T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# $M-$ DİZİLERİ İLE TANIMLANAN YENİ BİR DİZİ VE BU DİZİNİN LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİSİ

Ali Aykut GÖÇER

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Matematik
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2018

## Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Engin Özkan danışmanlığında, Ali Aykut Göçer tarafından hazırlanan bu çalışma 11 / 08 / 2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayıkar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans/Doktora Tezi olarak oybirliği/~~oy çokluğu~~ (.../...) ile kabul edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| Başkan | : Prof. Dr. Erdal Karaduman | İmza: |
| Üye | : Prof. Dr. Engin Özkan | İmza: |
| Üye | : Dr. Öğretim Üyesi Tufan Özdin | İmza: |

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 21. / 09. / 2018. tarih ve 34./.5....... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. Paşa YALÇIN**
Enstitü Müdürü

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"$M -$ dizileri ile tanımlanan yeni bir dizi ve bu dizinin Lucas sayıları ile ilişkisi " isimli Yüksek Lisans tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 11/08/2018

**Ali Aykut GÖÇER**

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**$M-$ DİZİLERİ İLE TANIMLANAN YENİ BİR DİZİ VE BU DİZİNİN LUCAS SAYILARI İLE İLİŞKİSİ**

Ali Aykut GÖÇER

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu çalışmada, girdileri (elemanları) pozitif tamsayı olan $L(n)$ vektörler kümesi tanımlandı. Tanımlanmış olan $L(n)$ vektörler kümesinin eleman sayılarının $n.$ Lucas sayılarını verdiği gösterildi. $M-$ dizileri üzerine tanımlanan $n$ uzunluğundaki $l(n)$ ($n \geq 1$ için ) sayılarının Lucas sayıları ile sınırlandığı gösterildi. Bunlara ek olarak $n$ uzunluğundaki $M-$ dizilerinin eleman sayılarının Fiboonnaci sayıları ile ilişkili olan $F(n)$ ve tanımlamış olduğumuz $L(n)$ vektörler kümesi arasındaki bağıntılar elde edildi.

**2018, 55 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** $f-$vektör, $h-$vektör, Hilbert fonksiyon, $M-$ dizileri, Mertebe, $n.$ Fibonacci sayıları, $n.$ Lucas sayıları,

## ABSTRACT

Master Thesis

**A NEW SEQUENCE DEFİNED BY $M-$ SEQUENCE AND RELATİONSHIP BETWEEN THE SEQUENCE AND LUCAS NUMBER**

Ali Aykut GÖÇER

Erzincan Binali Yildirim University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this study we define a $L(n)$ vectors set which has positive integer elements. We show that, defined $L(n)$ vectors set's order gives $n'th$ Lucas number. Also in this study we discovered that $l(n)$ for $(n \geq 1)$ numbers which has $n$ length and defined on $M-$ sequences are bounded by Lucas numbers. Additionally we find a relationship between $L(n)$ vectors set and $F(n)$ vectors set which is $n'th$ term of this sequence is bounded above by the n'th Fibonacci number.

**2018, 55 Pages**

**Keywords:** Cardinality, $f-$ vector, $h-$ vector, Hilbert function, $M-$ sequence, $n'th$ Fibonacci numbers, $n'th$ Lucas numbers

# TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a, sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana sürekli destek olan Dr. Öğretim Üyesi Tufan ÖZDİN hocam başta olmak üzere Matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Juri üyeliğini kabul edip bize vaktini ayıran sayın Prof. Dr. Erdal KARADUMAN hocamıza sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca yardımını esirgemeyen değerli arkadaşım Hakan AKKUŞ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, hayatımın her anında desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ali Aykut GÖÇER
Ağustos , 2018

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

# ŞEKİLLER LİSTESİ

**Sayfa**

# TABLOLAR LİSTESİ

**Sayfa**

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

| | |
|---|---|
| $a^{-1}$ | $a$ nın tersi anlamında kullanılmaktadır. |
| $a \mid b$ | $a, b$ yi tam böler anlamında kullanılmaktadır. |
| $a \nmid b$ | $a, b$ yi tam bölmez anlamında kullanılmaktadır. |
| Char | Karekteristik anlamında kullanılmaktadır. |
| $e$ | Birim eleman anlamında kullanılmaktadır. |
| $\in$ | Elemanı anlamında kullanılmaktadır. |
| $F_n$ | $n.$ Fibonacci Sayısı |
| $F(n)$ | $n.$ $M-$ dizilerinin $n.$ Fibonacci Sayısı |
| $F^*$ | $F \setminus \{0\}$ anlamında kullanılmaktadır. |
| $(G,*)$ | Grup anlamında kullanılmaktadır. |
| $L_n$ | $n.$ Lucas Sayısı |
| $L(n)$ | $n.$ $M-$ dizilerinin $n.$ Lucas Sayısı |
| $M(n)$ | $n.$ $M-$ dizileri |
| $\cong$ | Yaklaşık olarak eşit anlamında kullanılmaktadır. |
| $\rhd$ | Normal alt grup anlamında kullanılmaktadır. |
| $\forall$ | Her anlamında kullanılmaktadır. |

# 1. GİRİŞ

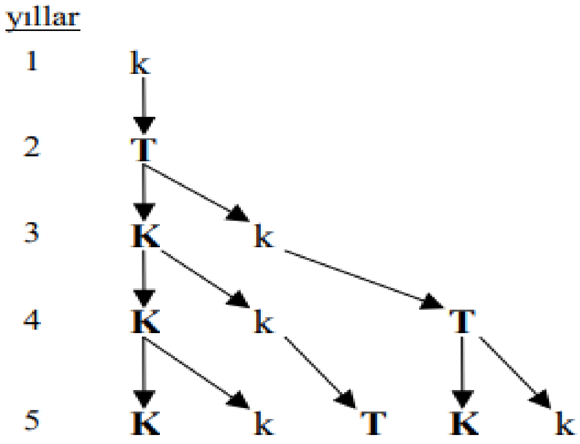
Pisa'lı olan Leonardo Fibonacci, Rönesans öncesinde Avrupa'nın sayılı Matematikçilerindendir. Fibonacci "Matematik'i Araplar'dan alıp, Avrupa'ya tanıtan kişi" olarak bilinir. Fibonacci'nin hayatı hakkında matematik yazıları dışında pek çok bilgiye ulaşılamıyor. Fibonaccinin ilk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 yıllarında doğmuş olabileceği varsayılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa şehrinde dünyaya gelmiş olması olasılığı var. Fibonacci henüz çocuk yaşta iken, Pisa'lı bir tüccar olan babası Guglielmo, Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanır. (Bu liman, şimdiki Bejaya'dır ve Cezayir'dedir.) Babası burada oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Fibonacci daha sonra Liber Abaci'de hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatacaktır. (King, 1963).

Fibonacci'nin Liber Abaci isimli kitabının yayınlandığı yıllarda, Hindu-Arap sayılarını, Avrupa'da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın eserlerinin çevirilerini okuyabilmiş bir kaç "aydın" dışında kimse bilmiyordu. Fibonacci, kitabında bu rakamları anlatmaya şöyle başlar: "Dokuz Hint rakamı 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dur. Bu dokuz rakama "0" sayısının da eklenmesiyle, her hangi bir sayı yazılabilir. Kitap Avrupa'da eğitim almış insanlar arasında hızlı ve etkili bir şekilde yayılmıştır ve Avrupa'nın müspet bilimde ilerlemesinde önemli katkıları olmuştur. Yayınlamış olduğu bu kitapta Hint-Arap Sayı Sistemi'ni tüm Avrupa'ya duyurmayı başarmıştır. Bu kitapta, ilkokulda öğrendiğimiz temel matematik ( toplama, çarpma, çıkartma ve bölme ) kurallarının birçok örneğini vererek anlatmıştır. (King, 1963).

Fibonacci'nin 1202'de yazdığı Liber Abaci kitabının dışında, "Practica Geometria"( The Practice of Geometry) (1220), "Flos" (The flower) (1225) ve "Liber Quadratorum" (The Book of Square Numbers) (1225) kitapları da matematik alanında yazmış olduğu diğer eserleridir. Bu eserlerin içinde en ünlü olan, Fibonacci sayılarıyla Altın Oran'ın anlatıldığı "Liber Abaci" adlı eseridir. Liber Abaci, 13. yüzyılın Avrupasında büyük bir ilgi görür, çok sayıda kopya edilir ve kilisenin yasaklamasına rağmen Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılır. Kitap Kutsal Roma İmparatoru II. Frederick'in dikkatini çeker. Frederick ilime ve bilime düşkün bir imparator olduğu için bilim adamlarını korur, bu nedenle kendisine Stupor Mudi (Dünya Harikası) denilmektedir. 1220 yılında

Fibonacci huzura çağrılır. Frederick'in bilim adamlarından herhangi biri tarafından sınava çekilir. Sonunda Fibonacci göze girmeyi başarır. Yıllarca hem imparatorla, hem de imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225 yılında yazdığı Liber Quadratornum'u (Kare Sayıların Kitabı) II. Frederick'e ithaf eder. "Diyofan Denklemleri" ne ayrılan bu kitap Fibonacci'nin başyapıtıdır. (King, 1963). Fibonacci, Liber Abacci adlı kitabında tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir soru sorar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapamazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift tavşan her ay bir çift yavru yapar. Tavşanların ölmedikleri kabul edilecek olursa, herhangi $n$. ayda çiftlikte toplam kaç çift tavşan vardır? Elimizde ilk ay yeni doğmuş bir çift tavşanın olduğunu kabul edelim. İkinci ayda tavşanlar henüz yavru yapamadıkları için hala bir çift tavşan olacaktır. Üçüncü ay ise bu tavşanlar bir çift yavru verecek ve böylece iki çift tavşan olacak. Yeni doğan yavru çift dördüncü ay yavrulamayacak fakat anne tavşan yeniden bir çift yavrulayacak ve toplam üç çift tavşan olacak.

Kitaplarda ve makalelerde bahsi geçen tavşan problemi olarak ele alınan bu problem halkımız tarafından kuzu, toklu, koyun problemi olarak da bilinmektedir. Bilindiği üzere ergin (erişmiş) bir kuzu olan toklu genellikle iki yaşına bastığında yavru vermektedir. Buna göre bir yavru dişi kuzu ile başlayıp her yavrulama sonucunda bir dişi kuzunun doğduğu ve bu kuzuların ölüm olmaması durumunda 11 yılın sonunda kaç baş hayvana sahip olunur? Sorusu da aynı tavşan problemini bizlere çağrıştırır. Dişi kuzu k, toklu T, koyun K harfi ile gösterilsin. Buna göre değişim olayının ilk beş yılı aşağıdaki şekilde verilmiştir.




**Şekil 1.1.** Fibonacci dizilerinin Yavru Dişi Kuzu Örneği

herhangi bir yıldaki hayvan sayısı önceki iki yıldaki hayvan sayılarının toplamı olmak üzere 11. yılda toplam 89 baş hayvana ulaşılacaktır. Bu olayın yıllara göre yavru, toklu, koyun sayısı dağılımı sekildeki gibi bir durumu ortaya çıkartmaktadır.

**Tablo 1.1.** Fibonacci dizilerinin Kuzu, Toklu, Yavru Koyun sayısı Örneği

| yıllar | kuzu sayısı | toklu sayısı | koyun sayısı | toplam |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | - | - | 1 |
| 2 | 0 | 1 | - | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 5 |
| 6 | 3 | 2 | 3 | 8 |
| 7 | 5 | 3 | 5 | 13 |
| 8 | 8 | 5 | 8 | 21 |
| 9 | 13 | 8 | 13 | 34 |
| 10 | 21 | 13 | 21 | 55 |
| 11 | 34 | 21 | 34 | 89 |

$b_n$ $n$. yıldaki kuzuların sayısı olsun, kuzular için $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ ; $b_1 = 1$; $b_2 = 0$ tekrarlı rekürans bağıntısı söz konusu olup bunun çözümü olan dizinin terimleri

$1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ şeklindedir. Buradan yola çıkarak Fibonacci dizisi ortaya çıkmaktadır. Bu Fibonacci sayıları çok sıradan ve basit gibi gözüksede matematikçiler için hep bir ilgi odağı olmuştur. Şimdi de bu diziyi genelleyelim. Tavşanların hiç ölmeyecekmiş gibi devamlı yeni yavru sahibi olduklarını düşünürsek dizimizi sonsuza kadar uzatabiliriz. Verilen bilgilerden yola çıkarak Fibonacci dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır. $n$. aydaki tavşan çiftlerinin sayısını $F_n$ ile gösterirsek,

Fibonacci dizileri

$$F_0 = 1, \; F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad , \qquad n \geq 1$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu tanımdan yola çıkarak Fibonacci sayılarının ilk bir kaç tanesi aşağıda verilmiştir.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Bu formüle bakarak yorum yapabiliriz. Örneğin $n = 1$ için, $F_3 = F_2 + F_1$ formülünden $1 + 1 = 2$ olur. Aynı şekilde $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ bulunabilir. Bu işleme devam ettiğimiz sürece sayılar korkunç büyüklükteki sayılara ulaşır. Örneğin Fibonacci dizisinin $25$. teriminin sayısı $75025$ olur. Aynı şekilde $100$. terim sayısı olan $F_{100} = 354.224.348.179.261.915.075$ sayısı 21 basamaklı çok büyük bir sayıyı oluşturur. Altın oran, evrende sayısız canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında bulunan özel bir orandır. Doğada bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, yüzyıllarca sanat ve mimaride uygulanmış, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Fibonacci sayıları ile Altın Oran arasında bir bağlantı vardır. Dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar arttıkça Altın Oran'a yaklaşır.

Fibonacci bu sayıları yeniden ele alıp inceleme yaptı. Bunun nedeni ise Antik Yunan ve Mısırlı matematikçilerin 1,618 ya da 0,618 oranını biliyor olmalarıdır. Oran, Altın Oranı ya da Altın Ortalama olarak biliniyordu. Bu sayılar müzikte, sanatta, mimaride ve biyolojide kullanılmıştı. Yunanlılar Altın Oranı Parthenon tapınağının yapımında kullanmışlardır. Mısırlılar, Altın Oran’ı Gize Piramidinin yapımında kullanmışlardır. Ressamlarda altın oranı kullanıp göze daha güzel görünen sanat eserleri meydana getirmişledir. Bu eserler arasında en ünlü olanı Leonardo da Vinci’nin “Mona Lisa” tablosudur. Bu tablonun boyunun enine oranı yine altın oranı verir. Dizinin sayıları arttıkça bu düzen kendisini daha belirgin bir biçimde ortaya koymaktadır. Her Fibonacci sayısı kendisinden sonra gelen Fibonacci sayısına bölünüp bulunan oranlar yazılırsa bu düzen karşımıza tekrar çıkar. Böylece ilk iki oranla yola çıkarak, $F_1/F_2 = 1$, $F_2/F_3 = 1/2$ (yani 0,5) olarak bulunur. Bu işlemi devam ettirirsek aşağıdaki sayılar elde edilir. 1,000000, 0,500000, 0,666666, 0,600000, 0,625000, 0,615385, 0,619048, 0,617647, 0,618182, 0,617978, 0,618056, 0,618026, 0,618037, 0,618033, 0,618034, 0,618034, … Bu sayılar gayet basit bir sayı gibi görünen 0,618034… sayısına doğru yaklaşıyorlar. Bu sayıların ondalık ifadesi bilgisayarlarımızın verdiği tam hassasiyetle 0,618033989 olarak bulunmuştur. Fibonacci sayıları üç farklı nedenden dolayı yüzyıllardan bu zamana kadar yoğun bir ilgi odağı olmuştur. Birincisi; dizinin daha küçük elemanlarının doğada hiç beklenmedik alanlarda sürekli olarak karşımıza çıkmasıdır. Bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde, vb. İkinci nedeni oranlarının limit değeri olan 0,618033989 sayısının çok önemli bir sayı olmasıdır. Genellikle "altın oran" olarak adlandırılan bu sayı, oyun kartlarının biçiminden Mısırdaki piramitlere kadar birçok olayın matematiksel temelini oluşturmaktadır. Üçüncü neden ise daha çok sayıların sayılar teorisinde beklenmedik biçimde kullanılması ilginç özellikleriyle ilgilidir.

Fibonacci sayılarıyla bitki âleminde karşılaşmanın örneklerinden biri ayçiçeği tohumlarında mevcut, saat ibresinin hareket yönünde ve buna karşı yönde uzayan iki tür spirallerin sayısının ardışık iki Fibonacci sayısı olmasıdır. Orta büyüklükte ayçiçekleri için spirallerin sayısı 34´ karşılık 55 veya 55´e karşılık 89, daha büyükleri için 89´a karşılık 144 ve küçükler içinde 13´e karşılık 21 veya 21´e karşılık 34 olarak gözlenmiştir. Papatyaların da normal olarak bir Fibonacci sayısı kadar taç yaprağı vardır. (tabi seviyor sevmiyor diye koparılmış ise) Bundan dolayı olaya matematiksel yaklaşarak elinize aldığınız papatyaya "seviyor" sözcüğü ile başlayın, çünkü bir papatyanın yaprak sayısı genelde Fibonacci sayılarından 21, 34, 55, 89 oluşur.

Pascal üçgeni olarak da bilinen Ömer Hayyam üçgeni tüm katsayılar veya terimler yazılıp çapraz toplamları alındığında yine Fibonacci dizisi ortaya çıkar.

Çam kozalağındaki taneler kozalağın altındaki sabit bir noktadan kozalağın tepesindeki başka bir sabit noktaya doğru eğriler oluşturarak çıkarlar ve bu taneler soldan sağa ve sağdan sola sayıldığında çıkan sayılar, Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir. Ayrıca bitkilerin yapraklarının dizilişinde de Fibonacci dizisi vardır.

Mimar Sinan'ın da birçok eserinde Fibonacci dizisi görülmektedir. Örneğin Süleymaniye ve Selimiye Camilerinin minarelerinde bu dizi mevcuttur.

1228'de Fibonacci, Liber Abaci'yi yeniden gözden geçirir ve kitabın bu ikinci yazılımını imparatorun baş bilimcisi Michael Socott'a ithaf eder. Bu tarihten 1240 yılına kadar Fibonacci hakkında hiç bir şey bilinmiyor. 1240'ta Pisa kenti kendisine kente yaptığı hizmetlerden dolayı "20 Pisa Lirası" yıllık bağlar. Bundan sonra Matematikçimiz ne kadar yaşadı, o da bilinmiyor. 19. yüzyılda Pisa'da Fibonacci heykeli yapılarak buraya dikilmiştir. Heykel bugün Camposanto'nun batı galerisinde ve Piazza dei Miracoli tarihi mezarlığında bulunmaktadır. (King, 1963).

İnsanın İşaret Parmağı; Bir insanın işaret parmağı (normal standartlardaki parmaklar için geçerli) her bir bölümü bir önceki bölüme oranı Altın Oranı vermektedir.

Akciğerler; Akciğeri oluşturan bronş ağacının görülen en belirgin özelliği asimetrik olmasıdır. Soluk borusu, biri uzun (sol) ve diğeri de kısa (sağ) olmak üzere iki ana bronşa ayrılır. Kısa bronşun uzun bronşa olan oranının yaklaşık olarak $1/1{,}618$ değerini verdiği saptanmıştır.

İnsan Yüzü; Kulaklar arasındaki mesafe, gözle üst dudak arasındaki, burnun altı ile çene arasındaki mesafe altın oran içermektedir.

Kollar: Kolumuzun üst bölümünün alt bölüme oranı altın oranı vermektedir.

Mısır Piramitleri; Her bir piramitin tabanının yüksekliğine oranı altın oranı vermektedir.

Tütün Bitkisi; Tütün Bitkisinin yapraklarının dizilişinde bir eğrilik söz konusudur. Bu eğriliğin tanjantı altın orandır. Bitki âleminde yaprakların saplar üzerindeki dizilişi (phyllotaxy) ile Fibonacci sayıları arasındaki bağlantıya dair çok sayıda örnek vardır.

Örneğin $2/5$ kesri ile ifade edilen bir phyllotaxy, iki yaprağın sap boyunca aynı sıraya gelinceye kadar sap etrafında iki tur yaptığını ve sap boyunca 5 tane sıra oluşturduğunu anlatmaktadır. Sap boyunca belli bir yapraktan sonra 6. yaprak aynı sırada (hizada) olup, ardışık iki yaprak sap etrafında $720/5 = 144$ derecelik açı yapmaktadır. Bazı bitkiler için bu oranlar: Karaağaç, çim için $1/2$, Kayın için 1/3, Meşe, elma, armut için $2/5$, Kavak, muz için 3/8, Badem, pırasa için $5/13$ olarak gözlenmiştir. Bir bitkinin sapındaki yaprakların, bir ağacın dallarının üzerinde hemen her zaman

Fibonacici sayılarını bulursunuz. Eğer yapraklardan biri başlangıç noktası olarak alınırsa ve bundan başlayarak, aşağıya ya da yukarıya doğru, başlangıç noktasının tam üstünde veya altında bir yaprak buluncaya kadar yapraklar sayılırsa bulunan yaprak sayısı farklı bitkiler için değişik olacaktır ama her zaman bir Fibonacci sayısıdır.

Fibonacci dizisine büyüyen bir bitkinin üzerinde oluşan koltuk ve sap sayısında da rastlanır. Sağa doğru uzayan bir petek ve $n$ numaralı gözeye ulaşmak isteyen ancak büyük numaralı gözeden küçük numaralı gözeye dönmeyen bir arı göz önüne alalım. Arı $n$ numaralı gözeye ulaşmak için kaç farklı yol izleyebilir? $n = 1, 2, \ldots$ için $b(n), n$ numaralı gözeye ulaşmak için izlenebilecek yol sayısı olsun. $b(1) = 1, b(2) = 2$ olmak üzere arının $n$ numaralı gözeye gelebilmesi için ya $n-1$ numaralı ya da $n-2$ numaralı gözeye gelmiş olması gerekir ki, buralara $b(n-1)$ ve $b(n-2)$ yoldan gelebileceğinden, $b(n) = b(n-1) + b(n-2)$ indirgeme bağıntısı elde edilir ki buda Fibonacci dizisinin indirgeme bağıntısının ta kendisidir. $(b(n))$ dizisinin elemanları, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... olmak üzere bunlar Fibonacci dizisinin elemanlarıdır.

Fransız matematikçisi Edward Lucas'ın adıyla anılan Lucas sıyıları dizisi Fibonacci sayı dizileriyle akrabadır. Başlangıç sayıları için seçilebilecek ikinci en basit sayıları seçerek $F_1 = 1$ ve $F_2 = 3$ olarak almıştır. $F_1 = 1$ ve $F_2 = 3$ koyarsak Lucas sayıları elde edilir. Oysa Lucas sayıları Fibonacci sayılarından çok farklı bir dizi oluştururlar ve şu şekildelerdir;

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere;

$1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,\ldots$ şeklindedir.

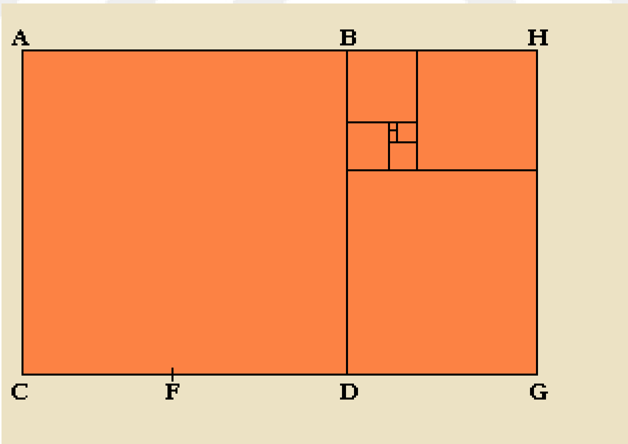
Genellikle Lucas'ın baş harfi olan $L_n$ ile gösterilirler. Lucas dizisi Fibonacci dizisinin birçok akrabasından biridir ancak ilginç olan bu sayıların da bazen doğada görülmesidir. Örneğin Lucas ayçiçeklerinde görülmüştür.

Doğada Fibonacci sayılarının ve çok sık olmamakla beraber Lucas sayılarının görülmesini açıklamaya çalışan bazı görüşler vardır. Bunlar içinde akla en yatkın olan, bir sap çevresindeki yaprakların Fibonacci sarmallarına göre sıralanmakla yüzeylerinin Güneş'i en verimli biçimde almalarının sağlandığı yolundadır. Diğer bir görüş ise (daha az doğrulanabilir olmasına rağmen), polen taşıyan böceklerin "sayısal düzenleri" tercih ettikleri varsayımına dayanmaktadır. Bu tercih sebebiyle evrim süreci boyunca Fibonacci geometrilerinin baskın çıkmasına yol açmıştır. Şimdi ise Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin sonsuza gitmeleri sonucu ortaya çıkan ve altın oran denilen limit oranı $0.618033989\ldots$ sayısı üzerinde duralım.. "Atalarımız" altın oranı temel alan sanat ve mimarinin göze olağanüstü güzel göründüğünü biliyorlardı. Bu nedenle geometriyi altın orana göre tanımladılar; özellikle de bir düz doğru parçasını ikiye ayıran nokta olarak. Öyle ki, küçük parçanın büyüğe oranı, büyüğün bütüne olan oranına tam olarak eşittir. Küçük bölümü x, büyük bölümü ise 1 ile gösterirsek aşağıdaki gibi bir ifade yazabiliriz;

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$$

Buradaki $x+1$ anladığımız üzere doğru parçasının bütünlüğünün uzunluğudur. Bu eşitlikte içler dışlar çarpımı yaptığımızda $x^2 + x - 1 = 0$ biçiminde ikinci dereceden bir denklem elde ederiz. Bu denklemden $x$ i çekersek $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

tam çözümünü elde ederiz. Kısa kenarlarının uzun kenarlarına olan oranı altın oran olan dikdörtgen çizersek ünlü bir sanat eseri çizmiş oluruz buna altın dikdörtgen denir.




**Şekil 1.2.** Altın Dikdörtgen

Şekildeki $ACGH$ dikdörtgeni bir altın dikdörtgendir. Siz de eğer bir altın dikdörtgenim olsun diyorsanız, önce bir $ABCD$ karesi çizin. $CD$ kenarının orta noktası $F$ ise, $CD$ kenarını $FG = FB$ olacak şekilde uzatın. $ACGH$ dikdörtgeni bir altın dikdörtgendir. İlk bakışta o kadar övgüye değer bir özellik göze çarpmasa da, birçok yönden ilginç bir yapıdır. Bunun nedeni günümüze kadar uzanan nesiller boyunca insanların çoğunun onu bütün dikdörtgenler içinde göze en hoş gelen dikdörtgen olarak görmesidir. Bunun sonucunda da günlük hayatımızda karşılaştığımız binlerce dikdörtgenin büyük bir bölümünün boyutları, altın dikdörtgeninkine yakındır. Bayraklar, kibrit kutuları, gazeteler, oyun kartları, yazı kağıtları ve sayısız binlerce örnek verilebilir. Sanatçıların ve psikologların tam anlayamadıkları bir nedenle altın dikdörtgenin estetik bir çekiciliği vardır. Yunan mimarisi ve çömlekçiliğinin dışında heykel, resim sanatları, mobilya ve sanatsal tasarımlar için de doğrudur. Parthenon tapınağının ön bölümünü eksiksiz olduğu dönemde, bir altın dikdörtgenin içine neredeyse tıpatıp girebilirdi. Altın orana Mısır piramitlerinin bazılarının boyutlarında da rastlanır. Leonardo da Vinci de altın dikdörtgenlerden çok etkilenmiş, hatta bu konuda hazırlanan kitaba yazılarıyla katılmıştır. Altın dikdörtgenin bir diğer özelliği de içinden bir kare attığınız zaman geriye kalan dikdörtgenin de bir altın dikdörtgen olmasıdır. Şekildeki $ACGH$ dikdörtgeninden $ABCD$ karesini atarsak geriye kalan $BHDG$ dikdörtgeni de bir altın dikdörtgendir. Bu işlemi istediğimiz kadar devam ettirebiliriz ve her defasında bir öncekinden daha küçük altın dikdörtgenler elde ederiz. Bunlar içeriye doğru bir sarmal oluşturarak sonuç olarak bir noktaya yönelirler. Eğer giderek küçülen bu karelerin veya dikdörtgenlerin köşelerini veya merkezlerini sırasıyla birleştirirsek altın sarmal diye bilinen bir sarmal elde edilir. Özel bir sarmaldır ve öncesinde bahsettiğimiz ayçiçeğindeki sarmalın aynısıdır. Matematiksel olarak bu sarmala eşit açılı sarmal ya da logaritmik sarmal adı verilir. Logaritmik sarmal denilmesinin sebebi, onu en basit biçimde ifade eden cebirsel denklemlerin logaritma ifadelerinin kullanılarak yazıldığından dolayıdır. Eşit açılı sarmal denilmesinin nedeni ise sarmalın merkezinden çizilen bir düz doğrunun sarmalı hep aynı açıda kesmesidir. Bu şekilde çizilen başka bir doğru da aynı şeyi yapar.

Bu çok özel sarmalın, bir nedenle, doğada çok sık tercih görmesi gerçekten ilginç bir durumdur. Deniz kabukları, salyangozlar, doğanın boynuzları, azı dişleri, pençeleri ve daha önce de bahsetmiş olduğumuz kozalaklar ve çiçekler; bunların hepsinin eşit açılı sarmalın bölümleri olduğu anlaşılıyor. Uzayın derinliklerindeki büyük galaksilerin bile dışa doğru dönen yıldızlardan oluşmuş, büyük boyutta eşit açılı sarmal kolları vardır. Fibonacci sayılarının ve altın oranın doğa ve sanattan ayrı olarak tümüyle matematiksel olan ilginç yönleri de vardır. Şimdi de basit kesirlere örnek olan, belki de, yarım veya $1/2$ yi ele alalım. Bunu daha karmaşık yaparak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\frac{1}{1+1}$$

Basit işlemi temel alan ancak işi bir adım daha ileriye taşıyan bir kesir daha yazalım.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$$

Bu kesrin değerini hesapladığımız zaman $2/3$ sayısını elde ederiz. Benzer şekilde bir adım daha eklersek kesrin aldığı değer $3/5$ olur. Aynı şekilde devam edip kesir yapılamayı bir adım daha sürdürürsek $5/8$ gibi basit bir kesri ifade etmek için karmaşık bir yol buluruz. Şimdi bu kesri, yine bu kurallar çerçevesinde sonsuza kadar sürdürürsek bir "sürekli kesir" elde ederiz.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

Bu tez aşağıdaki gibi tasarlanmıştır.

İkinci bölümde Kaynaklar kısmında kullanılan çalışmalarının özetleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde cebir ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi. Fibonacci dizileri ve Fibonacci dizileri ile ilgili özellikler, Lucas dizileri ve Lucas dizileri ile ilgili özellikler, Genelleştirilmiş Fibonacci dizileri ile ilgili özelliklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde $M-$ dizileri, $m$ vektörleri, Hilbert fonksiyonları tanım ve teoremleri ile anlatılmış olup $M-$ dizileri üzerine tanımlanan ailenin Fibonacci sayıları ile bağlantısı olduğunu gösteren tanım ve teoremler verildi.

Beşinci bölümde, $M-$ dizilerinden faydalanarak yeni bir aile tanımlandı. Tanımlanan bu ailenin Lucas sayıları ile bağlantısı olduğu gösterildi. $M-$dizilerinden faydalanarak tanımlanmış olan bu ailenin eleman sayısının Lucas sayılarını verdiği ve Lucas sayıları ile üstten sınırlandığı gösterilmiştir ve bununla ilgili bazı teoremler ispatları ile beraber verildi.

## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

Son yıllarda Fibonacci ve Lucas ile ilgili yapılan çalışmalar ve özetleri aşağıda verilmiştir.

Bruns W. ve Herzog J. ileri ve gelişmiş matematikte Cambridge çalışmalarına yer vermişlerdir.

Akbulak, M. ve Bozkurt, D. çalışmalarında, $m$ basamak genelleştirilmiş Fibonacci $k$ sayılarını matris gösterimi ile tanımlamışlardır. Tanımladıkları matris gösterimini kullanarak $m$ basamak genelleştirilmiş Fibonacci $k$ sayılarının genelleştirilmiş Binet formülünü ve bazı özdeşliklerini elde etmişlerdir.

Kiliç, E. ve Tasci, D. çalışmalarında, bilinen Lucas sayıları ve genelleştirilmiş $k$ basamak Fibonacci sayıları üzerinde durmuşlardır. Lucas sayılarının genelleştirilmesi için yeni bir tanım vermişlerdir. Genelleştirilmiş $k$ basamak Fibonacci ve $k$ basamak Lucas fonksiyonlarını verip bu fonksiyonlar arasında yeni bağıntılar ortaya çıkarmışlardır.

Koshy, T. "Fibonacci ve Lucas sayılarının Uygulamaları" isimli kitabında Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili birçok özelliğe yer vermiştir.

Mikkawy, M. ve Sogabe, T. çalışmalarında $k-$ Fibonacci sayılarında yeni bir aile tanımını vermişlerdir. Bu tanıma göre $n$ ve $k$ ($k \neq 0$) doğal sayılar olsun.

Bu taktirde $n = mk+r$ $(0 \leq r < k)$ olacak şekilde $m$ ve $r$ sayıları bulunur. Bu parametreleri kullanarak $F_n^{(k)}$, genelleştirilmiş $k-$ Fibonacci sayıları

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{(\sqrt{5})^k}(\alpha^{m+2} - \beta^{m+2})^r(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})^{k-r}, n = mk + r\ (0 \leq r < k)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan,

$$F_n^{(k)} = (F_m)^{k-r}.(F_{m+1})^r, n = mk + r$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca bu çalışmada Fibonacci sayıları ve $k-$ Fibonacci sayılarında yeni aile ile ilgili bazı bağıntılar vermişlerdir.

S. Linusson, çalışmasında maksimum dereceli ve değişken sayısı açısından $M-$ dizileri sayısının özyinelemeli formüllerini vermişlerdir. Özellikle değişken sayısı 2 olduğunda

Bell sayılarını verdiğini göstermiştir. Değişken sayısı sabitlendiğinde $M -$dizilerinin sayısının asimptotik bir tahminini vermişler. Bu az sayıda köşe noktası olan politop sayısına yeni bir alt sınır getirip basit kompleksler için $f -$ vektör sayısıyla benzer yinelemeli bir formül de kanıtlamışlar. Maksimum dereceyi sabit tutarak basitleşmiş kompleksler için $M -$ dizisi sayısını ve $f$ $-$ vektör sayısını değişken sayılarda polinom olarak alıp bu sayıların asimptotik olarak eşit olduğunu göstermişlerdir.

Özkan, E., Aydın, H. and Dikici, R. çalışmalarında, 3-adım Fibonacci dizilerinin Wall sayılarına ilişkin iki yeni teorem ispatlamışlardır. Bununla birlikte 3-adım Fibonacci dizileriyle ilgili beş varsayım vermişlerdir. Ayrıca $5\times10^5$ den küçük asal sayılar için bu varsayımların bilgisayar doğrulamasını vermişlerdir.

Enkosky T. ve Stone B. çalışmalarında $M -$ dizilerinden faydalanarak yeni bir aile tanımlamışlar. Bu tanıma göre uzunluğu $n$ olan $M -$ dizilerinin sayısı $\{l(n)\}_{n\geq1}$ dizilimi, ile tanımlanan bir kümedir. Özellikle $n \geq 1$ için $L(n) = \{m = (m_0, m_1, \ldots) | m$ bir $M -$ dizisi ve $\lambda(m) = n\}$ şeklindedir. Daha detaylı bir şekilde $l(n) = |L(n)|, n \geq 1$ şeklindedir. $n \geq 1$ $F(n)$ vektörler kümesi

(1) $F(1) = \{(1)\}$;
(2) $F(2) = \{(1,1)\}$;
(3) $n \geq 3$ için $F(n) := C(n) \cup D(n)$ şeklinde hesaplanır.

Burada;

$C(n) := \{(1, t_1, \ldots, t_s, 1) \mid (1, t_1, \ldots, t_s) \in F(n-1)\}$ ve

$D(n) := \{(1, t_1, \ldots t_{s-1}, t_s + 1) | (1, t_1, \ldots, t_s) \in F(n-1), t_{s-1} > t_s$ ya da $t_s \geq 1\}$ dir.

Tanımlamış oldukları bu ailenin eleman sayılarının $n$. Fibonacci sayılarını verdiğini göstermişler ayrıca bu ailenin Fibonacci sayıları ile üstten sınırlandığını göstermişlerdir.

Özkan, E. Göçer, A. ve Altun, İ. çalışmalarında $M -$ dizilerinden yararlanarak yeni bir vektörler ailesi tanımlamışlardır.

(1) $L(1) = \{(1)\}$;
(2) $L(2) = \{(1,1,1), (1), (1,2)\}$;
(3) $n \geq 3$ için $L(n) := C(n) \cup D(n)$ şeklinde hesaplanır.

Burada;

$C(n) := \{(1, t_1, \dots, t_s, 1) \mid (1, t_1, \dots, t_s) \in L(n-1)\}$ ve

$D(n) := \{(1, t_1, \dots t_{s-1}, t_s + 1) | (1, t_1, \dots, t_s) \in L(n-1), t_{s-1} > t_s$ ya da $t_s \geq 1\}$ şeklindedir. Tanımlamış oldukları bu ailenin eleman sayılarının $n$. Lucas sayılarını verdiğini gösterdiler ve bu ailenin elemanlarının Fibonacci ve Lucas sayıları ile sınırlandığını gösterdiler.

Özkan, E. Altun, İ ve Göçer, A. çalışmalarında Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan $F_n^{(k)}$ tanımından faydalanılarak Lucas sayılarının yeni bir ailesi olan $L_n^{(k)}$ elde etmişlerdir. Ayrıca, Genelleştirilmiş Lucas polinomlarının tanımını verip Genelleştirilmiş $Q$ matris ile yeni bir matris elde edilerek Genelleştirilmiş Lucas polinomlarının elemanlarını bularak genelleştirilmiş Lucas polinomları ve bağıntılarının genelleştirilmiş durumlarını elde etmişlerdir.

# 3. KURAMSAL TEMELLER

## 3.1. Grup Teorisi ve Elementer Özellikleri

**Tanım 3.1.1.** $G$ boş olmayan bir küme ve $G$ üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer $*$ işlemi

i. $*$ işlemi kapalılık özelliğini sağlarsa; yani, her $a, b \in G$ için

$$a * b \in G \text{ ise;}$$

ii. * işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; her $a, b, c \in G$ için

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ ise;}$$

iii. her $a \in G$ için

$$a * e = e * a = a$$

olacak biçimde bir $e \in G$ varsa ($e$ ye $G$ nin birim elemanı denir );

iv. her $a \in G$ için

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

olacak biçimde bir $a^{-1} \in G$ varsa ($a^{-1}$ ne $a$ nın bir ters elemanı denir ) o zaman $(G,*)$ sıralı ikilisine bir grup denir. (Arıkan, 2009).

**Tanım 3.1.2.** $(G,*)$ grubunda her $a, b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

ise bu gruba değişmeli grup yada abelyan grup denir. (Arıkan, 2009).

**Örnek 3.1.3.** $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sayı sistemleri bunlar üzerindeki bilinen toplamaya göre birer abelyan gruptur. Bu gruplar $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ ile gösterilir.

**Örnek 3.1.4.** $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kümesi rasyonel sayılar üzerindeki bilinen çarpma işlemine göre bir abelyan gruptur. Benzer biçimde $\mathbb{R}^*$ ve $\mathbb{C}^*$ bilinen çarpma işlemine göre birer abelyan gruptur.

**Örnek 3.1.5.** $\mathbb{Z}^*$ kümesi bilinen çarpma işlemine göre bir grup olamaz. Çünkü; $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan 2 nin $\mathbb{Z}$ içinde çarpmaya göre tersi yoktur. (Çallıalp, 2001).

**Teorem 3.1.6.** $G$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. O zaman

$$(a^{-1})^{-1} = a \text{ ve } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

dir. (Arıkan, 2009).

**Teorem 3.1.7.** $G$ bir grup olsun. $G$ içinde sağ ve sol sadeleştirme kuralları sağlanır. Yani eğer $a, b, c \in G$ için

$$ab = ac$$

ya da

$$ba = ac$$

ise

$$b = c$$

dir. (Arıkan, 2009).

**Teorem 3.1.8.** $G$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır. (Arıkan, 2009).

i. $ax = b$ denkleminin $G$ içinde bir tek çözümü vardır.
ii. $ya = b$ denkleminin $G$ içinde bir tek çözümü vardır.

**Tanım 3.1.9.** $G$ bir grup olsun. $G$ nin kardinalitesi $|G|$ ye $G$ nin mertebesi denir. Eğer $|G|$ sonlu ise $G$ ye sonlu grup, $|G|$ sonsuz ise sonsuz grup denir. (Taşcı, 2007).

**Teorem 3.1.10.** $G$ bir grup ve $a \in G$ olsun. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdakiler sağlanır. (Taşcı, 2007).

i. $a^m a^n = a^{m+n}$ dir.
ii. $(a^m)^n = a^{mn}$ dir.

**Tanım 3.1.11.** $G$ bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer $a^t = e$ olacak biçimde bir $t$ pozitif tamsayısı varsa bu pozitif $t$ tamsayılarının en küçüğüne $a$ nın mertebesi denir. Mertebe $o(a)$ ya da $|a|$ ile gösterilir. (Arıkan, 2009).

**Tanım 3.1.12.** $G$ bir grup ve $H, G$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $H$, $G$ nin işlemine göre kapalı ve bu işleme göre bir grup ise o zaman $H$ ya $G$ nin bir altgrubu denir ve $H \leq G$ ya da $G \geq H$ ile gösterilir. (Arıkan, 2009).

**Teorem 3.1.13.** $G$ bir grup ve $H, G$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. $H$ nın $G$ nin bir altgrubu olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için

i. $ab \in H$
ii. $a^{\mathbf{-1}} \in H$

olmasıdır. (Harmancı, 1987).

**Tanım 3.1.14.** $G$ bir grup ve $A$, $G$ nin bir altkümesi olsun. O zaman $G$ nin $A$ yı içeren bütün altgruplarının kesişimine $A$ tarafından üretilen altgrup denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $A$'ya $\langle A \rangle$ nın bir üreteç kümesi denir. Eğer $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ise $\langle A \rangle = \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$ ile gösterilir ve buna $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tarafından üretilen altgrup denir. Eğer $n = 1$ ise $\langle x_1 \rangle$ grubuna $x_1$ tarafından üretilen devirli grup denir. (Arıkan, 2009).

**Tanım 3.1.15.** $G$ bir grup olsun. Eğer $G = \langle a \rangle$ olacak biçimde bir $a \in G$ varsa $G$ ye $a$ tarafından üretilen bir devirli grup denir. (Arıkan, 2009).

**Teorem 3.1.16.** Her devirli grup abelyandır. (Taşcı, 2007).

**Tanım 3.1.17.** $G$ ve $H$ iki grup ve $\varphi: G \to H$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall\ a, b \in G$ için

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

ise $\varphi$ ye $G$ den $H$ ya bir grup homomorfizması denir. (Taşcı, 2007).

Ek olarak $\varphi$ birebir ise $\varphi$ ye bir grup monomorfizması**,** $\varphi$ örten ise $\varphi$ ye bir grup epimorfizması ve $\varphi$ hem birebir hemde örten ise $\varphi$ ye bir grup izomorfizması denir. $\varphi$ bir izomorfizma ise $G, H$ ya izomorftur denir ve $G \cong H$ ile gösterilir. Eğer $G = H$ ve $\varphi$ $G$ den $G$ ye bir izomorfizma ise $\varphi$ ye $G$ nin bir otomorfizması denir. (Taşcı, 2007).

**Tanım 3.1.18.** $G$ bir grup olsun $G$ nin bir alt grubu $H$ ve bir elemanı $x$ olsun. $\forall\, g \in G$ için $xgx^{-1}$ elemanına g nin $x$ e göre eşleniği denir.

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} | h \in G\}$$

kümesine $H$ nın $x$ e göre eşleniği denir. (Arıkan, 2009).

**Tanım 3.1.19.** $G$ bir grup ve $N, G$ nin bir altgrubu olsun. Eğer her $g \in G$ için

$$gNg^{-1} = N$$

ise $N$ ye $G$ nin bir normal altgrubu denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir. (Arıkan, 2009).

**Tanım 3.1.20.** $G$ bir grup ve $H, G$ nin bir altgrubu olsun. Eğer $H, G$ de normal ise $\forall g \in G$ için $gH = Hg$ olduğundan $H$ nın sol yan kümesi sağ yan kümesine eşittir. Bu küme $G\,/\,H$ ile gösterilir.

$$G/H = \{gH \mid g \in G\} = \{Hg \mid g \in G\}$$

dir.

$G/H$ grubuna $G$ nin $H$ modülüne göre bölüm grubu denir. (Arıkan, 2009).

## 3.2. Halka, Cisim Tanımı ve Elementer Özellikler

**Tanım 3.2.1.** $R$, boş olmayan bir küme olsun. $R$ üzerinde $\forall x, y \in R$ için

$$+\colon\ (a, b) \to a + b\ ,$$

$$\cdot : (a, b) \to a \cdot b$$

biçiminde tanımlı ve sırasıyla, toplama ve çarpma denilen “+” ve “·” ikili işlemleri verilsin.

Eğer $(R, +\ \cdot)$ cebirsel yapısı

i. $(R, +)$ bir abelyan grup ise,
ii. $R$ çarpma işlemine göre kapalı ise yani $\forall x, y \in R$ için

$$x. y \in R \text{ ise,}$$

iii. Çarpma işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani $\forall x, y, z \in R$ için

$$(x.y).z = x.(y.z) \text{ ise,}$$

iv. $R$ üzerinde dağılma özellikleri sağlanırsa; yani $\forall x, y \in R$ için

$$x.(y+z) = x.y + x.z \ \ (sol\ dağılma\ özelliği)$$

$$(x+y).z = x.z + y.z \ \ (sağ\ dağılma\ özelliği) \text{ ise,}$$

$(R, +, \cdot)$ sıralı üçlüsüne bir halka denir. (Arıkan, 2009).

**Tanım 3.2.2.** $(R, +, \cdot)$ halkası verilsin. Eğer $\forall x, y \in R$ için $x.y = y.x$ ise bu halkaya komütatif halka (değişmeli halka) denir. $R$ nin toplamsal birimi $0_R$ ile gösterilir ve buna $R$ nin sıfırı denir. Eğer $\forall\, x \in R$ için $x.1_R = 1_R.x = x$ olacak biçimde $1_R \in R$ varsa $1_R$ elemanına halkanın birim elemanı (birimi) ve halkaya birimli halka denir. (Taşcı, 2007).

**Örnek 3.2.3.** $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerindeki bilinen toplama ve çarpmaya göre birimli ve değişmeli bir halkadır.

**Tanım 3.2.4.** $R$ birimli ve değişmeli bir halka ve $0_R \neq 1_R$ olsun. Eğer $R$ sıfır bölensiz ise $R$ ye bir tamlık bölgesi denir. (Arıkan, 2009).

**Tanım 3.2.5.** $F$ boştan farklı bir küme olsun. $F$ üzerinde tanımlanan iki ikili işlem sırasıyla toplama ve çarpma olmak üzere halka tanımındaki maddelere ek olarak

i. Çarpma işlemine göre değişmelilik,
ii. Birim eleman
iii. Sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersinin olması

özellikleri sağlanıyorsa $F$ ye bir cisim denir. (Arıkan, 2009).

**Örnek 3.2.6.** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\ ve\ \mathbb{Z}_p(p$ asal) kümeleri birer cisimdir.

**Teorem 3.2.7.** Her cisim bir tamlık bölgesidir. (Taşcı, 2007).

**Teorem 3.2.8.** $R$ bir halka ve $S \subseteq R$ olsun. $S$ nin $R$ halkasının bir alt halkası olması için gerek ve yeter şart

i. $S \neq \emptyset$
ii. $S$ çıkarma işlemine göre kapalı
iii. $S$ çarpma işlemine göre kapalı

şartlarının sağlanmasıdır. (Arıkan, 2009).

**Teorem 3.2.9.** $F$ bir cisim ve $K$ kümesi $F$ nin bir alt kümesi olsun. $K$ kümesinin $F$ nin bir alt cismi olması için gerek ve yeter şart

i. $K - \{0\} \neq \emptyset$
ii. $K$ çıkarma işlemine göre kapalı
iii. $K$ çarpma işlemine göre kapalı
iv. $x \in K - \{0\} \Rightarrow x^{-1} \in K$

şartlarının sağlanmasıdır. (Arıkan, 2009).

## 3.3. Fibonacci Sayıları

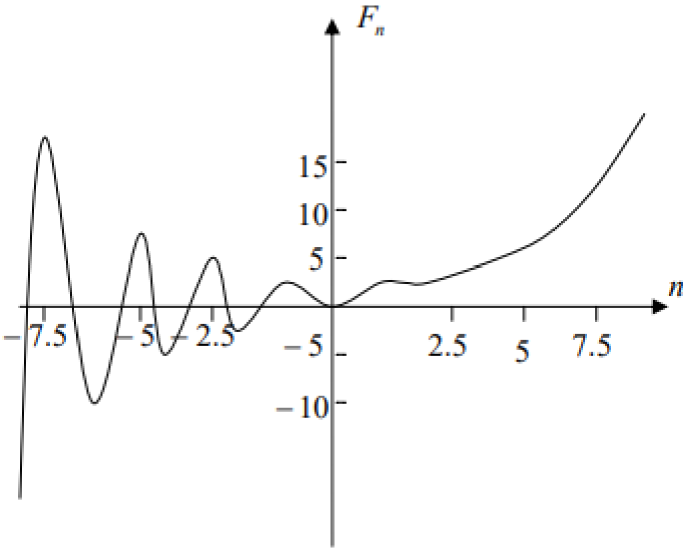
**Tanım 3.3.1.** $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ ve $n \geq 0$ için,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan sayılara *Fibonacci Sayıları* adı verilir. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(3.1) den hareketle , $F_n = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ ...$ elde edilir.

Fibonacci sayılarının seyri aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.




**Şekil 3.1.** Fibonacci sayılarının grafiği

Negatif Fibonacci sayıları ise

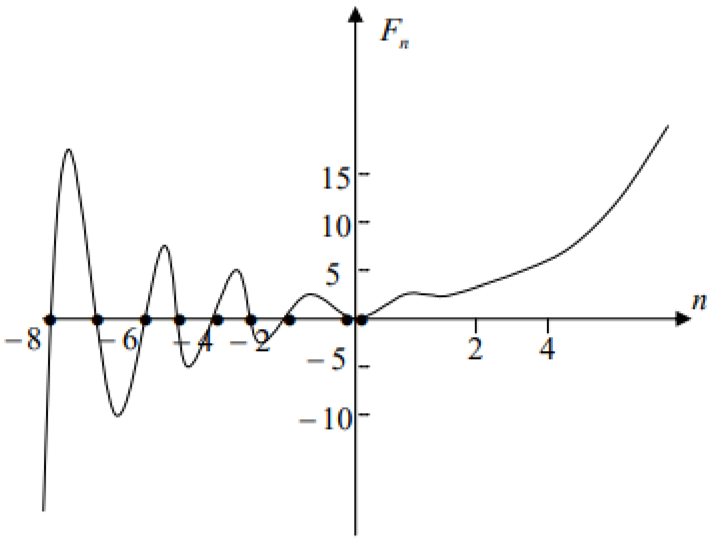
$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

şeklinde bulunur.

Fibonacci sayılarını genel olarak,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^n \cos(n\pi) \right]$$

şeklinde yazılabilir.




**Şekil 3.2.** Fibonacci sayılarının genellemesi

Fibonacci dizisi $x = 0$ da ve bütün $n$ negatif tamsayıları için $n + 0.5$ olacak şekilde sonsuz sayıdaki negatif değerler de 0 çözüme sahiptir.

### 3.4. Fibonacci Sayıları İle İlgili Özellikler

Şimdi Fibonacci sayıları ile ilgili literatürde bilinen bazı özellikleri verelim:

**a)** $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} {F_s}^2 = F_n\, F_{n-1}, \tag{3.2}$$

**b)** $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_s\, F_{s-1} = \begin{cases} F_{n-1}^2, & n\, tek\, ise \\ F_{n-1}^2 - 1, & n\, çift\, ise \end{cases}, \tag{3.3}$$

**c)** $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} F_{s-1}^2 = F_{n-2}\, F_{n-1} + 1, \tag{3.4}$$

**d)** $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \tag{3.5}$$

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(3.1) bağıntısı geriye doğru da aşağıdaki şekilde kullanılabilir.

Yani,

$$F_{-1} = F_1 - F_0 \ , \qquad F_{-2} = F_0 - F_{-1}, \ ...$$

eşitliklerinden hareketle $n \geq 0$ için, $F_{-n} = 0, \ 1, -1, \ 2, -3, \ 5, -8, \ 13, \ ...$

elde edilir.

Fibonacci dizisinin indirgeme kuralı için karşılık gelen karakteristik denklem

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ olmak üzere, bu denklemin köklerini,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ ve } \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ile gösterelim. O halde fark denklemlerinde bu dizinin genel terimi,

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

biçimindedir.

Şimdi $A$ ve $B$ sabitlerini bulalım.

$n = 0$ için,

$$F_0 = A + B = 0,$$

$n = 1$ için,

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1'\text{dir}.$$

Yukarıdaki denklem sistemi çözüldüğü zaman,

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \ \text{ ve } \ B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Böylece Fibonacci sayıları

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklinde yazılır. Literatürde bu formül Fibonacci sayıları için "Binet Formülü" olarak adlandırılır.

**Tanım 3.4.1.** $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlanan matrise $Q$- matrisi denir. "(Koshy, 2001)"

**Teorem 3.4.2.** $n \geq 1$ olsun. Bu takdirde

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir. (Koshy, 2001).

**İspat:** İspatı $n$ üzerinden tümevarımla verelim.

$n = 1$ için,

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

olup, $n = 1$ için iddia doğrudur.

$n = k$ için iddia doğru olsun. O halde,

$$Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}\text{'dır.}$$

Bu takdirde;

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n = k + 1$ için,

$$Q^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

olup, ispat tamamlanır.

**Sonuç 3.4.3.** $n \geq 1$ olsun. Bu takdirde,

$$F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n\text{'dir. (Koshy, 2001).}$$

**İspat:** $|\, Q \,| = (-1)$ ve $|\, Q^n \,| = (-1)^n$ dir. Teorem 3.4.2'den

$$|\, Q^n \,| = F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2$$

dir.

O halde,

$$F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir.

**Teorem 3.4.4.** $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$ Fibonacci dizisi için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1}$ (Taşyurdu, 2013).

**Tanım 3.4.5.** $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ için

$F_3 = F_2 + F_1 + F_0,$

$F_4 = F_3 + F_2 + F_1, \ldots,$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} \quad n \geq 3.$

şeklindeki sayılara ise 3-adımlı Fibonacci sayıları denir.

Şimdi 3-adımlı Fibonacci sayılarının bazı özelliklerini içeren teorem verilecektir.

**Teorem 3.4.6.** $F_0, F_1, F_2, \ \ldots \ , F_n$ , ... 3-adım Fibonacci dizisi için

- $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \frac{(F_{n+3} - F_{n+1} - 1)}{2}$
- $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = \frac{(F_{2n+2} - F_{2n+1})}{2}$
- $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = \frac{(F_{2n+1} + F_{2n-1})}{2}$
- $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

yazılır. (Taşyurdu, 2013).

### 3.5. Lucas Sayıları

**Tanım 3.5.1.** $L_0 = 2,\ \ L = 1$ ve $n\ \geq 0$ için,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanan sayılara *Lucas Sayıları* adı verilir. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(3.6) den hareketle , $L_n = 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ \ldots$ elde edilir.

**Tanım 3.5.2.** $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \, , P_0 = 0 \, , P_1 = 1$$

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \, , Q_0 = 0 \, , Q_1 = 2$$

dizilerine sırasıyla Peel ve Pell – Lucas dizileri denir bu dizilerin terimlerine ise sırasıyla Pell ve Pell – Lucas sayıları denir.

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \ \text{ ve } \ \beta = 1 - \sqrt{2}\,,$$

$x^2 - 2x - 1$ denkleminin kökleri olmak üzere $n. Pell, Pell - Lucas$ sayılarının binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad Q_n = \ \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. (Koshy, 2001).

Ardışık iki Pell sayısının oranı olan

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2} \ \cong 2{,}414$$

değeri literatürde Gümüş oran olarak bilinir. (Koshy, 2001).

**Tanım 3.5.3.** $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2\,J_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine Jacobsthal dizisi, bu dizinin terimlerine ise *Jacobsthal* sayıları denir. Jacobsthal dizisinin genel terimi,

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

şeklinde ifade edilebilir. (Civciv, 2009).

**Tanım 3.5.4.** $J_0 = 2$ ve $J_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2\,J_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *Jacobsthal-Lucas* dizisi, bu dizinin terimlerine *Jacobsthal-Lucas* sayıları denir. *Jacobsthal-Lucas* dizisinin genel terimleri

$$J_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir. (Civciv, 2009).

**Tanım 3.5.5.** Perrin sayı dizisi de $n > 2$ için

$$R_0 = 3\ ,\ R_1 = 0\ ,\ R_2 = 2\ ,$$

başlangıç koşullarıyla

$$R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanmıştır. (Stewart, 1996).

**Tanım 3.5.6.** *Padovan* sayı dizisi Richard Padovan adına I. Steward tarafından

$n > 2$ olmak üzere ve

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1$$

başlangıç koşullarıyla

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

olarak tanımlanmıştır. (Stewart, 1996).

**Teorem 3.5.7.** (Cassini Formülü)

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad n \geq 1$$

eşitliği mevcuttur.

**İspat:** Bir önceki teoreme göre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $\det(A) = -1$ dir.

Ayrıca

$$(-1)^n = (\det A)^n = \det(A^n) = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$$

olduğundan

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

bulunur.

**Teorem 3.5.8.** (Honsberger Formülü) $m \geq 1, n \geq 1$ için

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

eşitliği mevcuttur.

**İspat:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $A^{n+m} = A^nA^m$

Olduğundan,

$$A^nA^m = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m & F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} \\ F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m & F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1} \end{pmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$A^{n+m} = \begin{pmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{pmatrix}$$

olup buradan

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

elde edilir.

Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal, Pell-Lucas, Perrin ve Padovan sayılarının ilk on terimi Tablo da verilmiştir.

**Tablo 3.1.** Bilinen Sayı Dizileri

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | ... |
| $L_n$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | 199 | ... |
| $P_n$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 | 2378 | 5741 | ... |
| $Q_n$ | 2 | 2 | 6 | 14 | 34 | 82 | 198 | 478 | 1154 | 2786 | 6726 | 16238 | ... |
| $q_n$ | 1 | 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | 239 | 577 | 1393 | 3363 | 8119 | ... |
| $J_n$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 | 11 | 21 | 43 | 85 | 171 | 341 | 683 | ... |
| $j_n$ | 2 | 1 | 5 | 7 | 17 | 31 | 65 | 127 | 257 | 511 | 1025 | 2047 | ... |

Lucas sayıları ile ilgili literatürde bilinen bazı özellikleri verelim:

**a)** $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} {L_s}^2 = L_n L_{n-1} + 2, \tag{3.7}$$

dir.

**b)** $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} L_s\, L_{s-1} = \begin{cases} L_{n-1}^2 - 6\,, & n\ tek\ ise \\ L_{n-1}^2 - 1, & n\ çift\ ise \end{cases}, \tag{3.8}$$

dir.

**c)** $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} L_{s-1}^2 = L_{n-2} L_{n-1} + 3, \tag{3.9}$$

dir.

**d)** $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için,

$$L_{-n} = (-1)^n\, L_n, \tag{3.10}$$

dir. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(3.6) bağıntısı geriye doğru da aşağıdaki şekilde kullanılabilir. Yani,

$$L_{-1} = L_1 - L_0\,, \qquad L_{-2} = L_0 - L_{-1}, \ \ldots$$

eşitliklerinden hareketle $n \geq 0$ için,

$$L_{-n} = 2, -1, 3, -4, 7, -11, 18, -29, \ \ldots$$

elde edilir.

Lucas dizisinin indirgeme kuralı için karşılık gelen karakteristik denklem

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ olmak üzere, bu denklemin köklerini,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ ve } \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ile gösterelim.

O halde fark denklemlerinde bu dizinin genel terimi,

$$L_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

biçimindedir.

Şimdi $A$ ve $B$ sabitlerini bulalım.

$n$ = 0 için,

$$L_0 = A + B = 2$$

$n$ = 1 için,

$$L_1 = A\alpha + B\beta = 1$$

dir.

Yukarıdaki denklem sistemi çözüldüğü zaman,

$$A = 1 \ \text{ ve } \ B = 1$$

bulunur.

Böylece Lucas sayıları,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklinde yazılır. Literatürde bu formül Lucas sayıları için *"Binet Formülü"* olarak adlandırılır. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

## 3.6. Fibonacci ve Lucas Sayıları arasındaki Özellikler

Fibonacci, Lucas ve Pell sayıları için bilinen birçok özdeşlik çeşitli yazarlar tarafından elde edilmiştir. Bunlardan bazılarını burada hatırlatalım:

- $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$
- $L_{n+1} + L_{n-1} = 5\,F_n$
- $F_n L_n = F_{2n}$
- $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$
- $L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1}$
- $L_{2n} = 5F_n^2 + 2(-1)^n$
- $F_m F_n - F_{m+k} F_{n-k} = (-1)^{n-k} F_{m+k-n} F_k$
- $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ Cassini Formülü
- $\sum_{i=1}^{n} L_i L_{i-1} = \begin{cases} L_n^2 - 4 & n\ \text{çift ise}, \\ L_n^2 + 1 & n\ \text{tek ise}, \end{cases}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 = \frac{3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^2 = \frac{3F_{2n}^2 + 2F_{2n-1}^2 - 4F_{2n-2}F_{2n} + 2n - 2}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^3 = \frac{F_{n+2}^3 - 3F_{n+1}^3 + 3(-1)^n F_n + 2}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i F_{i+2} = F_{2n+1} F_{2n+2} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} iF_i^2 = \frac{nF_{n+}F_{n+1} - F_n^2 + [1 + (-1)^{n-1}]}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^3 = \frac{F_{2n}^3 + 3F_{2n}}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$
- $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5L_{2m} F_{2n}$
- $P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1} P_n$
- $F_{3n} = 4F_{3n-3} + F_{3n-6}$

- $(-1)^{n-r}F_r^2 = F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r}$
- $F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1}F_{n-m}$
- $(-1)^{n-r}F_r^2 = F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r}$
- $F_{2k+1}F_{2n+1} = F_{(n+k+1)}^2 + F_{n-k}^2$

(Koshy, 2001; Vajda, 1989).

## 3.7. Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

**Tanım 3.7.1.** $G_0 = a$ , $G_1 = b$ $\quad (a, b \in \mathbb{R})$ ve n ≥ 0 için,

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanan sayılara *Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları* adı verilir. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

(3.11) den

$$G_n = a,\ b,\ (a+b),\ (a+2b),\ (2a+3b),\ (3a+5b),\ (5a+8b),\ \ldots$$

elde edilir.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili literatürde bilinen bazı özellikleri ve ispatlarını verelim:

**a)** $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$\sum_{s=0}^{n-1} {G_s}^2 = G_{n-1}G_n - G_0G_1 + {G_0}^2$ ‘dir. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

**İspat:**

$$\sum_{s=0}^{n-1} {G_s}^2 = \sum_{s=0}^{n-1} G_s(G_{s+1} - G_{s-1}) = \sum_{s=0}^{n-1} G_s G_{s+1} - \sum_{s=0}^{n-1} G_s G_{s-1} =$$

$$= G_0G_1 - G_0G_{-1} + G_1G_2 - G_1G_0 + \cdots + G_{n-1}G_n - G_{n-1}G_{n-2}$$

$$= G_{n-1}G_n - G_0G_{-1} = G_{n-1}G_n - G_0(G_1 - G_0)$$

$$= G_{n-1}G_n - G_0G_1 + {G_0}^2$$

denklemi elde edilir.

**b)** $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s\, G_{s-1} = \begin{cases} G_{n-1}^2 - G_{-1}^2 - G_0^2 + G_{-1}G_1\,, & n\ tek\ ise \\ G_{n-1}^2 - G_{-1}^2, & n\ çift\ ise \end{cases}$$

dir. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

**İspat:**

$$\begin{pmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_n & G_{n-1} \\ G_{n-1} & G_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \ \dots$$

$$= \begin{pmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}^{\boldsymbol{n-1}} \qquad (3.12)$$

$$\begin{vmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{vmatrix} = G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2$$

$$\begin{vmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{vmatrix}^{\boldsymbol{n-1}} = (G_2G_0 - G_1^2)(F_0F_2 - F_1^2)^{n-1}$$

$$= (G_2G_0 - G_1^2)(-1)^{n-1}$$

$$= (-1)^n(G_1^2 - G_2G_0).$$

Yukarıda bulunan sonuçlar (3.12)'de yerine yazılırsa,

$$G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 = (-1)^n(G_1^2 - G_2G_0)$$

$$G_nG_{n-1} + G_{n-1}^2 - G_n^2 = (-1)^n(G_1^2 - G_2G_0)$$

elde edilir.

$$G_0G_{-1} + G_{-1}^2 - G_0^2 = (-1)^0(G_1 - G_2G_0)$$

$$G_1G_0 + G_0^2 - G_1^2 = (-1)^1(G_1 - G_2G_0) \qquad (3.13)$$

$$\vdots$$

$$G_{2n}G_{2n-1}+G_{2n-1}^2-G_{2n}^2=(-1)^{2n}(G_1^2-G_2G_0).$$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s\,G_{s-1} \;=G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1^2-G_2G_0\,, \qquad n\;tek\;ise$$

$$=G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1^2-(G_1+G_0)G_0$$

$$=G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1^2-G_1G_0-G_0^2$$

$$=G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1(G_1-G_0)G_0-G_0^2$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s\,G_{s-1}=G_{n-1}^2-G_{-1}^2+G_1G_{-1}-G_0^2\;, \qquad n\;tek\;ise$$

denklemi elde edilir.

(3.13)’e

$$G_{2n+1}G_{2n}+G_{2n}^2-G_{2n+1}^2=(-1)^{2n+1}(G_1^2-G_2G_0)$$

($2n$ +1). terim eklenirse,

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_s\,G_{s-1}=G_{n-1}^2-G_{-1} \quad , \qquad n\;çift\;ise$$

denklemi elde edilir.

**c)** $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\sum_{s=0}^{n-1} G_{s-1}^2= \;G_{n-2}G_{n-1}-G_0G_{-1}+G_{-1}^2$$

dir. (Koshy, 2001; Vajda, 1989).

**İspat:** a şıkkına benzer olarak elde edilir

# 4. MATERYAL ve YÖNTEM

## 4.1. $M -$ Dizilerinin Yeni Bir Ailesi

**Tanım 4.1.1.** Multiset kümeleri, tekrar eden elemanları içeren sonlu bir kümeler dizisidir. Bu elemanlar çokluk oluşturan yapının bir parçası olduğundan elemanların sırası önemsizdir. $S$ elemanları $\mathbb{N}$ (doğal sayılar) olan multiset bir küme olsun. Yani $S = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k\}_{\leq}$, elemanları benzersiz bir şekilde yazılmış olabilir. Burada $b_i \in \mathbb{N},\ k \geq 0\ ve$ "$\leq$" simgesi elemanların sırayla artarak düzenlenmiş olduğunu gösterir. Yani $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k$ şeklindedir. Bir $S$ multiset kümesinin boyutu, $S$ nin içindeki çoklu sayılabilen eleman sayılarıdır. Buna göre yukarıdaki $S$ multiset kümesinin bir boyutu vardır. Eğer $|S| = k$ ise bu boyuta $k -$ multiset denir. Eğer $k = 0$ ise $|S| = 0$ olur. Yani $S$ boş kümedir.

**Tanım 4.1.2.** Multikompleks, multiset kümelerinin altmultiset kümeleri altında yakınlaştırılmış (gösterilmiş) sonlu bir $\mathcal{M}$ koleksiyonudur. $\mathcal{M}$ bir multikompleks olsun, $A \subseteq B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \in \mathcal{M}$ koşulunu sağlayan sonlu multisetlerin oluşturduğu bir kümedir. Bir multicompleksin boyutu içerdiği en büyük multiset kümelerinin boyutudur. Bir $\mathcal{M}$ multikompleksi sonsuz sayıda değişken içeren boş olmayan monomiallerin birleşimidir. Genellikle temel değişkenler olarak ve $\mathcal{M}$ 'deki kümelerin monomiallar olarak düşünülmesi çoğu zaman uygundur. Böylece multikompleks, bölünme altında kapalılık özelliğini sağlayan monomialların topluluğudur. Bir $\mathcal{M} -$ multikompleksi $m_i = |\{A \in \mathcal{M}: degA = i\}|$ şeklindedir, $m = (m_0, m_1, m_2, \dots)$ dizisi, $\mathcal{M}$ de, $M$ monomiallerinin bir koleksiyonu olsun $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \cdots, x_n^{i_n}$, $i_j \geq 0$ öyleki $a$, $M$ de bir monomial ve $b$, $a$ yı bölen bir monomial ise $b$ de $M$ nin içindedir.

$M$ monomialler olarak kodlanmış multisetlerde bir multikomplekstir. Böylece multiset kümelerinin boyutu tanımlandığı monomiallerinin derecesidir. $\mathcal{M}$ multikompleksinde $i$ monomiallerin derecesi $f_i(\mathcal{M})$ olsun. Dolayısıyla $f(\mathcal{M}) = (f_0, f_1, \cdots)$ sayısı $\mathcal{M}$ nin $f -$ vektörüdür.

Bir multikompleksin $m -$ vektörü , multikompleks de $i$ multisetlerinin sayısının boyutu $m_{\mathrm{i}} = (m_0, m_1, m_2, \dots)$ sayısıdır.

$\mathcal{M}$ deki monomiallerin $i$ derecesinin sayısı $m_{\mathrm{i}}$ olduğu bir dizide $M$ multikompleks $m-$ vektörü ise o dizi $M$ dizisi olarak isimlendirilir.

**Tanım 4.1.3.** Temel geometride, bir politop düz kenarlı geometrik bir cisim olarak adlandırılır. $n$ boyutlu bir politop veya $n-$ politop olarak herhangi bir sayıda yani $n$ de varolabilir. Örneğin, iki boyutlu bir politop $2-$ politop ve üç boyutlu bir politop $3-$ politop olarak adlandırılır. Bazı teoriler, bu nesneleri sınırsız (apeirotoplar ve mozaikler), küre biçiminde çok yüzlü gibi kıvrımlı manifoltların ayrıştırma veya eğimleri ve set teorik soyut politoplar gibi nesneleri dâhil etme fikrini daha da yaygınlaştırmaktadır.

**Teorem 4.1.4.** Macaulay teoremi

$f \in \mathbb{N}^{\infty}$ için aşağıdakiler eşdeğerdir.

i. $f$ bir çok multikompleksin $f-$vektörüdür.

ii. $f$ bir $M$ dizisidir.

iii. $f_i = dim_k R_i,\ i \geq 0$, sonlu olarak üretilen bazı değişmeli $k$ cebiri için $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ öyleki $R_0 \cong k$ (bir alan) ve $R_1$ $R$ tarafından üretildi. (Bruns, Herzog, 1993).

Teorem de, $M$ dizilerinin numaralandırılmasının nasıl yorumlanabileceğinin bir özeti verilmiştir. Bu teorem Billera, Lee, Macaulay, McMullen ve Stanley tarafından verilen Macaulay Teoremi, g-teoremi gibi teoremlerin bir sonucudur.

**Teorem 4.1.5.** $n, p \geq 0$ sabit sayıları için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir. (Linusson, 1999).

i. $m_1 \leq p$ ve $m_j = 0$ bütün $j > n$ için $M$ dizilerinin sayıları $(0,0,0, \dots.)$ sayılamayan sonsuzluktadır.

ii. $n.$ yüksek dereceden monomialler, en çok $p$ değişkenine bağlı boş olmayan sıkıştırılmış multıkompleks sayılardır.

iii. $n-1$ boyutlu $f-$vektörlerinin sayısı en fazla $n+p$ köşeye sahip simplical komplekslerdir.

iv. $f$ vektörlerinin $2n$ simplical politoplarını sayısı en fazla $p+2n+1$ tanedir.

v. Standart ayrık k cebirleri için hilbert fonksiyonlarının sayısı $d \leq n$ ve $boyR_1 \leq p$ için $R = R_0 + R_1 + \cdots + R_d$ şeklindedir. (Linusson, 1999).

Teorem 4.1.5. deki ortak sayılar $M^p(n) - 1$ şeklinde gösterilir. (Linusson, 1999).

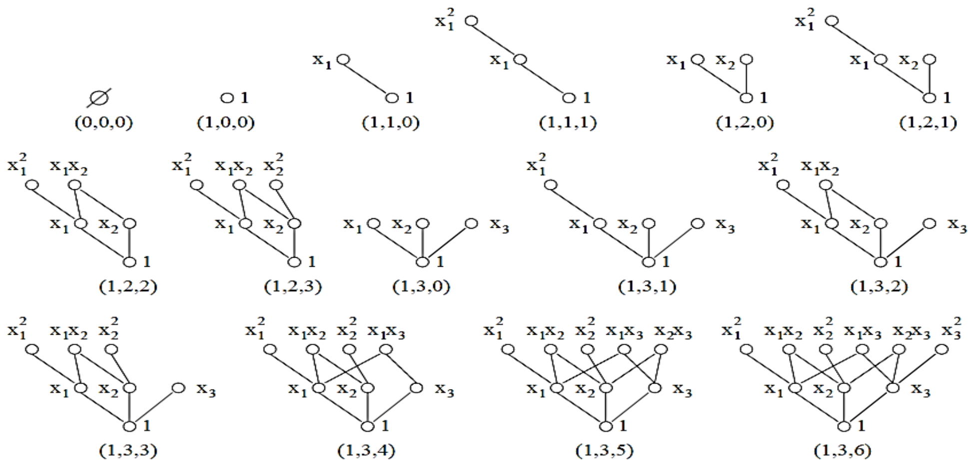
$M -$ dizilerinin sayısı Teorem 4.1.5 den sonra $M^p(n)$ yi boş olmayan multıkompleks yapıların $M -$ dizi sayısından bir fazla olarak tanımlanmıştır. Bu fazladan olan boş multıkompleksler için $(0,0,\dots)$ dan gelir. Dolayısıyla $m_0 = 1$ dir. (Linusson, 1999).

Dolayısıyla $\forall\, p \geq 0$ için $M^p(0) = 2$ dir. Ayrıca $\forall\, p \geq 0$ $M^p(-1) = 1$ şeklinde tanımlanmıştır. Sınırlı sayılabilir $(0,0,\dots)$ ve $(1,0,\dots)$ dizileri için $\forall\, n \geq 0$ için $M^0(n) = 2$ olur. (Linusson, 1999).

${x_1}^{a_1}, \dots {x_p}^{a_p}$ ve ${x_1}^{b_1}, \dots {x_p}^{b_p}$ monomialleri verilsin.

Eğer $a_p = b_p,\ a_{p-1} = b_{p-1}, \dots\ a_{i+1} = b_{i+1}$ fakat $a_i < b_i$ şeklinde ise ${x_1}^{a_1}, \dots {x_p}^{a_p}$ ${x_1}^{b_1}, \dots {x_p}^{b_p}$ ifadesine ters lexicographic denir. $A$ $\mathcal{M}$ multikompleksinde sıkıştırılmış ve $B \in \mathcal{M}$, $deg(A) = deg(B)$ ve $A$ nın $B$ lexicographic ten önce gelmesi ima edilirse $A \in \mathcal{M}$ olur. (Linusson, 1999).

**Örnek 4.1.6.** $p = 3$ ve $n = 2$ olduğu zaman $M -$ dizileri ve ona tekabül eden sıkıştırılmış multikompleksler aşağıdaki tablodaki olur.




**Şekil 4.1.** $M$ – Dizileri

Macaualay teoremini kullanarak belirli bir uzunluktaki tüm olası $M -$ dizileri yazılabilir. Tablo 4.1. de $\{l(n)\}_{n\geq 1} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 12$ dizisinin ilk birkaç terimi ve $M -$ dizisinin en çok 7 teriminin uzunluğu görülür. Enkosky T, ve Stone B. tarafından sınırlandırılmış fakat Fibonacci sayılarına eşit değildir. (Enkosky, Stone, 2014).

**Tablo 4.1.** $M$ $-$ dizilerinin Fibonacci ile bağlantısı

| | $\lambda = 1$ | $\lambda = 2$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 4$ | $\lambda = 5$ | $\lambda = 6$ | $\lambda = 7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 11 | 111 | 1111 | 11111 | 111111 | 1111111 |
| | | | 12 | 121 | 1211 | 12111 | 121111 |
| | | | | 13 | 122 | 1221 | 12211 |
| | | | | | 131 | 123 | 1231 |
| | | | | | 14 | 1311 | 1222 |
| | | | | | | 132 | 13111 |
| | | | | | | 141 | 1321 |
| | | | | | | 15 | 133 |
| | | | | | | | 1411 |
| | | | | | | | 142 |
| | | | | | | | 151 |
| | | | | | | | 16 |
| Total | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 12 |

$M -$ dizisinin uzunluğu Tanım 4.2.1 e göre en fazla 7 dir. $(t_0, t_1, \dots, t_s)$ $M -$ dizisi için $t_0 t_1 t_2 \cdots t_s$ formülünü yazarız. Örneğin, 1221, $M -$ dizisine göre $(1, 2, 2, 1)$ şeklindedir.

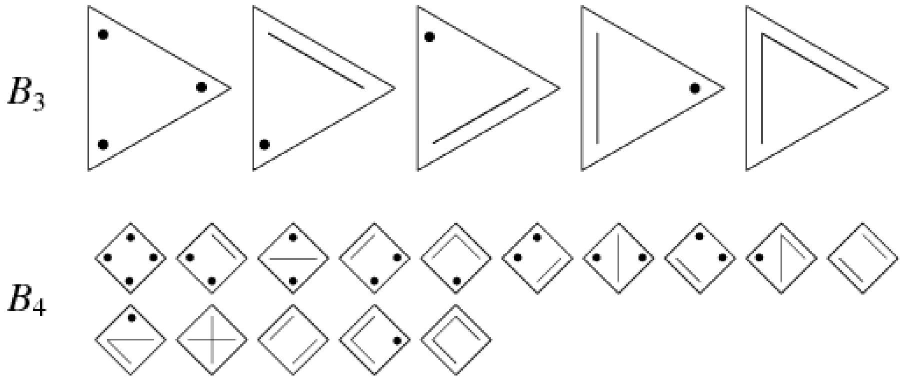
**Örnek 4.1.7.** $\lambda = 4$ için $m -$ vektörü $M = \{x_1^3, x_1^2, x_1, 1\}$ ise $(1,1,1,1)$ olur, eğer $M = \{x_1^2, x_1, x_2 1\}$ ise $(1,2,1)$ olur, eğer $M = \{x_1, x_2, x_3, 1\}$ ise $(1,3)$ şeklindedir.

**Tanım 4.1.8.** Hilbert Fonksiyonları

Dereceli halkaların hilbert fonksiyonları yıllar boyunca iyi çalışılmış olup boyut, çokluluk ve Betti sayıları gibi birçok değişmeyenlerle bağlantılıdır. Linussion Hilbert fonksiyonları ile ilişkili dizileri ve vektörleri hesaplamıştır. Özellikle birçok değişken ve maksimum dereceli olması açısından $M -$ dizilerine ait yinelemeli formüller vermiştir. Bu değişkenler 2 ile sınırlandırıldığında Bell sayılarının birkaç $M -$ dizilimini hesapladığını göstermiştir. “(Linusson, 1999)”

**Örnek 4.1.9.** Bell sayıları aşağıdaki gibidir.

$B_0 = 1$ , $B_1 = 2$ , $B_3 = 5$ , $B_4 = 15$ , $\cdots$




1,2,5,15,52,203,877, ⋯ şeklindedir.

$R = k[x_1, x_2, \dots x_n]$ standart bir derecelendirme ile $k$ cisimi üzerinde polinom halkası olsun. Özellikle $der(x_i) = 1, 1 \leq i \leq n$ . Eğer $I$ dereceli ideal ise ${}^{R}/_{I}$ bölüm halkası da derecelendirilmiştir ve $({}^{R}/_{I})_t = {}^{R}/_{I}$ nın $k$ vektör uzayındaki derecesi $t$ olan bütün homojen elemanlardır. Hilbert fonksiyonu $H_{{}^{R}/_{I}}: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ her bir sınıflandırılmış bileşenlerinin $k$ vektör uzayının boyutu olarak tanımlanır.

$$H_{{}^{R}/_{I}}(t) \coloneqq dim_k\left({}^{R}/_{I}\right)_t .$$

Eğer sınıflandırılmış bölüm halkasının Krull boyutu 0 ise $s \geq 0$ vardır. Öyleki $H_{{}^{R}/_{I}}(s) \neq 0$ fakat $H_{{}^{R}/_{I}}(t) = 0$ bütün $t > s$.

Bu durumda ${}^{R}/_{I}$ $h-$ vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$h\left({}^{R}/_{I}\right) = \left(H_{{}^{R}/_{I}}(0), H_{{}^{R}/_{I}}(1), H_{{}^{R}/_{I}}(2), \dots, H_{{}^{R}/_{I}}(s)\right).$$

Böylece ${}^{R}/_{I}$ nın $h-$ vektörü ${}^{R}/_{I}$ nın birçok sıfır olmayan sonlu girdiye sahiptir.

${}^{R}/_{I}$ da k vektör uzayının boyutu $\lambda\left({}^{R}/_{I}\right)$ şeklinde gösterilir.

$R = k[x_1, x_2, \dots x_n]$ polinom halkasının $G$ derecelendirilmeli bir $k-$cebiri olsun. Buna göre her $R_i$, $k-$cebiri üzerinde vektör uzayıdır. $H$ dereceli bir $R$ modülü $M$ verildiğinde

$$F(M, \lambda) = \sum_{i \in H} H(M, i)\lambda^i$$

dır. Burada,

$$H(M,i) = dim_k M_i$$

$f = H \to N : H(M,.)$ fonksiyonu $M$ nin Hilbert fonksiyonu olarak adlandırılır. (Enkosky, Stone, 2013).

## 4.2. Fibonacci Sayıları ile Bağlantısı

**Tanım 4.2.1.** $n \geq 1$ için girdileri $\mathbb{N}$ olan yenilenmeli Fibonacci sayılarının $F(n)$ vektörler kümesi

(1) $F(1) = \{(1)\}$;

(2) $F(2) = \{(1,1)\}$;

(3) $n \geq 3$ için $F(n) := C(n) \cup D(n)$

şeklinde tanımlanır.

Burada,

$C(n) := \{(1, t_1, \ldots, t_s, 1) \mid (1, t_1, \ldots, t_s) \in F(n-1)\}$ ve

$D(n) := \{(1, t_1, \ldots t_{s-1}, t_s + 1) | (1, t_1, \ldots, t_s) \in F(n-1), t_{s-1} > t_s$ ya da $t_s \geq 1\}$ dir. (Enkosky, Stone, 2014).

Dolayısıyla $C(n)$ ve $D(n)$ kümeleri her $n$ için ayrıktır. Dolayısıyla $F(1)$, $F(2)$, …, ikişer ikişer ayrık kümelerdir.

**Örnek 4.2.2.**

$F(3) = \{(1,1,1), (1,2)\}$;

$F(4) = (1,1,1,1), (1,2,1), (1,3)\}$;

$F(5) = (1,1,1,1,1), (1,2,1,1), (1,3,1), (1,2,2), (1,4)\}$;

$F(6) = \{ (1,1,1,1,1,1), (1,2,1,1,1), (1,3,1,1), (1,2,2,1), (1,4,1), (1,3,2), (1,5),$

$\{(1,2,3)\}$;

$F(7) = \{(1,1,1,1,1,1,1), (1,2,1,1,1,1), (1,3,1,1,1), (1,2,2,1,1), (1,4,1,1),$

$(1,3,2,1), (1,2,3,1), (1,5,1), (1,2,2,2), (1,4,2), (1,3,3), (1,2,4), (1,6)\}$;

$F(8) = \{(1,1,1,1,1,1,1,1), (1,2,1,1,1,1,1), (1,3,1,1,1,1), (1,2,2,1,1,1), (1,4,1,1,1),$

$(1,3,2,1,1), (1,2,3,1,1), (1,5,1,1), (1,2,2,2,1), (1,4,2,1), (1,3,3,1), (1,2,4,1), (1,6,1),$

$(1,3,2,2), (1,2,3,2), (1,5,2), (1,2,2,3), (1,4,3), (1,3,4), (1,2,5), (1,7)\}$;

**Teorem 4.2.3.** Bütün $n \geq 1$ $için$ $F(n)'$ nin eleman sayısı $n$. Fibınacci sayılarıdır $F_n$. (Enkosky, Stone, 2014).

**İspat:** İspat $n$ üzerinden tümevarım metodu ile yapalım.

$n = 1$ için iddia doğrudur. Çünkü $|F(1)| = F_1 = 1$.

$n = 2$ için iddia doğrudur. Çünkü $|F(2)| = F_2 = 1$.

$\vdots$

Kabul edelim ki $r < k$ için iddia doğrudur. Böylece, bütün $r < k$ için $|F(r)| = F_r$ olur.

Şimdi, $n = k$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim , $|F(k)| = F_k$

Biz $|F(k-2)| = F_{k-2}$ ve $|F(k-1)| = F_{k-1}$ olduğunu biliyoruz.

Bu eşitliklerden hareketle

$$|F(k-2)| + |F(k-1)| = F_{k-2} + F_{k-1} = F_k.$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$|F(k)| = F_k$ olur.

**Teorem 4.2.4.** $n \geq 1$ için $M(n) \subseteq F(n)$. Özellikle yukarıda verilen $l(n)$ dizisi Fibonacci dizileri ile üstten sınırlıdır $l(n) \leq F(n)$ . (Enkosky, Stone, 2014).

# 5. ARAŞTIRMA BULGULARI

## 5.1. Lucas Sayıları ile Bağlantısı

**Tanım 5.1.1.** $n \geq 1$ için girdileri $\mathbb{N}$ olan yenilenmeli Lucas sayılarının $L(n)$ vektörler kümesi

(1) $L(1) = \{(1)\}$;
(2) $L(2) = \{(1,1,1), (1), (1,2)\}$;
(3) $n \geq 3$ için $L(n) := C(n) \cup D(n)$ (Özkan, Göçer, Altun, 2017).

şeklinde tanımlanır.

Burada,

$C(n) := \{(1, t_1, \ldots, t_s, 1) \mid (1, t_1, \ldots, t_s) \in L(n-1)\}$ ve

$D(n) := \{(1, t_1, \ldots t_{s-1}, t_s + 1) | (1, t_1, \ldots, t_s) \in L(n-1), t_{s-1} > t_s$ veya $t_s \geq 1\}$ şeklindedir.

**Sonuç 5.1.2.** Tanım 5.1.1 de verilen $L(n)$ vektörleri kümesi $C(n)$ ve $D(n)$ kümelerinin birleşmesiyle oluşur. $L(1)$, $L(2)$, …, ikişer ikişer ayrık kümelerdir.

$L(n)$ kümesinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$L(1) = \{(1)\}$;

$L(2) = \{(1,1,1), (1), (1,2)\}$;

$L(3) = \{(1,1,1,1), (1,1), (1,2,1), (1,3)\}$;

$L(4) = \{(1,1,1,1,1), (1,1,1), (1,2,1,1), (1,2,2), (1,3,1), (1,2), (1,4)\}$;

$L(5) = \{(1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1), (1,2,1,1,1), (1,2,2,1), (1,3,1,1), (1,2,1), (1,4,1),$

$(1,2,3), (1,3,2), (1,3), (1,5)\}$;

$L(6) = \{(1,1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1), (1,2,1,1,1,1), (1,2,2,1,1), (1,3,1,1,1), (1,2,1,1),$

$(1,4,1,1), (1,2,3,1), (1,3,2,1), (1,3,1), (1,5,1), (1,2,2,2), (1,2,2), (1,4,2), (1,2,4),$

$(1,3,3), (1,4), (1,6)\};$

$L(7) = \{(1,1,1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1), (1,2,1,1,1,1,1), (1,2,2,1,1,1), (1,3,1,1,1,1),$

$(1,2,1,1,1), (1,4,1,1,1), (1,2,3,1,1), (1,3,2,1,1), (1,3,1,1), (1,5,1,1), (1,2,2,2,1),$

$(1,2,2,1), (1,4,2,1), (1,2,4,1), (1,3,3,1), (1,4,1), (1,6,1), (1,2,3,2), (1,3,2,2),$

$(1,3,2), (1,5,2), (1,2,2,3), (1,2,3), (1,4,3), (1,2,5), (1,3,4), (1,5), (1,7)$. (Özkan, Göçer, Altun, 2017).

Tablo 5.1. e bakıldığı zaman $M -$ dizisinin 6 terimi ve bu terimlerin uzunluğu rahatlıkla görülebilir.

**Tablo 5.1.** $M\ -$ dizilerinin Lucas ile bağlantısı

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 111 | 1111 | 11111 | 111111 | 1111111 |
| | | 1 | 11 | 111 | 1111 | 11111 |
| | | 12 | 121 | 1211 | 12111 | 121111 |
| | | | 13 | 131 | 1221 | 12211 |
| | | | | 122 | 1311 | 13111 |
| | | | | 14 | 123 | 1231 |
| | | | | 12 | 132 | 1321 |
| | | | | | 141 | 141 |
| | | | | | 121 | 1211 |
| | | | | | 13 | 131 |
| | | | | | 15 | 151 |
| | | | | | | 1222 |
| | | | | | | 124 |
| | | | | | | 133 |
| | | | | | | 142 |
| | | | | | | 122 |
| | | | | | | 14 |
| | | | | | | 16 |
| Total | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 |

$M -$ dizilerinin uzunluğu tabloya göre en fazla 7 dir. $(t_0, t_1, \ldots, t_s)$ $M -$ dizileri için $t_0 t_1 t_2 \cdots t_s$ formülünü yazarız. Tanım 4.2.1 den faydalanarak Teorem 4.4.1 de $l(n)$ dizisinin Lucas sayıları ile sınırlı olduğu gösterildi. (Özkan, Göçer, Altun, 2017).

**Teorem 5.1.3.** $L(n)$ vektörünün eleman sayısı $n$. Lucas sayılarıdır. $L_n, n \geq 1$ dir. (Özkan, Göçer, Altun, 2017).

**İspat:** İspatı $n$ üzerinden tümevarım metodu ile yapalım.

Biz $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$, $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olduğunu biliyoruz.

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_3 = 4$, $L_4 = 7$, $\cdots$.

$n = 1$ için iddia doğrudur. Çünkü $|L(1)| = L_1 = 1$.

$n = 2$ için iddia doğrudur. Çünkü $|L(2)| = L_2 = 3$.

$$\vdots$$

Kabul edelim ki $r < k$ için iddia doğrudur. Böylece bütün $r < k$ için $|L(r)| = L_r$ olur.

Böylece $n = k$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim , $|L(k)| = L_k$

Biz $|L(k-2)| = L_{k-2}$ ve $|L(k-1)| = L_{k-1}$

olduğunu biliyoruz.

Bu eşitliklerden hareketle

$|L(k-2)| + |L(k-1)| = L_{k-2} + L_{k-1} = L_k$

eşitliğine sahip oluruz.

Dolayısıyla,

$|L(k)| = L_k$ olur.

## 5.2. $M -$ Dizileri Üzerine Tanımlanan Ailelere Ait Bazı Özellikler

**Teorem 5.2.1.** $n \geq 2$, $M(n+1) \subseteq L(n)$ dir. Özellikle, $l(n+1)$ in uzunluğu yukarıdaki lucas sayılarının uzunluğu ile sınırlıdır. (Özkan, Göçer, Altun, 2017).

**İspat:** Her tamsayı vektörler $(1, t_1, \dots, t_s)$ , $1 + t_1 + t_2 + \dots + t_s = n + 1$ kümesi yapılandırılarak $L(n)$ kontrol edilebilir ve eğer $t_i = 1$ ise bütün $j \geq i$ dir.

$m = (1, m_1, \dots, m_s) \in L(n+1)$ bir dizisinin uzunluğu olduğunu kabul edelim.

Macaulay teorisini kullanarak eğer $m_i = 1$ ise bazı durumlarda $i \geq 1$, daha sonra tüm $j \geq i$ için $m_j = 1$ olur. Böylece, $M(n+1) \subseteq L(n)$ olur.

$n$ üzerinden tümevarım bu eşitliğin ispatını sağlar.

$$M(n+1) \subseteq L(n) , n \geq 2,$$

olduğunu biliyoruz.

$n = 2$ için iddia doğru. Çünkü $M(3) \subseteq L(2)$:

$$M(3) = \{(1,1,1), (1,2)\}$$

ve

$$L(2) = \{(1,1,1), (1), (1,2)\}.$$

$n = 3$ için iddia doğru. Çünkü $M(4) \subseteq L(3)$:

$$M(4) = \{(1,1,1,1), (1,2,1), (1,3)\}$$

ve

$$L(3) = \{(1,1,1,1), (1,1), (1,2,1), (1,3)\}.$$

Kabul edelim ki

$$M(k) \subseteq L(k-1)$$

ve

$$M(k+1) \subseteq L(k)$$

iddia doğru olsun .

$n = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

$$M(k+2) \subseteq L(k+1).$$

$s$, bir kümenin eleman sayısını göstermek üzere,

$$M(k) \subseteq L(k-1) \;\Rightarrow\; s\big(M(k)\big) \leq s\big(L(k-1)\big), \text{ dır.}$$

Buradan hareketle,

$$M(k+1) \subseteq L(k) \;\Rightarrow\; s\big(M(k+1)\big) \leq s\big(L(k)\big),$$

yazılır.

$$s\big(M(k) \cup M(k+1)\big) = s\big(M(k)\big) + s\big(M(k+1)\big) - s\big(M(k) \cap M(k+1)\big),$$

Eşitliğinden $M(k)$ ve $M(k+1)$ ayrık kümeler olduğundan

$$s\big(M(k) \cap M(k+1)\big) = 0$$

olur.

Dolayısıyla,

$$s\big(M(k) \cup M(k+1)\big) = s\big(M(k)\big) + s\big(M(k+1)\big)$$

yazılır.

Bu eşitliklerden

$$M(k) \cup M(k+1) \subseteq L(k-1) \cup L(k)$$

elde edilir.

Aynı şekilde,

$$s\big(L(k-1) \cup L(k)\big) = s\big(L(k-1)\big) + s\big(L(k)\big) - s\big(L(k-1) \cap L(k)\big),$$

eşitliğinden $(k-1)$ ve $L(k)$ ayrık kümeler olduğundan

$$L(k-1) \cap L(k) = 0$$

sağlanır.

$$s\big(L(k-1) \cup L(k)\big) = s\big(L(k-1)\big) + s\big(L(k)\big)$$

eşitliği elde edilir ve

$$s\big(M(k)\big) + s\big(M(k+1)\big) \leq s\big(L(k-1)\big) + s\big(L(k)\big)$$

olur. Diğer yandan,

$$s\big(M(k)\big) + s\big(M(k+1)\big) = s\big(M(k+2)\big) \ , s\big(L(k-1)\big) + s\big(L(k)\big) = s\big(L(k+1)\big)$$

yazılır.

$$M(k+2) \subseteq L(k+1)$$

olduğundan,

$$s\big(M(k+2)\big) \leq s\big(L(k+1)\big)$$

yazılır.

Böylece,

$$M(n+1) \ \subseteq \ L(n)$$

elde edilir.

**Teorem 5.2.2.** $n \geq 2,\ L(n) \setminus M(n+1) = M(n-1)$. (Özkan, Göçer, Altun, 2017).

**İspat:** İspatı $n$ üzerinden tümevarım metodu ile yapalım.

$$n = 2 \text{ için}, \quad L(2) \setminus M(3) = M(1)$$
$$n = 3 \text{ için}, \quad L(3) \setminus m(4) = M(2)$$

$$\vdots$$

$$n = k \text{ için, } L(k) \setminus M(k+1) = M(k-1)$$

iddianın doğru olduğunu kabul edelim

$$n = k+1 \ , L(k+1) \setminus M(k+2) = M(k)$$

için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$L(k) \setminus M(k+1) = M(k-1)$$

eşitliği kullanılarak

$$L(k) = M(k-1) \cup M(k+1)$$

olduğunu rahatlıkla görebiliyoruz.

Buradan hareketle

$$L(k+1) = M(k) \cup M(k+2)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise bize

$$L(k+1) \setminus M(k+2) = M(k)$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

**Örnek 5.2.3.**

$$L(2) \setminus M(3) = M(1)$$

$$L(3) \setminus M(4) = M(2)$$

$$L(4) \setminus M(5) = M(3)$$

**Sonuç 5.2.4.** $n \geq 2$ $|L(n)| - |F(n+1)| = |F(n-1)|$ ve $F(n-1)$ in mertebesi $(n-1)$. Fibonacci sayılarıdır $F_n$. (Özkan, Göçer, Altun, 2017).

**İspat:** İspatı $n$ üzerinden tümevarım metodu ile yapalım.

$$n = 2 \text{ için, } \qquad |L(2)| - |F(3)| = |F(1)|$$

$$|L(2)| = 3, |F(3)| = 2, |F(1)| = 1$$

$$|L(2)| - |F(3)| = |F(1)|$$

$$3-2=1$$

$$\vdots$$

$n=k-1$ için, $\quad |L(k-1)|-|F(k)|=|F(k-2)|$

$n=k$ için, $\quad |L(k)|-|F(k+1)|=|F(k-1)|$

iddianın doğruluğunu kabul edelim.

$n=k+1$ için, $\quad |L(k+1)|-|F(k+2)|=|F(k)|$

doğru olduğunu gösterelim.

$$|L(k-1)|-|F(k)|=|F(k-2)|$$

$$|L(k)|-|F(k+1)|=|F(k-1)|$$

Buradan,

$$|L(k-1)|=|F(k-2)|+|F(k)|$$

$$|L(k)|=|F(k-1)|+|F(k+1)|$$

eşitliklerini yazarız. Son iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$|L(k-1)|+|L(k)|=|F(k-2)|+|F(k-1)|+|F(k)|+|F(k+1)|$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan hareketle

$$|L(k-1)|+|L(k)|=|L(k+1)|,$$

$$|F(k-2)|+|F(k-1)|=|F(k)|$$

$$|F(k)|+|F(k+1)|=|F(k+2)|$$

eşitliklerin olduğunu görürüz. Bu yüzden

$$|L(k+1)|=|F(k)|+|F(k+2)|$$

eşitliği sağlanır.

## 6. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada, $M-$ dizilerinden hareketle yeni bir aile tanımlanmış. Tanımlanmış olan yeni ailenin mertebesinin Fibonacci ve Lucas sayılarını verdiği gösterildi ve tanımlanmış olan bu ailenin Fibonacci ve Lucas sayıları ile sınırlandığı ispatlandı ve T. Enkosky ve B. Stone nın tanımlamış oldukları aile ile bizim tanımladığımız aile arasında bazı teorem ve özdeşlikler elde edildi.

Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımı verildi ve bu tanım yardımıyla genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının elemanları bulundu. Ayrıca Fibonacci ve Lucas sayıları ve bağıntılarının genelleştirilmiş durumları elde edildi.

Bu bağıntılardan yola çıkılarak Fibonacci ve Lucas sayılarında yeni aile ile ilgili teorem ve özellikler bulundu.

Bu çalışma üzerinde inceleme yapıldığı takdirde Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan, $F(n)$ vektörler kümesi ve Lucas sayılarının yeni bir ailesi olan $L(n)$ vektörler kümesi ile ilgili çok daha fazla özelliğe ulaşılıp, özdeşlikler yazılabilir.

# 7. ÖNERİLER

Son zamanlarda Fibonacci ve Lucas sayılarına ilgi gittikçe artmaktadır. Bunlar matematiğin birçok branşında görülmektedir. Ayrıca fizik, kimya, mühendislik gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bunun içindir ki birçok matematikçinin ilgi odağı olmuştur. Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır ve yapılan çalışmalardan hareketle her seferinde farklı özelliklerin ortaya çıktığı görülmektedir. Bu çalışmada da matematiğin birçok branşından faydalanmıştır. Bunlar grafik teorisi, topolojik uzaylar ve geometri de kullanılan manifoldlardan faydalanılmıştır.

Bu çalışmadan hareketle tanımlanan ailelerin Fibonacci ve Lucas ile bağlantıları gösterilmiş olup yeni araştırmacılara daha farklı özellikte yardımcı olacağına inanıyorum. Bu çalışma üzerinde inceleme yapıldığı takdirde Fibonacci sayılarının yeni bir ailesi olan, $F(n)$ vektörler kümesi ve Lucas sayılarının yeni bir ailesi olan $L(n)$ vektörler kümesi ile ilgili çok daha fazla özelliğe ulaşılıp, özdeşlikler yazılabilir.

Aynı zamanda Pell, Jacobstall dizileri ile ilgili yeni bir aile tanımlanıp ilgili özellikler bulunabilir.

## KAYNAKLAR


Akbulak, M. and Bozkurt, D. (2009) "On the order $-\, m$ generalized Fibonacci k $-$ numbers", ***Chaos Soliton Fract.*** *42(3),* , 1347-1355.

Asar A. , Arıkan A. , Arıkan A. (2009) "Cebir" ***Elatun Yayınevi*** 1. Basım Temmuz. Samsun

Bayraktar, M. (2006 ) "Soyut Cebire ve Sayılar Teorisi", ***Gazi Kitapevi,*** Ankara

Bozkurt, D. (2006) "Soyut Cebire Giriş" , ***Selçuk Üniversitesi,*** II. Baskı, Konya

Bruns, W. and Herzog, J. (*1993)* Cohen-Macaulay Rings, in: "Cambridge Studies in Advanced Mathematics", vol.39, ***Cambridge University Press***, Cambridge, MR1251956 (95h:13020).

Civciv, H. (2009) "Fibonacci ve Lucas matris dizileri ve özellikleri" ***Selçuk Üniversitesi,*** Doktora Tezi

Çallıalp, F. (2001) "Örneklerle Soyut Cebir", ***Birsen Yayınevi,***

Enkosky, T. and Stone, B. (2014) " A sequence defined by M $-$ sequences ", ***Discrete Mathematics*** 333 3538.

Enkosky, T. and Stone, B. (2013) "Sequence defined by $h -$ vectors", ***arXiv:1308.4945v2 [math.CO]*** 26 Aug.

Harmancı, A. (1987) "Cebir I-II", ***Hacettepe Üniversitesi Yayını,*** Ankara

Kilic, E. And Tasci, D. (2008) "Generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers", ***Rocky Mountain J. Math.*** 38, , 19912008.

Koshy, T. (2001) "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", ***A Wiley Interscience Publication, John Wiley&SonsInc***., ISBN: 978-0-471-39969-8,

Linusson, S. (1999) "The number of $M$ $-$sequences and f –vectors", ***Combinatorica 19*** (2) 255–266. MR1723043 (2000k:05012).

Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010) "A new family of k-Fibonacci numbers", ***Applied Mathematics and Computation*** 215 4456–4461.

Özkan, E. (2007) "On Truncated Fibonacci Sequences", ***Indian J. Pure of and App.Mathematics,***38(4), 241-251.

Özkan, E., Göçer, A. and Altun, İ. (2017) "A new sequence realizing Lucas numbers, and the Lucas bound", **Electronic Journal of Mathematical Analysis and applications**, Vol. 5(1) Jan., pp. 122-

Özkan, E., Altun, İ. and Göçer, A. (2017) "On Relationship Among a New of k-Fibonacci, k- Lucas Numbers", ***Chiang Mai Journal of Science.***; 44(x):1-7

Özkan, E., Aydn, H. and Dikici, R. (2003 ) "3-step Fibonacci series modulo" , ***Applied Mathematics and Computation,*** 143, 165-172.

Stewart, I. (1996) "Math. Rec." **Scientific American,** #6, p 103.

Taşcı, D. (2007) "Soyut Cebir", ***Alp Yaynevi,*** I. Baskı, Ankara

Taşyurdu, Y. Gültekin, İ. (2013) "On period of Fibonacci sequences in finite rings with identity of order $p^2$",***Journal of Mathematics and System Science***, 3, 349-352.

# EKLER

**Ek-1.** Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Özkan, E., Göçer, A. and Altun, İ. (2017) "A new sequence realizing Lucas numbers, and the Lucas bound", ***Electronic Journal of Mathematical Analysis and applications****,* Vol. 5(1) Jan., pp. 122-

Özkan, E., Altun, İ. and Göçer, A. (2017) "On Relationship Among a New of k-Fibonacci, k- Lucas Numbers*",* ***Chiang Mai Journal of Science.***; 44(x):1-7

Özkan, E. Altun, İ. and Göçer, A. Genelleştirilmiş Lucas polinomları, ***10. Ankara Matematik Günleri, 11-12 Haziran 2015****,* Ankara

Özkan,E. Göçer,A. And Altun İ. The relationship between $n'th$ Lucas number and a sequence defined by $M -$ sequences, ***İnternational Conferance on Pure and Applied Mathematics, ICPAM 2015, 25-28 August, 2015***.

## ÖZGEÇMİŞ

Ali Aykut GÖÇER 02/02/1991 de Hatay'ın Kırıkhan ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Kırıkhan'da orta öğrenimini Reyhanlı'da tamamladı. 2010 yılında başladığı Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2014 yılında birincilikle bitirdi. Aynı yıl Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimi aldı. 2014-2015 eğitim öğretim yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Cebir ve Sayılar Teorisi branşında başladığı yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.