x^3 + 0$$

$$= 1$$

$$G_n^{(2)}(x) = \frac{1}{1-x^2-x^3-x^4}$$

denklemi elde edilip ispat tamamlanmış olur.

$$F_{2m+1}^{(2)} = F_{2m}^{(2)} + F_{2m-1}^{(2)}$$

rekürans bağıntısını kolayca elde edebiliriz. Burada n=2m+1 sayısının tek sayı olduğuna dikkat etmeliyiz.

Benzer şekilde n =2m durumunda da,

$$F_{2m}^{(2)} = \begin{cases} F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} - 1 & , m\ tek \\ F_{2m-1}^{(2)} + F_{2m-2}^{(2)} & , m\ çift \end{cases}$$

elde ederiz.

i) $F_n^{(3)} = F_{n-1}^{(3)} + F_{n-2}^{(3)} - F_{n-3}^{(3)} + F_{n-4}^{(3)} + F_{n-5}^{(3)} + F_{n-6}^{(3)} - F_{n-7}^{(3)} - F_{n-8}^{(3)}$, $\quad n \geq 7$

ii) $G_n^{(3)} = \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3-x^4-x^5-x^6+x^7+x^8}$,

ile verilen $F_n^{(3)}$ ün üreteç fonksiyonu $G_n^{(3)}$ve rekürans bağıntısını Teorem (3.3)'ün ispatına benzer bir yolla gösterebiliriz.

Burada $F_{-1}^{(3)} = 0$ olduğuna dikkat etmeliyiz. Daha genel haliyle, k = 1, 2, … için

$F_{-1}^{(k)} = 0$ olması durumuna dikkat etmeliyiz. k = 4, 5, … için $F_n^{(k)}$ yeni ailesinin üreteç fonksiyonu ve rekürans bağıntılarını ifade edeceğiz.

(i,j). elemanları $F_i^{(j)}$olan A matrisi A = $\left[F_i^{(j)} \right]_{1\le i,J\le n}$ ise

$$\det A = \begin{cases} 1 & , \; n\; tek \\ -1 & , \; n\; çift \end{cases}$$

olur.

$k = n$ -1 olduğunda $m = r$ = 1olup $F_n^{(n-1)} = 2$ olduğunu kolayca gösteririz.

3.2. *k*-Fibonacci Sayılarının Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler

Son olarak bu teoremlerin dışında ispatları verilmeden bazı özdeşlikleri sıralayalım (Mikkawy ve Sogabe 2010):

- $2F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n}^{(2)} = F_{2n+1}.$
- $F_{2n}^{(2)} + F_{2n-2}^{(2)} = F_{2n}.$
- $F_{2n+2}^{(2)} - F_{2n-2}^{(2)} = F_{2n+1}.$
- $F_{2n}^{(2)} - F_{n-i}F_{n+i} = (-1)^{n-i+1}F_{2i-2}^{(2)}$, i = 1, 2, …, n.
- $F_{2n}^{(2)} = (F_n)^2 = \begin{cases} F_{n-1}F_{n+1} - 1 & , \; n \;\; tek \\ F_{n-1}F_{n+1} + 1 & , \; n \;\; çift \end{cases}.$
- $F_{3n+3}^{(3)} + F_{3n}^{(3)} - F_{3n-3}^{(3)} = F_{3n+2}.$
- $F_{2n}^{(2)} = \frac{1}{5}[2L_{2n+2} - (L_{n+1})^2].$
- $F_{4n+1}^{(2)} = L_{n+1}F_nF_{2n}.$
- $F_{2n-2}^{(2)} = F_nF_{n-2} + \frac{1}{5}[L_{n+1}L_{n-1} - (L_n)^2]$.

3.3. k-Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesi

Tanım 3.3.1. (k-Lucas Sayıları) n ve k $(k \neq 0)$ doğal sayılar olsun. Bu taktirde $n = mk + r$ $(0 \leq r < k)$ olacak şekilde m ve r sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $L_n^{(k)}$, genelleştirilmiş k-Lucas sayıları

$$L_n^{(k)} := (\alpha^{m+1} + \beta^{m+1})^r (\alpha^m + \beta^m)^{k-r}, \quad n = mk + r \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

$k = 1$ durumu göz önüne alındığında $0 \leq r < 1$ olacağından $r = 0$ ve $m = n$ bulunur. Bu durumda,

$$\left\{L_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{10} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123\}$$

olup alışılmış Lucas sayıları olan L_n elde edilir.
Yeni ailenin $k = 2, 3$ için farklı sayı dizileri aşağıdaki şekildedir:

$$\left\{L_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{10} = \{4, 2, 1, 3, 9, 12, 16, 28, 49, 77, 121\},$$
$$\left\{L_n^{(3)}\right\}_{n=0}^{10} = \{8, 4, 2, 1, 3, 9, 27, 36, 48, 64, 112\}.$$

Tanım 3.3.1 ve (3.9) denkleminden genelleştirilmiş k-Lucas ve Lucas sayıları arasındaki,

$$L_n^{(k)} = (L_m)^{k-r} (L_{m+1})^r, \quad n = mk + r \tag{3.10}$$

bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.3.1. $k, m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. k, m sabit sayıları için genelleştirilmiş k-Lucas sayıları ve alışılmış Lucas sayıları arasında,

i)

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} L_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} L_m L_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)},$$

ii)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} L_{mk+i}^{(k)} = L_m L_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} = L_m (L_{m+2})^{(k-1)} \ ,$$

iii)

$$\sum_{i=0}^{k-1} L_{mk+i}^{(k)} = \frac{L_m}{L_{m-1}} [\, (L_{m+1})^k - (L_m)^k] = \frac{L_m}{L_{m-1}} [L_{(m+1)k}^{(k)} - L_{mk}^{(k)}],$$

eşitlikleri bulunur (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

İspat: i)

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} L_{mk+i}^{(k)} = (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} (L_m)^{(k-i)} (L_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1} \,.\, L_m \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} (L_m)^{(k-1-i)} (L_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1} \,.\, L_m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} . (-L_m)^{(k-1-i)} \, (L_{m+1})^i$$

$$= (-1)^{k-1} \ .\, L_m . (L_{m+1} - L_m)^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} \ .\, L_m . (L_{m-1})^{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} L_m L_{(m-1)(k-1)}^{(k-1)} \quad r = 0 \ için$$

elde edilir.

ii)

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} L_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (L_m)^{(k-i)} (L_{m+1})^i \qquad ((3.10) denkleminden)$$

$$= L_{mk+i}^{(k)} = (L_m)^{(k-i)} (L_{m+1})^i$$

$$= \left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^i (L_m)^k$$

$$= L_m.(L_{m+1} + L_m)^{k-1}$$

$$= L_m.(L_{m+2})^{k-1}$$

$$= L_m L_{(m+2)(k-1)}^{(k-1)} \qquad (r = 0 \ için \ (3.9) \ denkleminden)$$

elde edilir.

iii)

$$L_{mk+i}^{(k)} = (L_m)^{(k-i)} (L_{m+1})^i = \left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^i (L_m)^k$$

eşitliğinden faydalanarak,

$$\sum_{i=0}^{k-1} L_{mk+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} (L_m)^{(k-i)} (L_{m+1})^i = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^i (L_m)^k = (L_m)^k \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^i$$

$$= (L_m)^k \left(\frac{\left(\frac{L_{m+1}}{L_m}\right)^k - 1}{\frac{L_{m+1}}{L_m} - 1}\right)$$

$$= (L_m)^k \left[\frac{(L_{m+1})^k - (L_m)^k}{(L_m)^k}\right] \frac{L_m}{L_{m+1} - L_m}$$

$$= \frac{L_m}{L_{m-1}} [(L_{m+1})^k - (L_m)^k]$$

elde edilir.

Teorem 3.3.2. k = 2 için yeni aile $n \geq 0,\ s \geq 0$ ve n +s ≥ 1 olduğunda;

$$L_{2(n+s-1)}^{(2)} - L_{(n+s)}L_{(n+s-2)} = 5\,(-1)^{n+s-1}$$

bağıntısı elde edilir (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

İspat: C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formunda Lucas matrisi olsun. Daha sonra C matrisi ve (3.10) denkleminden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_{n+s} & L_{n+s-1} \\ L_{n+s-1} & L_{n+s-2} \end{pmatrix} &= C\begin{pmatrix} L_{n+s-1} & L_{n+s-2} \\ L_{n+s-2} & L_{n+s-3} \end{pmatrix} \\ &= C^{n+s-1}\begin{pmatrix} L_1 & L_0 \\ L_0 & L_{-1} \end{pmatrix} \\ &= C^{n+s-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın determinantı alınırsa;

$$L_{2(n+s-1)}^{(2)} - L_{(n+s)}L_{(n+s-2)} = 5\,(-1)^{n+s-1}$$
$$L_{(n+s)}L_{(n+s-2)} - L_{2(n+s-1)}^{(2)} = 5\,(-1)^{n+s}$$

elde edilir.

$$(L_{n+s-1})^2 = L_{2(n+s-1)}^{(2)}$$

olduğunu k = 2 ve r = 0 için (3.10) denkleminden elde ederiz.

$$L_{2(n+s-1)}^{(2)} - L_{(n+s)}L_{(n+s-2)} = 5\,(-1)^{n+s-1}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.3. $L_n^{(2)}$ve $G_n^{(2)}$ üreteç fonksiyonu için,

i) $L_n^{(2)} = L_{n-1}^{(2)} + L_{n-3}^{(2)} + L_{n-4}^{(2)}$, $n = 4, 5, \ldots$

ii) $G_n^{(2)}(x) = \frac{4-2X-x^2-2x^3}{1-x^2-x^3-x^4}$,

eşitlikleri verilebilir (Mikkawy ve Sogabe, 2010).

İspat: i) Öncelikle n sayısının çift sayı olması durumunu inceleyeceğiz.

$$L_{2m}^{(2)} = L_{2m-1}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)} + L_{2m-4}^{(2)}$$

yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için,

$$L_{2m}^{(2)} = (L_m)^2, \tag{3.11}$$

$$L_{2m+1}^{(2)} = L_m L_{m+1}, \tag{3.12}$$

eşitliklerinden yararlanacağız. Bu bağıntılar Tanım 3.3.1 den rahatlıkla elde edilebilir.

$$\begin{aligned} L_{2m}^{(2)} = (L_m)^2 &= L_m(L_{m-1}+L_{m-2}) \\ &= L_{m-1}L_m+L_{m-2}L_m \\ &= L_{m-1}L_m+L_{m-2}(L_{m-1}+L_{m-2}) \\ &= L_{m-1}L_m+L_{m-2}L_{m-1}+(L_{m-2})^2 \\ &= L_{2m-1}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)} + L_{2m-4}^{(2)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, n sayısının tek sayı olması durumunu inceleyeceğiz. Yani,

$$L_{2m+1}^{(2)} = L_{2m}^{(2)} + L_{2m-2}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)}.$$

Yukarıdaki denklemin doğruluğunu göstermek için sol kısmını yazalım.

$$
\begin{aligned}
L_{2m+1}^{(2)} &= L_m L_{m+1} \\
&= L_m(L_m + L_{m-1}) \\
&= (L_m)^2 + L_m L_{m-1} \\
&= (L_m)^2 + L_{m-1}(L_{m-1} + L_{m-2}) \\
&= L_{2m}^{(2)} + L_{2m-2}^{(2)} + L_{2m-3}^{(2)}
\end{aligned}
$$

olup ispat tamamlanmış olur.

ii)

$$G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(2)}.x^n \tag{3.13}$$

olsun.

$$xG_n^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}^{(2)}.x^n, \tag{3.14}$$

$$x^3 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} L_{n-3}^{(2)}.x^n, \tag{3.15}$$

$$x^4 G_n^{(2)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} L_{n-4}^{(2)}.x^n, \tag{3.16}$$

(3.13)-{(3.14)+(3.15)+(3.16)} işlemini ve Teorem (3.11)'i kullanarak,

$$
\begin{aligned}
(1 - x - x^3 - x^4)\, G_n^{(2)}(x) = {} & \left(L_0^{(2)} + L_1^{(2)}x + L_2^{(2)}x^2 + L_3^{(2)}x^3\right) \\
& -\left(L_0^{(2)}x + L_1^{(2)}x^2 + L_2^{(2)}x^3 + L_0^{(2)}x^3\right)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{n=4}^{\infty}(L_n^{(2)} - L_{n-1}^{(2)} - L_{n-3}^{(2)} - L_{n-4}^{(2)})\, x^n$$

$$= (4 + 2x + x^2 + 3x^3) - (4x + 2x^2 + x^3 + 4x^3)$$

$$G_n^{(2)}(x) = \frac{4 - 2x - x^2 - 2x^3}{1 - x - x^3 - x^4}$$

denklemi elde edilip ispat tamamlanmış olur.

$$L_{2m+1}^{(2)} = L_{2m}^{(2)} + L_{2m-1}^{(2)}$$

rekürans bağıntısını kolayca elde edebiliriz. Burada $n = 2m+1$ sayısının tek sayı olduğuna dikkat etmeliyiz.

Benzer şekilde $n = 2m$ durumunda da,

$$L_{2m}^{(2)} = \begin{cases} L_{2m-1}^{(2)} + L_{2m-2}^{(2)} - 5 & , m\ tek \\ L_{2m-1}^{(2)} + L_{2m-2}^{(2)} + 5 & , m\ çift \end{cases}$$

eşitliğini elde ederiz.

3.4. Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları

3.4.1. Fibonacci Polinomları

$F_0(x) = 0$, $F_1(x) = 1$ ve $F_2(x) = x$ olmak üzere Fibonacci polinomları

$$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

bağıntısı ile verilir (Hoggatt ve Bicknell, 1973).

Ayrıca, Fibonacci polinomları $\mathbb{Q}_2$ matrisi ile oluşturulabilir.

$$\mathbb{Q}_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbb{Q}_2^n = \begin{pmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{pmatrix} \text{ matrisi,}$$

$\mathbb{Q}_2$ matrisinden *n* üzerine tümevarım uygulanarak kolayca elde edilebilir.

Ayrıca, $x = 1$ iken $F_n(1) = F_n$, n. Fibonacci sayısını ve $x = 2$ iken $F_n(2) = P_n$, n. Pell sayısını verdiğini görebiliriz.

Pascal üçgeni sola yaslanmış biçimde yazıldığında, esas köşegen elemanlarının toplamı Fibonacci polinomu katsayılarını vermektedir. Yani,

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{[n-\frac{1}{2}]} \binom{n-j-1}{k} x^{n-2j-1}$$

şeklinde yazabiliriz.

İlk birkaç Fibonacci polinomları ve baş katsayıları aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

<u>Fibonacci polinomları</u>

$F_1(x) = 1$

$F_2(x) = x$

$F_3(x) = x^2 + 1$

$F_4(x) = x^3 + 2x$

$F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

$F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$

$F_7(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$

$F_8(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$

$F_9(x) = x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$

$F_{10}(x) = x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \ldots \quad \ldots$

Baş katsayıları

1				
1				
1	1			
1	2			
1	3	1		
1	4	3		
1	5	6	1	
1	6	10	4	
1	7	15	10	1
1	8	21	20	5
…	…	…	…	…

3.4.2. Tribonacci (3-Basamak) Polinomları

Tribonacci (3-basamak) polinomları,
$T_{-1}(x) = T_0(x) = 0, T_1(x) = 1$ ve $T_2(x) = x^2$ olmak üzere,

$$T_{n+3}(x) = x^2 T_{n+2}(x) + x T_{n+1}(x) + T_n(x)$$

bağıntısıyla verilir (Hoggatt ve Bicknell, 1973).
$x = 1$ iken $T_n(1) = T_n$, Tribonacci(3-basamak)sayıları
$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, \cdots$ şeklinde yazılır ve

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$$

bağıntısı ile verilir.
İlk birkaç Tribonacci (3-basamak) polinomları ve baş katsayıları aşağıdaki şekilde yazılır:

Tribonacci (3-basamak) polinomları

$T_1(x) = 1$

$T_2(x) = x^2$

$T_3(x) = x^4 + x$

$T_4(x) = x^6 + 2x^3 + 1$

$T_5(x) = x^8 + 3x^5 + 3x^2$

$T_6(x) = x^{10} + 4x^7 + 6x^4 + 2x$

$T_7(x) = x^{12} + 5x^8 + 10x^6 + 7x^3 + 1$

$T_8(x) = x^{14} + 6x^{11} + 15x^8 + 16x^5 + 6x^2$

$T_9(x) = x^{16} + 7x^{13} + 21x^{10} + 30x^7 + 19x^4 + 3x$

$T_{10}(x) = x^{18} + 8x^{15} + 28x^{12} + 50x^9 + 45x^6 + 16x^3 + 1$

... $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$

Baş katsayıları

1						
1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3				
1	4	6	2			
1	5	10	7	1		
1	6	15	16	6		
1	7	21	30	19	3	
1	8	28	50	45	16	1
…	…	…	…	…	…	…

Yukarıdaki baş katsayılarda soldan sağa doğru 0 dan başlayarak sütunları numaralandırırsak ve her bir sütun, sütun numarası kadar yukarı kaydırılırsa aşağıdaki tabloyu elde ederiz.

1										
1	1	1								
1	2	3	2	1						
1	3	6	7	6	3	1				
1	4	10	16	19	16	10	4	1		
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1

Buradan hareketle, genel formülü

$$T_n(x) = \sum_{j=0} \binom{n-j-1}{j}_3 x^{2n-3j-2}$$

bağıntısı ile ifade edilir. Burada $\binom{n}{j}_3$, j. sütun, *n*. satırdaki trinomial baş katsayıdır. Ayrıca $\binom{n-j-1}{j}_3 = 0,\ \ j > n$ dir.

Tribonacci (3-basamak) polinomları aşağıda verilen $\mathbb{Q}_3$ matrisi tarafından üretilir.

$$\mathbb{Q}_3 = \begin{pmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{Q}_3^n = \begin{pmatrix} T_{n+1}(x) & T_n(x) & T_{n-1}(x) \\ xT_n(x) + T_{n-1}(x) & xT_{n-1}(x) + T_{n-2}(x) & xT_{n-2}(x) + T_{n-3}(x) \\ T_n(x) & T_{n-1}(x) & T_{n-2}(x) \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{Q}_3^n$, $\mathbb{Q}_3$ matrisi üzerine tümevarım uygulanarak kolayca elde edilebilir. Bu $\mathbb{Q}_3^n$ için n = 1 alınırsa, $\mathbb{Q}_3$ kolay bir şekilde yazılır. Tribonacci (3-basamak) polinomunun tanımı kullanılarak $\mathbb{Q}_3^{n+1} = \mathbb{Q}_3\mathbb{Q}_3^n$ eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki matriste satır 1 ve satır 2' yi yer değiştirir ve determinantı x = 1 için alırsak,

$$(-1) = \begin{vmatrix} T_{n+2}(x) & T_{n+1}(x) & T_n(x) \\ T_{n+1}(x) & T_n(x) & T_{n-1}(x) \\ T_n(x) & T_{n-1}(x) & T_{n-2}(x) \end{vmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

3.4.3. Quadranacci (4- Basamak) Polinomları

Quadranacci (4- Basamak) polinomları

$T^*_{-2}(x) = T^*_{-1}(x) = T^*_0(x) = 0$ ve $T^*_1(x) = 1$ olmak üzere ,

$$T^*_{n+4}(x) = x^3T^*_{n+3}(x) + x^2T^*_{n+2}(x) + xT^*_{n+1} + T^*_n$$

bağıntısı ile tanımlanır (Hoggatt ve Bicknell, 1973).

İlk birkaç değeri şöyledir:

<u>Quadranacci (4- Basamak) polinomları</u>

$T_1^*(x) = 1$

$T_2^*(x) = x^3$

$T_3^*(x) = x^6 + x^2$

$T_4^*(x) = x^9 + 2x^5 + x$

$T_5^*(x) = x^{12} + 3x^8 + 3x^4 + 1$

$T_6^*(x) = x^{15} + 4x^{11} + 6x^7 + 4x^3$

$T_7^*(x) = x^{18} + 5x^{14} + 10x^{10} + 10x^6 + 3x^2$

$T_8^*(x) = x^{21} + 6x^{17} + 15x^{13} + 20x^9 + 12x^5 + 2x$

$T_9^*(x) = x^{24} + 7x^{20} + 21x^{16} + 35x^{12} + 31x^8 + 12x^4 + 1$

$T_{10}^*(x) = x^{27} + 8x^{23} + 28x^{19} + 56x^{15} + 65x^{11} + 35x^7 + 10x^3$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

<u>Baş katsayıları</u>

1						
1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4			
1	5	10	10	3		
1	6	15	20	12	2	
1	7	21	35	31	12	1
1	8	28	56	65	35	10
…	…	…	…	…	…	...

Böylelikle $T_n^*(x)$‘in katsayıları dört terimli üçgenin yükselen köşegenin n. cisinde bulunan katsayılara eşittir.

Ayrıca, $T_n^*(1) = T_n^*$, Quadranacci (4- Basamak) sayıları

$1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108,$ $\cdots$ şeklinde yazılır.

$$T^*_{n+4} = T^*_{n+3} + T^*_{n+2} + T^*_{n+1} + T^*_n$$

Quadranacci polinomları $\mathbb{Q}_4$ matrisi tarafından üretilir.

$$\mathbb{Q}_4 = \begin{pmatrix} x^3 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yukarıdakilere benzer işlemler yapılınca, x = 1 için aşağıdaki matris formunu elde ederiz.

$$(-1)^{n+1} = \begin{vmatrix} T^*_{n+3} & T^*_{n+2} & T^*_{n+1} & T^*_n \\ T^*_{n+2} & T^*_{n+1} & T^*_n & T^*_{n-1} \\ T^*_{n+1} & T^*_n & T^*_{n-1} & T^*_{n-2} \\ T^*_n & T^*_{n-1} & T^*_{n-2} & T^*_{n-3} \end{vmatrix}.$$

3.4.4. r-bonacci (r-Basamak) Polinomları

r- bonacci polinomları

$R_{-(r-2)}(x) = R_{-(r-1)}(x) = \cdots R_{-1}(x) = R_0(x) = 0$, $R_1(x)$ =1 ve $R_2(x) = x^{r-1}$ olmak üzere,

$$R_{n+r}(x) = x^{r-1}R_{n+r-1}(x) + x^{r-2}R_{n+r-2}(x) + \cdots + R_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Hoggatt ve Bicknell, 1973).

r-bonacci polinomları

$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{r-1})^n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ genişlemesinden doğan katsayılarla sola dayalı katsayı sırasının artan n.köşegenindeki katsayılar tarafından verilen azalan sırada yazılı $R_n(x)$'in katsayılarına sahip olacaktır. Bu,

$$R_n(x) = \sum_{J=0} \binom{n-j-1}{j}_r x^{(r-1)(n-1)-rj}$$

bağıntısıyla ifade edilir.

r-bonacci polinomları r x r tipindeki aşağıda verilen Q_r matrisi tarafından üretilir.

$$Q_r = \begin{pmatrix} x^{r-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^{r-2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^{r-3} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5. Lucas Polinomları

Lucas polinomları,

$L_0(x) = 0\,, L_1(x) = x\ ,\ \ L_2(x) = \ x^2 + 2$ olmak üzere,

$$L_{n+2}(x) = \ xL_{n+1}(x) + \ L_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Hoggatt ve Bicknell, 1973).

Ayrıca; $x = 1$ iken

$L_n(1) = L_n,\ n.$ Lucas sayısı elde edilir.

Lucas polinomlarının genelleştirilmiş formunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}.$$

İlk birkaç Lucas polinomları ve kendi sabitler dizisi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

<u>Lucas polinomları</u>

$L_1(x) = \ x$

$L_2(x) = \ x^2 + 2$

$L_3(x) = \ x^3 + 3x$

$L_4(x) = \ x^4 + 4x^2 + 2$

$L_5(x) = \ x^5 + 5x^3 + 5x$

$L_6(x) = \ x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$

$L_7(x) = x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$

$L_8(x) = x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16\,x^2 + 2$

$L_9(x) = x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3$+9x

$L_{10}(x) = x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25\,x^2 + 2$

… … … … … … …

<u>Baş katsayılar</u>

1					
1	2				
1	3				
1	4	2			
1	5	5			
1	6	9	2		
1	7	14	7		
1	8	20	16	2	
1	9	27	30	9	
1	10	35	50	25	2
…	…	…	…	…	…

Lucas polinomlarının oluşum kuralını gözlemlediğimizde, $L_{n+2}(x)$ teriminin (k+1). sütununun katsayısını oluşturmak amacıyla, $L_n(x)$ teriminin k.sütunun katsayısı ile $L_{n+1}(x)$ teriminin (k+1). sütunun katsayısı toplanarak elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas Sayılarının Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler

Teorem 4.1.1. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesine ait,

$$(F_{2n}^{(2)})^2 - F_{2n-1}^{(2)} F_{2n+1}^{(2)} = (-1)^n F_{2n}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$F_{2n}^{(2)} = (F_n)^2,$

$F_{2n-1}^{(2)} = (F_n)(F_{n-1}),$

$F_{2n+1}^{(2)} = (F_n)(F_{n+1})$,

elde edilir (Mikkawy ve Sogabe, 2010). Bu üç eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(F_{2n}^{(2)})^2 - F_{2n-1}^{(2)} F_{2n+1}^{(2)} &= (F_n)^4 - (F_n)(F_{n-1})(F_n)(F_{n+1}) \\
&= (F_n)^4 - (F_n)^2 (F_{n-1})(F_{n+1}) \\
&= (F_n)^2 \{(F_n)^2 - (F_{n-1})(F_{n+1})\} \\
&= (F_n)^2 (-1)^n \\
&= (-1)^n F_{2n}^{(2)}
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $n \in \{1, 2, ...\}$ için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesine ait,

$$F_{4n-2}^{(2)} + F_{4n-1}^{(2)} - F_{4n}^{(2)} = -1 \qquad .$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$F_{4n-2}^{(2)} = (F_{2n-1})^2,$

$F_{4n-1}^{(2)} = (F_{2n})(F_{2n-1}),$

$F_{4n}^{(2)} = (F_{2n})^2,$

elde edilir (Mikkawy ve Sogabe, 2010). Bu üç eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned} F_{4n-2}^{(2)} + F_{4n-1}^{(2)} - F_{4n}^{(2)} &= (F_{2n-1})^2 + (F_{2n})(F_{2n-1}) - (F_{2n})^2 \\ &= (F_{2n-1})\,\{\,(F_{2n}) + (F_{2n-1})\,\} - (F_{2n})^2 \\ &= (F_{2n-1})\,\{F_{2n+1}\} - (F_{2n})^2 \\ &= -[(F_{2n})^2 - (F_{2n-1})\,(F_{2n+1})] \\ &= -[(-1)^{2n}] \\ &= -1 \end{aligned}$$

şeklinde ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 4.1.3. $n \in \{1, 2, ...\}$ için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesine ait,

$$F_{2n+2}^{(2)} = F_{2n-2}^{(2)} + 2F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$F_{2n+2}^{(2)} = (F_{n+1})^2$$

$$= (F_{n-1} + F_n)^2$$

$$= (F_{n-1})^2 + 2F_nF_{n-1} + (F_n)^2$$

$$= F_{2n-2}^{(2)} + 2F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n}^{(2)}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4. $n \in \{1, 2, \ldots\}$ için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesi ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasında,

$$L_nF_{n+1} - L_nF_{n-1} = F_{2n+2}^{(2)} - F_{2n-2}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $L_nF_{n+1} - L_nF_{n-1} = [(F_{n+1} + F_{n-1})\, F_{n+1}] - [(F_{n+1} + F_{n-1})\, F_{n-1}]$

$$= F_{n-1}\, F_{n+1} + (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2 - F_{n-1}F_{n+1}$$

$$= (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2$$

$$= F_{2n+2}^{(2)} - F_{2n-2}^{(2)}$$

dır.

Teorem 4.1.5. $n \in \{1, 2, \ldots\}$ için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesi ile Lucas sayıları arasında,

$$(L_{n+1})^2 - (L_n)^2 = 5F_{2n+1}^{(2)} + 5F_{2n-1}^{(2)}.$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $(L_{n+1})^2 - (L_n)^2 = 5(F_{2n})$ (Mikkawy ve Sogabe, 2010) eşitliğini biliyoruz. Bu eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned}(L_{n+1})^2 - (L_n)^2 &= 5(F_{2n})\\ &= 5(F_nF_{n+1} + F_nF_{n-1})\\ &= 5(F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)})\\ &= 5F_{2n+1}^{(2)} + 5F_{2n-1}^{(2)}\end{aligned}$$

şeklinde ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 4.1.6. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için için k-Fibonacci sayılarının yeni ailesi ile Lucas sayıları arasında,

$$(L_n)^2 = 3F_{2n-2}^{(2)} + 2F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n+2}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $(L_n)^2 = (F_{n-1} + F_{n+1})^2$

$$\begin{aligned}&= (F_{n-1})^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} + (F_{n+1})^2\\ &= (F_{n-1})^2 + 2F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) + (F_{n+1})^2\\ &= (F_{n-1})^2 + 2(F_{n-1})^2 + 2F_nF_{n-1} + (F_{n+1})^2\end{aligned}$$

$$= 3(F_{n-1})^2 + 2F_n\, F_{n-1} + (F_{n+1})^2$$
$$= 3F_{2n-2}^{(2)} + 2F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n+2}^{(2)}$$

şeklinde ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 4.1.7. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesine ait,

$$F_{2n+2}^{(2)} - F_{2n-2}^{(2)} = F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n+1}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $F_{2n+2}^{(2)} - F_{2n-2}^{(2)} = (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2$

$$= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1})$$

$$= (F_n)(F_{n+1} + F_{n-1})$$

$$= (F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1})$$

$$= F_{2n-1}^{(2)} + F_{2n+1}^{(2)}$$

şeklinde ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 4.1.8. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için *k*-Fibonacci sayılarının yeni ailesi ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasında,

$$(L_n)^2 + 2F_{2n} + F_{2n}^{(2)} = 4F_{2n+2}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $(L_n)^2 + 2F_{2n} + F_{2n}^{(2)} = (L_n)^2 + 2F_n L_n + (F_n)^2$

$$= \ (L_n + F_n)^2$$

$$= (F_{n+1} + F_{n-1} + F_n)^2$$

$$= (F_{n+1} + F_{n+1})^2$$

$$= (2F_{n+1})^2$$

$$= 4F_{2n+2}^{(2)}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.9. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için k-Fibonacci sayılarının yeni ailesine ait,

$$F_{2n+1}^{(2)} - F_{2n-3}^{(2)} = F_{2n}^{(2)} + F_{2n-2}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $F_{2n+1}^{(2)} - F_{2n-3}^{(2)} = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2}$

$$= [\, F_{n-1} + F_{n-2}] F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2}$$

$$= F_{n-1} F_{n+1} + F_{n-2} F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2}$$

$$= F_{n-1} F_{n+1} + (\, F_{n+1} - F_{n-1}) F_{n-2}$$

$$= F_{n+1} F_{n-1} + F_n F_{n-2}$$

$$= F_{n+n-1}$$

$$= F_{n-1+n}$$

$$= F_n F_n - F_{n-1} F_{n-1}$$

$$= (F_n)^2 - (F_{n-1})^2$$

$$= F_{2n}^{(2)} + F_{2n-2}^{(2)}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.10. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için *k*-Lucas sayılarının yeni ailesine ait,

$$L_{nk+k-1}^{(k)} + L_{nk+k}^{(k)} = L_{nk+k+1}^{(k)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $L_{nk+k-1}^{(k)} + L_{nk+k}^{(k)} = [(L_n)^1 (L_{n+1})^{k-1}] + [\ (L_{n+1})^k (L_{n+2})^0\ ]$

$$= [(L_n)^1 (L_{n+1})^{k-1}] + (L_{n+1})^k$$

$$= (L_{n+1})^{k-1} [\ (L_n) + (L_{n+1})\ ]$$

$$= (L_{n+1})^{k-1}\ L_{n+2}$$

$$= L_{nk+k+1}^{(k)}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.11. $n \in \{1, 2, \dots\}$ için *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının yeni ailesine ait,

$$2\, L_{2n-1}^{(2)} + L_{2n}^{(2)} = 5(F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $2\,L_{2n-1}^{(2)} + L_{2n}^{(2)} = 2(L_n)(L_{n-1}) + (L_n)^2$

$$= (L_n)(2L_{n-1} + (L_n))$$

$$= L_n(L_{n-1} + L_{n-1} + L_n)$$

$$= L_n(L_{n-1} + L_{n+1})$$

$$= L_n\ 5F_n$$

$$= 5F_nL_n$$

$$= 5F_{2n}$$

$$= 5(\ F_n\ F_{n+1} + F_{n-1}F_n)$$

$$= 5(F_{2n+1}^{(2)} + F_{2n-1}^{(2)})$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.12. $n \in \{1, 2, ...\}$ için *k*-Lucas sayılarının yeni ailesi ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasında,

$$L_{2n+2}^{(2)} - L_{2n-2}^{(2)} = L_{2n+1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $L_{2n+2}^{(2)} - L_{2n-2}^{(2)} = (L_{n+1})^2 - (L_{n-1})^2$

$$= (\ L_{n+1} - L_{n-1})(L_{n+1} + L_{n-1})$$

$$= L_n(L_{n+1} + L_{n-1})$$

$$= L_nL_{n+1} + L_nL_{n-1}$$
$$= L_{2n+1}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.13. $n \in \{1, 2, ...\}$ için *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının yeni ailesine ait,

$$F_{4n+1}^{(2)} = L_{2n+1}^{(2)}\, F_{2n}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $F_{4n+1}^{(2)} = F_{2n}F_{2n+1}$

$$= F_{2n}(\, F_n\, F_{n+1} + F_{n-1}F_n)$$

$$= F_{2n}F_n(\, F_{n+1} + F_{n-1})$$

$$= F_{2n}F_n\, L_{n+1}$$

$$= F_nL_nF_nL_{n+1}$$

$$= (F_n)^2\, L_nL_{n+1}$$

$$= L_{2n+1}^{(2)}\, F_{2n}^{(2)}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.14. $n \in \{1, 2, ...\}$ için *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının yeni ailesi ile Fibonacci sayıları arasında,

$$L_{2n}^{(2)} - 2\, F_n F_{n-2} = F_{2n}^{(2)} + F_{2n-4}^{(2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $L_{2n}^{(2)} - 2\, F_n F_{n-2} = (L_n)^2 - 2\, F_n F_{n-2}$

$$= (F_n + F_{n-2})^2 - 2\, F_n F_{n-2}$$

$$= (F_n)^2 + 2\, F_n F_{n-2} + (F_{n-2})^2 - 2\, F_n F_{n-2}$$

$$= (F_n)^2 + (F_{n-2})^2$$

$$= F_{2n}^{(2)} + F_{2n-4}^{(2)}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanmış olur.

4.2. Genelleştirilmiş Lucas Polinomları

Lucas polinomları,

$L_0(x) = 0\, , L_1(x) = x\ ,\ L_2(x) = x^2 + 2$ olmak üzere,

$$L_{n+2}(x) = xL_{n+1}(x) + L_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Hoggatt ve Bicknell, 1973).

Ayrıca, Lucas polinomlarının terimleri $\delta_2$matrisi ile $\mathbb{Q}_2$ matrisinin çarpımları sonucu elde edilir.

$$\mathbb{Q}_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} x^2+2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix},$$

$$\delta_2 . \mathbb{Q}_2 = \varphi_2^n = \begin{pmatrix} L_{n+1}(x) & L_n(x) \\ L_n(x) & L_{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Lucas polinomlarının elemanlarını elde etmek için kullandığımız $\mathbb{Q}_2$ ve φ_2^n matrislerinden φ_2^n matrisinin determinantını alırsak,

$$\det\begin{bmatrix} L_{n+1}(x) & L_n(x) \\ L_n(x) & L_{n-1}(x) \end{bmatrix} = (-1)^n(x^2+4)$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada $x = 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olarak aldığımızda

$$\det\Theta_2^n = \begin{cases} -5 & , \quad n = 2k-1 \\ 5 & , \quad n = 2k \end{cases}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

4.2.1. 3-Basamak Lucas polinomları

3-basamak Lucas polinomları,
$L^*{}_0(x) = 3$, $L^*{}_1(x) = 1$ ve $L^*{}_2(x) = x^2 + 2$ olmak üzere,

$$L^*{}_{n+3}(x) = x^2 L^*{}_{n+2}(x) + x L^*{}_{n+1}(x) + L^*{}_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

$x = 1$ ve $L^*{}_n(1) = L^*{}_n$ için,
3-basamak Lucas sayıları $3, 1, 3, 7, 11, 21, 39, 71, 131, \ldots$şeklindedir ve

$$L^*{}_{n+3} = L^*{}_{n+2} + L^*{}_{n+1} + L^*{}_n$$

bağıntısı ile verilir.
İlk birkaç 3-basamak Lucas polinomları ve baş katsayılar dizisi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

<u>$3-$ basamak Lucas polinomları</u>

$L^*{}_1(x) = 1$

$L^*{}_2(x) = x^2 + 2$

$L^*{}_3(x) = x^4 + 2x^2 + x + 3$

$L^*{}_4(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$$L^*{}_5(x) = x^8 + 2x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

$$L^*{}_6(x) = x^{10} + 2x^8 + 4x^7 + 3x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x + 3$$

$$L^*{}_7(x) = x^{12} + 2x^{10} + 5x^9 + 3x^8 + 8x^7 + 10x^6 + 9x^5 + 12x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 4x + 1$$

$$L^*{}_8(x) = x^{14} + 2x^{12} + 6x^{11} + 3x^{10} + 2x^9 + 15x^8 + 12x^7 + 20x^6 + 16x^5 + 18x^4 + 16x^3 + 4x^2 + 6x + 2$$

$$L^*{}_9(x) = x^{16} + 2x^{14} + 7x^{13} + 3x^{12} + 4x^{11} + 21x^{10} + 15x^9 + 30x^8 + 30x^7 + 30x^6 + 34x^5 + 17x^4 + 21x^3 + 12x^2 + 3x + 3$$

<u>Baş katsayıları</u>

1

1 2

1 2 1 3

1 2 2 3 2 1

1 2 3 3 4 3 3 2

1 2 4 3 6 6 6 6 2 3

1 2 5 3 8 10 9 12 7 9 4 1

1 2 6 3 2 15 12 20 16 18 16 4 6 2

1 2 7 3 4 21 15 30 30 30 34 17 21 12 3 3

3-basamak Lucas polinomları aşağıda verilen $\mathbb{Q}_3$ ve Θ_3 matrislerinin çarpımları olan *K* matrisi tarafından üretilir.

$$\mathbb{Q}_3 = \begin{pmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \Theta_3 = \begin{pmatrix} x^2 + 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 - 3x \\ 3 & 2 - 3x & 1 - 2x \end{pmatrix},$$

$$K = \Theta_3 . \mathbb{Q}_3 = \varphi_3^n = \begin{pmatrix} L_{n+2}^*(x) & L_{n+1}^*(x) & L_n^*(x) \\ L_{n+1}^*(x) & L_n^*(x) & L_{n-1}^*(x) \\ L_n^*(x) & L_{n-1}^*(x) & L_{n-2}^*(x) \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Buradan;

$$\begin{pmatrix} x^2+2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2-3x \\ 3 & 2-3x & 1-2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^4+2x^2+x+3 & x^2+2 & 1 \\ x^2+2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2-3x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_3^* & L_2^* & L_1^* \\ L_2^* & L_1^* & L_0^* \\ L_1^* & L_0^* & L_{-1}^* \end{pmatrix}$$

$$= \varphi_3^1 \text{ yazılır.}$$

3-basamak Lucas polinomlarının terimlerini elde ettiğimiz φ_3^n matrisinin determinantını aldığımız zaman aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\det(\varphi_3^n) = \begin{vmatrix} L_{n+2}^*(x) & L_{n+1}^*(x) & L_n^*(x) \\ L_{n+1}^*(x) & L_n^*(x) & L_{n-1}^*(x) \\ L_n^*(x) & L_{n-1}^*(x) & L_{n-2}^*(x) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n(9x^4 - 6x^3 + 19x^2 + 4x + 18).$$

Burada $x = 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olarak aldığımızda,

$$\det\varphi_3^n = \begin{cases} -44 & n = 2k-1 \\ 44 & n = 2k \end{cases}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

4.2.2. 4-Basamak Lucas polinomları

4-basamak Lucas polinomları,

$L^{**}{}_0(x) = 4$, $L^{**}{}_1(x) = 1$ ve $L^{**}{}_2(x) = x^3 + 2$ olmak üzere,

$$L^{**}{}_{n+4}(x) = x^3 L^{**}{}_{n+3}(x) + x^2 L^{**}{}_{n+2}(x) + x L^{**}{}_{n+1}(x) + L^{**}{}_n$$

bağıntısı ile tanımlanır.

$x = 1$ ve $L^{**}{}_n(1) = L_n^{**}$ için,

$4-$basamak Lucas sayıları $4, 1, 3, 7, 15, 26, 51, 99, \ldots$ şeklinde olup

$$L^{**}{}_{n+4} = L^{**}{}_{n+3} + L^{**}{}_{n+2} + L^{**}{}_{n+1} + L^{**}{}_n$$

bağıntısı ile verilir.

İlk birkaç $4-$basamak Lucas polinomları ve baş katsayılar dizisi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

<u>$4-$basamak Lucas polinomları</u>

$L^{**}{}_1(x) = 1$

$L^{**}{}_2(x) = x^3 + 2$

$L^{**}{}_3(x) = x^6 + 2x^3 + x^2 + 3$

$L^{**}{}_4(x) = x^9 + 2x^6 + 2x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$

$L^{**}{}_5(x) = x^{12} + 2x^9 + 3x^8 + 3x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$L^{**}{}_6(x) = x^{15} + 2x^{12} + 4x^{11} + 3x^9 + 6x^8 + 6x^7 + 4x^6 + 6x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 2$

$L^{**}{}_7(x) = x^{18} + 2x^{15} + 5x^{14} + 3x^{12} + 8x^{11} + 10x^{10} + 4x^9 + 9x^8 + 12x^7 + 10x^6 + 8x^5 + 9x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x + 3$

<u>Baş katsayıları</u>

1

1 2

1 2 1 3

1 2 2 3 2 1 4

1 2 3 3 4 3 4 3 2 1

1 2 4 3 6 6 4 6 6 4 4 3 2

1 2 5 3 8 10 4 9 12 10 8 9 8 3 4 3

$4-$basamak Lucas polinomları aşağıda verilen $\mathbb{Q}_4$ ve γ_4 matrislerinin çarpımları olan φ_4^n matrisi tarafından üretilir.

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} x^6+2x^3+x^2+3 & x^3+2 & 1 & 4 \\ x^3+2 & 1 & 4 & 3-4x \\ 1 & 4 & 3-4x & 4x^2-3x-2 \\ 4 & 3-4x & 4x^2-3x-2 & -4x^3+3x^2+2x-2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{Q}_4 = \begin{pmatrix} x^3 & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrislerinin çarpımından,

$$\gamma_4 . \mathbb{Q}_4 = \varphi_4^n = \begin{pmatrix} L_{n+3}^{**} & L_{n+2}^{**} & L_{n+1}^{**} & L_n^{**} \\ L_{n+2}^{**} & L_{n+1}^{**} & L_n^{**} & L_{n-1}^{**} \\ L_{n+1}^{**} & L_n^{**} & L_{n-1}^{**} & L_{n-2}^{**} \\ L_n^{**} & L_{n-1}^{**} & L_{n-2}^{**} & L_{n-3}^{**} \end{pmatrix}$$ elde edilir.

4.2.3. r-Basamak Lucas polinomları

r-basamak Lucas polinomları,

$L_0^{(r)} = r, L_1^{(r)} = 1$ ve $L_2^{(r)} = x^{r-1} + 2$ olmak üzere,

$$L_{n+r}^{(r)}(x) = x^{r-1} L_{n+r-1}^{(r)}(x) + x^{r-2} L_{n+r-2}^{(r)}(x) + \cdots + L_n^{(r)}(x)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

r-basamak Lucas polinomları *rxr* tipindek Q_r ve δ_r matrislerinin çarpımları olan φ_r^n matrisi tarafından üretilir.

$$\delta_r = \begin{pmatrix} x^{2r-2}+x^{r-2}+2x^{r-1}+3 & x^{r-1}+2 & 1 & r & \dots & -1 \\ x^{r-1}+2 & 1 & r & -1 & \dots & -1 \\ 1 & r & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$L_0^{(r)} = r$, $L_k^{(r)} = -1$, k = -r+1, … , -1,

$$Q_r = \begin{pmatrix} x^{r-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^{r-2} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^{r-3} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_r^n = \delta_r^n \mathbb{Q}_r = \begin{pmatrix} L_{n+r-1}^{(r)}(x) & L_{n+r-2}^{(r)}(x) & \dots & \dots & L_{n+1}^{(r)}(x) & L_n^{(r)}(x) \\ L_{n+r-2}^{(r)}(x) & L_{n+r-3}^{(r)}(x) & \dots & \dots & L_{n+}^{(r)}(x) & L_{n-1}^{(r)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n+1}^{(r)}(x) & L_n^{(r)}(x) & \dots & \dots & L_{n-r+3}^{(r)}(x) & L_{n-r+2}^{(r)}(x) \\ L_n^{(r)}(x) & L_{n-1}^{(r)}(x) & \dots & \dots & L_{n-r+2}^{(r)}(x) & L_{n-r+1}^{(r)}(x) \end{pmatrix}$$

yukarıdaki matrislerin yardımıyla r-basamak Lucas polinomlarının bütün elemanlarını bulabiliriz.

4.3. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Yeni Ailesine Ait Bazı Özdeşlikler

Teorem 4.3.1. Fibonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$F_{2n+4}^{(2)}(x) = x^2 F_{2n+2}^{(2)}(x) + 2x F_{2n+1}^{(2)}(x) + F_{2n}^{(2)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : $x^2 F_{2n+2}^{(2)}(x) = x^2 [F_{n+1}(x)]^2$

$$2xF_{2n+1}^{(2)}(x) = 2xF_n(x)F_{n+1}(x)$$

$$F_{2n}^{(2)}(x) = [F_n(x)]^2$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} x^2F_{2n+2}^{(2)}(x) + 2xF_{2n+1}^{(2)}(x) + F_{2n}^{(2)}(x) &= x^2[F_{n+1}(x)]^2 + 2xF_n(x)F_{n+1}(x) + [F_n(x)]^2 \\ &= [xF_{n+1}(x)+F_n(x)]^2 \\ &= F_{2n+4}^{(2)}(x) \end{aligned}$$

olup, böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. Fibonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$F_{3n+2}^{(3)}(x) = x^2F_{3n}^{(3)}(x) + 2xF_{3n-1}^{(3)}(x) + F_{3n-2}^{(3)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^2F_{3n}^{(3)}(x) = x^2(F_n(x))^3,$

$$2xF_{3n-1}^{(3)}(x) = 2x(F_n(x))^2F_{n-1}(x),$$

$$F_{3n-2}^{(3)}(x) = F_n(x)(F_{n-1}(x))^2,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} x^2F_{3n}^{(3)}(x) + 2xF_{3n-1}^{(3)}(x) + F_{3n-2}^{(3)}(x) \\ &= x^2(F_n(x))^3 + 2x(F_n(x))^2F_{n-1}(x) + F_n(x)(F_{n-1}(x))^2 \\ &= F_n(x)[x^2(F_n(x))^2 + 2xF_n(x)F_{n-1}(x) + (F_{n-1}(x))^2] \\ &= F_n(x)[xF_n(x)+F_{n-1}(x)]^2 \\ &= F_n(x)[F_{n+1}(x)]^2 \\ &= F_{3n+2}^{(3)}(x) \end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.3. Fibonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$F_{4n+3}^{(4)}(x) = x^3F_{4n}^{(4)}(x) + 3x^2F_{4n-1}^{(4)}(x) + 3xF_{4n-2}^{(4)}(x) + F_{4n-3}^{(4)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^3F_{4n}^{(4)}(x) = x^3(F_n(x))^4,$

$$3x^2F_{4n-1}^{(4)}(x) = 3x^2(F_n(x))^3F_{n-1}(x),$$

$$3xF_{4n-2}^{(4)}(x) = 3x(F_n(x))^2(F_{n-1}(x))^2,$$

$$F_{4n-3}^{(4)}(x) = F_n(x)(F_{n-1}(x))^3,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned}
x^3F_{4n}^{(4)}(x) &+ 3x^2F_{4n-1}^{(4)}(x) + 3xF_{4n-2}^{(4)}(x) + F_{4n-3}^{(4)}(x) \\
= \quad & x^3(F_n(x))^4 + 3x^2(F_n(x))^3\,F_{n-1}(x) + 3x(F_n(x))^2(F_{n-1}(x))^2 + \\
& F_n(x)(F_{n-1}(x))^3 \\
&= F_n(x)[x^3(F_n(x))^3 + 3x^2(F_n(x))^2F_{n-1}(x) + 3xF_n(x)(F_{n-1}(x))^2 + \\
& (F_{n-1}(x))^3 \\
&= F_n(x)[xF_n(x)+F_{n-1}(x)]^3 \\
&= F_n(x)(F_{n+1}(x))^3 \\
&= F_{4n+3}^{(4)}(x)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.4. Fibonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$F_{5n+4}^{(5)}(x) = x^4F_{5n}^{(5)}(x) + 4x^3F_{5n-1}^{(5)}(x) + 6x^2F_{5n-2}^{(5)}(x) + 4xF_{5n-3}^{(5)}(x) + F_{5n-4}^{(5)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^4F_{5n}^{(5)}(x) = x^4(F_n(x))^5,$

$$4x^3F_{5n-1}^{(5)}(x) = 4x^3(F_n(x))^4F_{n-1}(x),$$

$$6x^2F_{5n-2}^{(5)}(x) = 6x^2(F_n(x))^3(F_{n-1}(x))^2,$$

$$4xF_{5n-3}^{(5)}(x) = 4x(F_n(x))^2(F_{n-1}(x))^3,$$

$$F_{5n-4}^{(5)}(x) = F_n(x)(F_{n-1}(x))^4,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned}
x^4F_{5n}^{(5)}(x) &+ 4x^3F_{5n-1}^{(5)}(x) + 6x^2F_{5n-2}^{(5)}(x) + 4xF_{5n-3}^{(5)}(x) + F_{5n-4}^{(5)}(x) \\
&= x^4(F_n(x))^5 + 4x^3(F_n(x))^4F_{n-1}(x) + 6x^2(F_n(x))^3(F_{n-1}(x))^2 \\
&\qquad + 4x(F_n(x))^2(F_{n-1}(x))^3 + F_n(x)(F_{n-1}(x))^4 \\
&= F_n(x)[x^4(F_n(x))^4 + 4x^3(F_n(x))^3\,F_{n-1}(x) + 6x^2(F_n(x))^2(F_{n-1}(x))^2 + \\
&\quad 4xF_n(x)(F_{n-1}(x))^3 + (F_{n-1}(x))^4] \\
&= F_n(x)[xF_n(x)+F_{n-1}(x)]^4 \\
&= F_n(x)(F_{n+1}(x))^4 \\
&= F_{5n+4}^{(5)}(x)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.5. Fibonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$\begin{aligned}
F_{6n+5}^{(6)}(x) &= x^5F_{6n}^{(6)}(x) + 5x^4F_{6n-1}^{(6)}(x) + 10x^3F_{6n-2}^{(6)}(x) + 10x^2F_{6n-3}^{(6)}(x) \\
&\quad + 5xF_{6n-4}^{(6)}(x) + F_{6n-5}^{(6)}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^5F_{6n}^{(6)}(x) = x^5(F_n(x))^6,$

$$5x^4F_{6n-1}^{(6)}(x) = 5x^4(F_n(x))^5F_{n-1}(x),$$

$$10x^3F_{6n-2}^{(6)}(x) = 10x^3(F_n(x))^4(F_{n-1}(x))^2,$$

$$10x^2F_{6n-3}^{(6)}(x)=10x^2(F_n(x))^3(F_{n-1}(x))^3,$$
$$5xF_{6n-4}^{(6)}(x)=5x(F_n(x))^2(F_{n-1}(x))^4,$$
$$F_{6n-5}^{(6)}(x)=F_n(x)(F_{n-1}(x))^5,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned}
x^5F_{6n}^{(6)}(x)&+5x^4F_{6n-1}^{(6)}(x)+10x^3F_{6n-2}^{(6)}(x)+10x^2F_{6n-3}^{(6)}(x)+5xF_{6n-4}^{(6)}(x)\\
&+F_{6n-5}^{(6)}(x)\\
&= x^5(F_n(x))^6+5x^4(F_n(x))^5\,F_{n-1}(x)+10x^3(F_n(x))^4\,(F_{n-1}(x))^2\\
&\quad+10x^2(F_n(x))^3\,(F_{n-1}(x))^3+5x(F_n(x))^2(F_{n-1}(x))^4\\
&\quad+F_n(x)(F_{n-1}(x))^5\\
&=F_n(x)[x^5(F_n(x))^5+5x^4(F_n(x))^4\,F_{n-1}(x)+10x^3(F_n(x))^3\,(F_{n-1}(x))^2+\\
&\quad 10x^2(F_n(x))^2\,(F_{n-1}(x))^3+5xF_n(x)\,(F_{n-1}(x))^4+(F_{n-1}(x))^5\\
&=F_n(x)[xF_n(x)+F_{n-1}(x)]^5\\
&=F_n(x)(F_{n+1}(x))^5\\
&=F_{6n+5}^{(6)}(x)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.6. Fibonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$\begin{aligned}
F_{kn+k-1}^{(k)}(x)&=\binom{k-1}{0}x^{k-1}F_{kn}^{(k)}(x)+\binom{k-1}{1}x^{k-2}F_{kn-1}^{(k)}(x)\\
&\quad+\binom{k-1}{2}x^{k-3}F_{kn-2}^{(k)}(x)+\cdots+\binom{k-1}{k-1}x^{(k-1)-(k-1)}F_{kn-(k-1)}^{(k)}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:
$$\binom{k-1}{0}x^{k-1}F_{kn}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{0}x^{k-1}(F_n(x))^k,$$
$$\binom{k-1}{1}x^{k-2}F_{kn-1}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{1}x^{k-2}(F_n(x))^{k-1}\,F_{n-1}(x),$$
$$\binom{k-1}{2}x^{k-3}F_{kn-2}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{2}x^{k-3}(F_n(x))^{k-2}(F_{n-1}(x))^2,$$

$$\vdots$$

$$\binom{k-1}{k-1} x^{(k-1)-(k-1)} F_{kn-(k-1)}^{(k)}(x) = \binom{k-1}{k-1} x^{(k-1)-(k-1)} F_n(x)(F_{n-1}(x))^{k-1},$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned}\binom{k-1}{0} x^{k-1} F_{kn}^{(k)}(x) + \binom{k-1}{1} x^{k-2} F_{kn-1}^{(k)}(x) + \binom{k-1}{2} x^{k-3} F_{kn-2}^{(k)}(x) + \cdots \\ + \binom{k-1}{k-1} x^{(k-1)-(k-1)} F_{kn-(k-1)}^{(k)}(x) \\ = F_n(x)[\binom{k-1}{0} x^{k-1}(F_n(x))^{k-1} \\ + \binom{k-1}{1} x^{k-2}(F_n(x))^{k-2}\, F_{n-1}(x) \\ + \binom{k-1}{2} x^{k-3}(F_n(x))^{k-3}\, (F_{n-1}(x))^2 + \cdots \\ + \binom{k-1}{k-1} x^{(k-1)-(k-1)}(F_{n-1}(x))^{k-1} \\ = F_n(x)[xF_n(x)+F_{n-1}(x)]^{k-1} \\ = F_n(x)(F_{n+1}(x))^{k-1} \\ = F_{kn+k-1}^{(k)}(x)\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.7. Tribonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$\begin{aligned}T_{2n+6}^{(2)}(x) = x^4 T_{2n+4}^{(2)}(x) + 2x^3 T_{2n+3}^{(2)}(x) + x^2 T_{2n+2}^{(2)}(x) + (2x^4 + 2x) T_{2n+1}^{(2)}(x) \\ + (2x^3 + 1) T_{2n}^{(2)}(x) + 2x^2 T_{2n-1}^{(2)}(x)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$x^4 T_{2n+4}^{(2)}(x) = x^4 (T_{n+2}(x))^2,$$

$$2x^3 T_{2n+3}^{(2)}(x) = 2x^3 T_{n+1}(x) T_{n+2}(x),$$

$$x^2 T_{2n+2}^{(2)}(x) = x^2 (T_{n+1}(x))^2,$$

$$2x T_{2n+1}^{(2)}(x) = 2x T_n(x) T_{n+1}(x),$$

$$2x^4T_{2n+1}^{(2)}(x) = 2x^4T_n(x)T_{n+1}(x),$$
$$2x^3T_{2n}^{(2)}(x) = 2x^3(T_n(x))^2,$$
$$T_{2n}^{(2)}(x) = (T_n(x))^2,$$
$$2x^2T_{2n-1}^{(2)}(x) = 2x^2T_n(x)T_{n-1}(x),$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned}
x^4T_{2n+4}^{(2)}(x) &+ 2x^3T_{2n+3}^{(2)}(x) + x^2T_{2n+2}^{(2)}(x) + 2xT_{2n+1}^{(2)}(x) + 2x^4T_{2n+1}^{(2)}(x)\\
&+ 2x^3T_{2n}^{(2)}(x) + T_{2n}^{(2)}(x) + 2x^2T_{2n-1}^{(2)}(x)\\
&= x^4(T_{n+2}(x))^2 + 2x^3T_{n+1}(x)T_{n+2}(x) + x^2(T_{n+1}(x))^2\\
&+ 2xT_n(x)T_{n+1}(x) + 2x^4T_n(x)T_{n+1}(x) + 2x^3(T_n(x))^2 + (T_n(x))^2\\
&+ 2x^2T_n(x)T_{n-1}(x)\\
&= (T_{n+3}(x))^2\\
&= T_{2n+6}^{(2)}(x)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.8. Tribonacci polinomlarının yeni ailesine ait,

$$\begin{aligned}
T_{2n+2m}^{(2)}(x) = x^4T_{2n+(2m-2)}^{(2)}(x) &+ 2x^3T_{2n+(2m-3)}^{(2)}(x) + x^2T_{2n+(2m-4)}^{(2)}(x)\\
&+ (2x^4 + 2x)T_{2n+(2m-5)}^{(2)}(x) + (2x^3 + 1)T_{2n+(2m-6)}^{(2)}(x)\\
&+ 2x^2T_{2n+(2m-7)}^{(2)}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^4T_{2n+(2m-2)}^{(2)}(x) = x^4(T_{n+(m-1)}(x))^2,$

$$2x^3T_{2n+(2m-3)}^{(2)}(x) = 2x^3T_{n+m-1}(x)T_{n+m-2}(x),$$
$$x^2T_{2n+(2m-4)}^{(2)}(x) = x^2(T_{n+m-2)}(x))^2,$$
$$2x^4T_{2n+(2m-5)}^{(2)}(x) = 2x^4T_{n+m-2}(x)T_{n+m-3}(x),$$

$$2xT^{(2)}_{2n+(2m-5)}(x) = 2xT_{n+m-2}(x)T_{n+m-3}(x),$$
$$2x^3T^{(2)}_{2n+(2m-6)}(x) = 2x^3(T_{n+m-3}(x))^2,$$
$$T^{(2)}_{2n+(2m-6)}(x) = (T_{n+m-3}(x))^2,$$
$$2x^2T^{(2)}_{2n+(2m-7)}(x) = 2x^2T_{n+m-3}(x)T_{n+m-4}(x),$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned}
x^4T^{(2)}_{2n+(2m-2)}(x) &+ 2x^3T^{(2)}_{2n+(2m-3)}(x) + x^2T^{(2)}_{2n+(2m-4)}(x) \\
&+ (2x^4+2x)T^{(2)}_{2n+(2m-5)}(x) + (2x^3+1)T^{(2)}_{2n+(2m-6)}(x) \\
&+ 2x^2T^{(2)}_{2n+(2m-7)}(x) \\
&= x^4(T_{n+(m-1)}(x))^2 + 2x^3T_{n+m-1}(x)T_{n+m-2}(x) \\
&+ x^2(T_{n+m-2)}(x))^2 + 2x^4T_{n+m-2}(x)T_{n+m-3}(x) \\
&+ 2xT_{n+m-2}(x)T_{n+m-3}(x) + 2x^3(T_{n+m-3}(x))^2 + (T_{n+m-3}(x))^2 \\
&+ 2x^2T_{n+m-3}(x)T_{n+m-4}(x) \\
&= (T_{n+m}(x))^2 \\
&= T^{(2)}_{2n+2m}(x)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.9. Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$L^{(2)}_{2n+4}(x) = x^2L^{(2)}_{2n+2}(x) + 2xL^{(2)}_{2n+1}(x) + L^{(2)}_{2n}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : $x^2L^{(2)}_{2n+2}(x) = x^2[L_{n+1}(x)]^2,$

$$2xL^{(2)}_{2n+1}(x) = 2xL_n(x)L_{n+1}(x),$$
$$L^{(2)}_{2n}(x) = [L_n(x)]^2,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$x^2L_{2n+2}^{(2)}(x)+\ 2xL_{2n+1}^{(2)}(x)+L_{2n}^{(2)}(x)=x^2[L_{n+1}(x)]^2+2xL_n(x)L_{n+1}(x)+[L_n(x)]^2$$
$$=[xL_{n+1}(x)+L_n(x)]^2$$
$$=L_{2n+4}^{(2)}(x)$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.10. Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$L_{3n+2}^{(3)}(x)=x^2L_{3n}^{(3)}(x)+2xL_{3n-1}^{(3)}(x)+L_{3n-2}^{(3)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^2L_{3n}^{(3)}(x)=x^2(L_n(x))^3,$

$$2xL_{3n-1}^{(3)}(x)=2x(L_n(x))^2L_{n-1}(x),$$
$$L_{3n-2}^{(3)}(x)=L_n(x)(L_{n-1}(x))^2,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$x^2L_{3n}^{(3)}(x)+2xL_{3n-1}^{(3)}(x)+L_{3n-2}^{(3)}(x)\quad=x^2(L_n(x))^3+2x(L_n(x))^2L_{n-1}(x)+L_n(x)(L_{n-1}(x))^2$$
$$=\ L_n(x)[x^2(L_n(x))^2+2xL_n(x)L_{n-1}(x)+(L_{n-1}(x))^2]$$
$$=L_n(x)[xL_n(x)+L_{n-1}(x)]^2$$
$$=L_n(x)[L_{n+1}(x)]^2$$
$$=L_{3n+2}^{(3)}(x)$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.11. Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$L_{4n+3}^{(4)}(x) = x^3 L_{4n}^{(4)}(x) + 3x^2 L_{4n-1}^{(4)}(x) + 3x L_{4n-2}^{(4)}(x) + L_{4n-3}^{(4)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^3 L_{4n}^{(4)}(x) = x^3 (L_n(x))^4$,

$$3x^2 L_{4n-1}^{(4)}(x) = 3x^2 (L_n(x))^3 \, L_{n-1}(x),$$

$$3x L_{4n-2}^{(4)}(x) = 3x (L_n(x))^2 (L_{n-1}(x))^2,$$

$$L_{4n-3}^{(4)}(x) = L_n(x) \, (L_{n-1}(x))^3,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} x^3 L_{4n}^{(4)}(x) + 3x^2 L_{4n-1}^{(4)}(x) + 3x L_{4n-2}^{(4)}(x) + L_{4n-3}^{(4)}(x) \\ &= x^3 (L_n(x))^4 + 3x^2 (L_n(x))^3 \, L_{n-1}(x) + 3x (L_n(x))^2 (L_{n-1}(x))^2 \\ &\quad + L_n(x) \, (L_{n-1}(x))^3 \\ &= L_n(x) [x^3 (L_n(x))^3 + 3x^2 (L_n(x))^2 \, L_{n-1}(x) + \\ &\qquad 3x L_n(x) (L_{n-1}(x))^2 + (L_{n-1}(x))^3 \\ &= L_n(x) [x L_n(x) + L_{n-1}(x)]^3 \\ &= L_n(x) (L_{n+1}(x))^3 \\ &= L_{4n+3}^{(4)}(x) \end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.12. Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$L_{5n+4}^{(5)}(x) = x^4 L_{5n}^{(5)}(x) + 4x^3 L_{5n-1}^{(5)}(x) + 6x^2 L_{5n-2}^{(5)}(x) + 4x L_{5n-3}^{(5)}(x) + L_{5n-4}^{(5)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^4 L_{5n}^{(5)}(x) = x^4 (L_n(x))^5$,

$$4x^3 L_{5n-1}^{(5)}(x) = 4x^3 (L_n(x))^4 \, L_{n-1}(x),$$

$$6x^2 L_{5n-2}^{(5)}(x) = 6x^2 (L_n(x))^3 (L_{n-1}(x))^2,$$

$$4x L_{5n-3}^{(5)}(x) = 4x (L_n(x))^2 (L_{n-1}(x))^3,$$

$$L^{(5)}_{5n-4}(x) = L_n(x)(L_{n-1}(x))^4,$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned}
&x^4L^{(5)}_{5n}(x) + 4x^3L^{(5)}_{5n-1}(x) + 6x^2L^{(5)}_{5n-2}(x) + 4xL^{(5)}_{5n-3}(x) + L^{(5)}_{5n-4}(x)\\
&= x^4(L_n(x))^5 + 4x^3(L_n(x))^4\, L_{n-1}(x) + 6x^2(L_n(x))^3(L_{n-1}(x))^2\\
&\quad +4x(L_n(x))^2.\,(L_{n-1}(x))^3 + L_n(x).\,(L_{n-1}(x))^4\\
&= L_n(x)[x^4(L_n(x))^4 + 4x^3(L_n(x))^3\, L_{n-1}(x) + 6x^2(L_n(x))^2(L_{n-1}(x))^2 +\\
&\quad 4xL_n(x)(L_{n-1}(x))^3 + (L_{n-1}(x))^4]\\
&= L_n(x)[xL_n(x)+L_{n-1}(x)]^4\\
&= L_n(x)(L_{n+1}(x))^4\\
&= L^{(5)}_{5n+4}(x)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.13. Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$\begin{aligned}
L^{(6)}_{6n+5}(x) &= x^5L^{(6)}_{6n}(x) + 5x^4L^{(6)}_{6n-1}(x) + 10x^3L^{(6)}_{6n-2}(x) + 10x^2L^{(6)}_{6n-3}(x)\\
&\quad + 5xL^{(6)}_{6n-4}(x) + L^{(6)}_{6n-5}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^5L^{(6)}_{6n}(x) = x^5(L_n(x))^6,$

$$\begin{aligned}
5x^4L^{(6)}_{6n-1}(x) &= 5x^4(L_n(x))^5\, L_{n-1}(x),\\
10x^3L^{(6)}_{6n-2}(x) &= 10x^3(L_n(x))^4\, (L_{n-1}(x))^2,\\
10x^2L^{(6)}_{6n-3}(x) &= 10x^2(L_n(x))^3\, (L_{n-1}(x))^3,\\
5xL^{(6)}_{6n-4}(x) &= 5x(L_n(x))^2\, (L_{n-1}(x))^4,\\
L^{(6)}_{6n-5}(x) &= L_n(x)(L_{n-1}(x))^5,
\end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$x^5L_{6n}^{(6)}(x)+5x^4L_{6n-1}^{(6)}(x)+10x^3L_{6n-2}^{(6)}(x)+10x^2L_{6n-3}^{(6)}(x)+5xL_{6n-4}^{(6)}(x)$$
$$+L_{6n-5}^{(6)}(x)$$
$$=x^5(L_n(x))^6+5x^4(L_n(x))^5\,L_{n-1}(x)+10x^3(L_n(x))^4\,(L_{n-1}(x))^2$$
$$+10x^2(L_n(x))^3\,(L_{n-1}(x))^3+5x(L_n(x))^2\,(L_{n-1}(x))^4$$
$$+L_n(x)(L_{n-1}(x))^5$$
$$=L_n(x)[x^5(L_n(x))^5+5x^4(L_n(x))^4.L_{n-1}(x)$$
$$+10x^3(L_n(x))^3\,(L_{n-1}(x))^2+10x^2(L_n(x))^2\,(L_{n-1}(x))^3$$
$$+5xL_n(x)\,(L_{n-1}(x))^4+(L_{n-1}(x))^5$$
$$=L_n(x)[xL_n(x)+L_{n-1}(x)]^5$$
$$=L_n(x)(L_{n+1}(x))^5$$
$$=L_{6n+5}^{(6)}(x)$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.14. Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$L_{kn+k-1}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{0}x^{k-1}L_{kn}^{(k)}(x)+\binom{k-1}{1}x^{k-2}L_{kn-1}^{(k)}(x)$$
$$+\binom{k-1}{2}x^{k-3}L_{kn-2}^{(k)}(x)+\cdots+\binom{k-1}{k-1}x^{(k-1)-(k-1)}L_{kn-(k-1)}^{(k)}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $$\binom{k-1}{0}x^{k-1}L_{kn}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{0}x^{k-1}(L_n(x))^k,$$

$$\binom{k-1}{1}x^{k-2}L_{kn-1}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{1}x^{k-2}(L_n(x))^{k-1}\,L_{n-1}(x),$$

$$\binom{k-1}{2}x^{k-3}L_{kn-2}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{2}x^{k-3}(L_n(x))^{k-2}\,(L_{n-1}(x))^2,$$

$$\vdots$$

$$\binom{k-1}{k-1}x^{(k-1)-(k-1)}L_{kn-(k-1)}^{(k)}(x)=\binom{k-1}{k-1}x^{(k-1)-(k-1)}L_n(x)(L_{n-1}(x))^{k-1},$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\binom{k-1}{0}x^{k-1}L_{kn}^{(k)}(x)+\binom{k-1}{1}x^{k-2}L_{kn-1}^{(k)}(x)+\binom{k-1}{2}x^{k-3}L_{kn-2}^{(k)}(x)+\cdots$$
$$+\binom{k-1}{k-1}x^{(k-1)-(k-1)}L_{kn-(k-1)}^{(k)}(x)$$
$$=L_n(x)[\binom{k-1}{0}x^{k-1}(L_n(x))^{k-1}$$
$$+\binom{k-1}{1}x^{k-2}(L_n(x))^{k-2}\,L_{n-1}(x)$$
$$+\binom{k-1}{2}x^{k-3}(L_n(x))^{k-3}\,(L_{n-1}(x))^2+\cdots$$
$$+\binom{k-1}{k-1}x^{(k-1)-(k-1)}(L_{n-1}(x))^{k-1}$$
$$=L_n(x)[xL_n(x)+L_{n-1}(x)]^{k-1}$$
$$=L_n(x)(L_{n+1}(x))^{k-1}$$
$$=\ L_{kn+k-1}^{(k)}(x)$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.15. 3-basamak Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$L^{*(2)}_{2n+6}(x)=x^4L^{*(2)}_{2n+4}(x)+2x^3L^{*(2)}_{2n+3}(x)+x^2L^{*(2)}_{2n+2}(x)+(2x^4+2x)L^{*(2)}_{2n+1}(x)$$
$$+(2x^3+1)L^{*(2)}_{2n}(x)+2x^2L^{*(2)}_{2n-1}(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x^4L^{*(2)}_{2n+4}(x)=x^4(L^{*}_{n+2}(x))^2,$

$$2x^3L^{*(2)}_{2n+3}(x)=2x^3L^{*}_{n+1}(x)L^{*}_{n+2}(x),$$
$$x^2L^{*(2)}_{2n+2}(x)=x^2(L^{*}_{n+1}(x))^2,$$
$$2xL^{*(2)}_{2n+1}(x)=2xL^{*}_{n}(x)L^{*}_{n+1}(x),$$
$$2x^4L^{*(2)}_{2n+1}(x)=2x^4L^{*}_{n}(x)L^{*}_{n+1}(x),$$
$$2x^3L^{*(2)}_{2n}(x)=2x^3(L^{*}_{n}(x))^2,$$
$$L^{*(2)}_{2n}(x)=(L^{*}_{n}(x))^2,$$
$$2x^2L^{*(2)}_{2n-1}(x)=2x^2L^{*}_{n}(x)L^{*}_{n-1}(x),$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$
\begin{aligned}
x^4 L^{*(2)}_{2n+4}(x) &+ 2x^3 L^{*(2)}_{2n+3}(x) + x^2 L^{*(2)}_{2n+2}(x) + 2x L^{*(2)}_{2n+1}(x) + 2x^4 L^{*(2)}_{2n+1}(x) \\
&+ 2x^3 L^{*(2)}_{2n}(x) + L^{*(2)}_{2n}(x) + 2x^2 L^{*(2)}_{2n-1}(x) \\
&= x^4 (L^*{}_{n+2}(x))^2 + 2x^3 L^*{}_{n+1}(x) L^*{}_{n+2}(x) + x^2 (L^*{}_{n+1}(x))^2 \\
&+ 2x L^*{}_n(x) L^*{}_{n+1}(x) + 2x^4 L^*{}_n(x) L^*{}_{n+1}(x) + 2x^3 (L^*{}_n(x))^2 \\
&+ (L^*{}_n(x))^2 + 2x^2 L^*{}_n(x) L^*{}_{n-1}(x) \\
&= (L^*{}_{n+3}(x))^2 \\
&= L^{*(2)}_{2n+6}(x)
\end{aligned}
$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.16. 3-basamak Lucas polinomlarının yeni ailesine ait,

$$
\begin{aligned}
L^{*(2)}_{2n+2m}(x) = x^4 L^{*(2)}_{2n+(2m-2)}(x) &+ 2x^3 L^{*(2)}_{2n+(2m-3)}(x) + x^2 L^{*(2)}_{2n+(2m-4)}(x) \\
&+ (2x^4 + 2x) L^{*(2)}_{2n+(2m-5)}(x) + (2x^3 + 1) L^{*(2)}_{2n+(2m-6)}(x) \\
&+ 2x^2 L^{*(2)}_{2n+(2m-7)}(x)
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$
\begin{aligned}
x^4 L^{*(2)}_{2n+(2m-2)}(x) &= x^4 (L^*{}_{n+(m-1)}(x))^2, \\
2x^3 L^{*(2)}_{2n+(2m-3)}(x) &= 2x^3 L^*{}_{n+m-1}(x) L^*{}_{n+m-2}(x), \\
x^2 L^{*(2)}_{2n+(2m-4)}(x) &= x^2 (L^*{}_{n+m-2)}(x))^2, \\
2x^4 L^{*(2)}_{2n+(2m-5)}(x) &= 2x^4 L^*{}_{n+m-2}(x) L^*{}_{n+m-3}(x), \\
2x L^{*(2)}_{2n+(2m-5)}(x) &= 2x L^*{}_{n+m-2}(x) L^*{}_{n+m-3}(x), \\
2x^3 L^{*(2)}_{2n+(2m-6)}(x) &= 2x^3 (L^*{}_{n+m-3}(x))^2, \\
L^{*(2)}_{2n+(2m-6)}(x) &= (L^*{}_{n+m-3}(x))^2, \\
2x^2 L^{*(2)}_{2n+(2m-7)}(x) &= 2x^2 L^*{}_{n+m-3}(x) L^*{}_{n+m-4}(x),
\end{aligned}
$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$
\begin{aligned}
&x^4 L^{*(2)}_{2n+(2m-2)}(x) + 2x^3 L^{*(2)}_{2n+(2m-3)}(x) + x^2 L^{*(2)}_{2n+(2m-4)}(x) \\
&\qquad + (2x^4 + 2x) L^{*(2)}_{2n+(2m-5)}(x) + (2x^3 + 1) L^{*(2)}_{2n+(2m-6)}(x) \\
&\qquad + 2x^2 L^{*(2)}_{2n+(2m-7)}(x) \\
&\qquad = x^4 (L^{*}_{n+(m-1)}(x))^2 + 2x^3 L^{*}_{n+m-1}(x) L^{*}_{n+m-2}(x) \\
&\qquad + x^2 (L^{*}_{n+m-2)}(x))^2 + 2x^4 L^{*}_{n+m-2}(x) L^{*}_{n+m-3}(x) \\
&\qquad + 2x L^{*}_{n+m-2}(x) L^{*}_{n+m-3}(x) + 2x^3 (L^{*}_{n+m-3}(x))^2 + (L^{*}_{n+m-3}(x))^2 \\
&\qquad + 2x^2 L^{*}_{n+m-3}(x) L^{*}_{n+m-4}(x) \\
&\qquad = (L^{*}_{n+m}(x))^2 \\
&\qquad = L^{*(2)}_{2n+2m}(x)
\end{aligned}
$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan $F_n^{(k)}$ ve Lucas sayılarının yeni bir ailesi olan $L_n^{(k)}$ sayılarının tanımından faydalanılarak yeni aile hakkında bazı teorem ve özdeşlikler elde edildi.

Ayrıca genelleştirilmiş Lucas polinomlarının tanımı verildi ve bu tanım yardımıyla genelleştirilmiş Lucas polinomlarının elemanları bulundu. Ayrıca Lucas polinomları ve bağıntılarının genelleştirilmiş durumları elde edildi.

Son olarak bu bağıntılardan yola çıkılarak Fibonacci ve Lucas polinomlarında yeni aile ile ilgili teorem ve özellikler bulundu.

Bu çalışma üzerinde inceleme yapıldığı takdirde Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan $F_n^{(k)}$, Lucas sayılarının yeni bir ailesi olan $L_n^{(k)}$ ve genelleştirilmiş Lucas polinomlarıyla ilgili çok daha fazla özelliğe ulaşılıp, özdeşlikler yazılabilir.

KAYNAKLAR

Akbulak, M. and Bozkurt, D., “On theorder-m generalized Fibonacci k-numbers”, *Chaos Soliton Fract.* **42(3)**, 2009, 1347-1355.

Campbell, C. M. and Campbell, P. P., “The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups”,*J. Appl. Math. Comput.* **19**, No.1-2, 2005, 231-240.

Deveci, Ö.,Karaduman, E and Campbell, C. M., “On the k-Nacci Sequences in Finite Binary Polyhedral Groups”, *Algebra Colloquium(AC),* **18**, Special Issue, 2011, 945-954.

Hoggatt, V. E. Jr., & Marjorie Bicknell, Generalized Fibonacci polynomials, Fibonacci Quart., 11 (1973), No. 5, 457-465.

lvie , J., A General Q-Matrix, Fibonacci Quarterly, Vol. 10, No. 3, April, 1972, pp. 255-261.

Kiliç, E. And Tasci, D., “Generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers”, *Rocky Mountain J. Math.* **38,** 2008, 1991–2008.

Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&SonsInc., ISBN: 978-0-471-39969-8, 2001.

Mikkawy, M. and Sogabe, T., *A new family of k-Fibonacci numbers*, Applied Mathematics and Computation 215 (2010) 4456–4461.

Öcal, A.A. , Tuglu, N. And Altinisik, E., On there presentation of k-generalized Fibonacci and Lucas numbers, *Appl. Math. Comput.* **170,** 2005, 584-596.

Özgür N. Y., “Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequences”, *Note di Matematica*, **21**, 2002, 113-125

Özkan, E., “On Truncated Fibonacci Sequences”, *Indian J. Pure of andApp. Mathematics*, **38(4),** 2007, 241-251.

Özkan, E., Aydın, H. and Dikici, R. “3-step Fibonacci series modulo m”, *Applied Mathematics and Computation*, **143**, 2003, 165-172.

Ramirez, J.,“On convolved generalized Fibonacci and Lucas polynomials”, *Applied Mathematics and Computation*, 229, 2014, 208-213.

Stanimirovic, P.S. , Nikolov, J. And Stanimirovic, I., “A generalization of Fibonacci and Lucas matrices”, *Discrete Appl. Math*. **156,** 2008, 2606–2619.

Taher, R. B. And Rachidi, M., “On the matrix power and exponential by the r-generalized Fibonacci sequences methods: the companion matrix case”, *Linear Algebra Appl*. 370, 2003, 341–353.

Tasci, D. and Kilic, E., *On the order-k generalized Lucas numbers*, Appl. Math. Comput. 155 (2004) 637–641.

Tuglu, N., Kocer, E. G. and Stakhov, A., “Bivariate fibonacci like *p*–polynomials”, *Applied Mathematics and Computation*, 217, Issue 24, 2011, 10239-10246.

Vajda, S., “Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section”,
Halsted Press, New York, 10-100 (1989).

ÖZGEÇMİŞ

İpek ALTUN 08/04/1988 de Diyarbakır'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Diyarbakır'da tamamladı. 2007 yılında başladığı Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında bitirdi. Aynı yıl Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimi aldı. 2012 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen Bismil Merkezi Teknik ve Eğitim Merkezi'nde matematik öğretmeni olarak çalışmakta olup, 2013 yılında, Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.