ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KALUZA-KLEIN METRİKLİ TANJANT DEMET ÜZERİNDE BAZI UYGULAMALAR

Merve TAŞTAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2017

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Merve TAŞTAN
İmza :

“Kaluza-Klein metrikli tanjant demeet üzerinde bazı uygulamalar” adlı Yüksek Lisans tezi Erzincan Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi ’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Merve TAŞTAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ ABD Başkanı

Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ danışmanlığında, Merve TAŞTAN tarafından hazırlanan bu çalışma 08.05.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Aydın GEZER	*İmza:*
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ	*İmza:*
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ	*İmza:*

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

08/06/2017

Prof. Dr. Paşa YALÇIN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KALUZA-KLEIN METRİKLİ TANJANT DEMET ÜZERİNDE BAZI UYGULAMALAR

Merve TAŞTAN

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ

Bu çalışmada, bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlı olan vektör alanlarının tanjant demete yatay ve tam liftlerinin Kaluza-Klein metriğine göre sıkıştırılamaz ve harmonik olma şartları belirlenmiştir. Ayrıca demetin bu metriğe göre jeodezikleri hakkında bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

2017, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Jeodezikler, Kaluza-Klein metriği, Riemann metriği, Tanjant demet

ABSTRACT

MS Thesis

SOME APPLICATIONS ON TANGENT BUNDLE WITH KALUZA-KLEIN METRIC

Merve TAŞTAN

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat ALTUNBAŞ

In this work, the conditions have been determined to be incompressible and harmonic of horizontal lift and complete lift of vector fields of a Riemannian manifold to the tangent bundle with respect to Kaluza-Klein metric. Also, some characterizations are given about geodesics with respect to this metric.

2017, 39 pages

Keywords: Geodesics, Kaluza-Klein metric, Riemannian manifold, Tangent bundle

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım.

Merve TAŞTAN
Mayıs 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$C^{\infty}(M, IR)$	: $M \rightarrow IR$ şeklinde tanımlı her mertebeden sürekli türevlere sahip olan fonksiyonların kümesi
$F(M)$	: M üzerindeki C^{∞} fonksiyonların cebiri
${}^{CG}g$	: Cheeger-Gromoll metriği
${}^{S}g$	: Sasaki metriği
IR	: Reel sayılar kümesi
R_{ijk}^{l}	: Eğrilik tensörünün koordinatları
TM	: M demeti manifoldunun tanjant
T_pM	: M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$\mathcal{T}_s^{\,r}(M)$	: (r, s) $-$tipli tensörlerin $F(M)$ üzerindeki modülü
∇	: Afin konneksiyon
Γ_{ij}^{k}	: 2. Tür Christoffel sembolleri (konneksiyon katsayıları)
$\frac{\delta}{\delta t}$	: Bir eğri boyunca içsel (mutlak) türev
$[X, Y]$	: Xve Y vektör alanlarının Lie çarpımları
π	: Doğal izdüşüm fonksiyonu
$\otimes$	: Tensör çarpımı

1. GİRİŞ

(M, g) Riemann manifoldları üzerindeki tanjant demetlerin diferensiyel geometrisinin tarihçesi Sasaki (1958) ile başlar. Sasaki'nin bu çalışmasında ele aldığı ${}^{S}g$ metriği, ${}^{H}X$ ve ${}^{V}Y$ sırasıyla, M üzerindeki X ve Y vektör alanlarının demete yatay ve dikey liftleri olmak üzere

$$\begin{cases} {}^{S}g({}^{H}X, {}^{H}Y) = g(X, Y), \\ {}^{S}g({}^{H}X, {}^{V}Y) = 0, \\ {}^{S}g({}^{V}X, {}^{V}X) = g(X, Y) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi, Sasaki metriği, yatay ile dikey dağılımların dikliğini korumaktadır ve baz manifoldun metriği cinsinden yazılabilmektedir.

Bazı seçkin geometricilerin Sasaki metrikli tanjant demete ilgisi sayesinde, 20. yüzyılın 60'lı ve 70'li yılları konunun yükselme evresi olmuştur. Bu dönemde yapılan çalışmalar iki ekole ayrılabilir: Bunlar, (fizikten etkilenerek) koordinatlarla çalışan Sasaki, Sato ve Tanno'nun başı çektiği Japon ekolü ile invaryant (koordinatlardan bağımsız) olarak çalışan Dombrowski, Kowalski, Nagy, Walczak'ın öncülüğündeki Avrupa ekolüdür.

Geçtiğimiz yüzyılın 80'li yılları ise konunun olgunluk evresinin başlangıcı olarak kabul edilebilir. Çünkü, birçok makalede gösterilmiştir ki, Sasaki metriği bir çeşit "katılık" ortaya koymaktadır. Kowalski (1971), ${}^{S}g$ Sasaki metriği yerel simetrik ise baz metrik g nin flat ve buradan ${}^{S}g$ nin flat olacağını göstermiştir. Musso ve Tricceri (1988), daha katı bir sonuç olarak,$(TM, {}^{S}g)$ sabit skaler eğriliğe sahipse (M, g) nin yerel düzlemsel olduğunu ispatlamışlardır. Yazarlar, aynı makalede, Sasaki metriğinin katılığının önüne geçebilmek için OM ortonormal çatı demeti olmak üzere, $OM \times IR^{n}$ üzerindeki $(0,2)-$tipli temel simetrik tensör alanları vasıtasıyla TM üzerinde Riemann manifoldları inşa etmek için bir yöntem öne sürmüşler ve bir örnek olarak TM üzerinde yeni bir metrik olan ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğini tanımlamışlardır (Abbassi 2008). Cheeger-Gromoll metriği, $u = u^i$ kanonik dikey vektör alanı ve $r^2 = g_{ij}u^i u^j$ onun normunun karesi olmak üzere

$$\begin{cases} {}^{CG}g({}^{H}X, {}^{H}Y) = g(X,Y), \\ {}^{CG}g({}^{H}X, {}^{V}Y) = 0, \\ {}^{CG}g({}^{V}X, {}^{V}Y) = \dfrac{1}{\alpha}(g(X,Y) + g(X,u)g(Y,u)) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha = 1 + r^2$ dir.

$(TM, {}^{CG}g)$ ye ilişkin olarak, Sekizawa (1991), eğer (M,g) baz manifoldu sabit kesitsel eğriliğe sahipse $(TM, {}^{CG}g)$ nin hiçbir zaman sabit skaler eğriliğe sahip olamayacağını göstermiştir. Yazar bu çalışmasında, Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyon katsayıları ile eğrilik tensörünü de hesaplamıştır ancak daha sonra Gudmundsson ve Kappos (2002), bu hesaplamaları yeniden gözden geçirmiş ve bu çalışmadaki bazı yanlışlıkları düzeltmişlerdir. Diğer yandan Abbassi ve Sarih (2003), $(TM, {}^{CG}g)$ nin hiçbir zaman sabit kesitsel eğriliğe sahip olamayacağını göstermişlerdir. $(TM, {}^{CG}g)$ nin jeodeziklerinin diferensiyel denklemi ise Salimov ve Kazimova (2009) tarafından elde edilmiştir.

Anastasiei (1999) ise ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğinin dikey parçasını deforme ederek Sasaki ve Cheeger-Gromoll metriklerini kapsayan daha genel bir metriği aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

$$\begin{cases} g_{a,b}({}^{H}X, {}^{H}Y) = g(X,Y), \\ g_{a,b}({}^{H}X, {}^{V}Y) = 0, \\ g_{a,b}({}^{H}X, {}^{H}Y) = ag(X,Y) + bg(X,u)g(Y,u). \end{cases} \tag{1.1}$$

Burada $a > 0$ ve $b \geq 0$ biçimindeki düzgün fonksiyonlardır. Eğer (1.1)'de $a = 1, b = 0$ alınırsa Sasaki metriği; $a = b = \frac{1}{\alpha}$ alınırsa Cheeger-Gromoll metriği elde edilir. $(TM, g_{a,b})$ üzerinde yapılan çalışmaların çoğu, bu metrikle uyumlu yapıları (kompleks, parakompleks vb.) araştırmak yönünde olmuştur. $(TM, g_{a,b})$ nın jeodezikleri ve Killing vektör alanları Gezer ve Altunbaş (2012) tarafından belirlenmiştir.

Bu tezin amacı ise (1.1) denklemleri ile verilen $g_{a,b}$ metriğinin yatay kısmının pozitif tanımlı bir fonksiyonla çarpımasıyla elde edilen Kaluza-Klein metriğine göre, tanjant demet üzerindeki jeodezikler ile baz manifoldda tanımlı vektör alanlarının yatay ve tam liftlerinin sıkıştırılamaz ve harmonik olma şartları hakkında bazı karakterizasyonlar vermektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, kaynak gösterilmeden verilen tanım ve teoremlerin tamamı Kühnel (2005) kitabından alınmıştır.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. Aşağıdaki şartları sağlayan $(M_i)_{i\in I}$ alt kümeler ailesine sahip M kümesine bir $n-$boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir:

1. $M = \cup_{i\in I} M_i$.
2. Her $i \in I$ için $\varphi_i(M_i)$, IR^n de açık olacak şekilde bir $\varphi_i: M_i \to IR^n$ örten fonksiyonu vardır.
3. $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ için $\varphi_i\left(M_i \cap M_j\right)$ kümesi IR^n de açıktır ve

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(M_i \cap M_j) \to \varphi_j(M_i \cap M_j)$$

bileşke fonksiyonu keyfi i, j için diferensiyellenebilirdir.

Burada her φ_i bir harita, φ_i^{-1} parametreleme, $\varphi_i(M_i)$ kümesi parametre bölgesi ve $(M_i, \varphi_i)_{i\epsilon I}$ bir atlas adını alır. İki haritanın arakesiti üzerinde tanımlanan $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(M_i \cap M_j) \to \varphi_j(M_i \cap M_j)$ fonksiyonlarına koordinat dönüşümleri ya da dönüşüm fonksiyonları denir.

Genelliği bozmaksızın, yukarıdaki tanımda 2. ve 3. şartları sağlayan daha fazla harita eklenmesine göre elde edilen atlas maksimal atlas olarak kabul edilebilir. Böylece, bu anlamdaki bir maksimal atlas, bir diferensiyellenebilir yapı olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.1.2. Bir n-boyutlu manifold verildiğinde, manifoldun atlasına ait olan tüm $\varphi_j \cap \varphi_i^{-1}$ dönüşüm fonksiyonları aşağıdaki tabloda yer alan soldaki şartları sağlarsa manifold sırasıyla sağdaki isimleri alır:

Sürekli ↔ topolojik manifold

Diferensiyellenebilir ↔ diferensiyellenebilir manifold

C^1 –diferensiyellenebilir ↔ C^1-manifold

C^r-diferensiyellenebilir ↔ C^r-manifold

C^∞-diferensiyellenebilir ↔ C^∞-manifold

reel analitik ↔ reel analitik manifold

kompleks analitik ↔ $\frac{n}{2}$ boyutlu kompleks manifold

Afin ↔ afin manifold

Projektif ↔ projektif manifold

Konform ↔ konformal manifold

Yön koruma ↔yönlendirilebilir manifold

Bundan sonra bir ''manifold'' denildiğinde C^∞-manifold anlaşılacak ve "diferensiyellenebilme" her zaman C^∞ anlamında olacaktır.

Tanım 2.1.3. $\varphi_i(O \cap M_i)$ kümesi IR^n de her i için açık ise $O \subseteq M$ kümesine bir açık alt küme denir.

Tüm açık alt kümeler kümesi M üzerinde bir topoloji tanımlar. Böylece tüm φ_i ler sürekli olur, çünkü açık kümelerin φ_i ler altındaki ters görüntüleri de açıktır.

Tanım 2.1.4. M topolojik uzayının her açık örtüsü sonlu bir alt örtü içeriyorsa M ye kompakt topolojik uzay denir (Heine-Borel içerme özelliği).

Özel olarak, her kompakt manifold sonlu sayıda harita ile örtülebilir.

Tanım 2.1.5. X bir topolojik uzay olsun. X in farklı her p, q noktaları için

$$U_p \cap U_q = \emptyset$$

olacak biçimde p nin U_p ve q nun U_q açık komşulukları varsa X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir.

Burada manifoldların her zaman Hausdorff ayırma aksiyomunu (T2 aksiyomu) sağladığı kabul edilecektir. Ayrıca manifoldların Hausdorff uzayı olması, diferensiyellenebilir manifold tanımının bir sonucu değildir.

Burada önemli bir nokta, bir manifoldun topolojisinin yerel olarak IR^n ile aynı olmasıdır. Özel olarak manifold üzerinde uzaklık fonksiyonu (metrik) olmadığından, ε yarıçaplı açık yuvar kavramı manifoldlar üzerinde yoktur, ancak IR^n de ε yarıçaplı açık yuvarların ters görüntüleri M de yine açıktır. Bu ise IR^n deki gibi dizilerin yakınsaklığını tanımlamak için yeterlidir. Buna ek olarak, her manifoldun topolojisi yerel kompakttır, yani her nokta bir kompakt komşuluğa sahiptir. Bir ε yarıçaplı kapalı yuvarın ters görüntüsü buna örnektir.

Tanım 2.1.6. $M,\ m-$boyutlu ve $N,\ n-$boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold; $F: M \to N$ bir dönüşüm olsun. $F(U) \subset V$ olmak üzere tüm $\varphi: U \to IR^m,\ \Psi: V \to IR^n$ haritaları için $\Psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ diferensiyellenebilir ise F ye diferensiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.1.7. $F: M \to N$ $1:1$ ve örten dönüşümü her iki yönde de diferensiyellenebilir ise F ye bir difeomorfizm denir. Bu durumda M ve N difeomorfik manifoldlar adını alır.

İki difeomorfik manifold aynı boyutlu olmak zorundadır. Çünkü $n \neq m$ olmak üzere $IR^m\ ve\ IR^n$ için her iki yönde diferensiyellenebilir, $1:1$ ve örten bir fonksiyon yoktur. Bunun nedeni de karşılık gelen Jacobi matrisinin karesel olmaması ve dolayısıyla sıfırdan farklı determinanta sahip olmamasıdır (yani bu matris terslenebilir değildir).

Bir φ haritası için IR^n de standart koordinatlar $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ ve buna M de karşılık gelen koordinatlar $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ olarak belirtilsin. Böylece $x^i(p)$ fonksiyonu, $\varphi(p)$ nin i. koordinatı, yani $x^i(p) = v^i(\varphi(p))$ eşitliği ile verilir. Böylece $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ fonksiyonları tıpkı $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ gibi, bir yandan noktaların koordinatları olurken, diğer yandan $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ ve $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ fonksiyonlarına türevlerin oluşturulabileceği değişkenler gözüyle bakılabilir. Bir $f: M \to IR$ fonksiyonu için

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p := \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial v^i}\right|_{\varphi(p)}$$

eşitliği tanımlanır ve bu gösterim bir fonksiyonun kısmi türevlerinin x^i veya v^i yönlerindeki sonsuz küçük değişikliklerini vurgular.

2.2. Tanjant, Kotanjant ve Tensör Uzayları

M $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $p \in M$ bir nokta olsun. M nin p noktasındaki tanjant uzayı, başlangıç noktası p olan tüm yönlerdeki vektörlerin oluşturduğu $n-$boyutlu küme olarak düşünülecektir. Bir dış uzay olmadığı için bu tanım içsel olarak verilmek zorundadır. Aşağıda tanjant vektör için 2 farklı tanım verilmektedir:

Tanım 2.2.1. $c(0) = p$ şartını sağlayan $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{M}$ diferensiyellenebilir eğrileri üzerindeki denklik bağıntısı, p yi içeren her φ için

$$c \sim c^* \Leftrightarrow (\varphi \circ c)^{\cdot}(0) = (\varphi \circ c^*)^{\cdot}(0)$$

şeklinde tanımlandığında, $\sim$ nın yol açtığı bir denklik sınıfına p noktasındaki bir tanjant vektör denir.

Bu tanjant vektörlerin geometrik tanımıdır. Ancak bu şekildeki bir denklik sınıfının belirli temsilcisi yoktur ve bu temsilci haritanın seçimine bağlı olacaktır.

Tanım 2.2.2. $\mathcal{F}_p(M) \coloneqq \{f: M \to IR |\, f\ diferensiyellenebilir\}/\sim$, fonksiyon tohumları (ing: germs of functions) kümesi üzerinde tanımlanan bir X türev operatörüne p noktasında bir tanjant vektör denir.

Buradaki $\sim$ denklik bağıntısı "$f \sim f^*$ ancak ve ancak f ile f^* f nin bir koordinat komşuluğunda çakışır" şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca, $X(f)$ değeri f nin X yönündeki türevini ifade eder.

Bu tanım daha açık olarak şöyle de verilebilir:

Tanım 2.2.3. Aşağıdaki iki şartı sağlayan $X: \mathcal{F}_p(M) \to IR$ fonksiyonuna p noktasındaki bir tanjant vektör denir:

1. $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)\ \ \alpha, \beta \in IR\ \ f, g \in \mathcal{F}_p(M)$,
2. $X(f.g) = X(f).g(p) + f(p).X(g)\ \ f, g \in \mathcal{F}_p(M)$.

Bu tanjant vektörlerin cebirsel tanımıdır. Yukarıdaki şartların sağlanması için f ve g nin p nin bir komşuluğunda tanımlı olması gerekir. Kısaca tanjant vektörler, skaler fonksiyonlar üzerine etkiyen türev operatörleridir.

M nin p noktasındaki tanjant uzayı p noktasındaki tüm vektörlerin kümesi olarak tanımlanır. Tanımdan $p \neq q$ ise $T_pM\ ve\ T_qM$ ayrık olduğu açıktır.

Özel (geometrik) tanjant vektörler, parametre doğruları (parametre değerleri boyunca sabit olan doğrular) ile verilir. Biçimsel olarak tanjant vektörler, parametre doğrularının denklik sınıfıdır. Bunlara cebirsel tanımda karşılık gelen tanjant vektörler

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) \coloneqq \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial v^i}\right|_{\varphi(p)}$$

şeklinde tanımlanan $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ kısmi türevlerdir. Burada φ p yi içeren bir haritadır. Gösterim kolaylığı için çoğu zaman $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ yerine $\partial_i|_p$ yazılır.

Burada, belki geometrik tanım sezgisel olarak daha uygun olacaktır ancak bununla çalışmak kolay değildir. Bu tanımda tanjant uzayın bir reel vektör uzayı olduğu açık değildir. Cebirsel tanım hesap yapmak için daha uygundur ve bu herhangi bir haritadan bağımsızdır.

Teorem 2.2.4. $n-$boyutlu bir diferensiyellenebilir manifoldun bir p noktasındaki tanjant uzayı bir reel vektör uzayıdır ve bu uzay verilen bir haritadaki herhangi bir $x^1, \dots, x^n$ koordinat sisteminde

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

tarafından gerilir. p noktasındaki her X tanjant vektörü

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2.5. $F: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve p ile q $F(p) = q$ şartını sağlayan iki sabit nokta olsun. Bu durumda F nin p noktasındaki diferensiyeli veya türev dönüşümü, her $X \in T_pM$ ve her $f \in \mathcal{F}_q(N)$ için

$$DF|_p: T_pM \to T_qN, \left(DF|_p(X)\right)(f) \coloneqq X(f \circ F)$$

şeklinde tanımlanır (Bu ise $f \circ F \in \mathcal{F}_p(M)$ olduğunu gösterir.).

Bu şekilde tanımlanan diferensiyel için, $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} Q$ dönüşümlerinin bileşkesi $G \circ F$ olmak üzere zincir kuralı

$$D(G \circ F)|_p = DG|_{F(p)} \circ DF|_p$$

biçiminde, ya da kısaca $D(G \circ F) = DG \circ DF$ ile verilir.

Burada $DF|_p$, tıpkı IR^n üzerindeki vektör analizindeki gibi, F nin p noktasındaki bir lineer yaklaşımı olarak görülebilir.

M üzerindeki $\{x^1, \dots, x^m\}$ ve N üzerindeki $\{y^1, \dots, y^n\}$ koordinatlarında $DF|_p$ dönüşümü Jakobi matrisi ile verilir. Daha açık olarak

$$DF|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_i \left.\frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_q$$

dır.

Tanjant uzayların geometrik tanımında (yani, p noktasından geçen eğrilerin denklik sınıfı için), diferensiyel basitçe eğrilerin taşınması olarak

$$DF|_p([c]) \coloneqq [F \circ c]$$

şeklinde verilir. Bu durumda zincir kuralı

$$DG(DF([c]) = [G \circ F \circ c]$$

daha açık hale gelir. Bir eğrinin teğeti üzerindeki etki

$$\dot{c}(0) \rightarrow (F \circ c)^{\cdot}(0) = DF|_p\big(\dot{c}(0)\big)$$

şeklindedir.

Bundan sonra Einstein toplam sembolü kullanılacaktır. Örneğin

$$h_{ik} = \sum_j h_i^j g_{jk} \ \textit{nın yerine}\ h_{ik} = h_i^j g_{jk}$$

$$\eta^i = \sum_j \xi^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \ \textit{nın yerine}\ \eta^i = \xi^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

yazılacaktır.

Tanım 2.2.6. $x^1, \dots, x^n$ koordinatlarıyla verilen her bir $\varphi: U \rightarrow V$ haritasında, $\xi^j: U \rightarrow IR$ bileşenlerinin p deki değerleri

$$X_p = \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

şeklinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olan ve $M \ni p \rightarrow X_p \in T_pM$ eşlemesini belirleyen X e, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir diferensiyellenebilir vektör alanı denir.

M üzerindeki tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

Ayrıca bir $f: M \rightarrow IR$ fonksiyonu için fX bir vektör alanını gösterirken, $Xf = X(f)$ ise f nin X yönündeki türevini belirtir. Dolayısıyla Xf bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.7. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. T_pM vektör uzayının duali olan $T_p^*M = \{\omega_p: T_pM \rightarrow IR\}$ vektör uzayına M manifoldunun p noktasındaki kotanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına kotanjant vektörler denir (Şahin 2013).

T_pM nin $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$ bazı verilmişse T_p^*M nin $\left.dx^i\right|_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \delta_j^i$ şartını sağlayan bir tek $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$ bazı vardır.

Tanım 2.2.8. M diferensiyellenebilir manifoldunun her p noktasına bir kotanjant vektör karşılık getiren fonksiyona bir 1-form denir (Şahin 2013).

M üzerindeki tüm 1-formların kümesi $\chi^*(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9. M bir diferensiyellenebilir manifold, T_pM ile T_p^*M sırasıyla onun p noktasındaki tanjant ve kotanjant uzayları olsun.

$$A_p: \underbrace{T_p^*M \times T_p^*M \times \dots \times T_p^*M}_{r-tane} \times \underbrace{T_pM \times T_pM \times \dots \times T_pM}_{s-tane} \rightarrow IR$$

şeklinde tanımlı A_p çok lineer dönüşümüne $r.$ mertebeden kontravaryant ve $s.$ mertebeden kovaryant (veya kısaca (r, s) $-$tipli) tensör denir.

Böylece, yukarıdaki gibi tanımlanan A_p tensörü $\overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} T_pM \otimes \overset{s}{\underset{j=1}{\otimes}} T_p^*M$ tensör uzayına ait olmuş olur. Burada $\otimes$ ile tensör çarpımı gösterilmektedir.

2.3. Riemann Metrikleri

Yüzeyler teorisinden bilindiği gibi, bir yüzeyin birinci temel formu, Öklid iç çarpımının her bir teğet düzleme kısıtlanmasıyla tanımlanan bir skaler çarpımdır. Benzer şekilde buradaki amaç, manifoldun her bir tanjant uzayında bir skaler çarpımı dış uzay olmadan (içsel) tanımlamaktır.

$L^2(T_pM; IR) = \{\alpha: T_pM \times T_pM \to IR\}$ uzayı $\{dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p : i,j = 1,\dots,n\}$ bazına sahiptir. Burada dx^i, $(T_pM)^* = L(T_pM; IR)$ dual uzayının bir bazıdır, yani

$$dx^i\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p\right) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dır. $dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p$ bilineer formları, baz üzerindeki etkileriyle

$$\left(dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x^l}\bigg|_p\right) := \delta^i_k\delta^j_l = \begin{cases} 1, & i = k \ ve\ j = l \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer

$$\alpha = \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

şeklinde gösterilirse, α nın bileşenleri

$$\alpha_{ij} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

biçiminde olur.

Tanım 2.3.1. Aşağıdaki şartları sağlayan ve $p \mapsto g_p \in L^2(T_pM; IR)$ eşlemesini belirleyen g fonksiyonuna M üzerinde bir Riemann metriği denir:

1. Her X, Y için $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$
2. Her X için $g_p(X, X) > 0$
3. g_{ij} katsayılarının her bir yerel gösterimi (yani her bir haritada)

$$g_p = g_{ij}(p).\, dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p$$

şeklinde olup bu katsayılar diferensiyellenebilirdir.

Tanım 2.3.2. M diferensiyellenebilir manifold g de bir Riemann metriği olsun. Bu durumda (M, g) ikilisine bir Riemann manifoldu denir.

M Riemann manifoldu üzerindeki bir X vektör alanının normu $\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca pozitif tanımlılık şartı olan 2. şart ondan daha zayıf olan bozulmamış (non-dejenere) olma şartıyla (yani her Y için $g(X, Y) = 0 \; ise \; X = 0$ olması) değiştirilirse, M manifoldu pseudo-Riemann veya yarı-Riemann manifoldu adını alır.

Tanım 2.3.3. Aşağıdaki şartları sağlayan $f: M \to IR$ diferensiyellenebilir fonksiyonlarının bir $(f_i)_{i \in I}$ ailesine bir diferensiyellenebilir birimin bölüşümü denir:

1. $\forall \, i \in I$ için $0 \leq f_i \leq 1$
2. Her $p \in M$ noktaları sadece sonlu sayıda $supp(f_i)$ ile kesişen bir komşuluğa sahiptir.
3. $\sum_{i \in I} f_i \equiv 1$ (yerel olarak bu her zaman sonlu bir toplamdır.)

Burada $supp(f_i) \coloneqq \overline{\{x \in M | f_i(x) \neq 0\}}$ topolojik kapanışıdır ve f_i fonksiyonlarının dayanağı olarak adlandırılır.

Lemma 2.3.4. Eğer M üzerinde her f_i fonksiyonunun dayanağı $supp(f_i)$ bir koordinat komşuluğu tarafından kapsanacak şekilde bir birimin bölüşümü varsa M üzerinde bir Riemann metriği vardır.

Teorem 2.3.5. Eğer M nin topolojisi yerel kompaktsa ve ikinci sayılabilme aksiyomunu (topoloji için sayılabilir baz varsa) sağlıyorsa, M nin birimin bölüşümü ile birleşen bir açık örtüsü vardır, yani $supp(f_i)$ verilen açık kümelerinden birinde mutlaka bulunur.

2.4. Levi-Civita Konneksiyonu

Tanım 2.4.1. X ve Y M üzerinde (diferensiyellenebilir) vektör alanları ve $f: M \to IR$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$[X, Y](f) \coloneqq X\big(Y(f)\big) - Y(X(f))$$

eşitliği ile tanımlanan $[X, Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi (veya Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki Lie türevi $L_X Y$) denir.

Bir $p \in M$ noktasında

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

şeklindedir.

Bir manifold üzerinde Lie türevinin tanımlanabilmesi için manifoldun Riemann manifoldu olması gerekmez, diferensiyellenebilir yapı yeterlidir.

Tanım 2.4.2. (M, g) bir Riemann manifoldu, $X, Y \in \chi(M)$ ve $f: M \to IR$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğer $(X, Y) \to \nabla_X Y$ eşlemesi için aşağıdakiler sağlanıyorsa ∇ ya (M,g) Riemann manifoldu üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu denir:

(i) $\nabla_{X_1+X_2}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y$

(ii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

(iii) $\nabla_X(Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

(iv) $\nabla_X(fY) = f.\nabla_X Y + (X(f))Y$

(v) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$; metrikle uyumluluk

(vi) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$; burulmasızlık (simetri özelliği)

Basitlik için f nin X yönündeki türevi olan $\nabla_X f$ genellikle, $X(f)$ veya Xf ile gösterilir. Yukarıdaki tanımda (v) ve (vi) şartları çıkarılırsa sadece ”konneksiyon’’ elde edilir. Eğer (vi) sağlanmazsa

$$T(X,Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

fonksiyonu ∇ nın burulma tensörü olarak adlandırılır. “Konneksiyon’’ yerine “kovaryant türev” kavramı da kullanılır.

∇ ya konneksiyon denmesinin nedeni, ∇ nın farklı tanjant uzaylar arasında bir çeşit bağlantı kurulmasına olanak sağlamasıdır.

Teorem 2.4.3. Her (M,g) Riemann manifoldunda bir tek Levi-Civita konneksiyonu vardır.

Teorem 2.4.4. $X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere bir (M,g) Riemann manifoldu ile onun Levi-Civita konneksiyonu arasında Koszul formülü olarak bilinen aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(X,[Y,Z]) - g(Z,[Y,X]).$$

Yerel koordinatlarda, Koszul formülü

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} g^{km} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki Γ_{ij}^{m} fonksiyonlarına 2. tür Christoffel sembolleri veya konneksiyon katsayıları denir.

Dolayısıyla $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ve $Y = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ vektör alanları için $\nabla_X Y$ nin yerel koordinatlardaki ifadesi

$$\nabla_X Y = \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^{k} \xi^i \eta^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.1}$$

olarak bulunur.

2.5. Bir Riemann Manifoldu Üzerinde Jeodezikler

Tanım 2.5.1. M üzerinde tanımlı her X vektör alanı için $\nabla_X Y = 0$ ise Y vektör alanına M üzerinde bir paralel vektör alanı denir.

Tanım 2.5.2. $c: I \to M$ eğrisi verilsin. $Y \in \chi(M)$ olmak üzere her $t \in I$ için $\nabla_{\dot{c}} Y = 0$ ise Y vektör alanına c eğrisi boyunca paralel vektör alanı denir. Burada $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$ dir.

Bu tanım t parametresinin seçiminden bağımsızdır.

Tanım 2.5.3. $c: I \to M$ eğrisi verilsin. Eğer $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \lambda \dot{c}$ ise c ye M üzerinde bir jeodezik denir. Eğer eğri yay parametresi ile parametrelendirilmişse bu şart

$$\nabla_{c'} c' = 0$$

hâlini alır.

Tanım 2.5.4. $c: I \to M$ eğrisinin yerel gösterimi $x^i = x^i(t)$ olsun ve bu eğri boyunca tanımlı olan $v = v^i \partial_i$ vektör alanı göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} = \nabla_k v^i \frac{dx^k}{dt}$$

şeklinde tanımlı olan $\frac{\delta v^i}{\delta t}$ ye v vektör alanının mutlak türevi (içsel türevi) denir (Spain 2003).

$\frac{dx^i}{dt}$ de bir vektör alanı olduğundan mutlak türev operatörü buna uygulanabilir. Böylece (2.1) den

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \tag{2.2}$$

denklemleri elde edilir.

Önerme 2.5.5. Yerel gösterimi $x^i = x^i(t)$ olan $c: I \to M$ eğrisinin bir jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

olmasıdır.

2.6. Riemann Eğrilik Tensörü

Tanım 2.6.1. (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

eşitliğiyle tanımlanan $\boldsymbol{R}: \boldsymbol{\chi(M)} \times \boldsymbol{\chi(M)} \times \boldsymbol{\chi(M)} \to \boldsymbol{\chi(M)}$ dönüşümüne $\boldsymbol{M}$ Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü denir.

$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ alınırsa

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^k}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki R_{ijk}^l fonksiyonlarına M manifoldunun Riemann eğrilik tensörünün katsayıları denir. Burada

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^h \Gamma_{hk}^l - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hj}^l$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.6.2. (M, g) Riemann manifoldunun her noktasında Riemann eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır ise M ye yerel düzlemsel manifold denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde kaynak gösterilmeden verilen tanım ve teoremler (Yano and Ishihara 1973) kitabından alınmıştır.

3.1. Tanjant Demet

Tanım 3.1.1. $\boldsymbol{M}$ diferensiyellenebilir manifoldunun her $\boldsymbol{p}$ noktasındaki ayrık $\boldsymbol{T_p M}$ tanjant uzaylarının birleşimine $\boldsymbol{M}$ nin tanjant demeti denir ve $\boldsymbol{TM}$ ile gösterilir. Yani

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

dir.

Burada M, TM nin baz manifoldu; her bir $T_p M$ tanjant uzayı TM nin lifleri adını alır.

Tanım 3.1.2. M bir diferensiyellenebilir manifold ve TM M nin tanjant demeti olsun.

$$\pi: TM \to M, \tilde{p} \to p$$

sürekli ve örten fonksiyonuna TM nin doğal izdüşüm fonksiyonu denir.

Tanım 3.1.3. M diferensiyellenebilir manifoldunun bir U koordinat komşuluğundaki $p = \pi(\tilde{p})$ noktasının koordinatları (x^i) $(i = 1, \dots, n)$ ile gösterildiğinde ve $(x^i, u^i) \mapsto \tilde{p}$ eşlemesi dikkate alındığında, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde (x^i, u^i) yerel koordinatlar sistemi elde edilir. Bu $\left(x^i, u^i\right) = (x^i, x^{\bar{i}})$ sistemine, $\pi^{-1}(U)$ da (x^i) yerel koordinatlarından indirgenmiş (elde edilmiş) koordinatlar denir.

Teorem 3.1.4. TM $2n$ −boyutlu bir diferensiyellenebilir manifolddur (Şuhubi 2008).

İspat: $\pi: TM \to M, \pi(p, W) = p, W \epsilon T_pM$ doğal izdüşümü bir tanjant uzay içindeki her vektörü bağlı bulunduğu $p \in M$ noktasına götürür. $T_pM = \pi^{-1}(\{p\})$ yazılabileceği açıktır. Her $U \subset M$ açık kümesine karşılık gelen $V = \pi^{-1}(U) \subset T_pM$ kümesini göz önüne alalım. π^{-1} küme fonksiyonunun özelliklerinden

$$\bigcup_{U \in M} V = \bigcup_{U \in M} \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(M) = TM, \emptyset = \pi^{-1}(\emptyset)$$

yazılabilir. Λ bir indis kümesi ise

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\alpha) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right), \qquad \bigcap_{i=1}^{n} V_i = \bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}(U_i) = \pi^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} U_i)$$

olacağından $\xi = \{V = \pi^{-1}(U) : U \in M\}$ sınıfı TM üzerinde bir topoloji olur. V de bir açık kümedir. Bu topolojide π izdüşümünün sürekli olacağı açıktır.

M manifoldu üzerinde bir atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \epsilon I\}$ harita ailesi ile verilsin.

$$V_\alpha = TU_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \subseteq TM$$

kümesi de açık bir kümedir. Bir $(p, W) \in TM$ noktasını ele alalım. $p \in M$ noktası M manifoldunun bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritası içinde olacak ve (p, W) noktası da $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ açık kümesi içinde yer alacaktır. Buna göre $\varphi(U_\alpha) \subseteq IR^n$ açık kümesindeki $x = (x^1, \dots, x^n) \in IR^n$ yerel koordinatlar cinsinden bir $W \in V_\alpha$ vektörü göz önüne alındığında

$$W = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}, w = (w^1, \dots, w^n) \in IR^n$$

yazabiliriz. $\Psi_\alpha : V_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times IR^n \subseteq IR^{2n}$ fonksiyonu her $(p, W) \in V_\alpha$ noktası için

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(p, W) &= (\varphi_\alpha, d\varphi_\alpha)\\ &= (x^1, \dots, x^n, w^1, \dots, w^n) \in IR^{2n}\end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Ψ_α fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğu açıktır. Şimdi $\{(V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha) : \alpha \in I\}$ kümesinin TM üzerinde bir atlas oluşturduğu gösterilecektir. Bunun için iki (V_α, Ψ_α) ve (V_β, Ψ_β) haritasını göz önüne alındığında

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_\beta \circ {\Psi_\alpha}^{-1} : \Psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \subseteq IR^{2n} \to \Psi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) \subseteq IR^{2n}$$

fonksiyonunun bir düzgün dönüşüm olduğu gösterilmelidir.

$$(p, W) = {\Psi_\alpha}^{-1}(x, w) = \left({\varphi_\alpha}^{-1}(x), (d\varphi_\alpha)^{-1}(w)\right) = ({\varphi_\alpha}^{-1}(x), d{\varphi_\alpha}^{-1}(w))$$

bağıntısından

$$\Psi_{\alpha\beta}(x, w) = (\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}(x), d\varphi_\beta \circ d{\varphi_\alpha}^{-1}(w))$$

$$= (\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}(x), d(\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}(w))$$

çıkar. $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1} : IR^n \to IR^n$ düzgün olduğundan $d(\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1})$ düzgün bir fonksiyondur. Dolayısıyla $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha) : \alpha \epsilon I\}$ atlası ile TM boyutu $2n$ olan diferensiyellenebilir bir manifold yapısı kazanır.

3.2. Dikey Lift

Tanım 3.2.1. f, M de bir fonksiyon olsun. $f : M \to IR$ ve $\pi : TM \to M$ olmak üzere,

$${}^V f = f \circ \pi, \ {}^V f : TM \to IR$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ noktasının indirgenmiş koordinatları $\tilde{p} = (x^i, u^i) = (x^i, x^{\bar{\imath}})$ olmak üzere,

$$^{V}f(\tilde{p}) = {}^{V}f(x,u) = f \circ \pi(\tilde{p}) = f(p) = f(x)$$

olacağından $^{V}f(\tilde{p})$ değeri her bir fibre boyunca sabittir ve $p = \pi(\tilde{p}) \in M$ noktasındaki $f(p)$ değerine eşittir.

Tanım 3.2.2. $X \in \chi(M)$ ve $\omega \in \chi^*(M)$ olmak üzere TM tanjant demette,

$$^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X))$$

şeklinde tanımlanan ^{V}X vektör alanına, X vektör alanının dikey lifti denir. Burada $\iota\omega = u^s \omega_s$ dir. ^{V}X vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$\Rightarrow {}^{V}X = \begin{pmatrix} {}^{V}X^{j} \\ {}^{V}X^{\bar{\jmath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

3.3. Tam Lift

Tanım 3.3.1: M manifoldu üzerinde $f: M \to IR$ fonksiyonu verilsin. TM tanjant demette,

$$^{C}f = \iota(df)$$

ile tanımlanan ${}^{C}f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tam lifti denir. ${}^{C}f$ fonksiyonu indirgenmiş koordinatlara göre yerel olarak

$$ {}^{C}f = \iota(df) = u^{s}(\partial_{s}f) = \partial f $$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.3.2. $X \in \chi(M)$ ve $f: M \to IR$ fonksiyonu için TM tanjant demette,

$$ {}^{C}X\, {}^{C}f = {}^{C}(Xf) $$

olarak tanımlanan ${}^{C}X \in \chi(TM)$ vektör alanına X vektör alanının tam lifti denir. ${}^{C}X$ vektör alanının $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} {}^{C}X^{i} \\ {}^{C}X^{\bar{\imath}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{i} \\ u^{s}\partial_{s}X^{i} \end{pmatrix} $$

şeklindedir.

3.4. γ-Operatörü ve Yatay Lift

Tanım 3.4.1. M manifoldu üzerinde $(p, q+1)$-tipli S tensör alanı koordinatlarla,

$$ S = S^{i_1 \dots i_p}_{l\, j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{l} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} $$

olarak verilsin. $\pi^{-1}(U)$ da (x^{h}, u^{h}) indirgenmiş koordinatlarına göre γ operatörü,

$$ \gamma_{X} S = (X^{l} S^{i_1 \dots i_p}_{l\, j_1 \dots j_q}) \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes dx^{l} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} $$

ve

$$\gamma S = (u^l S^{i_1 \dots i_p}_{l\, j_1 \dots j_q}) \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes dx^l \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\gamma_X S$ ve γS, TM tanjant demette birer tensör alanıdır. Eğer S bir fonksiyonsa $\gamma_X S = \gamma S$ olarak kabul edilir.

Tanım 3.4.2. ∇, M de bir afin konneksiyon olmak üzere, $f: M \rightarrow IR$ fonksiyonunun gradiyenti ∇f şeklinde yazılır. Yukarıda tanımlanan γ operatörü ∇f gradiyentine uygulanırsa,

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = u^s \partial_s f$$

olur. $f: M \rightarrow IR$ fonksiyonu için TM tanjant demette,

$$^H f = {}^C f - \nabla_\gamma f$$

şeklinde tanımlanan $^H f$ fonksiyonuna, f in yatay lifti denir.

$^C f = u^s \partial_s f$ olup f fonksiyonunun yatay lifti,

$$^H f = 0$$

bulunur.

Tanım 3.4.3. ∇, M de bir afin konneksiyon olmak üzere $X \in \chi(M)$ için,

$$^H X = {}^C X - \nabla_\gamma X$$

ile tanımlanan ${}^{H}X$ vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir. Ayrıca $\nabla_{\gamma}X = \gamma(\nabla X)$ dir. X vektör alanının ve ∇ afin konneksiyonunun M deki yerel koordinatları sırasıyla X^h ve Γ_{ij}^{h} olmak üzere, TM tanjant demette ${}^{C}X$ ve $\nabla_{\gamma}X$

$${}^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ u^s \partial_s X^h \end{pmatrix}, \nabla_{\gamma}X = \gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ u^s \partial_s X^h \end{pmatrix},$$

yerel bileşenlerine sahiptir. $\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{si}^{h} X^i$ olmak üzere ${}^{H}X$ in bileşenleri,

$${}^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -u^s \Gamma_{si}^{h} X^i \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

3.5. Dağılımlara Adapte Olmuş Çatı

Adapte olmuş çatı, TM tanjant demette tensörlerle ilgili işlemlerin daha kullanışlı bir şekilde yapılmasına imkân veren bir yapıdır. (M, ∇) manifoldunun her bir $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluğunda

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \left(X_{(i)} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h}\right) (i = 1, \dots, n)$$

olarak alınırsa eşitlikler sırasıyla

$$H_{X_{(i)}} = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -u^s \Gamma_{sm}^{h} \delta_i^m \end{pmatrix} \Rightarrow H_{X_{(i)}} = \delta_i^h - u^s \Gamma_{si}^{h} \partial_{\overline{h}} \Rightarrow H_{X_{(i)}} = \partial_i - u^s \Gamma_{si}^{h} \partial_{\overline{h}}$$

ve

$$V_{X_{(i)}}=\begin{pmatrix}0\\ \delta_i^h\end{pmatrix}\Rightarrow V_{X_{(i)}}=0.\partial_h+\delta_i^h.\partial_{\bar{h}}\Rightarrow V_{X_{(i)}}=\partial_{\bar{\imath}}$$

olacak şekilde $2n$ boyutlu vektör alanları elde edilir. Bu vektör alanları lineer bağımsız olup sırasıyla ∇ nın yatay dağılımını ve TM nin dikey dağılımını gerer. $\{{}^HX_{(i)},\ {}^VX_{(i)}\}$ kümesine, ∇ konneksiyonuna "adapte olmuş çatı" denir.

$$\begin{cases}E_i={}^HX_{(i)}\\ E_{\bar{\imath}=}{}^VX_{(i)}\end{cases}$$

olarak alındığında adapte olmuş çatı $\{E_\lambda\}=\{E_i,E_{\bar{\imath}}\}$ şeklinde yazılır.

(x^h) yerel koordinatları ile verilen $X\in\chi(M)$ vektör alanının yatay ${}^HX$, dikey ${}^VX$ ve tam ${}^CX$ liftleri adapte olmuş çatıya göre,

$${}^HX=\begin{pmatrix}X^h\\ -u^s\Gamma_{sm}^hX^m\end{pmatrix}\Rightarrow {}^HX=\begin{pmatrix}X^i\delta_i^h\\ -X^iu^s\Gamma_{sm}^h\delta_i^m\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^HX=X^i\underbrace{\begin{pmatrix}\delta_i^h\\ -u^s\Gamma_{si}^h\end{pmatrix}}_{E_i}$$

$$\Rightarrow {}^HX=X^i.E_i\Rightarrow {}^HX=\begin{pmatrix}X^i\\ 0\end{pmatrix}$$

ve

$${}^VX=\begin{pmatrix}0\\ X^h\end{pmatrix}\Rightarrow {}^VX=\begin{pmatrix}0\\ X^i\delta_i^h\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^VX=X^i\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \delta_i^h\end{pmatrix}}_{E_{\bar{\imath}}}$$

$$\Rightarrow {}^{V}X = X^{i}E_{\bar{\imath}} \Rightarrow {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{i} \end{pmatrix}$$

ve

$$^{C}X = \begin{pmatrix} X^{h} \\ u^{s}\partial_{s}X^{h} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^{i}\delta_{i}^{h} \\ u^{s}\partial_{s}(X^{i}\delta_{i}^{h}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{C}X = X^{i}\underbrace{\begin{pmatrix} \delta_{i}^{h} \\ -u^{s}\Gamma_{si}^{h} \end{pmatrix}}_{E_{i}} + u^{s}\nabla_{s}X^{i}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{i}^{h} \end{pmatrix}}_{E_{\bar{\imath}}}$$

$$\Rightarrow {}^{C}X = X^{i}.E_{i} + u^{s}\nabla_{s}X^{i}E_{\bar{\imath}}$$

$$\Rightarrow {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^{i} \\ u^{s}\nabla_{s}X^{i} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir (Yano and Ishihara 1973; Gezer *et al*. 2015).

Lemma 3.5.1. Lie parantezi, TM de adapte olmuş çatıya göre aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$[E_{\bar{\jmath}}, E_{\bar{\imath}}] = 0,$$

$$[E_{j}, E_{\bar{\imath}}] = \Gamma_{ji}^{a}E_{\bar{a}}$$

$$[E_{j}, E_{i}] = u^{b}R_{ijb}^{a}E_{\bar{a}}$$

Burada, R_{ijb}^{a} , M nin eğrilik tensörünün bileşenlerini tanımlar.

3.6. Tanjant Demette Jeodezikler

Tanım 3.6.1. M bir diferensiyellenebilir manifold; $\gamma: I \to M$, $\quad x^{h} = x^{h}(t)$ yerel gösterimine sahip olan bir eğri ve V bu eğri boyunca tanımlı olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$ ikilisine TM tanjant demeti üzerinde bir eğri denir. Ayrıca $\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ eşitliği ile belirli γ eğrisine $\tilde{\gamma}$ nın M ye izdüşümü denir.

Tanım 3.6.2. TM tanjant demeti üzerinde $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$ eğrisi verilsin. Eğer V vektör alanı γ eğrisi boyunca paralelse, yani

$$\frac{\delta V}{\delta t} = 0$$

ise $\tilde{\gamma}$ eğrisine γ eğrisinin TM tanjant demete yatay lifti denir ve ${}^{H}\gamma$ ile gösterilir.

Önerme 3.6.3. $\tilde{\nabla}$ afin konneksiyonuna sahip TM tanjant demeti üzerindeki $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisinin bir jeodezik eğri olması için gerek ve yeter şart adapte olmuş çatıya göre yazılan aşağıdaki diferensiyel denklemleri sağlamasıdır:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^{\alpha}}{dt}\right) + \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}\frac{\theta^{\gamma}}{dt}\frac{\theta^{\beta}}{dt} = 0.$$

Burada $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}$, $\tilde{\nabla}$ konneksiyonun katsayılarıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde elde edilen orijinal sonuçlar (Altunbaş and Taştan 2017) makalesinde yayımlanmıştır.

4.1. Kaluza-Klein Metriği

Tanım 4.1.1. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. TM üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan ${}^{KK}g$ metriğine Kaluza-Klein metriği denir:

$$\begin{cases} {}^{KK}g({}^{H}X, {}^{H}Y) = c(t)g(X, Y), \\ {}^{KK}g({}^{H}X, {}^{V}Y) = 0, \\ {}^{KK}g({}^{V}X, {}^{V}Y) = a(t)g(X, Y) + b(t)g(X, u)g(Y, u). \end{cases}$$

Burada u, T_pM de bir vektör alanı ve t, u yönünde $t = g(u, u)/2$ şeklinde tanımlı enerji yoğunluk fonksiyonudur. Ayrıca c kesin pozitif ve a ve b ${}^{KK}g$ metriğini pozitif tanımlı yapan fonksiyonlardır (Benyounes *et al.* 2012).

Koszul formülünden aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.1.2. $(TM, {}^{KK}g)$ Kaluza-Klein metriğine sahip tanjant demet olsun. Bu metriğin ${}^{KK}\nabla$ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları adapte olmuş çatıya göre aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{cases}
{}^{KK}\Gamma_{ji}^{h} = \Gamma_{ji}^{h}, \qquad {}^{KK}\Gamma_{ji}^{\bar{h}} = -\dfrac{1}{2}u^{k}R_{jik}^{h} - \dfrac{c'}{2(a+2tb)}g_{ji}u^{h}, \\
{}^{KK}\Gamma_{j\bar{\imath}}^{h} = \dfrac{a}{2c}u^{k}R_{kij}^{h} + \dfrac{c'}{2c}u_{i}\delta_{j}^{h}, \qquad {}^{KK}\Gamma_{j\bar{\imath}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \\
{}^{KK}\Gamma_{\bar{\jmath}i}^{h} = \dfrac{a}{2}u^{k}R_{kij}^{h} + \dfrac{c'}{2c}u_{j}\delta_{i}^{h}, \qquad {}^{KK}\Gamma_{\bar{\jmath}i}^{\bar{h}} = 0, \\
{}^{KK}\Gamma_{\bar{\jmath}\bar{\imath}}^{h} = 0, \\
{}^{KK}\Gamma_{\bar{\jmath}\bar{\imath}}^{\bar{h}} = L(u_{j}\delta_{i}^{h} + u_{i}\delta_{j}^{h}) + Mg_{ji}u^{h} + Nu_{j}u_{i}u^{h}
\end{cases}
$$

Burada Γ_{ji}^{h} ve R_{kij}^{h} , sırasıyla g metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun katsayılarını ve eğrilik tensörünün bileşenlerini gösterir. Ayrıca $L = \frac{a'}{2a}, M = \frac{2b-a}{2(a+2tb)}, N = \frac{ab'-2a'b}{2a(a+2tb)}$.

İlk olarak bir $X \in \chi(M)$ vektör alanının yatay ve tam liftlerinin ${}^{KK}\nabla$ konneksiyonuna göre paralel olma şartlarını araştıralım. Bunun için bu vektör alanlarının kovaryant türevleri hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
&{}^{KK}\nabla_{i}\,{}^{H}X^{h} = \nabla_{i}X^{h}, \\
&{}^{KK}\nabla_{\bar{\imath}}\,{}^{H}X^{h} = -\frac{a}{2}R_{iks}^{h}u^{k}X^{s} + \frac{c'}{2c}u_{i}X^{h}, \\
&{}^{KK}\nabla_{i}\,{}^{H}X^{\bar{h}} = -\frac{1}{2}R_{isk}^{h}u^{k}X^{s} - \frac{c'}{2(a+2tb)}u^{h}X_{i}, \\
&{}^{KK}\nabla_{\bar{\imath}}\,{}^{H}X^{\bar{h}} = 0; \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{KK}\nabla_{i}\,{}^{C}X^{h} = \nabla_{i}X^{h} - \frac{a}{2c}R_{mki}^{h}u^{k}u^{s}\nabla_{s}X^{m} + \frac{c'}{2c}u_{m}u^{s}\nabla_{s}X^{m}\delta_{i}^{h}, \\
&{}^{KK}\nabla_{\bar{\imath}}\,{}^{C}X^{h} = -\frac{a}{2}R_{ikm}^{h}u^{k}X^{m} + \frac{c'}{2c}u_{i}X^{h}, \\
&{}^{KK}\nabla_{i}\,{}^{C}X^{\bar{h}} = u^{s}\left(\nabla_{i}\nabla_{s}X^{h} - \frac{1}{2}R_{ims}^{h}X^{h}\right) - \frac{c'}{2(a+2tb)}u^{h}X_{i}, \\
&{}^{KK}\nabla_{\bar{\imath}}\,{}^{C}X^{\bar{h}} = \nabla_{i}X^{h} + \left(L\left(u_{i}\delta_{m}^{h} + u_{m}\delta_{i}^{h}\right) + Mg_{mi}u^{h} + Nu_{m}u_{i}u^{h}\right)u^{s}\nabla_{s}X^{m} \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\nabla_i X^h = 0$ olması $R^h_{mki} X^i = 0$ sonucunu verdiği için aşağıdaki önerme yazılır.

Önerme 4.1.3. $X \in \chi(M)$ vektör alanı paralel ve c fonksiyonu sabit ise X in yatay ve tam liftleri $(TM, {}^{KK}g)$ de paraleldir.

4.2. $(TM, {}^{KK}g)$ Üzerindeki Bazı Özel Vektör Alanları

Şimdi, vektör alanlarının diverjens ve rotasyonlarını göz önüne alalım. (M, g) üzerindeki bir X vektör alanı için $divX = \nabla_j X^j = 0$ ise X e *sıkıştırılamaz vektör alanı* denir. Diğer yandan, (M, g) üzerindeki bir X vektör alanı için bileşenleri $g_{ij} X^i$ olan X_j ilişkili kovektör alanının rotasyonu sıfır ise bu X vektör alanına *kapalıdır* denir. Yani X kapalıdır ancak ve ancak

$$(rotX)_{ji} = \partial_j X_i - \partial_i X_j = \nabla_j X_i - \nabla_i X_j = 0$$

dır. (M, g) de X vektör alanı hem sıkıştırılamaz hem de kapalı ise *harmonik*tir.

(4.1) ve (4.2) den, yatay ve tam liftlerin diverjensi

$$div^H X = divX,$$
$$div^c X = 2divX + u_m[L(n+1) + M + N\|u\|^2]u^s \nabla_s X^m + \frac{nc'}{2c} u_m u^s \nabla_s X^m$$

olarak bulunur. Böylece, X vektör alanının yatay lifti TM de sıkıştırılamazdır ancak ve ancak X M de sıkıştırılamazdır. Buna karşın, X M de sıkıştırılamaz olsa bile X in tam lifti TM de sıkıştırılamaz değildir. Bu durum sadece a sabit, $b = 0$ ve c sabit olması durumunda mümkün olur.

$(TM, {}^{KK}\nabla)$ üzerindeki bir $\tilde{X}$ vektör alanıyla ilişkili kovektör alanının rotasyonu

$$(rotX)_{JI} = {}^{KK}\nabla_J X_I - {}^{KK}\nabla_I X_J = {}^{KK}g_{IM}{}^{KK}\nabla_J X^M - {}^{KK}g_{JM}{}^{KK}\nabla_I X^M$$

Olduğundan, (4.1) ve (4.2) eşitliklerinin kullanılmasıyla $rot\,{}^{H}X$ ve $rot\,{}^{C}X$ vektör alanlarının bileşenleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$rot\left({}^{H}X\right)_{ji} = c(rotX)_{ji},$$
$$rot({}^{H}X)_{\bar{j}i} = \left(\frac{a(1-c)}{2}R_{jkbi} + \frac{b}{2}u_j u_s R^{s}_{ibk}\right)u^k X^b + \frac{c'}{2(a+2tb)}(a+b\|u\|^2)u_j X_i,$$
$$rot({}^{H}X)_{j\bar{i}} = \left(\frac{a(1-c)}{2}R_{bjki} + \frac{b}{2}u_i u_s R^{s}_{bjk}\right)u^k X^b - \frac{c'}{2(a+2tb)}(a+b\|u\|^2)u_j X_i,$$
$$rot(X)_{\bar{j}\bar{i}} = 0;$$

$$rot({}^{C}X)_{ji} = c(rotX)_{ji} + aR_{jikm}u^k u^b(\nabla_b X^m),$$
$$rot({}^{C}X)_{\bar{j}i} = \left(\frac{a(1-c)}{2}R_{ikbj} + \frac{b}{2}u_j u_s R^{s}_{ikb}\right)u^k X^b - u^s\left(a\nabla_i\nabla_s X_j + b\nabla_i\nabla_s X^a u_j u_a\right)$$
$$+ \frac{c'}{2(a+2tb)}(a+b\|u\|^2)u_j X_i,$$
$$rot({}^{C}X)_{j\bar{i}} = \left(\frac{a(1-c)}{2}R_{bjki} + \frac{b}{2}u_i u_s R^{s}_{bjk}\right)u^k X^b + u^s\left(a\nabla_j\nabla_s X_i + b\nabla_i\nabla_s X^a u_j u_a\right)$$
$$+ \frac{c'}{2(a+2tb)}(a+b\|u\|^2)u_i X_j,$$
$$rot({}^{C}X)_{\bar{j}\bar{i}} = a(rotX)_{ji} + bu^s\left(\nabla_j X_s u_i - \nabla_i X_s u_j\right).$$

Böylece aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.2.1. (M, g) bir düzlemsel Riemann manifoldu ve c bir sabit fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) M üzerindeki bir X vektör alanının $(TM, {}^{KK}g)$ ye yatay lifti harmoniktir ancak ve ancak X M üzerinde harmoniktir.

(ii) M üzerindeki bir X vektör alanının $(TM, {}^{KK}g)$ ye yatay lifti harmoniktir ancak ve ancak X M üzerinde paraleldir.

4.3. $(TM, {}^{KK}g)$ Üzerindeki Jeodezikler

Son olarak da $(TM, {}^{KK}g)$ nin jeodeziklerinin diferensiyel denklemleri araştırılacaktır. Bunun için Önerme 3.6.3. göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3.1. $\tilde{\gamma}$, TM de $x^h = x^h(t), x^{\bar{h}} = u^h(t)$ yerel gösterimine sahip bir eğri olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ nın $(TM, {}^{KK}g)$ de jeodizik olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki denklemleri sağlamasıdır.

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \frac{a}{2} u^k R_{ikj}^h \frac{\delta u^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} + \frac{c'}{2c}\left(u_j \delta_i^h \frac{dx^i}{dt} + u_i \delta_j^h \frac{\delta u^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}\right) = 0, \\ \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \left[L\left(u_j \delta_i^h + u_i \delta_j^h\right) + M g_{ji} u^h + N u_j u_i u^h\right] \frac{\delta u^j}{dt} \frac{\delta u^i}{dt} \\ \qquad - \frac{c\prime}{2(a+2tb)} g_{ji} u^h \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

İspat: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^\alpha}{dt}\right) + {}^{KK}\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \frac{\theta^\alpha}{dt} \frac{\theta^\beta}{dt} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\gamma}$ jeodezik

$$\frac{\theta^h}{dt} = \frac{dx^h}{dt}, \frac{\theta^{\bar{h}}}{dt} = \frac{\delta u^h}{dt} = du^h + \Gamma_{ji}^h \frac{dx^j}{dt} U_{i.} \quad (\alpha = h, \bar{h}, \qquad \gamma = j, \bar{j}, \qquad \beta = i, \bar{i})$$

1. $\alpha = h$ olsun.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^h}{dt}\right) + {}^{KK}\Gamma_{ji}^h . \frac{\theta^j}{dt} . \frac{\theta^i}{dt} + {}^{KK}\Gamma_{\bar{j}i}^h . \frac{\theta^{\bar{j}}}{dt} . \frac{\theta^i}{dt} + {}^{KK}\Gamma_{j\bar{i}}^h . \frac{\theta^j}{dt} . \frac{\theta^{\bar{i}}}{dt} + {}^{KK}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^h . \frac{\theta^{\bar{j}}}{dt} . \frac{\theta^{\bar{i}}}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^h}{dt}\right) + {}^{KK}\Gamma_{ji}^h . \frac{dx^j}{dt} . \frac{dx^i}{dt} + (\frac{a}{2} u^k R_{kji}^h + \frac{c'}{2c} u_j \delta_i^h) . \frac{\delta u^j}{dt} \frac{dx^i}{dt}$$

$$+ (\frac{a}{2c} u^k R_{kij}^h + \frac{c'}{2c} u_i \delta_j^h) . \frac{dx^j}{dt} . \frac{\delta x^i}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \left(\frac{a}{2} u^k R^h_{kji} + \frac{a}{2c} u^k R^h_{kji}\right) \frac{\delta u^j}{dt} . \frac{dx^i}{dt}$$
$$+ \frac{c'}{2c}\left(u_j \delta^h_i \frac{\delta u^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} + u_i \delta^h_j \frac{dx^j}{dt}\frac{\delta x^i}{dt}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \left(\frac{a}{2c}(1+c) u^k R^h_{kji}\right) \frac{\delta u^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} + \frac{c'}{2c}\left(u_j \delta^h_i + u_j \delta^h_i\right)\frac{\delta u^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \left(\frac{a}{2c}(1+c) u^k R^h_{kji}\right) \frac{\delta u^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} + \frac{c'}{c} u_j \delta^h_i \frac{\delta u^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0$$

2. $\alpha = \bar{h}$ olsun.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^{\bar{h}}}{dt}\right) + {}^{KK}\Gamma^{\bar{h}}_{ji} . \frac{\theta^j}{dt} . \frac{\theta^i}{dt} + {}^{KK}\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{j}i} . \frac{\theta^{\bar{j}}}{dt} . \frac{\theta^i}{dt} + {}^{KK}\Gamma^{\bar{h}}_{j\bar{i}} . \frac{\theta^j}{dt} . \frac{\theta^{\bar{i}}}{dt} + {}^{KK}\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} . \frac{\theta^{\bar{j}}}{dt} . \frac{\theta^{\bar{i}}}{dt} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\delta u^h}{dt} + \left(-\frac{1}{2} u^k R^h_{jik} - \frac{c'}{2(a+2tb)} g_{ji} u^h\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} + \Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{\delta u^i}{dt}$$
$$+ \left(L\left(u_j \delta^h_i + u_i \delta^h_j\right) + M g_{ji} u^h + N u_j u_i u^h\right)\frac{\delta u^j}{dt}\frac{\delta u^i}{dt} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\delta^2 u^h}{dt^2} + \left(L\left(u_j \delta^h_i + u_i \delta^h_j\right) + M g_{ji} u^h + N u_j u_i u^h\right)\frac{\delta u^j}{dt}\frac{\delta u^i}{dt} +$$
$$\frac{c\prime}{2(a+2tb)} g_{ji} u^h \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0.$$

Eğer $\tilde{\gamma}$ bir fibre üzerinde bulunursa yani $x^h = sabit$ ise, $\frac{dx^h}{dt} = 0$ ve $\frac{\delta u^h}{dt} = \frac{du^h}{dt}$ olacağından

$$\frac{\delta^2 u^h}{dt^2} + \left[L\left(u_j \delta^h_i + u_i \delta^h_i\right) + M g_{ji} u^h + N u_j u_i u^h\right]\frac{du^j}{dt}\frac{du^i}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.3.2. Eğer bir jeodezik $(TM, {}^{KK}g)$ nin bir fibresi üzerinde bulunursa bu jeodeziğin yerel gösterimi (4.2) deki gibidir.

Şimdi M deki $\gamma = \pi \circ {}^{H}\gamma$ (M, ∇) üzerinde bir jeodezik olsun, yani, $\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$ dır. Ayrıca $\frac{\delta u^j}{dt} = \frac{\delta x^h}{dt} = 0$ olduğundan aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.3.3. (M, ∇) üzerindeki bir jeodeziğin yatay lifti $(TM, {}^{KK}g)$ üzerinde bir jeodezik değildir.

Son olarak. $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$, (M, ∇) üzerinde bir jeodezik, yani $\frac{\delta}{dt}(\frac{dx^h}{dt}) = \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$ olsun. Diğer taraftan γ eğrisinin doğal liftinin tanımından $(x^h = x^h(t), u^h = \frac{dx^h}{dt})$

$$\frac{\delta^2 u^h}{dt^2} = \frac{c\prime}{2(a+2tb)} g_{ji} u^h \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.1) ve (4.3) denklemlerinden aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 4.3.4. M üzerindeki bir eğrinin doğal lifti $(TM, {}^{KK}g)$ üzerinde bir jeodezik değildir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, Cheeger-Gromoll tipli bir Riemann metriği olan Kaluza-Klein metriğine sahip tanjant demet üzerinde belirli vektör alanları ve jeodezikler hakkında bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Bu çalışmanın geçmiş çalışmalardan belirgin iki farkı bulunmaktadır. İlk olarak Önerme 4.1.4 Sasaki metrikli tanjant demette şöyle verilmiştir: M üzerindeki bir X vektör alanının tam (yatay) liftinin harmonik olması için gerek ve yeter şart X in harmonik ve sıfır değerli ikinci kovaryant türeve sahip (harmonik) olmasıdır. Burada ise bu önerme, c nin sabitliği ve baz manifoldun flat olması koşulu altında yazılmıştır. İkinci olarak, jeodeziklerle ilgili verilen son iki önerme buradakinin aksine Sasaki, Cheeger-Gromoll ve iki parametreli $g_{a,b}$ metriklerine göre olumlu olarak yazılmıştır.

KAYNAKLAR

Abbassi, M. T. K., “g −natural metrics: new horizons in the geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds”, ***Note di Matematica,*** 1: 6-35 (2008).

Abbassi, M.T.K and Sarih, M, “Killing vector fields on tangent bundles with Cheeger-Gromoll”, ***Tsukuba J. Math,*** 27 (2): 295-306, (2003).

Altunbaş, M. and Taştan, M., “Some applications on tangent bundle with Kaluza-Klein metric”, ***New Trends in Math. Sci.,*** 5 (1): 34-39, (2017).

Anastasia, M., “Locally conformal Kaehler structures on tangent bundle of a space form”, ***Libertas Math***. 19: 71–76 (1999).

Benyounes, M, Loubeau, E., and Todjihounde, L., “Harmonic maps and Kaluza-Klein metrics on spheres”, ***Rocky Mountain J. Math***, 42 (3): 791-821, (2012).

Gezer, A., Bilen, L., Karaman, C., and Altunbaş, M., “Curvature properties of Riemannian metrics of the form Sg_f+Hg on the tangent bundle over a Riemannian manifold (M,g)”, ***Int. Elec. J. of Geometry,*** 8 (2): 181-194, (2015).

Gezer, A. and Altunbaş, M., “Some notes concerning Riemannian metrics of Cheeger-Gromoll type”, ***Journal of Mat. Analysis and its Appl.***, 396: 119-132 (2012).

Gudmundsson, S. and Kappos, E., “On the geometry of tangent bundles”, ***Expositiones Mathematicae***, 20 (1): 1-41 (2002).

Kowalski, O., “Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold”, ***J. Reine Angew. Math.,*** 250: 124-129 (1971).

Kühnel, W., “Differential geometry curves- surfaces- manifolds 2nd ed.”, ***Amer. Mat. Soc***., New York: 201-256 (2005).

Mok, K.P., On the differential geometry of frame bundles of Riemannian manifolds, J.für die reine und angewandte Math., 302: 16-31, (1978).

Musso, E. and Tricceri F., “Riemannian metrics on tangent bundles”, ***Ann. Mat. Pura Appl.,*** 150 (4): 1-19 (1988).

Salimov, A. And Kazimova S., “Geodesics of the Cheeger-Gromoll metric”, ***Turkish J. Of Math***., 33: 99-105, (2009).

Sasaki, S., “On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds”, ***Tohoku Math. J.***, 10: 338-358 (1958).

Sekizawa, M., “Curvatures of tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric” ***Tokyo J. Math***., 14 (2): 407-417 (1991).

Spain, B., “Tensor Calculus”, ***Dover Pub.,*** New York, 38-48 (2003).

Şahin, B., Manifoldların diferensiyel geometrisi. ***Nobel yayıncılık***, Ankara, 29-30 (2013).

Şuhubi, E., Dış form analizi. ***TÜBA ders kitapları dizisi***, Ankara, 90-92 (2008).

Yano, K. and Ishihara, S., “Tangent and cotangent bundles”, ***Marcel-Dekker Inc***., New York, 1-120 (1973).

ÖZGEÇMİŞ

2 Haziran 1992 tarihinde Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. 2010 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2014 yılında mezun oldu. 2015 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.