T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

ÖKLİDYEN 3-UZAYDA REKTİFİYAN-DOĞRULTU EĞRİLER

Gökhan MUMCU

Danışman: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2018

Kabul ve Onay Sayfası

Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ danışmanlığında, Gökhan MUMCU tarafından hazırlanan bu çalışma 14/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Ömer TARAKCI	İmza:
Danışman	: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 20 / 12 / 2018 tarih ve 46/…6….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Öklidyen 3-Uzayda Rektifiyan-Doğrultu Eğriler" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 14/12/2018

Gökhan MUMCU

ÖZET

Yüksek Lisans

ÖKLİDYEN 3-UZAYDA REKTİFİYAN-DOĞRULTU EĞRİLER

Gökhan MUMCU

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ

Bu tezde, 3-Boyutlu Öklid uzayında rektifiyan–doğrultu ve rektifiyan–donor isimleri verilen yeni eğri çiftleri tanımlanmıştır. Bu eğri çiftleri ile ilgili bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca rektifiyan–doğrultu eğrisinin helis, slant helis, Salkowski ve anti-Salkowski gibi bazı özel eğriler arasındaki ilişkiler konu edilmiştir.

2018, 32 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Özel eğriler, rektifiyan-doğrultu eğrisi, rektifiyan-donor eğrisi.

ABSTRACT

Master Thesis

RECTIFYING-DIRECTION CURVES IN EUCLIDEAN 3-SPACE

Gökhan MUMCU

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ

In this thesis, new curve couples such as rectifying-direction and rectifying-donor curves in 3-dimensional Euclidean space are defined. Some theorems and conclusions with regard to those curve couples are given. Moreover, relations between rectifying-direction curves and some special curves such as helix, slant helix, Salkowski and anti-Salkowski curves are obtained.

2018, 32 Pages

Keywords: Special curve, rectifying-direction curve, rectifying-donor curve.

TEŞEKKÜR

Gerçekleştirmiş olduğum bu tez çalışmasında her daim desteğini asla esirgemeyen, zorlandığımızda kolaylık gösteren, yorulduğumuzda motive eden, umutsuzluğa düştüğümüzde umut yolunu açan her adımda doğruya yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam sırasında her türlü desteği veren babam, annem ve özellikle kardeşim Merve'ye sabırlarından ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Gökhan MUMCU
Aralık, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

B	Binormal Vektör
D	Darboux Vektör
E^3	3-Boyutlu Öklid Uzayı
E^n	n-Boyutlu Öklid Uzayı
κ	Eğrinin Eğriliği
N	Aslinormal Vektör
τ	Eğrinin Burulması (Torsiyon)
T	Teğet Vektör
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\Vert \; \Vert$	Norm

Kısaltmalar

ND	Normal-doğrultu
OD	Oskülatör-doğrultu
RD	Rektifiyan-doğrultu

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri, geometriye ait problemleri diferensiyel ya da integral hesaplama yollarını kullanarak çözüm bulmaya odaklanan matematiğin bir disiplinidir. Diferensiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biri de eğriler teorisidir. Eğriler, birçok gerçek dünya durumundan ortaya çıkmıştır. Örneğin; ağaç gövdesindeki genişleyen halkalar, toprak yüzeylerin eğriliği veya mimari yapılardaki şekiller eğrilerin tanımlanmasına ihtiyaç olduğunu göstermiştir. Eğriler teorisi, birçok bilim alanında da geniş yere sahiptir. Özellikle Öklid geometrisindeki eğriler ve bu eğrilerin kullanım alanları oldukça geniştir. Örneğin Frenet hareketleri, mekanik ve kinematikte incelenmekteyken; DNA çifti, karbon nano tüplerini tanımlamada ise helis eğrilerinden yararlanılmaktadır (Izumiya and Takeuchi, 2002, 2004).

Eğriler tek boyutlu ve sürekli geometrik cisimler olarak düşünülmesine rağmen çeşitli düzlem ve uzaylarda farklı eğri şekilleri bulunabilmektedir. Eğrileri tanımlamada ise parametrelerden yararlanılmaktadır. Yay parametresi bunlardan en önemlisidir. Ayrıca Serret-Frenet çatısı ile eğrinin karakterizasyonu verilebilir bunun için eğrilikler gerekir. Bu eğrilikleri ise yay parametresi ile tanımlamak daha avantajlıdır. Bu eğriliklere göre bazı eğriler özel yere sahipdir. Bu özel eğrilere helis, slant helis, düzlemsel eğri veya küresel eğri gibi tekil eğriler örnek oluşturur (Barros, 1997; Izumiya and Takeuchi, 2002; Struik, 1988). Bazı özel eğrilerin tanımları ise Frenet düzlemleri düşünülerek verilebilir. Eğer eğrinin pozisyon (yer) vektörü rektifiyan, normal veya oskülatör düzlem üzerinde yatıyorsa bu eğrilere sırasıyla rektifiyan eğri, normal eğri veya oskülatör eğri denir (Chen, 2003). Ayrıca rektifiyan, normal veya oskülatör eğriler 3 boyutlu Öklid uzayda Cesaro’nun sabit nokta koşulunu sağlar. Yani bu eğrilerin bulundukları düzlemler her zaman belirli bir nokta içerir (Otsuki, 1961). Bir eğrinin bütün noktaları normal veya oskülatör düzlemden geçerse küresel veya düzlem eğrisi olduğu bilinmektedir. Düzlemsel olmayan bir eğrinin tüm noktaları rektifiyan düzlemden geçiyorsa eğrilik ve torsiyon oranının sabit olmayan lineer bir fonksiyon olduğu görülür. Rektifiyan eğrisi ile Darboux vektörü arasındaki ilişki mekanik ve kinematikte rol oynamaktadır (Chen, 2005).

Frenet vektörleri ve eğrilikler arasındaki ilişkilerden tanımlanmış olan eğri çiftlerinin incelenmesi ise diferensiyel geometrinin diğer bir inceleme konusu olmuştur.

Eğri çiftlerinin iyi bilinen örnekleri ise İnvolüt-Evolüt eğri çiftleri, Bertrand eğri çiftleri ve Mannheim eğri çiftleridir (Burke, 1960; Izumiya, 2002; Whittemore, 1940).

Özellikle Bertrand eğri çiftleri bilgisayar destekli vektörel çizim veya grafik çizim programlarında önemli rol oynamaktadır (Izumiya and Takeuchi, 2002, 2004).

Eğrinin tarihsel gelişimine bakılırsa; ilk olarak Newton ve Leibniz'in eğri ve eğrilik kavramları üzerine önemli çalışmaları sayesinde eğriler ilerleme ve gelişme kaydetmiştir. 1736'da ise L. Euler eğrilik tanımını vermiştir. 1771 yılında G. Monge uzay eğrisi teorisini ortaya koymuştur. 1847-1851 yıllarında ise F. Frenet ve J. Serret, birbirinden bağımsız olarak şu anki Frenet çatısı ve Frenet-Serret formülleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Bugün bile birçok matematikçi bu çalışmaları kullanmaktadır.

Son yıllarda eğri çiftleri alanında önemli çalışmaları bulunan Choi ve Kim (2012); 3 boyutlu Öklidyen uzayda bir Frenet eğrisine bağlı X birim vektör alanının integral eğrisini düşünerek X–direction ve X–donor gibi yeni özel eğri çifti tanımlamıştır ve bu eğri çiftinin bazı karakterizasyonlarını vermiştir.

Kızıltuğ, Önder ve Yaylı, 3-boyutlu Öklid uzayda bir eğrinin birim normal vektör alanının integral eğrisini düşünerek normal-direction ve normal-donor eğrilerinin tanımını vermiştir. Daha sonra bu eğriler arasındaki ilişkileri incelediler. Ayrıca bu eğriler ile helis, slant helis gibi bazı özel eğriler arasındaki ilişkileri vermiştir.

Kızıltuğ ve Önder (2014), 3-boyutlu Lie gruplarda X-direction ve X-donor eğrilerini çalışarak normal-doğrultu ve normal-donor eğrilerini Lie gruplarda tanımlamıştır. Sonra bu eğriler arasındaki ilişkileri incelemiştir. Daha sonra bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkileri vermiştir. Ayrıca bu eğrilerin 3-boyutlu Lie gruplarda bazı özel eğriler ile arasındaki ilişkileri vermiştir.

Bu tezde ise Choi'nin bu çalışmasından yola çıkılarak rektifiyan–doğrultu ve rektifiyan–donor ismi verilen yeni bir eğri çifti tanımlanmıştır. Tanımlanan bu eğri çiftinin birbiriyle olan ilişkisi araştırılmıştır. Daha sonra bu ilişkiden elde edilen teorem ve sonuçlar yardımıyla bu eğri çiftini bazı özel eğriler ile örneğin; helis, slant helis ve Salkowski gibi eğrilerle olan ilişkileri incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

İlgili bölümlerde ileride kullanılacak olan tanım ve teoremlere temel oluşturacak afin uzaylara, Öklid uzaylara ve eğriler teorisine ait bazı genel tanımlara yer verilmiştir.

2.1. Afin Uzaylar

Bu bölümde Afin uzaylara ait genel tanımlardan bazılarına yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir T cismi üzerinde bir vektör uzay W olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan,

$$f : A \times A \rightarrow W$$

fonksiyonu mevcut ise A ya W vektör uzayı ile birleşmiş bir *afin uzay* denir.

i) $\forall M, N, K \in A$ için $f(\mathrm{M}, \mathrm{N}) + f(\mathrm{N}, \mathrm{K}) = f(\mathrm{M}, \mathrm{K})$,

ii) Bir $M \in A$ ve $\forall \alpha \in W$ için $f(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $N \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 1998).

Örnek 2.1.1. Her bir vektör uzayı kendisi ile birleşen bir afin uzay oluşturur.

Tanım 2.1.2. Bir W vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun.

$P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \dots, \overline{P_0P_n}\}$ vektörlerinin sistemi W'nun bir bazı ise;

$$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

nokta *(n+1)* -lisine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.3. Bir T cismi üzerinde W_1 ve W_2 gibi iki vektör uzayı tanımlansın. Bu vektör uzayları ile birleştirilmiş afin uzaylar A_1 ve A_2 olsun.

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $q \in A_1$ noktası için;

$$\varphi_q : W_1 \to W_2$$

dönüşümünü $\alpha \in W_1$ vektörü için $\alpha = \overrightarrow{MN}$ olacak şekilde afin aksiyomuna göre tek var olan nokta $N \in A_1$ olduğuna göre,

$$\varphi_q(\alpha) = \overrightarrow{f(\mathrm{M})f(\mathrm{N})}$$

dir. Bu durumda φ_q lineer ise f dönüşümüne *afin dönüşüm* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.2. Öklid Uzayları

İlgili bölümde E^n, Öklid uzayına ait genel tanımlardan bazılarına yer verilecektir.

Tanım 2.2.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı W olsun. W'da iç çarpım işlemi olarak,

$$, : WxW \to$$

$$(x, y) \to x, y = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak *Öklid uzayı* adını alır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.2. E^n Öklid uzayında W uzayı bir reel iç çarpım uzayı ve W ile birleşen sıralı bir $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ nokta (n+1)-lisi için eğer,

$$\{\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \dots, \overline{P_0P_n}\}$$

vektör sistemi W'nun bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına *dik çatı (Öklid Çatısı)* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.3. E^n’de $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ dik çatısı verilsin. $P \in E^n$ için,

$$\overline{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{P_0P_i}$$

yazılır. Bu durumda,

$$x_i \, : \, E^n \to$$

$$P \to x_i(P) = x_i$$

şeklinde tanımlı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ fonksiyonlarının cümlesine *Öklid koordinat sistemi* denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.2.4. n-boyutlu $\quad ^n$ uzayında $\alpha \; = (\alpha_{\,1}, \alpha_{\,2}, \dots, \alpha_{\,n})$ için,

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona α’nın *normu* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

2.3. Eğriler Teorisi

İlgili bölümde eğriler teorisinin genel tanımları verilecektir. Ayrıca hız vektörü ve parametre tanımlarından bahsedilecektir.

Tanım 2.3.1. $I,\quad$ ’nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \subseteq \quad \to E^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, E^n uzayı içinde bir *eğri* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.3.2. E^n’de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \subseteq \quad \to E^n$ fonksiyonunun Öklidyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)$$

dir. $(\alpha(t), \alpha'(t)) \in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.3.3. E^n'de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre *birim hızlı* eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine *yay parametresi* adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.3.4. E^n'de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığına karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \ \ t \in I$$

reel sayısına a dan b ye *yay uzunluğu* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.3.5. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ($\forall t \in I$ için $\alpha'(\mathrm{t}) \neq 0$) olan bir α eğrisine *regüler eğri* denir (Hacısalihoğlu, 1998).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde; ilk olarak ileride kullanılacak olan 3-boyutlu Öklid uzayda eğri tanımına, Frenet vektör alanı tanımına ve eğrinin eğriliği tanımına yer verilmiştir. Daha sonra bu teze kaynak oluşturan Choi ve Kim (2012)'in tanımladığı X-doğrultu ve X-donor eğrilerinin tanımlarına yer verilmiştir.

3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 3.1.1. I, 'nin bir açık aralığı olsun. $\alpha : I \to E^3$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, E^3 uzayı içinde bir *eğri* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 3.1.2. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için,

i) $T(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birim teğet vektörü*,

ii) $N(\text{s}) = \dfrac{1}{\kappa(\text{s})} T'(\text{s})$ eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birinci dik vektörü (asli normali)*,

iii) $B(\text{s}) = T(\text{s}) \times N(\text{s})$ eşitliğiyle belirli $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *ikinci dik vektörü (binormali)* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 3.1.3. $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet vektörleri,* $\{T(s), N(s), B(s)\}$ cümlesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet çatısı* ve T, N, B vektör alanlarına ise α eğrisi üzerinde *Frenet vektör alanları* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 3.1.4. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : I \to E^3, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna $\alpha(\text{s})$ eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birinci eğriliği* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 3.1.5. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere,

$$\tau : I \to E^3, \qquad \tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin *burulma fonksiyonu* denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *burulması (ikinci eğriliği)* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

$\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektörü $\alpha' = T$ ve $\kappa > 0$ eğrinin eğriliği τ eğrinin burulması olsun. Bu durumda Frenet-Serret formülleri şöyle yazılabilir:

$$T' = \kappa N \quad , \quad N' = \kappa T + \tau B \quad , \quad B' = \tau N.$$

Ayrıca Frenet-Serret formülleri aşağıdaki matris eşitliğini sağlar:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

(Bottema, 1979; Sturik, 1988).

Tanım 3.1.6. Birim hızlı her $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için, $D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$ vektör alanına α eğrisinin *Darboux vektör alanı* denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 3.1.7. E^3 uzayında birim hızlı regüler $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun:

i) $\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki *oskülatör düzlem,*

ii) $\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki *rektifiyan düzlem,*

iii) $\{B(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme $\alpha(s)$ noktasındaki *normal düzlem* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 3.1.8. Bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin T teğet vektörü, sabit bir k doğrusuyla sabit bir açı yapıyorsa bu α eğrisine *genel helis* denir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Tanım 3.1.9. Bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin N asli normal vektörü, sabit bir k doğrusuyla sabit bir açı yapıyorsa bu α eğrisine *slant helis* denir (Izumiya ve Takeuchi, 2002).

Ayrıca $\alpha : I \to E^3$ eğrisi slant helis ise κ ve τ eğrinin eğrilikleri arasında $\dfrac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)' = sabit$ ilişkisi mevcuttur.

Önerme 3.1.1. $\alpha : I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ olmak üzere:

1. $\kappa = 0$ α bir doğrudur.
2. $\tau = 0$ α bir düzlemsel eğridir.
3. $\kappa = sabit\ ve\ \tau = 0$ α eğrisi bir çemberdir.
4. $\frac{\tau}{\kappa}(s) = sabit > 0$ α eğrisi bir silindirik helistir (Yüce, 2013).

Tanım 3.1.10. $\alpha : I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Eğer α eğrisinin eğriliği κ sabit ve torsiyonu τ sabit değilse eğri *Salkowski eğrisi;* diğer yandan α eğrisinin eğriliği κ sabit değil ve torsiyonu τ sabit ise eğri *anti-Salkowski eğrisi*dir denir (Monterde, 2008).

Sonuç 3.1.1. $\alpha : I \to E^3$, $\kappa = 1$ olacak şekilde regüler bir eğri olsun. α eğrisinin asli normal doğrularının sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapması için gerek ve yeter şart, $\tau(\mathrm{s}) = \pm \dfrac{s}{\sqrt{\tan^2(\varphi) - \mathrm{s}^2}}$ (φ ; eğrinin normali ile sabit doğrultu arasındaki açıdır.) olmasıdır. Bu koşul altında tanımlanan Salkowski eğrisi bir slant helis olur (Monterde, 2008).

Tanım 3.1.11. E^{n+1}'de parametrik bir eğri $\alpha : I \to E^{n+1}$ ve $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n+1}(t))$ olsun. E^{n+1} üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere $\forall t \in I$ için $\dfrac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(\mathrm{t}))$ ise α eğrisine X vektör alanının bir *integral eğrisi*dir denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.12. $M, N \subset E^3$ eğrileri sırasıyla (I, α), (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$'ya karşılık gelen $\alpha(s), \beta(s)$ noktalarında M ve N eğrilerinin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T\ \ (s), N\ \ (s), B\ \ (s)\}$ verildiğinde $\forall \alpha \in I$ için,

$$\{N(s), N\ \ (s)\}$$

ikilisi lineer bağımlı ise (M, N) eğri 2-lisine bir *Bertrand eğri çifti* denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.1.13. $I \subseteq$ olmak üzere $\alpha : I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun ve bu eğriye bağlı X birim vektör alanı,

$$X(s) = u(s)T(s) + v(s)N(s) + w(s)B(s) \tag{3.1}$$

$$u^2(s) + v^2(s) + w^2(s) = 1 \tag{3.2}$$

olmak üzere; X vektör alanının integral eğrisi $\beta : I \to E^3$ eğrisine α eğrisinin X-doğrultu eğrisidir denir. α eğrisine ise X-donor eğrisidir denir (Burada u, v ve w; s 'ye bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.) (Choi ve Kim, 2012).

Tanım 3.1.14. Bir α eğrisine bağlı X birim vektör alanı ve $\beta : I \to E^3$ eğrisi X-doğrultu eğrisi olsun. Eğer X vektör alanı $X = N$ ise β'nın teğet vektörü $\bar{T} = N$ olur. Bu durumda β eğrisine α'nın normal–doğrultu eğrisidir denir. Benzer şekilde $X = B$ ise eğrinin teğet vektörü $\bar{T} = B$ olur. Bu durumda β eğrisine α'nın binormal-doğrultu eğrisidir denir (Choi ve Kim, 2012).

Lemma 3.1.1. Normal-doğrultu (binormal-doğrultu) eğrisinde $X(s)$ birim vektör alanının katsayıları $u(s) = w(s) = 0,\ v(s) = 1$ 'dir ($u(s) = v(s) = 0,\ w(s) = 1$ 'dir) (Choi ve Kim, 2012).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. E^3 Uzayında Rektifiyan-Doğrultu ve Rektifiyan-Donor Eğrileri

Bu bölümde ilk olarak E^3'de rektifiyan-doğrultu ve rektifiyan-donor eğrileri tanımlanmıştır. Sonra bir eğrinin rektifiyan-doğrultu eğri olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Daha sonra rektifiyan-doğrultu ile rektifiyan-donor eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkilere yer verilmiştir. Buradan E^3'de rektifiyan-doğrultu eğrisinin helis, slant helis ve Salkowski eğriler ile ilişkileri incelenmiştir. Son olarak E^3'de rektifiyan-doğrultu eğrisi oskülatör, normal ve rektifiyan düzlem üzerinde düşünülerek bu düzlemlerdeki tanımları verilmiş olup yine bu düzlemlerdeki ilişkileri incelenmiştir.

Tanım 4.1.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Rektifiyan düzlem üzerinde birim X vektör alanını alalım:

$$X(s) = u(s)T(s) + w(s)B(s), \; u(s) \neq 0, \; w(s) \neq 0 . \tag{4.1}$$

Ayrıca $X'(s)$ ve $N(s)$ vektörleri lineer bağımlı vektörler olsun. Bu durumda $X(s)$ birim vektör alanının integral eğrisi $\gamma(s): I \to E^3$, α eğrisinin rektifiyan-doğrultu eğrisidir denir. Esas eğri olan α eğrisine ise γ'nın rektifiyan-donor eğrisidir denir.

($\gamma(s): I \to E^3$ integral eğrisi birim hızlı bir eğridir. Burada s, γ eğrisinin yay uzunluğu parametresidir.)

Teorem 4.1.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi ve $X(s) = u(s)T(s) + w(s)B(s)$ birim vektör alanının integral eğrisi $\gamma: I \to E^3$ olsun. γ eğrisinin α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olması için gerek ve yeter şart,

$$X(s) = c_1 T(s) + c_2 B(s) \tag{4.2}$$

olmasıdır. Burada c_1, c_2 sıfırdan farklı sabitlerdir.

İspat: γ, α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olduğundan Tanım 4.1.1'den,

$$X(s) = u(s)T(s) + w(s)B(s), \tag{4.3}$$

ve $u^2(s)+w^2(s)=1$ olduğu açıktır. "Eş. 4.3" ifadesinin s'e göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa aşağıdaki diferensiyel denklem elde edilir:

$$X'(s) = u'T + (u\kappa - w\tau)N + w'B \ . \tag{4.4}$$

Tanım 4.1.1'den X' ve N lineer bağımlı olduğu için "Eş. 4.4" ifadesinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} u' = 0, \\ u\kappa - w\tau \neq 0, \\ w' = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Yukarıdaki diferensiyel denklem sisteminin çözümünden,

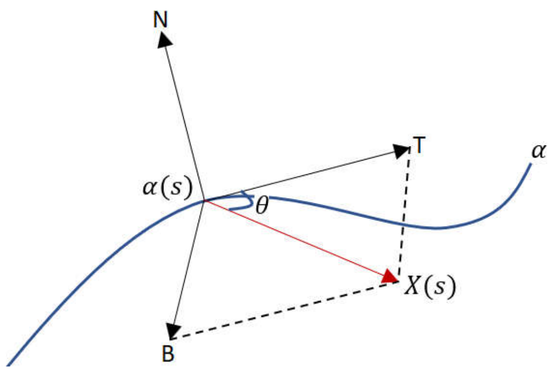
$$u(s) = c_1 = sabit, \ w(s) = c_2 = sabit$$

olduğu açıktır.

Önerme 4.1.1. X ; α eğrisinin rektifiyan düzlemi üzerinde yatan birim vektör alanı olsun. $X(s)=c_1T(s)+c_2B(s)$ olmak üzere;

$$X(s) = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s) \tag{4.6}$$

dir. Buradaki θ açısı X ve T arasındaki açıdır.



Şekil 4.1. $X(s)$ ile T arasındaki θ açısı.

Sonuç 4.1.1. Bir α eğrisinin rektifiyan-doğrultu eğrisi γ olmak üzere γ ile α arasındaki θ açısı sabittir.

Teorem 4.1.2. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Eğer γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi ise α ve γ eğri çifti Bertrand eğri çiftidir.

İspat: γ , X birim vektör alanının integral eğrisi olduğundan $\gamma' = X$ 'dir. γ 'nın Frenet elemanları $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$ olmak üzere $\gamma' = X$ eşitliğinin diferensiyeli alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$X' = \overline{T}' = \overline{\kappa}\overline{N} \ . \tag{4.7}$$

Burada κ, γ eğrisinin birinci eğriliğidir. Tanım 4.1.1'den X' ve N lineer bağımlı olduğu için "Eş. 4.7" denkleminden $\bar{N}$ ve N vektörlerinin lineer bağımlı olduğu elde edilir. Bu ise Bertrand eğri çifti tanımından; α ve γ eğri çiftinin Bertrand eğri çifti olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.3. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi ve γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. γ ve α eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla κ , τ ve κ , τ olmak üzere eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \kappa &= cos\,\theta\,\kappa \quad sin\,\theta\,\tau \\ \tau &= sin\,\theta\,\kappa + cos\,\theta\,\tau. \end{aligned} \tag{4.8}$$

İspat: γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Bu durumda; $X(s) = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$ 'dir. Son denklemin türevi alınır ve

$$X' = \overline{T}' = \overline{\kappa}\overline{N}$$

olduğu kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\kappa\bar{N} = (cos\,\theta\,\kappa \quad sin\,\theta\,\tau)N. \tag{4.9}$$

Son eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\kappa = cos\,\theta\,\kappa \quad sin\,\theta\,\tau. \tag{4.10}$$

Bu durumda son iki eşitlikten aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\bar{N} = N. \tag{4.11}$$

Frenet formülleri ve $X(s) = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$ denkleminden aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = \quad sin\,\theta\, T + cos\,\theta\, B. \tag{4.12}$$

Son eşitliğin s'ye göre türevi alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\bar{B}' = \quad (cos\,\theta\,\tau + sin\,\theta\,\kappa)N. \tag{4.13}$$

Ayrıca $\tau = \quad \langle \bar{B}', \bar{N} \rangle = \quad \langle \bar{B}', N \rangle$ olduğundan "Eş. 4.13" eşitliğinin de yardımıyla aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\tau = cos\,\theta\,\tau + sin\,\theta\,\kappa. \tag{4.14}$$

Sonuç 4.1.2. γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. α ve γ eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}\}$ olmak üzere bu eğrilerin Frenet vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \overline{T} \\ \overline{N} \\ \overline{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Sonuç 4.1.3. γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. γ ve α eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla κ , τ ve κ , τ olmak üzere eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\kappa = cos\,\theta\,\kappa + sin\,\theta\,\tau, \quad \tau = \quad sin\,\theta\,\kappa + cos\,\theta\,\tau. \tag{4.16}$$

4.2. Rektifiyan-Doğrultu Eğrisinin Uygulamaları

Bu bölümde E^3'de rektifiyan-doğrultu eğrisi ile helis, slant helis, Salkowski ve anti-Salkowski gibi bazı özel eğriler arasındaki ilişkiler incelenecektir. Ayrıca bu eğri ilişkilerinden elde edilen teorem ve sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.2.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi ve α, γ eğrisinin rektifiyan-donor eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisi genel helis değildir.

İspat: α, γ eğrisinin rektifiyan-donor eğrisi olsun. Bu durumda Sonuç 4.1.3'den $\dfrac{\tau}{\kappa}$ sabit değildir. Dolayısıyla genel helisin tanımı gereği α eğrisi genel helis değildir.

Şimdi ise rektifiyan-doğrultu eğrisi olan γ 'nın genel helis olma koşulunu araştıralım. İlk olarak γ, rektifiyan-doğrultu eğrisi genel helis olsun. Teorem 4.1.3'den aşağıdaki denklemin sabit olduğu elde edilir:

$$\frac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}}(s) = \frac{\sin\theta\kappa + \cos\theta\tau}{\cos\theta\kappa - \sin\theta\tau} = c\,. \tag{4.17}$$

Son eşitlik ve Sonuç 4.1.1'den aşağıdaki denklem de sabittir:

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{c - \tan\theta}{1 + c\tan\theta}\,. \tag{4.18}$$

Son eşitlik sabit olduğundan α eğrisinin genel helis olması gerekir. Fakat Teorem 4.2.1 düşünülürse bu durumun çelişki olduğu görülür. Buradan aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 4.2.2. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) E^3'de α Frenet eğrisi genel helis değildir.

ii) α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi γ, genel helis değildir.

Ayrıca $\alpha: I \to E^3$ eğrisi slant helis ise κ ve τ eğrinin eğrilikleri arasında $\dfrac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)' = sabit$ ilişkisi mevcuttur. Son eşitlik ve Teorem 4.2.1 birlikte düşünülürse rektifiyan-doğrultu eğrisinin slant helis ile ilişkisi aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 4.2.3. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) E^3'de α Frenet eğrisi slant helistir.

ii) α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi γ, slant helistir.

Örnek 4.2.1. Monterde (2008) 'de tanımlanan Salkowski eğrisi ve bu eğrinin aşağıdaki parametrizasyonu verilmiş olsun:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(-\frac{1-n}{4(1+2n)}\sin((1+2n)s)-\frac{1+n}{4(1-2n)}\sin((1-2n)s)-\frac{1}{2}\sin s,\right.$$
$$\frac{1-n}{4(1+2n)}\cos((1+2n)s)+\frac{1+n}{4(1-2n)}\cos((1-2n)s)+\frac{1}{2}\cos s,$$
$$\left.\frac{1}{4m}\cos(2ns)\right)$$

Burada $n=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, $m\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0$'dir (Şekil 4.1.) (Monterde 2008). Bu eğri aynı zamanda bir slant helistir. Bu eğrinin Frenet elemanları, eğrilik ve burulması aşağıdaki gibidir:

$$T(s)=-\left(\cos s\cos(ns)+n\sin s\sin(ns),\ \cos(ns)\sin s-n\cos s\sin(ns),\ \frac{n}{m}\sin(ns)\right)$$

$$N(s)=n\left(\frac{\sin s}{m},\ -\frac{\cos s}{m},\ -1\right)$$

$$B(s)=\left(n\sin s\cos(ns)-\cos s\sin(ns),\ -n\cos(ns)\cos s-\sin s\sin(ns),\ \frac{n}{m}\cos(ns)\right)$$

$$\kappa(s)=1,\quad \tau(s)=\tan(ns)\ .$$

Burada $\theta=\frac{\pi}{4}$ olarak seçilirse $X(s)=\cos\theta T(s)+\sin\theta B(s)$ olduğundan $X(s)=\left(x_1(s),x_2(s),x_3(s)\right)$ vektör alanının bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$x_1(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos s\cos(ns)-n\sin s\sin(ns)+n\sin s\cos(ns)-\cos s\sin(ns)\right)$$
$$x_2(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos(ns)\sin s+n\cos s\sin(ns)-n\cos(ns)\cos s-\sin s\sin(ns)\right)$$
$$x_3(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{n}{m}\left(-\sin(ns)+\cos(ns))\right)$$

γ, rektifiyan-doğrultu eğrisi olduğundan tanımı gereği;

$$\gamma = \int_0^s \gamma'(s)ds = \int_0^s X(s)ds = \left(\gamma_1(s),\ \gamma_2(s), \gamma_3(s)\right)$$

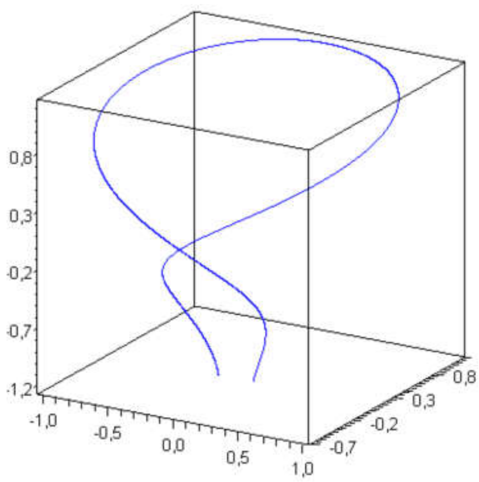
dır. Buradan γ eğrisinin bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

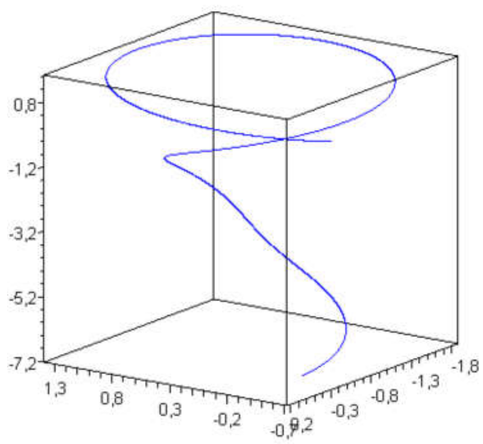
$$\gamma_1(s) = \int_0^s \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos s\cos(ns) - n\sin s\sin(ns) + n\sin s\cos(ns) - \cos s\sin(ns)\right) \right] ds,$$
$$\gamma_2(s) = \int_0^s \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos(ns)\sin s + n\cos s\sin(ns) - n\cos(ns)\cos s - \sin s\sin(ns)\right) \right] ds,$$
$$\gamma_3(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{n}{m}\left(-\sin(ns) + \cos(ns)\right) ds$$

(Şekil 4.2.). α, rektifiyan-donor eğrisi slant helis olduğundan Teorem 4.2.3'den γ rektifiyan-doğrultu eğrisinin de slant helis olduğu görülür.

α, slant helis eğrisi ve γ, α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi sırasıyla aşağıdaki şekillerde verilmiştir:

(a) **(b)**





Şekil 4.2. **(a)** Slant helis; α, $m = 1/5$ için. **(b)** γ, α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi.

4.3. Düzlemsel Eğrilerin Rektifiyan-Doğrultu Eğrisi ile İlişkisi

Bu bölümde E^3'de α eğrisinin düzlemsel bir eğri olduğu düşünülerek α eğrisi ile α eğrisinin rektifiyan-doğrultu eğrisi arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu ilişkilere eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkilerden yola çıkılarak ulaşılmıştır.

Teorem 4.1.3 ve Sonuç 4.1.3'den γ ve α eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla κ , τ ve κ , τ olmak üzere eğrilikler arasındaki ilişkiler sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\overline{\kappa} = \cos\theta\kappa - \sin\theta\tau\,, \quad \overline{\tau} = \sin\theta\kappa + \cos\theta\tau \tag{4.19}$$

ve

$$\kappa = \cos\theta\overline{\kappa} + \sin\theta\overline{\tau}\,, \quad \tau = -\sin\theta\overline{\kappa} + \cos\theta\overline{\tau}\,. \tag{4.20}$$

Şimdi ise α eğrisinin düzlemsel olduğunu kabul edelim. "Eş. 4.19" dan rektifiyan-doğrultu eğrisi γ'nın genel helis olduğu görülür. Fakat bu durum Teorem 4.2.2 ile çelişir. Benzer şekilde γ eğrisinin düzlemsel bir eğri olduğu kabul edilirse "Eş. 4.20" den α, rektifiyan-donor eğrisinin genel helis olduğu görülür. Bu ise yine Teorem 4.2.2. ile çelişir. Son bulgulardan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) E^3'de α Frenet eğrisi düzlemsel eğri değildir.

ii) γ, rektifiyan-doğrultu eğrisi E^3'de düzlemsel eğri değildir.

4.4. OD-Rektifiyan Eğrisinin Rektifiyan-Doğrultu Eğrisi ile İlişkisi

Bu bölümde E^3'de rektifiyan-doğrultu eğrisini oskülatör düzlem üzerinde düşünerek oskülatör rektifiyan-doğrultu (OD-rektifiyan) eğriler tanımlanmıştır. Ayrıca rektifiyan-doğrultu eğriler ile OD-rektifiyan eğriler arasındaki ilişki incelenmiştir.

Tanım 4.4.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca; α'nın Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve γ, α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Eğer γ'nın pozisyon vektörü her zaman oskülatör düzlem üzerinde yatıyorsa bu durumda γ eğrisi oskülatör rektifiyan-doğrultu eğrisidir (veya OD-rektifiyan eğrisidir) denir.

OD-rektifiyan eğrisi tanımı yardımıyla aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\gamma(s) = m(s)T(s) + n(s)N(s) \tag{4.21}$$

burada $m(s)$, $n(s)$; s parametresine bağlı sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

"Eş. 4.21" denklemi ve

$$X = \bar{T} = cos\,\theta\, T + sin\,\theta\, B$$

eşitliğinden aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\cos\theta T + \sin\theta B = (m' - n\kappa)T + (n' + m\kappa)N + n\tau B \tag{4.22}$$

Frenet vektörleri lineer bağımsız olduğundan aşağıdaki diferensiyel denklem sistemi yazılabilir:

$$\begin{cases} m' - n\kappa = \cos\theta, \\ n' + m\kappa = 0, \\ n\tau = \sin\theta. \end{cases} \tag{4.23}$$

Bu denklem sistemin çözümünden aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$m(s) = \sin\theta \frac{\tau'}{\kappa\tau^2}, \quad n(s) = \frac{\sin\theta}{\tau}. \tag{4.24}$$

"Eş. 4.24" ifadeleri "Eş. 4.21" denkleminde yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\gamma(s) = \frac{\sin\theta}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\kappa\tau}T(s) + N(s)\right).$$

Son eşitlik yardımıyla aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 4.4.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) E^3'de γ, α'nın OD-rektifiyan eğrisidir.

ii) γ'nın parametrik gösterimi $\gamma(s) = \dfrac{\sin\theta}{\tau}\left(\dfrac{\tau'}{\kappa\tau}T(s) + N(s)\right)$ 'dır.

Burada θ, γ ve α arasındaki sabit açıdır.

Teorem 4.4.2. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca γ eğrisi α'nın OD-rektifiyan eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) α Frenet eğrisi E^3'de anti-Salkowski eğrisidir.

ii) Rektifiyan-doğrultu eğrisi γ'nın pozisyon vektörü, α eğrisinin $N(s)$ asli normal vektörü ile lineer bağımlıdır.

Örnek 4.4.1. s parametresine bağlı aşağıdaki α eğrisi verilsin.

$$\alpha(s) = \left(-\frac{3}{4}\left(\frac{\cos 3s}{9} + \cos s\right), -\frac{3}{4}\left(\frac{\sin 3s}{9} + \sin s\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\cos s\right)$$

(Şekil 4.3.). $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları ve eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$T(s) = \left(\frac{1}{4}\sin 3s + \frac{3}{4}\sin s,\ -\frac{1}{4}\cos 3s - \frac{3}{4}\cos s,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin s\right),$$

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\cos(3s)}{\cos s} + \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sin(3s)}{\cos s} + \frac{\sqrt{3}}{4}\tan(s),\ -\frac{1}{2}\right),$$

ve

$$\kappa(s) = \sqrt{3}coss\ ,\ \tau(s) = \sqrt{3}sins.$$

Teorem 4.4.1’den γ’nın parametrik gösterimi $\gamma(s)=\dfrac{\sin\theta}{\tau}\left(\dfrac{\tau'}{\kappa\tau}T(s)+N(s)\right)$’dır.

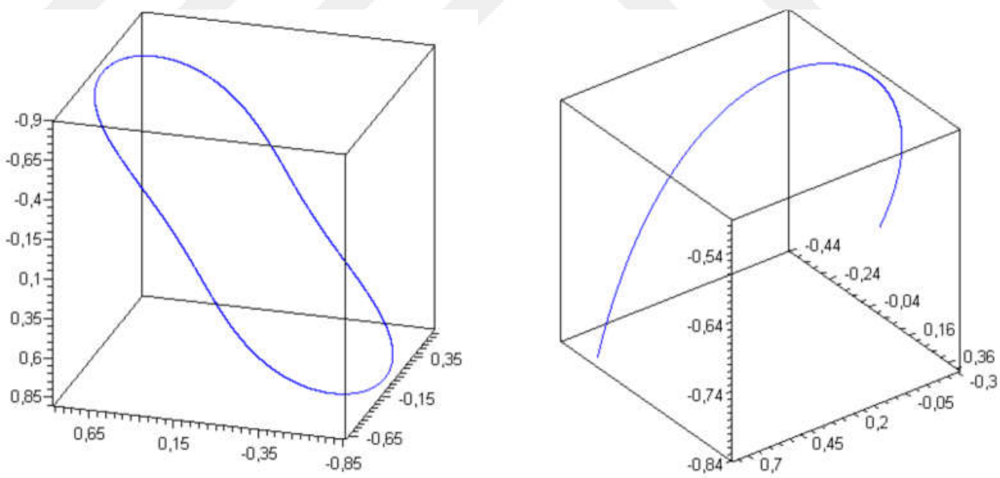
Dolayısıyla OD-rektifiyan eğrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\gamma(s)=\Bigg(&\frac{1}{8\sqrt{3}\sin^2 s}\left(\sin(3s)+3\sin s\right)+\frac{\sqrt{3}}{8\sin s\cos s}\left(\cos(3s)+\cos s\right),\\
&-\frac{1}{8\sqrt{3}\sin^2 s}\left(\cos(3s)+3\cos s\right)+\frac{\sqrt{3}}{8\sin s\cos s}\left(\sin(3s)+\sin s\right),\\
&-\frac{1}{2\sin s}\Bigg)
\end{aligned}
$$

(Şekil 4.4.).

α rektifiyan-donor eğrisi ve γ, OD-rektifiyan eğrisi sırasıyla aşağıdaki şekillerde verilmiştir:

(a) **(b)**



Şekil 4.3. (a) α rektifiyan-donor eğrisi. **(b)** γ, OD-rektifiyan eğrisi.

4.5. ND-Rektifiyan Eğrisinin Rektifiyan-Doğrultu Eğrisi ile İlişkisi

Bu bölümde E^3’de normal rektifiyan-doğrultu (ND-rektifiyan) eğrisi tanımlanmıştır. Ayrıca rektifiyan-doğrultu eğrisi ile ND-rektifiyan eğrisi arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 4.5.1. $\alpha(s) : I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca α eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve γ, α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Eğer γ'nın pozisyon vektörü her zaman asli normal düzlem üzerinde yatıyorsa bu durumda γ eğrisi normal rektifiyan-doğrultu eğrisidir (veya ND-rektifiyan eğrisidir) denir.

Tanım 4.5.1'den γ eğrisinin yeniden parametrelendirilmesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\gamma(s) = a(s)N(s) + b(s)B(s) \tag{4.25}$$

burada $a(s)$, $b(s)$, s parametresine bağlı sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$X = \bar{T} = \cos\theta\, T + \sin\theta\, B$$

denklemi ve "Eş. 4.25" ifadesinden aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\cos\theta T + \sin\theta B = -a\kappa T + (a' - b\tau)N + (b' + a\tau)B\ . \tag{4.26}$$

Frenet vektörleri lineer bağımsız olduğundan aşağıdaki diferensiyel denklem sistemi yazılabilir:

$$\begin{cases} -a\kappa = \cos\theta, \\ a' - b\tau = 0, \\ b' + a\tau = \sin\theta. \end{cases} \tag{4.27}$$

Yukarıdaki diferensiyel denklem sisteminin çözümünden,

$$a(s) = -\frac{\cos\theta}{\kappa}, \quad b(s) = \cos\theta \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \tag{4.28}$$

eşitlikleri elde edilir. "Eş. 4.28" eşitlikleri "Eş. 4.25" de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\gamma(s) = -\frac{\cos\theta}{\kappa}\left(N(s) - \frac{\kappa'}{\kappa\tau} B(s) \right). \tag{4.29}$$

Eğer α eğrisi Salkowski eğri ise "Eş. 4.29" dan $\gamma(s) = AN(s)$ olduğu açıktır. Burada $A = -\frac{\cos\theta}{\kappa}$ sabittir. Öte yandan Salkowski eğrisinin asli normal vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapar. Yani Salkowski eğrisi aynı zamanda slant helistir (Monterde, 2008). Ayrıca Salkowski eğrisinin küresel göstergesi çemberdir. Yani düzlem eğrisidir. Bu durumda Salkowski eğrisinin ND-rektifiyan eğrisi de düzlem eğrisi olur. Fakat bu durumun ise Teorem 4.3.4'den çelişki olduğu görülür.

Son çelişki ve Sonuç 4.1.2 birlikte düşünülürse aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 4.5.1. $\alpha(s) : I \to E^3$ Frenet eğrisi ve γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) E^3 'de γ, α'nın ND-rektifiyan eğrisidir.

ii) γ'nın parametrik gösterimi $\gamma(s) = -\frac{\cos\theta}{\kappa}\left(N(s) - \frac{\kappa'}{\kappa\tau} B(s) \right)$ 'dır.

Burada θ, γ ve α arasındaki sabit açıdır.

Teorem 4.5.2. $\alpha(s) : I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca γ eğrisi α'nın ND-rektifiyan eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) α Frenet eğrisi E^3 'de Salkowski eğrisi değildir.

ii) γ, ND-rektifiyan eğrisi; E^3 'de Salkowski eğrisi değildir.

4.6. RD-Rektifiyan Eğrisinin Rektifiyan-Doğrultu Eğrisi ile İlişkisi

Bir α eğrisinin pozisyon vektörü her zaman rektifiyan düzlem üzerinde yatıyorsa rektifiyan eğrisidir denir (Chen ve Dillen, 2005). Dahası α eğrisinin Frenet çatısı ve eğrilikleri sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve κ, τ olmak üzere $\tilde{D}(s) = \frac{\tau}{\kappa}(s)T(s) + B(s)$ vektörü eğrinin modifiye Darboux vektörü olarak tanımlanır (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 4.6.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi olsun. Ayrıca γ, α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi ve γ'nın Frenet çatısı $\{\overline{T},\overline{N},\overline{B}\}$ olsun. Eğer γ'nın pozisyon vektörü her zaman rektifiyan düzlem üzerinde yatıyorsa bu durumda γ eğrisi rektifiyan-doğrultu rektifiyan eğrisidir (veya RD-rektifiyan eğrisidir) denir.

Tanım 4.6.1.'den γ'nın yeniden parametrelendirilmesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\gamma(s) = r(s)T(s) + t(s)B(s)\,. \tag{4.30}$$

Burada $r(s)$, $t(s)$, s parametresine bağlı sıfırdan farklı diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

"Eş. 4.15" deki $X = \bar{T} = cos\,\theta\, T + sin\,\theta\, B$ denklemi ile "Eş. 4.30" ifadesinden aşağıdaki diferensiyel denklem elde edilir:

$$\cos\theta T + \sin\theta B = r'T + (r\kappa - t\tau)N + t'B\,. \tag{4.31}$$

Frenet vektörleri lineer bağımsız olduğundan aşağıdaki diferensiyel denklem sistemi yazılabilir:

$$\begin{cases} r' = \cos\theta, \\ r\kappa - t\tau = 0, \\ t' = \sin\theta. \end{cases} \tag{4.32}$$

Son diferensiyel denklem sisteminin çözümünden,

$$r(s) = (\cos\theta)s + c_1, \quad t(s) = (\sin\theta)s + c_2 \tag{4.33}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada c_1, c_2 integrasyon sabitleridir. "Eş. 4.33" eşitlikleri ve "Eş. 4.32" nin ikinci eşitliği birlikte düşünülürse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{(\sin\theta)s + c_2}{(\cos\theta)s + c_1}\,. \tag{4.34}$$

"Eş. 4.34" ifadesinde eğer $c_1, c_2 = 0$ ise $\frac{\kappa}{\tau}$ oranının sabit olduğu görülür. Bu nedenle γ eğrisi genel helistir. Fakat bu durum Teorem 4.2.2 ile çelişir. Bu nedenle "Eş. 4.33" ifadesindeki integrasyon sabitleri c_1, c_2 aynı anda sıfır değildir.

Buradan, "Eş. 4.33" eşitlikleri $\gamma(s) = r(s)T(s) + t(s)B(s)$ denkleminde yerine yazılır ve Sonuç 4.1.2 deki $\bar{T} = cos\,\theta\, T + sin\,\theta\, B,\ \bar{B} = \quad sin\,\theta\, T + cos\,\theta\, B$ ifadeleri birlikte düşünülürse,

$$\gamma(s) = (s+\lambda)\overline{T}(s) + \zeta\overline{B}(s) \tag{4.35}$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda = c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta,\ \xi = c_2 \cos\theta - c_1 \sin\theta$ 'dir. Ayrıca bu ifadeler sıfırdan farklı sabitlerdir. "Eş. 4.35" denkleminden aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}} = \frac{s+\lambda}{\xi}. \tag{4.36}$$

"Eş. 4.35" ve "Eş. 4.36" yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\gamma(s) = \xi\left(\frac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}}\overline{T} + \overline{B}\right)(s) = \xi\tilde{\overline{D}}(s). \tag{4.37}$$

burada $\tilde{\overline{D}}(s) = \frac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}}\overline{T} + \overline{B}$; γ, eğrisinin modifiye Darboux vektörüdür. Son eşitlik yardımıyla aşağıdaki teorem ve sonuç verilebilir:

Teorem 4.6.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi ve γ eğrisi α'nın rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Eğer γ, RD-rektifiyan eğrisi ise bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) E^3 'de γ, rektifiyan eğrisinin eğrilikleri oranı $\frac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}} = \frac{s+\lambda}{\xi}$'dır.

(λ, ξ sıfırdan farklı sabitler.)

ii) γ eğrisinin $\tilde{\overline{D}}$ modifiye Darboux vektörü ile pozisyon vektörü lineer bağımlıdır.

Sonuç 4.6.1. $\alpha(s): I \to E^3$ Frenet eğrisi ve γ eğrisi α'nın RD-rektifiyan-doğrultu eğrisi olsun. Bu durumda γ eğrisinin pozisyon vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\gamma(s) = \left[(\cos\theta)s + c_1\right]T(s) + \left[(\sin\theta)s + c_2\right]B(s). \tag{4.38}$$

Burada θ açısı eğriler arasındaki açıdır ve c_1, c_2 aynı anda sıfır olmayan sabitlerdir.

Örnek 4.6.1. $m = 1/9$ olmak üzere α Salkowski eğrisi verilsin (Şekil 4.5). Bu durumda α'nın parametrizasyonu,

$$\alpha(s) = \frac{9}{\sqrt{82}}\left(\frac{\sqrt{82}-82}{8(41+\sqrt{82})}\sin\left(\left(1+\frac{\sqrt{82}}{41}\right)s\right) + \frac{\sqrt{82}+82}{8(\sqrt{82}-41)}\sin\left(\left(1-\frac{\sqrt{82}}{41}\right)s\right) - \frac{1}{2}\sin s,\right.$$
$$\frac{82-\sqrt{82}}{8(41+\sqrt{82})}\cos\left(\left(1+\frac{\sqrt{82}}{41}\right)s\right) - \frac{\sqrt{82}+82}{8(\sqrt{82}-41)}\cos\left(\left(1-\frac{\sqrt{82}}{41}\right)s\right) + \frac{1}{2}\cos s,$$
$$\left.\frac{9}{4}\cos\left(\frac{\sqrt{82}}{41}s\right)\right).$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca,

$$\gamma(s) = \left[(\cos\theta)s + c_1\right]\overline{T}(s) + \left[(\sin\theta)s + c_2\right]\overline{B}(s)$$

denkleminde $\theta = \pi/6,\ c_1 = \sqrt{3}/2,\ c_1 = 1/2$ olarak seçilirse;

α'nın RD-rektifiyan eğrisi;

$$\gamma(s) = \frac{s+1}{2}\left(\sqrt{3}\,\overline{T}(s) + \overline{B}(s)\right)$$

olarak elde edilir (Şekil 4.6.).

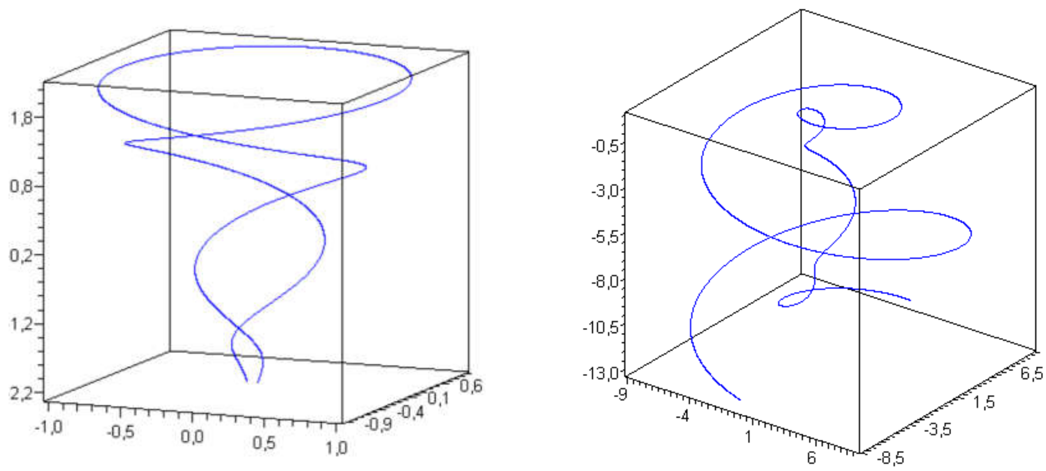
Son denklemde Frenet elemanları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$T(s)=\left(-\cos s\cos\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right)-\frac{\sqrt{82}}{82}\sin s\sin\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right),\right.$$
$$-\sin s\cos\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right)+\frac{\sqrt{82}}{82}\cos s\sin\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right),$$
$$\left.-\frac{9\sqrt{82}}{82}\sin\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right)\right),$$

$$B(s)=\left(\frac{\sqrt{82}}{82}\cos\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right)\sin s-\cos s\sin\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right),\right.$$
$$-\frac{\sqrt{82}}{82}\cos\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right)\cos s-\sin s\sin\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right),$$
$$\left.\frac{9\sqrt{82}}{82}\cos\left(\frac{\sqrt{82}}{82}s\right)\right).$$

α Salkowski eğrisi ve α'nın RD-rektifiyan eğrisi γ sırasıyla aşağıdaki şekillerde verilmiştir:

(a) **(b)**



Şekil 4.4. (a) α, Salkowski eğrisi. **(b)** α'nın RD-ektifiyan eğrisi γ.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, Choi (2012)'nin çalışmasındaki tanımdan yola çıkarak 3-boyutlu Öklidyen uzayda, rektifiyan düzlem üzerinde yatan bir X vektör alanı düşünülerek ve bunun integral eğri tanımından faydalanılarak rektifiyan–doğrultu ve rektifiyan–donor eğrileri ismi verilen yeni bir eğri çifti tanımlandı. Daha sonra bir eğrinin rektifiyan–doğrultu eğrisi olması için gerek ve yeter şart elde edildi. Tanımlanan bu eğrilerin aynı zamanda Bertrand eğri çifti olduğu gösterildi. Sonra rektifiyan–doğrultu eğrisi ile helis, slant helis ve Salkowski gibi özel eğriler arasındaki ilişkiler irdelendi. Ayrıca rektifiyan–doğrultu eğrisinin düzlemsel eğri ve helis olmayacağı, bunun yanında slant helis olabileceği gösterildi. Son bölümde ise rektifiyan–doğrultu eğrisi farklı düzlemlerde düşünülerek OD-rektifiyan, ND-rektifiyan ve RD-rektifiyan eğrileri ile esas eğri arasındaki ilişkiler incelenmiştir ve bu elde edilen ilişkilerden bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Elde edilen bu özgün sonuçların diferensiyel geometride eğri çiftleri için önemli bir kaynak oluşturacağı düşülmektedir.

KAYNAKLAR

Barros, M. (1997) “General Helices and a Theorem of Lancret”, ***Proceedings of the American Mathematical Society***, 125(5), 1503-1509.

Bottema, O. and Roth, B. (1979) “Theoretical Kinematics”, ***North Holland Public Company***, New York.

Burke, J.F. (1960) “Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves”, ***Mathematics Magazine***, 34(1), 60-62.

Chen, B.Y. (2003) “When Does The Position Vector of a Space Curve Always Lie in Its Normal Plane”, ***The American Mathematical Monthly,*** 110, 147–152.

Chen, B.Y. and Dillen, F. (2005) “Rectifying Curves as Centrodes and Extremal Curves”, ***Bulletin of the Institute Mathematics Academia Sinica,*** 33, 77-90.

Choi, J.H. and Kim, Y.H. (2012) “Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications”, ***Applied Mathematics and Computation***, 218, 9116–9124.

Hacısalihoğlu, H.H. (1998) “Diferensiyel Geometri”, ***Fen Fakültesi Yayınları***, Ankara Üniversitesi, Cilt I.

Hacısalihoğlu, H.H. (2000) “Diferensiyel Geometri”, ***Fen Fakültesi Yayınları***, Ankara Üniversitesi, Cilt II.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2002) “Generic Properties of Helices and Bertrand Curves”, ***Journal of Geometry***, 74, 97–109.

Izumiya, S. and Takeuchi, N. (2004) “New Special Curves and Developable Surfaces”, ***Turkish Journal of Mathematics***, 28, 153-163.

Karger, A. and Novak, J. (1985) “Kinematics and Lie Groups”, ***Gordon and Breach Science Publishers,*** United States.

Kızıltuğ, S. and Önder, M. (2014) “Associated Curves of Frenet Curves In Three Dimensional Compact Lie Group”, ***Miskolc Mathematical Notes,*** Vol 16, 2-10.

Kızıltuğ, S., Önder, M. and Yaylı, Y. (2017) “Normal Direction Curves and Their Applications”, ***Miskolc Mathematical Notes,*** MMN-1476 (http://mat76.mat.uni-miskolc.hu/mnotes/forthcoming?volume=0&number=0).

Monterde, J. (2008) “Salkowski Curves Revisted: A Family of Curves with Constant Curvature and Non-constant Torsion”, ***Computer Aided Geometric Design***, 26, 271–278.

Otsuki, T. (1961) “Differential Geometry”, ***Asakura Publishing Co. Ltd.,*** Tokyo.

Sabuncuoğlu, A. (2014) “Diferensiyel Geometri”, ***Nobel Yayın Dağıtım,*** Ankara.

Salkowski, E. (1909) “Zur Transformation von Raumkurven”, ***Mathematische Annalen***, 66 (4), 517-557.

Struik, D.J. (1988) “Lectures on Classical Differential Geometry”, 2nd ed***, Addison Wesley,*** Dover.

Whittemore, J.K. (1940) “Bertrand Curves and Helices”, ***Duke Mathematical Journal***, 6(1), 235-245.

Yüce, S. (2013) “Diferensiyel Geometri”, ***Sürat Üniversite Yayınları***, İstanbul.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Çakmak, A., Kızıltuğ, S. and **Mumcu, G.** (2018) "New Type Direction Curves in $E_1{}^3$", ***16th International Geometry Symposium*****,** Manisa/TURKEY, 4-7 July, vol.1, no. 1, pp. 262-262.

Kızıltuğ, S., Çakmak, A. and **Mumcu, G.** (2018) "New Type Direction Curves in Compact Lie Group", ***Submitted*****,** doi:10.3906/mat.

Kızıltuğ, S., Çakmak, A. and **Mumcu, G.** (2018) "Osculating Direction Curves and Applications", ***16th International Geometry Symposium*****,** Manisa/TURKEY, 4-7 July, vol.1, no. 1, pp. 145-145.

Kızıltuğ, S., Çakmak, A. and **Mumcu, G.** (2018) "Rectifying Direction Curves", ***16th International Geometry Symposium*****,** Manisa/TURKEY, 4-7 July, vol.1, no. 1, pp. 146-146.

Kızıltuğ, S., Çakmak, A. and **Mumcu, G.** (2018) "Rectifying-Direction Curves in Euclidean 3-Space", ***Submitted.***

Kızıltuğ, S. and **Mumcu, G.** (2017) "New Type Direction Curves in Euclidean 3-space", ***15th International Geometry Symposium*****,** Amasya/TURKEY, 3-6 July, vol.1, no. 1, pp. 149-149.

Kızıltuğ, S. and **Mumcu, G.** (2018) "Öklidyen Uzayda Rektifiyan-Doğrultu Eğriler", ***31. Ulusal Matematik Sempozyumu*****,** Erzincan/TURKEY, 12-15 Eylül, vol.1, no. 1, pp. 59-59.

ÖZGEÇMİŞ

Gökhan MUMCU, 1988 yılında Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzincan ilindeki okullarda tamamladı. 2007 yılında girdiği Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında mezun oldu. 2016 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. 2012 yılında başladığı Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı çeşitli liselerdeki görevine Çağlayan Çok Programlı Lisesi'nde devam etmektedir.

İletişim Bilgileri: gokhanmumcu@outlook.com