T.C.
ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİMLİ HALKALARIN FİBONACCİ DİZİLERİNİN PERİYOTLARI VE TRİDİAGONAL MATRİSİ

Zülküf DİLMEN

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2018

Kabul ve Onay Sayfası

Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU danışmanlığında, Zülküf DİLMEN tarafından hazırlanan bu çalışma 02.02.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Cebir Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oy birliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI	imza : Ceren
Danışman	: Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU	imza : Yasemin
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İsrafil OKUMUŞ	imza :

Yukarıdaki sonuç Ensitütü Yönetim Kurulunun 06/04/2018 tarih ve 12/6 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Paşa YALÇIN

Enstitü Müdürü

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Birimli Halkaların Fibonacci Dizilerinin Periyotları Ve Tridiagonal Matrisi" isimli Yüksek Lisans tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 02/02/2018

Zülküf DİLMEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİMLİ HALKALARIN FİBONACCİ DİZİLERİNİN PERİYOTLARI VE TRİDİAGONAL MATRİSİ

Zülküf DİLMEN

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada, birimli keyfi bir halka üzerinde tanımlanan $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi ve özellikleri incelenmiştir. Bu dizinin terimleri Tridiagonal matrisin determinantı ile üretilmiştir. Birimli keyfi halkadaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin her bir teriminin katsayısı ve derecesi m modülüne indirgenerek elde edilen dizinin periyodik olduğu gösterilmiştir ve periyotları elde edilmiştir. a ve b birimli halkanın keyfi elemanları olmak üzere bu dizinin periyodunun $R = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile gerilen devirli grubun mertebesine eşit olduğu görülmüştür ve bu periyodun daima çift sayı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca m modülüne göre bilinen Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile birimli keyfi halkadaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizilerinin periyotları karşılaştırılmıştır.

2018, 86 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Dizileri, Halkalar, Periyot, Tridiagonal Matris.

ABSTRACT

Master Thesis

ON PERIODS OF THE FIBONACCI SEQUENCES OF THE RINGS WITH IDENTITY AND ITS TRIDIAGONAL MATRIX

Zülküf DİLMEN

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this study, $\{F_n\}$ Fibonacci sequence is defined over an arbitrary ring with identity and its some properties are investigated. The terms of this sequence are derivated by determinant of Tridiagonal matrix. It is shown that the sequence obtained by reducing modulo m coefficient and exponent of each term of $\{F_n\}$ Fibonacci sequence in arbitrary ring with identity is periodic and their periods are obtained. It is seen that order of cyclic group generated with matrix $R = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ is equal to the period of this sequence where a and b are arbitrary elements of the ring with identity and it is shown that this period always is an even number. Also, Wall numbers of Fibonacci sequences according to modulo m are compared with the periods of $\{F_n\}$ Fibonacci sequences in arbitrary ring with identity.

2018, 86 Pages

Keywords: Fibonacci Sequences, Rings, Periyod, Tridiagonal Matrix.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü desteği sağlayan, yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye, değerli öğretim üyeleri başta Sayın Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya olmak üzere Sayın Yrd. Doç. Dr. İsrafil OKUMUŞ'a ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca benden hiçbir maddi ve manevi desteğini esirgemeyen sevgili kardeşim Mehmet DİLMEN'e tesekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Bu tez çalışması "Erzincan Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi" tarafından "FEN-A-240215-0122" proje numarası ile desteklenmiş olup teşekkürlerimi sunarım.

Zülküf DİLMEN
Şubat, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ... i
ABSTRACT ... ii
TEŞEKKÜR ... iii
İÇİNDEKİLER ... iv
ŞEKİLLER LİSTESİ ... v
TABLOLAR LİSTESİ ... vi
SİMGELER ve KISALTMALAR ... vii
1. GİRİŞ ... 8
2. KURAMSAL TEMELLER ... 12
2.1. Genel Kavramlar ... 12
3. MATERYAL ve YÖNTEM ... 18
3.1. k-adım Fibonacci Dizileri ... 18
3.2. Fibonacci Dizilerinin Matris Temsili ... 34
3.3. k-adım Fibonacci Sayı Dizilerinin Periyotları ... 39
3.3.1. Fibonacci dizilerinin m modülüne göre periyotları ... 39
3.3.2. k-adım Fibonacci dizilerinin m modülüne göre periyotları ... 44
3.4. Halkalarda Fibonacci Dizileri ... 46
3.4.1. p^2 Mertebeden birimli, sonlu halkaların Fibonacci dizileri ve periyotları ... 55
3.4.2. p^2 Mertebeden sonlu cismin Fibonacci dizisi ve periyodu ... 65
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA ... 72
4.1. Birimli Halkaların Fibonacci Dizilerinin Tridiagonal Matrisi ... 72
4.2. m Modülüne Göre Birimli Halkaların Fibonacci Dizileri ... 74
5. SONUÇ ve ÖNERİLER ... 83
KAYNAKLAR ... 84
EKLER ... 86
EK-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar ... 86
ÖZGEÇMİŞ ... 87

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekir 3.1. Altın Oran…………………………………………………………………..22

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1.Wall Sayıları……………………………………………………………..39
Tablo 4.1.m Modülüne Göre Birimli Halkaların Fibonacci Dizisinin Periyodu ve Wall Sayıları ile İlişkisi…………………………………………………….........82

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

D_n	Dihedral Grup
F_n	Halkalardaki Fibonacci dizisinin n. Fibonacci sayısı
f_n	Bilinen Fibonacci dizisinin n. Fibonacci sayısı
$F_k(G;\ X)$	X kümesi üzerinde G grubunun k-nacci dizisi
$f_n^{(k)}$	k-basamak Fibonacci dizisinin n. elemanı
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$ nin m modülüne göre değeri
$\{F^m\}$	m modülü göre halkalarda Fibonacci dizisi
hF^m	$\{F^m\}$ dizisinin periyodu
$h(m)$	m modülüne göre bilinen Fibonacci dizisinin periyodu
I	Birim eleman
$k(m)$	Wall sayısı
$P_k(G;\ X)$	X kümesi üzerinde G grubunun k-nacci dizisinin periyodu
$\|X\|$	X grubunun mertebesi
$\langle X\rangle$	Devirli X grubu
$\|\langle X\rangle\|$	Devirli X grubunun mertebesi

1. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci Avrupa Ortaçağ döneminin en seçkin matematikçilerindendir. Fibonacci 1170'lerde Pisa'da doğdu. Babası Guglielmo (William), oğlununda kendi yolundan gitmesini isteyen başarılı bir tacirdi ve Fibonacci'nin hesap sanatını öğrenmesi için onu Cezayir'e getirdi. Cezayir'de, Fibonacci'nin ilk eğitimi Hint-Arap sayı sistemi ve Hint-Arap hesap teknikleri üzerine oldu. Bu dönemde bir İran matematikçi tarafından yazılan "Hisab al-jabr walmuquablah" adlı cebir kitabını tanıdı. Sonraki dönemlerde Mısır, Suriye, Yunanistan, Fransa ve Istanbul'a sık sık iş gezileri yapan Fibonacci gittiği yerlerde çeşitli aritmetik sistemler üzerinde çalıştı.

Fibonacci Hint-Arap sisteminin İtalya'da kullanılan Roma sayı sisiteminden muazzam bir üstünlüğünün olduğunu düşünüyordu. 1202'de çığır açan çalışması Liber Abaci (Abaküs kitabı) adlı kitabını yayımladı. Liber Abaci ile aritmetik ve temel cebir alanında Hint-Arap sistemini ve aritmetik algoritmalarını Avrupa'ya tanıttı. 19. yüzyılda Edward Lucas bu eserde gördüğü bir problemdeki $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$dizisinin her bir terimine Fibonacci sayısı ve diziye Fibonacci dizisi adını verdi.

Cebir dışında Fibonacci dizilerinin fizik, biyoloji, bilgisayar bilimi gibi birçok farklı alanda uygulamaları vardır.

Fibonacci sayılarının şaşırtan önemli bir özelliği bu sayılar arasındaki orandır. Fibonacci dizisindeki ardışık sayıların oranı $1{,}61803$ ...dir ve bu sayıya "Altın Oran" denir. Bu oran tarihte oyun kartlarından piramitlerin yapımına kadar birçok alanda kullanılmış, sayı teorilerinde ortaya çıkmış ve doğada birçok varlıkta gözlemlenmiştir. Bu sayılar bitki yaprakları, bitki tohumları, çiçek yaprakları ve kozalaklarda ve daha bir çok doğa figüründe bulunmaktadır. Dizinin öneminden dolayı tamsayı dizileriyle ilgili çalışmalar yürüten 'Fibonacci Derneği' kurulmuştur. Ayrıca bu dernek 'The Fibonacci Quartery' dergisinde her üç ayda bir bu dizi ile ilgili makaleler yayınlamaktadır.

Fibonacci sayılarının özellikleri uzun yıllardır incelenmektedir. Bu sayılar $n \geq 2$ olmak üzere $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ için

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

ile formülleştirildi (Vorobyov 1976; Vajda 1989).

Fibonacci ve Lucas dizilerinin özellikleri ve uygulamaları üzerinde çalışıldı (Koshy, 2001).

Fibonacci dizisi ve onun bağlantılı olduğu yüksek mertebeli diziler (tribonacci, quatranacci, k-nacci) genellikle tamsayılar dizisi olarak gösterilir.

Fibonacci dizileri gruplarda ilk olarak 1960 da Wall tarafından $\mathbb{Z}_m$ devirli gruplarda çalışıldı (Wall 1960). Bu çalışma sunulduktan sonra Fibonacci dizileri diğer matematikçiler tarafından farklı yönlerde geliştirildi. 1968 yılında $\mathbb{Z}_m$ rezidü sistemini içeren m modüllü tamsayıların Fibonacci dizisi belirlendi (Shah 1968). 1986 yılında Fibonacci dizileri sonlu abelyen gruplara genişletildi ve devirli gruplarda (C_n) kullanıldı (Wilcox 1986). Dihedral gruptaki k-nacci dizilerinin periyodlarının $2k + 2$ ye eşit olduğu Knox tarafından gösterildi (Knox 1992).

Fibonacci dizileri birçok matematikçi tarafından p-gruplarda çalışıldı. Exponenti asal ve nilpotent sınıfı 4 olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizisinin uzunluğun bilinen 2-adım Fibonacci dizisinin uzunluğuna eşit olduğu gösterildi (Aydın ve Smith, 1994). Bu teori 3-adım Fibonacci dizilerine genelleştirildi (Dikici ve Smith, 1995; 1997). Daha sonra p- asal olmak üzere exponenti ve p nilpotent sınıfı 2 olan gruplardaki 2- basamak genel Fibonacci dizilerinin periyotları ile bilinen 2-basamak genel Fibonacci dizilerinin peryotlarının eşit olduğu gösterildi (Aydın ve Dikici, 1998). Ayrıca p asal, $2 < p \leq 2927$ ve $k(p)$ genel 2-adım Fibonacci dizisinin periyodu olmak üzere exponenti p asal ve nilpotent sınıfı 5 olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizisinin periyodunun $pk(p)$ olduğu gösterildi (Karaduman ve Yavuz, 2003).

Bu teori önce exponenti p asal ve nilpotent sınıfı 4 olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizileri için genelleştirildi (Karaduman ve Aydın, 2003a). Daha sonra exponenti p asal ve nilpotent sınıfı n olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizileri için genelleştirildi (Karaduman ve Aydın, 2003b).

Halkalarda Fibonacci dizileri ilk olarak 1970 da Decarli tarafından çalışıldı. Keyfi bir halka üzerinden genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin tanımı verildi (Decarli 1970). R, özdeş elemanlı bir halka olmak üzere R nin elemanlarından oluşan dizi $\{M_n\}$ olduğunda M_0, M_1, A_0, ve A_1 R nin keyfi elemanları olmak üzere $\{M_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$M_{n+2} = A_1 M_{n+1} + A_0 M_n \qquad n \geq 0 \qquad (1.1)$$

ile tanımlandı (Decarli 1970). R halkası tamsayılar kümesi olmak üzere (1.1)'in özel durumları ele alındı (Buschman 1963; Horadam 1961; Vorobyov 1963). Wyler ise birimli, değişmeli özel bir halka üzerinde (1.1) dizisini çalıştı (Wyler 1965).

Mertebesi p^2 olan birimli halkaların ve cisimlerin Fibonacci dizileri oluşturuldu ve periyotları hesaplandı (Taşyurdu ve Gültekin 2013, 2016).

Birimli keyfi bir halka üzerindeki $\{F_n\}$ Fibonacci dizilerinin periyotları hesaplandı ve Tridiagonal matrisi verildi (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

Son yıllarda Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci dizileri üzerine çok fazla çalışmalar yapılmaktadır.

Sunulan bu tezde keyfi halkalarda tanımlanan Fibonacci dizileri ve m modülüne göre bu dizilerinin periyodu incelendi. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölüm dört başlık altında toplandı. İlk olarak Fibonacci sayıları, Fibonacci dizileri ve $k(m)$ Wall sayısı tanımlanarak iki ve üç adımlı Fibonacci sayılarının özellikleri verildi. İkinci olarak Fibonacci dizileri ile matris arasındaki ilişkileri verildi. Üçüncü olarak ise k-adım Fibonacci sayı dizilerinin periyotları ve bir grubun k-nacci dizileri ve periyodu ile ilgili mevcut bilgiler temel teoremlerle sunuldu. Son olarak halkalarda Fibonacci dizisinin tanımı ve özellikleri verildi. Ayrıca Mertebesi p^2 olan birimli halkaların ve cisimlerin Fibonacci dizileri periyotları sunuldu.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak keyfi birimli halkalar için tanımlanmış $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin matris temsili sunuldu. Tridiagonal matrisin determinantı yardımıyla bu dizinin terimleri elde edildi. Birimli keyfi halka üzerindeki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin her bir teriminin katsayısına ve derecesine m modülü uygulanarak elde edilen dizinin periyodik olduğu gösterildi ve periyotları elde edildi. Ayrıca a ile b birimli halkanın keyfi elemanları olmak üzere bu dizinin periyodunun $R = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile gerilen devirli grubun mertebesine eşit olduğu görüldü. Ayrıca m modülüne göre bilinen Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile elde edilen birimli keyfi halka üzerindeki $\{F_n\}$ Fibonacci dizilerinin periyotları karşılaştırıldı. Son olarak birimli keyfi halka üzerindeki $\{F_n\}$ Fibonacci dizilerinin periyodun daima çift sayı olduğu gösterildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışacağımız süresince kullanılan bazı temel tanım ve teoremler ile bunların özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1: T boş olmayan bir küme olmak üzere

$$*: T \times T \to T$$

dönüşümüne T üzerinde tanımlı ikili işlem denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.2: Boştan farklı bir küme üzerinde bir ya da daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlem ile birlikte bu kümeye bir cebirsel yapı denir. T kümesi üzerinde bir "¤" işlemi tanımlanmış ise bu cebirsel yapı $(T, ¤)$ ile gösterilir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.3: T boş olmayan bir küme ve T üzerinde bir ikili işlem tanımlı olsun.

- $\forall x, y, z \in T$ için "¤" işlemi için

$$x¤(y¤z) = (x¤y)¤z$$

ise "¤" işlemi birleşimlidir.

- $\forall x \in T$ için

$$x¤e = e¤x = x$$

ise $e \in T$ elemanına "¤" işleminin birim elemanı denir.

- $\forall x \in T$ için

$$x¤x' = x'¤x = e$$

ise $x' \in T$ elemanına "¤" işlemine göre a nın tersi denir. Bu üç şartı sağlayan $(T, ¤)$ cebirsel yapısına grup denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.4:$(T,¤)$ cebirsel yapısı grup olsun. $\forall x,y \in T$ için

$$x¤y = y¤x$$

ise $(T,¤)$ grubuna değişimli grup denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.5: $(T,¤)$ yapısı bir grup olsun. Eğer T kümesi sonlu ise bu gruba sonlu grup, eğer T kümesi sonlu değil ise $(T,¤)$ grubuna sonsuz grup denir. Sonlu bir grubun elemanlarının sayısına grubun mertebesi (kardinalitesi) denir. $o(T)$ veya $|T|$ ile gösterilir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.6: $(T,¤)$ cebirsel yapısı grup olsun ve T nin boş kümeden farklı bir alt kümesi de H olsun. Eğer H , T grubundaki işleme göre bir grup teşkil ederse $(H,¤)$ cebirsel yapısına $(T,¤)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq T$ şeklinde gösterilir (Taşçı, 2007).

Aşağıdaki tanım ve teoremlerde ikili işlem için çarpımsal gösterim kullanılacaktır.

Tanım 2.7: $(G,\cdot)$ bir grup olmak üzere $H = \{a^n : n \in Z\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından üretilen alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir. Yani

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in Z\} = H$$

dır. Buradan hareketle devirli grup şu şekilde de tanımlanabilir: G bir grup olmak üzere G de $G = \{a^n : n \in Z\}$ olacak şekilde bir a elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup, a elemanına da G nin üreteci denir. $G = \langle a \rangle$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.8: $(T,\cdot)$ cebirsel yapısı bir grup olsun ve T nin bir alt grubu ise K olsun. $t \in T$ olmak üzere

$$Kt = \{kt : k \in K\}$$

kümesine K nin sağ yan kümesi

$$tK = \{tk : k \in K\}$$

kümesine K ın sol yan kümesi denir.

Toplam notasyonu düşünülürse sırayla $K + t = \{k + t : k \in K\}$ ve $t + K = \{t + k : k \in K\}$ şeklinde yazılır. Tüm sağ ve sol yan kümelerin sınıfı T/K ile gösterilir. Yani

$$T/K = \{tK : t \in T\} = \{Kt : t \in T\}$$

dir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.9: $(T,\cdot)$ cebirsel yapısı bir grup ve $H \leq T$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- $\forall a \in T$, ve $\forall h \in H$ için $aha^{-1} \in H$ dir.
- $\forall a \in T$ için $aHa \subset H$ dir.
- $\forall a \in T$ için $aHa = H$ dir.
- $\forall a \in T$ için $aH = Ha$ dır (Taşçı , 2007).

Tanım 2.10: Teorem 2.9 da denk koşullarından birini sağlayan T nin bir H alt grubuna normal alt grup denir ve $H \lhd T$ ile gösterilir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.11:$(T,\cdot)$ cebirsel yapısı bir grup, A da boş olmayan bir küme olmak üzere A yı ihtiva eden T nin bütün normal alt gruplarının ara kesitine A nın normal kapanışı denir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.12:K , $(T,\cdot)$ grubunun bir normal alt grubu ise T/K kümesi

$$(Ka) \cdot (Kb) = Kab$$

veya

$$(aK) \cdot (bK) = abK$$

" · " işlemine göre bir grup teşkil eder. Bu gruba T nin K ye göre bölüm grubu veya faktör grubu denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.13: $(T, ¤)$ ve (T', o) iki grup $t: T \to T'$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in T$ için

$$t(x¤y) = t(x)\ o\ t(y)$$

eşitliği varsa t ye T den T' ne homomorfizm denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.14: $(T, ¤)$ ve (T', o) iki grup ve $t: T \to T'$ bir dönüşüm olsun. Eğer

- t bire bir ve örten
- $\forall\ m, n \in T$ için $t(m¤n) = t(m)ot(n)$

ifadeleri sağlanıyorsa t ye T ile T' arasında bir izomorfizm denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.15: R boştan farklı bir küme olmak üzere, üzerinde tanımlı iki ikili işlem " $+$ " ve " $\cdot$ " olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına halka denir.

- $(R, +)$, bir değişmeli gruptur.
- " $\cdot$ " işlemi R de birleşimlidir.
- " $\cdot$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır (Taşçı , 2007).

Tanım 2.16:$(R, +, \cdot)$ bir halka olsun.

- $\forall\ m, n \in R$ için $mn = nm$ ise R değişmeli bir halkadır.
- $(R, \cdot)$ birimli ise $(R, +, \cdot)$ halkasına birimli halka ve $(R, \cdot)$ nın birim elemanına R halkasının birim elemanı denir. R halkasının birimi "1_R" ile gösterilir.
- $(R, +, \cdot)$ halkasının " $+$ " işlemine göre birim elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve "0_R" ile gösterilir (Çallıalp, 2001).

Tanım 2.17:$(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. $x \in R$ için x in R de çarpma işlemine göre tersi varsa x e R de aritmetik birim denir. Aksi halde x e R de aritmetik birim değildir denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.18:$(R, +,\cdot)$ bir halka ve H kümesi de R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $(H, +,\cdot)$ cebirsel yapısı bir halka ise bu halkaya $(R, +,\cdot)$ halkasının bir alt halkası denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.19: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise bu halkaya cisim denir ve F ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.20: $(F, +,\cdot)$ bir cisim ve F nin boştan farklı bir alt kümesi S olsun. S nin $(F, +,\cdot)$ deki işlemlerine göre bir cisim ise S ye F nin bir alt cismi denir (Taşçı, 2007).

Tanım 2.21: F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklindeki bri diktörtgen tabloya matris denir (Taşçı, 2011).

Tanım 2.22: $n \times n$ tipindeki tridiagonal matris

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır (Koshy , 2001).

Teorem 2.23:

$$A(n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & a_{(n-1)n} \\ & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi tridiagonal matrislerinin bir ailesi olmak üzere $A(n)$ matrislerinin determinantları

$\det(A(1)) = a_{11}$

$\det(A(2)) = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}$

...

$\det(A(n)) = a_{nn}\det(A(n-1)) - a_{n(n-1)}a_{(n-1)n}\det(A(n-2))$

dir (Cahill vd., 2002).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, önemli bilim dallarında yer alan ve birçok çalışmaya konu olmuş uygulama sahaları geniş olan ikinci mertebeden lineer özel sayı dizilerinden olan Fibonacci sayıları ve k-adım Fibonacci dizileri hakkında temel tanım, teorem ve özellikleri hakkında bilgi verilecektir.

3.1. k-adım Fibonacci Dizileri

19. yüzyıl sayı teorisyenlerinden Edvard Lucas, Leonarda Pisa'nın Liber Abaci adlı eserinde gördüğü bir problemdeki 0,1,1,2,3… dizisine Fibonacci dizisi, bu dizinin terimlerine ise Fibonacci sayıları ismini verdi. Bu dizinin rekurens bağıntısı aşağıdaki tanım ile verildi.

Tanım 3.1: Başlangıç değerleri $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ olmak üzere

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geq 2$$

ile tanımlanan $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Bu sayı dizisinin terimlerine Fibonacci sayıları denir (Koshy, 2001).

Fibonacci dizisinin bazı sayıları şöyledir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...

Tanım 3.2: Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$$

olarak tanımlanır (Koshy, 2001).

Tanım 3.1 deki rekurens bağıntısı kullanılarak $\{f_n\}$ Fibonacci dizisinin herhangi bir terimini elde etmek için kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesi gerekmektedir. Fibonacci dizisinin genel formülü olarak bilinen Binet formülü, dizinin herhangi bir terimini kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan bulmamıza olanak sağlar.

Şimdi Fibonacci dizisinin Binet formülünü verelim. $f_n = m^n$ yineleme bağıntısı, Fibonacci dizisinin $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ rekurens bağıntısında kullanılırsa

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow m^{n+2} = m^{n+1} + m^n$$

$$\Rightarrow m^n(m^2) = m^n(m+1)$$

$$\Rightarrow m^2 = m + 1$$

elde edilir. Bulunan

$$m^2 = m + 1$$

denklemine Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi denir. Bu denklemin kökleri α ve β olarak alınırsa

$$\alpha = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$$

olarak bulunur. Denklemin kökleri arasında

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha\beta = -1$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}$$

eşitlikleri vardır.

Fibonacci dizisinin Binet formülü

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir. Gerçekten Fibonacci dizisinin geren fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$$

olmak üzere

$$g(x) - x = \sum_{i=2}^{\infty} f_i x^i$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} (f_{i-1} x^i + f_{i-2} x^i)$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} f_{i-1} x^i + \sum_{i=2}^{\infty} f_{i-2}\, x^i$$

$$= x \sum_{i=1}^{\infty} f_i x^i + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, x^i$$

$$= xg(x) + x^2 g(x)$$

olup

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

olarak bulunur.

Bulunan son eşitlikte $\alpha+\beta=1$ ve $\alpha\beta=-1$ değerleri kullanılırsa

$$g(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

$$=\frac{x}{1-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2}$$

$$=\frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)x}{\sqrt{5}(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$=\frac{(1-\beta x)-(1-\alpha x)}{\sqrt{5}(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}(1-\alpha x)}-\frac{1}{\sqrt{5}(1-\beta x)}$$

olup

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{5}(1-\alpha x)}-\frac{1}{\sqrt{5}(1-\beta x)}$$

eşitliği elde edilir. Geometrik seri kuralı göz önüne alınırsa

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{5}(1-\alpha x)}-\frac{1}{\sqrt{5}(1-\beta x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(1+(\alpha x)+(\alpha x)^2+(\alpha x)^3+\cdots)-(1+(\beta x)+(\beta x)^2+(\beta x)^3+\cdots)\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\alpha-\beta)x+(\alpha^2-\beta^2)x^2+(\alpha^2-\beta^2)x^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\alpha^i-\beta^i\right)x^i=\sum_{i=0}^{\infty}f_i x^i$$

elde edilir.

Buradan $\alpha = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ ve $\beta = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$ için $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olup Fibonacci dizisinin Binet formülü

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

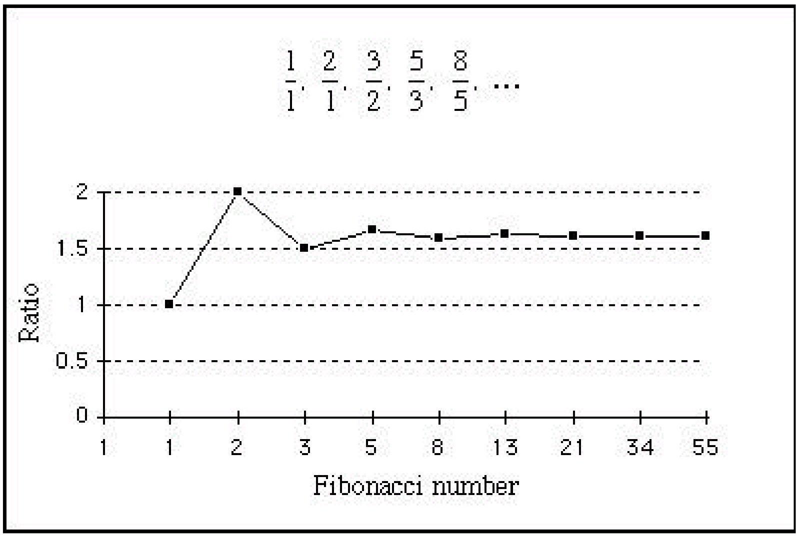
$$= \frac{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^n - \left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

olarak yazılabilir.

Fibonacci dizilerinin bilinen birçok özelliği vardır. Bunlardan bazıları ispatlanmamış ve ispatlanmayı bekleyen özelliklerdir. Fibonacci dizisinin herhangi bir terimi bir öncekine bölündüğünde ve bölümü $n \to \infty$ alındığında $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1{,}61803398 \ldots$ sayısı elde edilir. İrrasyonel sayı olan bu sayıya 'Altın Oran' denir. Aşağıdaki şekilde bu durum gösterilmiştir.

Şekil 3.1. Altın Oran



Ayrıca Fibonacci dizisinin ıraksak bir dizidir. Gerçekten

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{n}-\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{n+1}\left\{1-\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})}\right)^{n+1}\right\}}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{n}\left\{1-\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})}\right)^{n}\right\}}{\sqrt{5}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{1-\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})}\right)^{n+1}\right\}}{\left\{1-\left(\frac{(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})}\right)^{n}\right\}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}=\alpha$$

olur. Buradan $n\to\infty$ için

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}=1{,}61803398>1$$

olup D’alambert testine göre $L>1$ olduğu için Fibonacci dizisinin ıraksak bir dizidir.

Aşağıda teorem ile tez çalışmamız kullandığımız, $\{f_n\}_{n\geq 0}$ Fibonacci dizisinin bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Teorem 3.3: $m, n \in Z^+$ ve n. Fibonacci sayısı f_n olmak üzere

i. $f_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \cdots\right]$

ii. $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$

iii. $\sum_{i=1}^{n} {f_i}^2 = f_n f_{n+1}$

iv. $f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1} = f_{m+n}$

v. $f_{n+1}f_{n-1} - {f_n}^2 = (-1)^n$

vi. ${f_n}^2 + {f_{n+1}}^2 = f_{2n+1}$

vii. ${f_{n+1}}^2 - {f_n}^2 = f_{n+2}f_{n-1}$

viii. $m|n$ ise $f_m|f_n$

ix. $f_m|f_n$ ise $m|n$

dir (Renault 1996; Koshy 2001).

İspat:

i. İspat için Fibonacci dizisinin Binet formula kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right] \\
&= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left\{\left[1 + \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 + \cdots\right] - \left[1 - \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 - \cdots\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{5}}\left[\binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^3 + \binom{n}{3}\sqrt{5}^5 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

olup istenilen elde edilir.

ii.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = (f_{n+2} - 1)$$

ifadesinin ispatı tümevarım yöntemiyle yapılabilir. Fibonacci dizisinin tanımından $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2$ olmak üzere $n = 1$ için

$$\sum_{i=1}^{1} f_i = (f_{1+2} - 1)$$

$$f_1 = f_{1+2} - 1$$

$$1 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

olup ii. şıktaki eşitlik $n = 1$ için doğrudur. Şimdi $n = k$ için ii. şıktaki eşitliğin doğru kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Kabulden $n = k$ için

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_{k-1} + f_k = f_{k+2} - 1$$

dir. Bu durumda eşitliğin her iki yanına f_{k+1} eklersek

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_{k-1} + f_k + f_{k+1} = f_{k+1} + f_{k+2} - 1 = f_{k+3} - 1$$

elde edilir bu ise ispatı tamamlar.

iii.

$$\sum_{i=1}^{n} {f_i}^2 = f_n f_{n+1}$$

ifadesinin ispatı *n* üzerinden tümevarım yöntemiyle yapılabilir. $n = 1$ için

$$\sum_{i=1}^{1} {f_i}^2 = f_1 f_2 = 1.1$$

olup iii. şıktaki eşitlik $n = 1$ için doğrudur. Şimdi $n = k$ için iii. şıktaki eşitliğin doğru kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

Kabulden $n = k$ için

$$\sum_{i=1}^{k} {f_i}^2 = f_k f_{k+1}$$

olup $n = k + 1$ için iii. şıktaki eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{i=1}^{k+1} {f_i}^2 = \sum_{i=1}^{k} {f_i}^2 + {f_{k+1}}^2$$

$$= f_k f_{k+1} + {f_{k+1}}^2$$

$$= f_{k+1}(f_k + f_{k+1})$$

$$= f_{k+1} f_{k+2}$$

olur. İstenilen elde edilir ve ispat tamamlanır.

iv.

$$f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1} = f_{m+n}$$

ifadesinin ispatı tümevarım yöntemiyle yapılablir. m veya n değerlerinden biri sabit tutulup diğeri üzerinden tümevarım uygulanırsa ispat tamamlanır**.** $n = 1$ için

$$f_{m+1} = f_2 f_m + f_1 f_{m-1} = f_m + f_{m-1}$$

olup iv. şıktaki eşitlik $n = 1$ için doğrudur. Şimdi $n = k$ için iv. şıktaki eşitliğin doğru kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Kabulden $n = k$ için

$$f_{m+k} = f_{k+1} f_m + f_k f_{m-1}$$

dir. iv. şıktaki eşitliğin $n = k + 1$ doğruluğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Kabulden $n = k - 1$ doğru olduğu bilinmektedir.

Buradan $n = k - 1$ için

$$f_{m+k} = f_{k+1}f_m + f_k f_{m-1}$$

$$f_{m+(k-1)} = f_k f_m + f_{k-1}f_{m-1}$$

olup eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} f_{m+k} + f_{m+(k-1)} &= f_{k+1}f_m + f_k f_{m-1} + f_k f_m + f_{k-1}f_{m-1} \\ &= (f_{k+1} + f_k)f_m + (f_k + f_{k-1})f_{m-1} \\ &= f_{k+2}f_m + f_{k+1}f_{m-1} \\ f_{m+(k+2)} &= f_{k+2}f_m + f_{k+1}f_{m-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

v.

$$f_{n+1}f_{n-1} - {f_n}^2 = (-1)^n$$

ifadesinin ispatı için

$$\begin{aligned} f_{n+1}f_{n-1} - {f_n}^2 &= (f_{n-1} + f_n)f_{n-1} - {f_n}^2 \\ &= {f_{n-1}}^2 + f_n f_{n-1} - {f_n}^2 \\ &= {f_{n-1}}^2 + f_n(f_{n-1} - f_n) \\ &= {f_{n-1}}^2 - f_n f_{n-2} \\ &= -\left(f_n f_{n-2} - {f_{n-1}}^2\right) \end{aligned}$$

olup

$$f_{n+1}f_{n-1} - {f_n}^2 = -\left(f_n f_{n-2} - {f_{n-1}}^2\right)$$

elde edilir.

Son eşitlik üzerinden benzer düşünce ile devam edilerek

$$
\begin{aligned}
-\left(f_n f_{n-2} - {f_{n-1}}^2\right) &= (-1)^2 \left(f_{n-1} f_{n-3} - {f_{n-2}}^2\right) \\
&= (-1)^3 \left(f_{n-2} f_{n-4} - {f_{n-3}}^2\right) \\
&= (-1)^4 \left(f_{n-3} f_{n-5} - {f_{n-4}}^2\right) \\
&\ \ \vdots \\
&= (-1)^n \left(f_1 f_{-1} - {f_0}^2\right) \\
&= (-1)^n
\end{aligned}
$$

olup

$$f_{n+1} f_{n-1} - {f_n}^2 = (-1)^n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

vi. İspat için iv. şıktaki $f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1} = f_{m+n}$ eşitlik kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
{f_n}^2 + {f_{n+1}}^2 &= f_n f_n + f_{n+1} f_{n+1} \\
&= f_n f_n + (f_n + f_{n-1}) f_{n+1} \\
&= f_n f_n + f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1} \\
&= f_n (f_n + f_{n+1}) + f_{n-1} f_{n+1} \\
&= f_n f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+1} \\
&= f_{n+(n+1)} \\
&= f_{2n+1}
\end{aligned}
$$

olup ispat tamamlanır.

vii. Fibonacci dizisinin $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ rekurens bağıntısı kullanılırsa

$$f_{n+1}{}^2 - f_n{}^2 = (f_{n+1} + f_n)(f_{n+1} - f_n)$$

$$= f_{n+2}f_{n-1}$$

olup

$$f_{n+1}{}^2 - f_n{}^2 = f_{n+2}f_{n-1}$$

dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

viii. $m \mid n$ olmak üzere

$$f_m | f_n$$

ifadesinin ispatı tümevarım yöntemiyle yapılabilir. m veya n değerlerinden biri sabit tutulup diğeri üzerinden tümevarım uygulanırsa ispat tamamlanır**.** $n = 1$ için

$$f_m | f_m$$

olup viii. şıktaki eşitlik $n = 1$ için doğrudur. Şimdi $n = k$ için viii. şıktaki eşitliğin doğru kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Kabulden $n = k$ için

$$f_m \mid f_{mk}$$

dir. viii. şıktaki eşitliğin $n = k + 1$ için $f_m \mid f_{m(k+1)}$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Fibonacci sayıları arasında

$$f_{m(k+1)} = f_{(mk+m)} = f_{(mk-1)}f_m + f_{mk}f_{m+1}$$

olup $f_m \mid f_{mk}$ olduğundan $f_m \mid f_{m(k+1)}$ dir. İstenilen elde edilmiş olup ispat tamamlanır.

ix. $f_m|f_n$ olduğunu kabul edip $m|n$ olduğunu gösterelim. Bölme algoritmasından $0 \leq r < m$ için $n = qm + r$ dir. Bu durumda tamsayılardaki bölünebilme özelliğinden ve Fibaonacci sayılarının özelliklerinden

$$f_n = f_{(n-m+1)}f_m + f_{(n-m)}f_{(m-1)}$$

eşitliği kullanılırsa

$$f_m|f_{(n-m)}f_{(m-1)}$$

dir. Fakat $(f_m, f_{m-1}) = 1$ olduğundan $f_m|f_{n-m}$ dir. Benzer şekilde $f_m|f_{n-2m}$ dir. Bu düşünce ile devam edilirse

$$f_m \ |f_{(n-qm)} \text{ ve } f_m \ |f_r$$

dir. Bu ise $r = 0$ ve $n = qm$ olması ile sağlanır. Böylece $m \ |n$'dir

Sonuç 3.4: $(m, n) = 1$ ise $f_m f_n|f_{mn}$ dir.

İspat: $m|mn$ ve $n|mn$ olmak üzere Teorem 3.3 ün viii. şıkkından

$$f_m|f_{mn} \quad \text{ve} \quad f_n|f_{mn}$$

dir. Buradan

$$(f_m, f_n) = obeb(f_m, f_n)$$

dir. O halde

$$(f_m, f_{m-1})|f_{mn}$$

olur. Fakat

$$(f_m, f_n) = f_{(m,n)} = f_1 = 1$$

olduğundan

$$(f_m, f_{m-1})|f_{mn}$$

dir. Böylece $f_m f_n|f_{mn}$ dir.

Teorem 3.5: n. Fibonacci sayısı f_n olmak üzere

- $f_{2n} = f_n^2 + 2f_{n-1}f_n$
- $f_{2k+1}f_{2n+1} = f_{(n+k+1)}^2 + f_{n-k}^2$
- $2(f_{n+1}^2 f_{n+2}^2) = f_{n+3}^3 f_n^2$
- $(-1)^{n-r} f_r^2 = f_n^2 - f_{n+r}f_{n-r}$
- $(-1)^m f_{n-m} = f_n f_{m+1} + f_m f_{n+1}$
- $f_{n+m} = f_{n+1}f_{m+1} - f_{n-1}f_{m-1}$
- $f_n = f_m f_{n+1-m} + f_{m-1}f_{n-m}$
- $f_n f_{n+1} = f_{n-1}f_{n+2} + (-1)^{n-1}$
- $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$
- $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1$

dir (Vajda 1989; Renaut 1996).

Şimdi k-adım Fibonacci dizisinin tanımı ve özellikleri verilecektir.

Tanım 3.6: $j \leq k$ olsun. Sonlu bir G grubundaki k-nacci dizisi, verilen bir başlangıç kümesi $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ için her bir elemanı

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \dots x_{n-1} & , \quad j \leq n < k \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \dots x_{n-1} & , \quad n \geq k \end{cases}$$

ile tanımlanan $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ grup elemanlarının bir dizisidir.

$x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ ile gerilen bir G grubunun k-nacci dizisi $F_k(G\,;\, x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilir (Campbell vd., 2004).

Örneğin; 3-nacci dizisi oluşturalım. Tanım 3.6 dan

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \dots x_{n-1} & , \quad j \leq n < 3 \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \dots x_{n-1} & , \quad n \geq 3 \end{cases}$$

olup buradan dizinin ilk birkaç elemanı

$n = 1$ için $1 < 3$ olduğu için $x_1 = x_0$,

$n = 2$ için $2 < 3$ olduğu için $x_2 = x_0 x_1$,

$n = 3$ için $3 \geq 3$ olduğu için $x_3 = x_0 x_1 x_2$,

$n = 4$ için $4 \geq 3$ olduğu için $x_4 = x_1 x_2 x_3$,

$n = 5$ için $5 \geq 3$ olduğu için $x_5 = x_2 x_3 x_4$

şeklindedir. Benzer şekilde devam edilirse dizi

$$\{ x_0,\ x_0 x_1, x_0 x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, x_2 x_3 x_4\ \dots \}$$

şeklinde yazılabilir.

Tamsayılarda her bir eleman m modülüne göre indirgendiğinde elde edilen klasik Fibonacci dizisi $F_2(Z_m; 0,1)$ olarak yazılır. Sonlu bir grubun Fibonacci dizisi, grup elemanlarının 2-nacci dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.7: Sonlu bir G grubunun her elemanı dizide görülecek şekilde bir k-nacci dizisi varsa bu sonlu G grubuna k-nacci dizilendirilebilir denir (Knox, 1992).

Örneğin; $Z_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ için $(Z_4, +)$ grubunun 3-nacci dizisi

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3},\ \overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \dots$$

şeklinde olup grubun her elemanı dizide mevcuttur. Dolayısıyla $(Z_4, +)$ grubu 3-nacci dizilendirilebilirdir.

Tanım 3.8: Belli bir noktadan sonra grup elemanlarının dizisi sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyorsa grup elemanlarının dizisine periyodiktir denir (Knox 1992).

Tanım 3.9: Periyodik dizide tekrarlanan alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir (Knox, 1992).

Örneğin;

$$a, b, c, d, e, b, c, d, e, \ldots$$

dizisi başlangıç elemanı olan a elemanından sonra periyodiktir ve periyodu 4 tür.

Tanım 3.10: Diziyi, ilk k elemanı tekrarlanan bir alt dizi oluşturuyorsa diziye k periyotlu basit periyodik dizi denir (Knox, 1992).

Örneğin;

$$a, b, c, d, e, f, a\ b, c, d, e, f, \ldots$$

dizisi 5 periyodu ile basit periyodiktir (Knox, 1992).

Tanım 3.6 daki $F_k(G\ ;\ x_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$ k-nacci dizisinin periyodu $P_k(G\ ;\ x_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$ ile gösterilir.

Örnek 3.11: $\langle a, b\ ;\ a^2, b^n, (ab)^2 \rangle$ temsili ile tanımlanmış $2n$. mertebeden olan D_n dihedral grupların Fibonacci dizisinin periyodu 6 dır. Gerçekten

$a,$

$b,$

$ab,$

$bab = a,$

$aba = b^{-1},$

$ab^{-1},$

$b^{-1}ab^{-1} = a,$

$ab^{-1}a = b,$

...

dir.

Yani D_n dihedral grupların Fibonacci dizisi

$$\{a, b, ab, b^{-1}, ab^{-1}, a, b, \dots\}$$

şeklindedir. Dolayısıyla $P_2(D_n\,;\ a, b) = 6$ dır.

3.2. Fibonacci Dizilerinin Matris Temsili

Bu bölümde Fibonacci dizisinin terimleri ile matrisler arasındaki bağıntılar verilecektir.

Aşağıdaki teorem Fibonacci dizisinin terimlerinin matrisler yardımıyla gösterimini ifade etmektedir.

Teorem 3.12: $n \geq 1$ ve $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım Yani her n doğal sayısı için

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. İddianın $n = 1$ için

$$Q^1 = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q$$

şeklinde olup doğru olduğu görülür. İddianın $n = k$ için doğru yani,

$$Q^k = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

Buradan

$$Q^kQ^1 = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix}$$

$$= Q^{k+1}$$

bulunur ki bu da iddianın $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.13: $m, n \geq 1$ olmak üzere

$$Q^{m+n} = Q^mQ^n$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım. Yani her m, n doğal sayısı için m yi sabit tutup n ye göre tümevarım yapalım. Teorem 3.12 den

$$Q^m = \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix}$$

dir. $n = 1$ için iddianın doğru olduğunu yani

$$Q^{m+1} = Q^mQ^1$$

olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için

$$Q^m Q^1 = \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m+1} + f_m & f_{m+1} \\ f_m + f_{m-1} & f_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m+2} & f_{m+1} \\ f_{m+1} & f_m \end{pmatrix}$$

$$= Q^{m+1}$$

şeklinde olup iddianın doğru olduğu görülür. İddianın $n = k$ için doğru yani,

$$Q^m Q^k = \begin{pmatrix} f_{m+k+1} & f_{m+k} \\ f_{m+k} & f_{m+k-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Buradan

$$Q^m Q^{k+1} = \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m+k+2} & f_{m+k+1} \\ f_{m+k+1} & f_{m+k} \end{pmatrix}$$

olup iddia $n = k + 1$ için doğrudur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.14:

i. $f_{m+n+1} = f_{m+1}f_{n+1} + f_m f_n$

ii. $f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$

iii. $f_{m+n} = f_{m+1} f_n + f_m f_{n-1}$

iv. $f_{m+n-1} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$

dir (Koshy, 2001).

İspat: Teorem 3.12 den

$$Q^m = \begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix} \text{ ve } Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir. Sonuç 3.13 den $Q^{m+n} = Q^m Q^n$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m+n+1} & f_{m+n} \\ f_{m+n} & f_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{pmatrix} f_{m+1}f_{n+1} + f_m f_n & f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1} \\ f_m f_{n+1} + f_{m-1}f_n & f_m f_n + f_{m-1}f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m+n+1} & f_{m+n} \\ f_{m+n} & f_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

olup iki matrisin eşitliğinden

$$f_{m+n+1} = f_{m+1}f_{n+1} + f_m f_n$$

$$f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1}f_n$$

$$f_{m+n} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}$$

$$f_{m+n-1} = f_m f_n + f_{m-1}f_{n-1}$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.15:

$$|Q|^n = \begin{vmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{vmatrix} = f_{n+1}f_{n-1} - {f_n}^2 = (-1)^n$$

dir (Koshy, 2001).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım Yani her n doğal sayısı için

$$|Q|^n = (-1)^n$$

olduğunu gösterelim.

İddianın $n = 1$ için

$$|Q|^1 = \begin{vmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{vmatrix} = f_2 f_0 - {f_1}^2 = (-1)^1 = -1$$

şeklinde olup doğru olduğu görülür. İddianın $n = k$ için doğru yani,

$$|Q|^k = \begin{vmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{vmatrix} = f_{k+1} f_{k-1} - {f_k}^2 = (-1)^k$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Buradan

$$|Q|^k |Q|^1 = \begin{vmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^k (-1)^1$$

$$= (-1)^{k+}$$

bulunur ki bu da iddianın $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Tanım 3.16: $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ ve $f_2 = 1$ için

$$f_3 = f_2 + f_1 + f_0, f_4 = f_3 + f_2 + f_1, \dots, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$$

şeklindeki sayılara ise 3-adımlı Fibonacci sayıları denir (Koshy, 2001).

Şimdi 3-adımlı Fibonacci sayılarının bazı özelliklerini içeren teorem verilecektir.

Teorem 3.17: $f_0, f_1, f_2, \ \dots \ , f_n$, ... 3-adım Fibonacci dizisi için

- $f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \frac{(f_{n+3} - f_{n+1} - 1)}{2}$
- $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = \frac{(f_{2n+2} - f_{2n+1})}{2}$
- $f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = \frac{(f_{2n+1} + f_{2n-1})}{2}$
- $f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

yazılır (Koshy, 2001).

3.3. k-adım Fibonacci Sayı Dizilerinin Periyotları

3.3.1. Fibonacci dizilerinin m modülüne göre periyotları

Başlangıç değerleri $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ olmak üzere

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

bağıntısı ile tanımlanan Fibonacci dizisinin her f_n terimi m modülüne göre indirgenebilirdir.

m modülüne göre Fibonacci dizisinin periyodu $(f_n(mod\ m))_{n=-\infty}^{\infty}$ ile gösterilir.

Tanım 3.18:$(f_n(mod\ m))_{n=-\infty}^{\infty}$ dizisinin periyodunun minimum uzunluğu Wall sayısı olarak adlandırılır ve $k = k(m)$ ile gösterilir (Wall, 1960).

Wall sayısının hesaplanmasına ilişkin birkaç örnek aşağıda verilmektedir.

Örnek 3.19:
i. $m = 3$ ise Wall sayısı 8 dir ve $k(3) = 8$ olarak yazılır.
ii. $m = 4$ ise Wall sayısı 6 dir ve k(4)=6 olarak yazılır.
iii. $m = 5$ ise Wall sayısı 20 dir ve k(5)=20 olarak yazılır.

Tablo 3.1. Wall sayıları

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f_n\ mod\ 3$	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2
$f_n\ mod\ 4$	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1
$f_n\ mod\ 5$	0	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0	2	2	4	1

Şimdi $k(m)$ nin bilinen bazı özellikleri aşağıdaki teoremler ile verildi.

Teorem 3.20: Eğer $k(p^2) \neq k(p)$ ise $k(p^e) = p^{e-1}k(p)$ dir. Ayrıca t, $k(p^t) = k(p)$ eşitliğini sağlayan en büyük tamsayı ise $e > t$ olmak üzere $k(p^e) = p^{e-t}k(p)$ dir (Wall, 1960).

Örneğin; $p = 3$ için $k(3^2) = k(9) = 24$ ve $k(3) = 8$ dır. Dolayısıyla

$$k(3^2) \neq k(3)$$

olup

$$k(3^2) = 3^{2-1}k(3)$$
$$24 = 3.8$$
$$24 = 24$$

olur.

Teorem 3.21: $m = p = 10x \pm 1$ ise $k(p)|(p-1)$ dir (Wall, 1960).

Örneğin; $x = 3$ için $p = 29$ ya da $p = 31$ olup $k(29) = 14$ ve $k(31) = 30$ dur. Buradan

$$k(29)|28$$
$$14|28$$

ve

$$k(31)|30$$
$$30|30$$

olur.

Teorem 3.22: $n \geq 3$ için $k(n)$ çifttir (Wall 1960).

Örnek 3.23: $m = 2$ için

$$0, 1, 1, 0, 1, \ldots$$

olup Wall sayısı $k(2) = 3$ olup tek sayıdır. $m = 3$ için

$$0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, \ldots$$

olup Wall sayısı $k(3) = 8$ olup çift sayıdır. Benzer şekilde devam edilerek $k(5) = 20$, $k(6) = 24$ olduğu görülür.

Teorem 3.24: $f_n(modm)$ dizileri basit periyodiktir (Wall, 1960).

İspat $f_n(modm)$ dizileri sonlu sayıda m^2 çiftlerinden oluştuğundan elemanları tekrar eder. Buradan Fibonacci dizisinin tanımını kullanırsa

$$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$$

dir. Bu bağıntı ile

$$f_{t+1} \equiv f_{s+1}$$

$$f_t \equiv f_s(modm)$$

olup

$$f_{t+1} - f_t \equiv f_{s+1} - f_s$$

$$f_{t-1} \equiv f_{s-1}$$

elde edilir. Buradan aynı oranda indisleri arttırarak veya azaltarak elde edilen dizinin elemanlarının aynı olduğu görülür.

Dolayısıyla

$$f_{t-1-s+2} \equiv f_{s-1-s+2}$$

$$f_{t-s+1} \equiv f_1$$

ve

$$f_{t-1-s+1} \equiv f_{s-1-s+1}$$

$$f_{t-s} \equiv f_0$$

dır. Buradan

$$f_{t-1} \equiv f_{s-1}\,,\ f_{t-2} \equiv f_{s-2}, \dots, f_{t-s+1} \equiv f_1\,, f_{t-s} \equiv f_0$$

olur. Böylece diziler periyodiktir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.25: Eğer m, $m = \prod p_i^{e_i}$ asal çarpanlamaya sahipse ve k_i, $F_n(mod p_i^{e_i})$ periyod uzunluğunu gösteriyorsa k, k_i nin en küçük ortak katı olan $lcm[k_i]$ ye eşittir. Yani $k = lcm[k_i]$ dir (Wall, 1960).

İspat: "k_i, $F_n(mod p_i^{e_i})$ periyodunun uzunluğudur" ifadesi $F_n(mod p_i^{e_i})$ dizilerinin sadece ck_i uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar ettiğini vurgular. "k, $F_n(mod\, m)$ periyodunun uzunluğudur" ifadesi ise $F_n(mod p_i^{e_i})$ nin tüm i değerleri için k terimlerinden sonra tekrar ettiğini vurgular. Dolayısıyla k, i nin tüm değerleri için ck_i şeklindedir. Böyle sayılar $F_n(mod\, m)$ nin bir periyodunu verdiği için $k = lcm[k_i]$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.26: $F_n \equiv 0(mod\, m)$ terimleri basit bir aritmetik sıra şeklindedir. Yani $x = 0,1,2, \dots$ve $d = d(m)$olan bazı pozitif tamsayılar için $n = xd$ tüm $F_n \equiv 0(mod\, m)$ terimlerini sağlar (Wall, 1960).

İspat: $i \geq j$ olmak üzere $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $F_{n+t} = F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1}$bilinen bağıntılarından $F_i = 0(mod\ m)$ ve $F_j = 0(mod\ m)$'den

$$F_{i+j} = 0(mod\ m) \text{ ve } F_{i-j} = 0(mod\ m)$$

elde edilir. görülebilir. İlk olarak $n = i$ ve $t = j$ düzeni için

$$F_n = 0(mod\ m)$$

$$F_t = 0(mod\ m)$$

olur. $F_i = 0(mod\ m)$ ve $F_j = 0(mod\ m)$ kullanılarak

$$F_{n+t} = F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1}$$

$$F_{i+j} = F_{i+1}F_j + F_iF_{j-1}$$

$$F_{i+j} = 0(modm)$$

elde edilir. Daha sonra $n + t = i$ ve $n = j$ düzeni için $F_j = 0(mod\ m)$ kullanılarak $t = i - j$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_i &= F_{n+t} \\ &= F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1} \\ &= F_{n+1}F_t + F_jF_{t-1} \\ &= F_{n+1}F_t \end{aligned}$$

elde edilir. $F_i = 0(mod\ m)$ olduğundan

$$F_{n+1}F_t \equiv 0(mod\ m)$$

dir.

$(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $F_n \equiv 0(mod\ m)$ bağıntılarından

$$F_t = F_{i-j} \equiv 0(mod\ m)$$

ikinci bağıntı elde edilir. Dolayısıyla n değeri $n = xd$ şeklindeki gibi bir modülün negatif olmayan terimlerin içeriği ile ilgilidir. Teorem 3.1.3.1.7 ye göre sonuç F_0 ın sadece $F_n \equiv 0(mod\ m)$ olmadığını ayrıca $d > 0$olduğunu gösterir ve teoremin ispatı tamamlanır. Yani $n = xd,\ F_n \equiv 0(mod\ m)$için $d > 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla arada belli bir artış olacak ve $x = 0,1,2, \dots$ için n ler dizide bulunacaktır.

Ayrıca $d|k$ olduğu belirtilmelidir. $d \leq k$ ile birçok m değeri bulunabilir (Wall, 1960).

3.3.2. k-adım Fibonacci dizilerinin m modülüne göre periyotları

Tanım 3.27: $n \geq k,\ 1 \leq i \leq k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ olmak üzere *k*-Fibonacci dizisinin *n*. terimi $f_n^{(k)}$ ile gösterilir ve

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.27 den, $f_n^{(k,m)} = f_i^{(k)}(modm)$ olmak üzere bu diziyi m modülüne indirgeyerek

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \cdots, f_n^{(k,m)}, \cdots\right)$$

şeklinde tekrar eden bir dizi elde edilir. Buradan

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \cdots, f_n^{(k,m)}, \cdots\right) = (0,0, \dots 1)$$

elde edilir. Bu ise (3.1) bağıntısı ile aynıdır (Lü ve Wang, 2007).

Teorem 3.28: $\{f(m,k)\}$ dizisi periyodik bir dizidir (Lü ve Wang, 2007).

İspat: $S_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : \ 0 \leq a_i \leq m-1\}$ olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur. Yani

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \dots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \geq 0$ için $v \geq u$ sayısı vardır. Tanım 3.1.3.2.1den,

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

olup

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

dir. Buradan

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \dots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve

$$f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

elde edilir. Bu ise $f(k,m)$ dizisinin periyodik bir dizi olduğunu gösterir.

$h_k(m)$ ile $f(k,m)$ nin en küçük periodu gösterilir. $f(k,m)$ nin periodu ya da m modülüne göre k-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır (Lü ve Wang, 2007).

Örnek 3.29: $f(4,3)$ dizisi için

$$f(4,3) = (0,0,0,1,1,2,1,2,0,2,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1,\dots)$$

olup her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar eder. Dolayısıyla $h_4(3) = 26$ dir.

3.4. Halkalarda Fibonacci Dizileri

Tanım 3.30: R birim elemanlı bir halka olmak üzere $\{M_n\}$, R nin elemanlarının dizisi olsun. M_0, M_1, a ve b ise R nin keyfi elemanları olmak üzere $\{M_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$M_{n+2} = bM_{n+1} + aM_n \quad n \geq 0,1,2,\cdots$$

bağıntısı ile tanımlanır (Decarli, 1970).

$\{M_n\}$ dizisinin özel hali olan $\{F_n\}$ dizisi Decarli tarafından aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 3.31: R bir halka, $F_0 = 0$ (halkanın sıfırı), $F_1 = I$ (halkanın birimi) a ve b ise R halkasının keyfi elemanları olmak üzere halkalardaki Fibonacci dizisi $\{F_n\}$

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n \quad n \geq 0 \text{ için}$$

olarak tanımlanır (Decarli, 1970).

Örnek 3.32: p asal sayı olmak üzere a ve b elemanları ile gerilen 9. mertebeden birimli halka

$$G = \langle a, b \mid 3a = 3b = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$$

olsun (Fine,1993).

Şimdi Tanım 3.31 i kullanarak Örnek 3.32 de verilen 9. mertebeden halkanın Fibonacci dizisini yazalım. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a, b ise G halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanarak G halkasının Fibonacci dizisini oluşturalım:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= b1 + a0 \\
&= b, \\
F_3 &= bb + a1 \\
&= b^2 + a \\
&= b + a \\
F_4 &= b(b + a) + ab \\
&= b^2 + ba + ab \\
&= b + a + a \\
&= b + 2a \\
F_5 &= b(b + 2a) + a(b + a) \\
&= b(b + a + a) + ab + a^2 \\
&= b^2 + ba + ba + a + 0 \\
&= b + a + a + a \\
&= b + 3a \\
&= b \\
F_6 &= bb + a(b + 2a) \\
&= b^2 + a(b + a + a) \\
&= b + ab + a^2 + a^2 \\
&= b + a + 0 + 0 \\
&= b + a \\
F_7 &= b(b + a) + a(b) \\
&= b^2 + ba + ab \\
&= b + 2a
\end{aligned}
$$

...

dir. Buradan

$$0, 1, b, b + a, b + 2a, b, b + a, \ldots$$

şeklindedir.

Dolayısıyla

$$\{F_n\} = \{0, 1, b, b + a, b + 2a, b, b + a, \dots\}$$

dir.

Teorem 3.33:

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n$$

ise

$$F_{n+2} = F_{n+1}b + F_n a$$

dir (Decarli, 1970).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım. Yani $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n$$

ise

$$F_{n+2} = F_{n+1}b + F_n a$$

olduğunu gösterelim. İlk olarak $n = 0$ için

$$F_2 = bF_1 + aF_0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} F_2 &= bF_1 + aF_0 \\ &= b1 + a0 \\ &= 1b + 0a \\ &= F_1 b + F_0 a \end{aligned}$$

dir.

Yani

$$F_2 = F_1 b + F_0 a$$

dir. $n = k$ doğru yani,

$$F_{k+2} = bF_{k+1} + aF_k$$

ise

$$F_{k+2} = F_{k+1} b + F_k a$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ doğru olduğunu gösterelim. Buradan

$$F_{k+1+2} = bF_{k+1+1} + aF_{k+1}$$

$$F_{k+3} = bF_{k+2} + aF_{k+1}$$

olup

$$F_{k+3} = F_{k+2} b + F_{k+1} a$$

olduğunu göstermeliyiz. Kabülümüzden

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= bF_{k+2} + aF_{k+1} \\
&= b(bF_{k+1} + aF_k) + a(bF_k + aF_{k-1}) \\
&= b(F_{k+1} b + F_k a) + a(F_k b + F_{k-1} a\ ) \\
&= b(F_{k+1} b) + b(F_k a\ ) + a(F_k b) + a(F_{k-1} a\ ) \\
&= (bF_{k+1})b + (bF_k)a + (aF_k)b + (aF_{k-1})a \\
&= (bF_{k+1})b + (aF_k)b + (bF_k)a + (aF_{k-1})a \\
&= (bF_{k+1} + aF_k)b + (bF_k + aF_{k-1})a \\
&= F_{k+2} b + F_{k+1} a
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$F_{k+3} = bF_{k+2} + aF_{k+1}$$

ise

$$F_{k+3} = F_{k+2}b + F_{k+1}a$$

dir. İspat tamamlanır.

Tanım 3.31 den F_{n+2}, F_{n+3}, F_{n+4} ve F_{n+5} aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n$$

$$\begin{aligned} F_{n+3} &= bF_{n+2} + aF_{n+1} \\ &= b(bF_{n+1} + aF_n) + aF_{n+1} \\ &= b^2F_{n+1} + baF_n + aF_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n+4} &= bF_{n+3} + aF_{n+2} \\ &= b(b^2F_{n+1} + baF_n + aF_{n+1}) + a(bF_{n+1} + aF_n) \\ &= b^3F_{n+1} + b^2aF_n + baF_{n+1} + abF_{n+1} + a^3F_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n+5} &= bF_{n+4} + aF_{n+3} \\ &= b(b^3F_{n+1} + b^2aF_n + baF_{n+1} + abF_{n+1} + a^3F_n) + a(b^2F_{n+1} + baF_n + aF_{n+1}) \\ &= b^4F_{n+1} + b^3aF_n + b^2aF_{n+1} + babF_{n+1} + ba^3F_n + ab^2F_{n+1} + abaF_n + a^2F_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde $k \geq 6$ için F_{n+k}, F_n ve F_{n+1}'e bağlı olarak ifade edilebilir.

Sonuç 3.34:

i. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = F_{n-1}aF_{n-1} - F_naF_{n-2}$

ii. $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}aF_{n-1} - F_{n-2}aF_n \qquad n \geq 1$

(Decarli, 1970).

İspat : i. Teorem 3.33 den

$$F_n = bF_{n-1} + aF_{n-2}$$

$$F_{n+1} = F_nb + F_{n-1}a$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= (F_nb + F_{n-1}a)F_{n-1} - F_nF_n \\ &= (F_nb + F_{n-1}a)F_{n-1} - F_n(bF_{n-1} + aF_{n-2}) \\ &= F_{n-1}aF_{n-1} - F_naF_{n-2} \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

ii. Teorem 3.33 den

$$F_{n+1} = bF_n + aF_{n-1}$$

$$F_n = F_{n-1}b + F_{n-2}a$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= F_{n-1}(F_nb + F_{n-1}a) - F_nF_n \\ &= F_{n-1}(bF_n + aF_{n-1}) - (F_{n-1}b + F_{n-2}a)F_n \\ &= F_{n-1}aF_{n-1} - F_{n-2}aF_n \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

$\{M_n\}$ dizisi ve bu dizinin özel hali olan $\{F_n\}$ dizisi arasındaki ilişkileri aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 3.35: $M_{n+r} = F_r a M_{n-1} + F_{r+1} M_n \quad n \geq 1, r \geq 0$ (Decarli, 1970).

İspat : İspat tümevarım yöntemiyle yapılır. $\{M_n\}$ dizisi yerine $\{F_n\}$ dizisi olarak alınırsa

$$F_{n+r} = F_r a F_{n-1} + F_{r+1} F_n \,, \qquad n \geq 1 \qquad (3.2)$$

elde edilir. Şimdi bu eşitlikte r yi sabit tutup n e tümevarım uygulayalım. $n = 1$ için eşitlik $F_{r+1} = F_r a F_0 + F_{r+1} F_1$ olup doğru olduğu aşikadır. $n = k - 1$ için eşitlik doğru olsun. Yani

$$F_{k-1+r} = F_r a F_{k-2} + F_{r+1} F_{k-1} \qquad (3.3)$$

olsun. Kabulden $n = k - 2$ için doğru olup

$$F_{k-2+r} = F_r a F_{k-3} + F_{r+1} F_{k-2} \qquad (3.4)$$

Burada (3.3) eşitliğin her iki tarafını sağdan a ile (3.2) eşitliğini de sağdan b ile işleme alarak taraf tarafa toplarsak $n = k$ için doğruğunu göstermiş oluruz.

$$\begin{aligned} F_{k-1+r} a + F_{k-2+r} b &= F_r a F_{k-2} a + F_{r+1} F_{k-1} a + F_r a F_{k-3} b + F_{r+1} F_{k-2} b \\ &= F_r a (F_{k-2} a + F_{k-3} b) + F_{r+1} (F_{k-1} a + F_{k-2} b) \\ &= F_r a (F_{k-1}) + F_{r+1} (F_k) \\ &= F_{k+r} \end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.36:

$$M_n = F_n M_1 + F_{n-1} a M_0 \qquad n \geq 1$$

(Decarli, 1970).

İspat: Teorem 3.35 den $n \geq 1, r \geq 0$ olmak üzere

$$M_{n+r} = F_r a M_{n-1} + F_{r+1} M_n$$

dir. Burada n ile r yer değiştirirse

$$M_{r+n} = F_n a M_{r-1} + F_{n+1} M_r$$

elde edilir. n yerine $n-1$ alınıp $r = 1$ olarak seçilirse

$$M_{r+n-1} = F_{n-1} a M_{r-1} + F_{n-1+1} M_r$$

$$M_{1+n-1} = F_{n-1} a M_{1-1} + F_n M_1$$

$$M_n = F_{n-1} a M_0 + F_n M_1$$

$$M_n = F_n M_1 + F_{n-1} a M_0$$

elde edilir. Teorem 3.35 dan $\{F_n\}$ dizisi

$$F_{n+r} = F_r a F_{n-1} + F_{r+1} F_n \qquad n \geq 1 \tag{3.5}$$

dir. (3.2) bağıntısında n yerine $n+1$ ve r yerine n alınırsa

$$F_{n+1+r} = F_r a F_{n+1-1} + F_{r+1} F_{n+1}$$

$$F_{n+1+n} = F_n a F_n + F_{n+1} F_{n+1}$$

$$F_{2n+1} = F_n a F_n + F_{n+1}^2$$

elde edilir.

Teorem 3.37: $F_nF_{n+r} - F_{n+r}F_n$=$F_nF_raF_{n-1} - F_{n-1}aF_rF_n \quad n \geq 1, r \geq 1$ (Decarli, 1970).

İspat: (3.5) bağıntısından $n \geq 1$ için

$$F_{n+r} = F_raF_{n-1} + F_{r+1}F_n$$

olduğunu biliyoruz. Burada n yerine $r+1$ ve r yerine $n-1$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_{n+r} &= F_rA_0F_{n-1} + F_{r+1}F_n \\ &= F_{n-1}A_0F_{r+1-1} + F_{n-1+1}F_{r+1} \\ &= F_{n-1}aF_r + F_nF_{r+1} \end{aligned}$$

olup

$$F_{n+r} = F_{n-1}aF_r + F_nF_{r+1} \tag{3.6}$$

elde edilir. Halkanın çarpma işleminin birleşme özelliği, (3.5) ve (3.6) bağıntıları kullanılırsa

$$F_n(F_{r+1}F_n) = (F_nF_{r+1})F_n$$

$$F_n(F_ra\,F_{n-1} + F_{r+1}F_n - F_ra\,F_{n-1}) = (\,F_{n-1}aF_r + F_nF_{r+1} - \,F_{n-1}aF_r)F_n$$

$$F_n(F_{n+r} - F_ra\,F_{n-1}) = (F_{n+r} - F_{n-1}a\,F_r)F_n$$

$$F_nF_{n+r} - F_{n+r}F_n = F_nF_ra\,F_{n-1} - F_{n-1}aF_rF_n$$

olup ispat tamamlanır.

3.4.1. p^2 Mertebeden birimli, sonlu halkaların Fibonacci dizileri ve periyotları

Bu bölümde p^2 mertebeden halkalardan birimli olan ve

$A = \langle a : p^2 a = 0, a^2 = a \rangle$

$B = \langle a, b : pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle = Z_p + Z_p$

$C = \langle a, b : pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$

temsillerine sahip halkaların Fibonacci dizileri periyotları verildi. Bunun için a ve b birim elemanlı bir halkanın keyfi elemanları ve bu halkanın sıfır elemanı 0, birim elemanı 1 olmak üzere $F_0 = 0, F_1 = 1$ için Decarli'nin birimli halkalar üzerinden tanımladığı

$$F_{n+2} = b\,F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılarak A, B ve C halkalarının Fibonacci dizileri oluşturulmuştur. A halkasının periyodu $h_2(p^2)$, B halkasının periyodu 2 ve C halkasının periyodu ise keyfi elemanlarına bağlı olarak p, ya da $2p$ olarak hesaplandı (Taşyurdu ve Gültekin, 2013).

Teorem 3.38: Herhangi p asal sayısı için a elemanı ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$A = \langle a : p^2 a = 0, a^2 = a \rangle$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu $h_2(p^2)$ dir. Yani $P(A; a, a) = h_2(p^2)$ dir (Taşyurdu ve Gültekin, 2013).

İspat : Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise A halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\,F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa A halkasının temsillerinden

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= a1 + a0\\
&= a,\\
F_3 &= aa + a1\\
&= a^2 + a\\
&= a + a\\
&= 2a,\\
F_4 &= a(2a) + aa\\
&= a(a + a) + a^2\\
&= a^2 + a^2 + a^2\\
&= 3a^2\\
&= 3a,\\
F_5 &= a(3a) + a(2a)\\
&= a(a + a + a) + a(a + a)\\
&= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2\\
&= 5a^2,\\
&= 5a,\\
&\dots\\
F_n &= af_n^{(2)}\\
F_{n+1} &= af_{n+1}^{(2)},\\
F_{n+2} &= a\left(f_{n+1}^{(2)}\right) + a\left(f_n^{(2)}\right)\\
&= a\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{f_{n+1}^{(2)}}\right) + a\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{f_n^{(2)}}\right)\\
&= f_{n+1}^{(2)}a^2 + f_n^{(2)}a^2,\\
&= f_{n+1}^{(2)}a + f_n^{(2)}a\\
&= (f_{n+1}^{(2)} + f_n^{(2)})a\ ,\\
&= f_{n+2}^{(2)}a,\\
&\dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,a,2a,3a,5a,8a,13a,21a,34a,\ldots,f_n^{(2)}a\,,f_{n+1}^{(2)}a,f_{n+2}^{(2)}a,\ldots$$

dizisi elde edilir. $n \geq 2$ için $f_n^{(2)}$, 2-adım Fibonacci dizisinin n. sayısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere oluşan bu dizinin her bir F_n elemanı $f_n^{(2)}a$ şeklindedir. Yani her bir F_n elemanının katsayısı $f_n^{(2)}$ dir. Dolayısıyla bu F_n elemanının katsayıları arasında $n \geq 2$ için $f_0^{(2)} = 0$, $f_1^{(2)} = 1$ olmak üzere

$$f_n^{(2)} = f_{n-1}^{(2)} + f_{n-2}^{(2)}$$

bağıntısı vardır. Dizinin periyodu F_n elemanının katsayısı olan $f_n^{(2)}$ sayısı yani p asal sayısına gore belirlenir. Şimdi p asal sayısına gore dizinin periyodunu belirleyelim.

$p \geq 2$ için $f_n^{(2,\,p^2)} = f_n^{(2)}(modp^2)$ olmak üzere $n \geq 2$ için bu dizinin her bir F_n elemanı $f_n^{(2,\,p^2)}a$ şeklindedir. Oluşan bu dizinin elemanlarının katsayıları arasında $n \geq 2$ için $f_0^{(2,\,p^2)} = 0$, $f_1^{(2,\,p^2)} = 1$ olmak üzere

$$f_n^{(2,\,p^2)} = f_{n-1}^{(2,\,p^2)} + f_{n-2}^{(2,\,p^2)}$$

bağıntısı vardır. Yani katsayılar $f(2,\,p^2)$ dizisinin elemanlarıdır. Bu dizinin periyodu $h_2(p^2)$ olduğundan bu dizinin periyodu $h_2(p^2)$ dir. Yani $P(A;a,a) = h_2(p^2)$ dir.

Teorem 3.39: Herhangi p asal sayısı için a ve b elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$B = \langle a,b \mid pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle = \mathbb{Z}_\mathrm{p} + \mathbb{Z}_\mathrm{p}$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu 2 dir. Yani $P(B;a,b) = P(B;b,a) = 2$ dir (Taşyurdu ve Gültekin, 2013).

İspat: Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise B halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\,F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa B halkasının temsillerinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= b1 + a0\\
&= b,\\
F_3 &= bb + a1\\
&= b^2 + a\\
&= a + b\\
F_4 &= b(a+b) + ab\\
&= b(a+b) + ab\\
&= ba + b^2 + ab\\
&= 0 + b + 0\\
&= b,\\
F_5 &= bb + a(a+b)\\
&= b^2 + a^2 + ab\\
&= b + a + 0\\
&= a + b,\\
F_6 &= b(a+b) + ab\\
&= ba + b^2 + ab\\
&= a + b + 0\\
&= a + b,\\
F_7 &= bb + a(a+b)\\
&= b^2 + a^2 + ab\\
&= b + a + 0\\
&= a + b,\\
&\ \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_n &= b\\
F_{n+1} &= a+b,\\
F_{n+2} &= b(a+b)+ab\\
&= ba+b^2+ab\\
&= 0+b+0\\
&= b,\\
&\ \ \dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,b,a+b,b,a+b,\dots,a+b,\dots$$

dizisi elde edilir. Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonar sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyor. Dolayısıyla B halkasının Fibonacci dizisi periyodiktir. Tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 2 olduğundan bu halkanın periyodu 2 dir. Yani $P(B;b,a)=2$ dir.

Benzer olarak Tanım 3.31 den $F_0=0$, $F_1=1$ ve a ile b ise B halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2}=b\,F_{n+1}+aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa B halkasının temsillerinden

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= a1+b0\\
&= a,\\
F_3 &= aa+b1\\
&= a^2+b\\
&= a+b\\
F_4 &= a(a+b)+ba\\
&= a^2+ab+ba\\
&= a+0+0\\
&= a,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_5 &= aa + b(a+b) \\
&= a^2 + ba + b^2 \\
&= a + 0 + b \\
&= a + b, \\
F_6 &= b(a+b) + ba \\
&= a^2 + ba + ab \\
&= a + 0 + 0 \\
&= a, \\
F_7 &= bb + a(a+b) \\
&= b^2 + a^2 + ab \\
&= b + a + 0 \\
&= a + b, \\
&\;\;\dots \\
F_n &= a \\
F_{n+1} &= a + b, \\
F_{n+2} &= a(a+b) + ba \\
&= ab + a^2 + ba \\
&= a + 0 + 0 \\
&= a, \\
F_{n+3} &= aa + b(a+b) \\
&= a^2 + ba + a^2 \\
&= a + 0 + b \\
&= a + b, \\
&\;\;\dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1, a, a+b, a, a+b, \dots, a, a+b, \dots$$

dizisi elde edilir. Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin Dolayısıyla B halkasının Fibonacci dizisi periyodiktir. Tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 2 olduğundan bu halkanın periyodu 2 dir. Yani $P(B; b, a) = 2$ dir. Sonuç olarak $P(B; b, a) = P(B; a, b) = 2$ dir.

Teorem 3.40: Herhangi p asal sayısı için a ve b elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$C = \langle a, b : pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu p ya da $2p$ dir. Yani $P(C; a, b) = p$ ve $P(C; b, a) = 2p$ dir (Taşyurdu ve Gültekin, 2013).

İspat: Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise C halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\,F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa C halkasının temsillerinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= b1 + a0\\
&= b,\\
F_3 &= bb + a1\\
&= b^2 + a\\
&= b + a\\
F_4 &= b(a+b) + ab\\
&= ba + b^2 + ab\\
&= a + b + a\\
&= b + 2a,\\
F_5 &= b(b+2a) + a(b+a)\\
&= b^2 + 2ba + ab + a^2\\
&= b + 2a + a + 0\\
&= b + 3a,\\
F_6 &= b(b+3a) + a(b+2a)\\
&= b(b+a+a+a) + a(b+a+a)\\
&= b^2 + ba + ba + ba + ab + a^2 + a^2\\
&= b + 4a,\\
&\;\;\ldots
\end{aligned}$$

$F_{n-2} = b + (n-4)a$

$F_{n-1} = b + (n-3)a,$

$$
\begin{aligned}
F_n &= b(b + (n-3)a) + a(b + (n-4)a) \\
&= b^2 + b\big((n-3)a\big) + ab + a(n-4)a \\
&= b + \Big(\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n-3}\Big) + a + a\Big(\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n-4}\Big) \\
&= b + ba + ba + \cdots + ba + a + a^2 + a^2 + \cdots + a^2, \\
&= b + \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-2} + 0 + 0 + \cdots + 0 \\
&= b + (n-2)a\ , \\
&\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1, b, b + a, b + 2a, b + 3a, \ldots, b + (n-4)a, b + (n-3)a, b + (n-2)a, \ldots$$

dizisi elde edilir. Oluşan bu dizinin her bir $(n+2)$. elemanı $n \in N$ için $b + na$ şeklindedir. Bu elemanın a teriminin katsayıları ardışık doğal sayılar ve b teriminin katsayısı 1 dir. Dizinin periyodu a teriminin katsayısı olan temsildeki p asal sayısına gore belirlenir.

Şimdi p asal sayısını ele alarak dizinin periyodunu belirleyelim. Halkanın temsilindeki bağıntılar kullanılırsa dizinin her elemanı $p \geq 2$ için

$$b + na = \begin{cases} b & , \quad n = p \\ b + ta & , \quad n = t(modp) \end{cases}$$

olur. Oluşan bu dizide $p \geq 2$ için kalan sınıfında p tane eleman olduğundan dizinin periyodu p dir. Dolayısıyla C halkasının Fibonacci dizisinin periyodu p dir. Yani $P(C; a, b) = p$ dir.

Benzer olarak Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise C halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\, F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa C halkasının temsillerinden

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= a1 + b0 \\
&= a, \\
F_3 &= aa + b1 \\
&= a^2 + b \\
&= b \\
F_4 &= ba + ab \\
&= a + a \\
&= 2a, \\
F_5 &= a(2a) + bb \\
&= a(a + a) + b^2 \\
&= 2a^2 + b^2 \\
&= 0 + b \\
&= b, \\
F_6 &= ab + a(2a) \\
&= a + b(a + a) \\
&= a + ba + ba \\
&= a + a + a \\
&= 3a, \\
&\dots \\
F_{2n} &= na \\
F_{2n+1} &= b, \\
F_{2n+2} &= ab + b(na) \\
&= a + b\left(\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n}\right) \\
&= a + ba + ba + \cdots + ba, \\
&= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n+1} \\
&= (n + 1)a \,, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,a,b,20,b,\dots,na,b,(n+1)a,\dots$$

dizisi elde edilir. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $m \in Z^+$ için bu dizinin her bir n. elemanı

$$F_n = \begin{cases} ma & , \quad n = 2m \\ b & , \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

şeklindedir. Halkanın dizisini

$$0,1,\underbrace{a}_{A_0},\underbrace{b}_{B_0},\underbrace{2a}_{A_1},\underbrace{b}_{B_1},\underbrace{3a}_{A_2},\underbrace{b}_{B_2},\dots,\underbrace{na}_{A_n},\underbrace{b}_{B_n},\underbrace{(n+1)a}_{A_{n+1}},\underbrace{b}_{B_{n+1}},\dots$$

olarak alalım. Yani A_n ve B_n gibi iki diziye ayıralım p asal sayısına dizinin periyodu belirleyelim. A_n dizisinde $p \geq 2$ için kalan sınıfında p tane eleman vardır. B_n dizisinde ise b elemanı p tane olup C halkasının Fibonacci dizisinin periyodu $2p$ dir. Yani $P(C;b,a) = 2p$ dir. Sonuç olarak $P(C;a,b) = p$ ve $P(C;b,a) = 2p$ dir.

Sonuç 3.41:

i. Teorem 3.38 den A halkasının karakteristiği $Kar(A)$ olmak üzere bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu $h_2(Kar(A))$ dir. Yani

$$P(A;a,a) = h_2(Kar(A))$$

dir.

ii. Teorem 3.40 dan C halkasının karakteristiği $Kar(C)$ olmak üzere bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu $Kar(C)$ dir. Yani

$$P(C;a,b) = Kar(C)$$

dir (Taşyurdu ve Gültekin, 2013).

3.4.2. p^2 Mertebeden sonlu cismin Fibonacci dizisi ve periyodu

Bu bölümde p^2 mertebeden halkalardan

$$GF(p^2) = \begin{cases} \langle a, b\,;\ \ pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p \neq 2 \text{ } için\, j\,, \quad Z_p \text{ } de\ kare\ değil \\ \langle a, b\,; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p = 2 \end{cases}$$

temsiline sahip cismin Fibonacci dizisinin periyodu verildi. Bunun için a ve b birim elemanlı bir halkanın keyfi elemanları ve bu halkanın sıfır elemanı 0, birim elemanı 1 olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için Decarli'nin birimli halkalar üzerinden tanımladığı

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılarak periyodun temsilde verilen j sayısına göre değiştiği görülmektedir (Taşyurdu ve Gültekin, 2016).

Teorem 3.42: Herhangi p asal sayısı için a ve b elemanları ile gerilen p^2 mertebeden cisim

$$GF(p^2) = \begin{cases} \langle a, b\,;\ \ pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad p \neq 2 \text{ } için\, j\,,\ \ Z_p \text{ } de\ kare\ değil \\ \langle a, b\,; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad\qquad p = 2 \end{cases}$$

olsun. $GF(p^2)$ cisminin Fibonacci dizisi;

i. $j = p - 1$ için

$$0, 1, b, 0, b, ja, 0, ja, jb, 0, jb, a, 0, a, b, 0, \ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 12,

ii. $j = p - 2$ için

$$0,1,b,(j+1)a,0,(j+1)a,(j+1)b,a,0,a,b,(j+1)a,\ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 8,

iii. $j = p - 3$ için

$$0,1,b,(j+1)a,(j+2)b,a,0,a,b,(j+1)a,\ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 6,

iv. $j = p - 4$ ise

$$\underbrace{0,1,b,(j+1)a,(j+2)b,\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b,}_{k=1}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b}_{k=2},\ldots,\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,}_{k=r}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b}_{k=r},\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b}_{k=r+1},(4k+1)a,(2k+1)b,\ldots,}_{A_1}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,}_{k=s}}_{A_1}\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b}_{k=s},\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,}_{k=s+1}}_{A_2}$$

$$\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,\ldots,\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b}_{k=t}}_{A_2},0,1,b,(j+1)a,\ldots$$

olup periyodiktir ve periyodu $4p$ dir (Taşyurdu ve Gültekin, 2016).

Şimdi Teorem 3.42 nin her durumu için sırası ile birer örnek verelim.

Örnek 3.43:

i. $p = 11$ için $GF(11^2)$ cisminin temsili

$$GF(11^2) = \langle a, b\,;\ 11a = 11b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle$$

şeklindedir.

j, $\mathbb{Z}_{11}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır. $\mathbb{Z}_{11} = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10} \right\}$ kümesinden

$0^2 = 0, 1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 5$, $5^2 = 3$, $6^2 = 3$, $7^2 = 5$, $8^2 = 9, 9^2 = 4$, $10^2 = 1$

yazılır. Buradan $\mathbb{Z}_{11}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{9} \right\}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{ \overline{2}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10} \}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Teorem 3.42 nin i. şıkkın uygulaması olarak $j = 11 - 1 = 10$ olup cismin temsili

$$GF(11^2) = \langle a, b\,;\ 11a = 11b = 0, a^2 = a, b^2 = 10a, ab = b, ba = b \rangle$$

şeklinde olur. Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise $GF(11^2)$ halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\, F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa $GF(11^2)$ halkasının temsillerinden

$$0, 1, b, 0, b, 10a, 0, 10a, 10b, 0, 10b, a, 0, a, b, 0, \ldots$$

dizisi elde edilir. $j = 10$ için

$$0, 1, b, 0, b, ja, 0, ja, jb, 0, jb, a, 0, a, b, \ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu 12 dir.

ii. $p = 13$ için $GF(13^2)$ cisminin temsili

$$GF(13^2) = \langle a, b\ ;\ 13a = 13b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b\rangle$$

dir. Cismin temsilindeki j, $\mathbb{Z}_{13}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır.

$\mathbb{Z}_{13} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\}$ kümesinden

$0^2 = 0, 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 3,\ 5^2 = 12,\ 6^2 = 10,\ 7^2 = 10,\ 8^2 = 12, 9^2 = 3,$ $10^2 = 9,\ 11^2 = 9,\ 12^2 = 1$

yazılır. Buradan $\mathbb{Z}_{13}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}\}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{\bar{2}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}\}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Teorem 3.42 nin ii. şıkkın uygulaması olarak $j = 13 - 2 = 11$ olup cismin temsili

$$GF(13^2) = \langle a, b\ ;\ 13a = 13b = 0, a^2 = a, b^2 = 11a, ab = b, ba = b\rangle$$

şeklinde olur. Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise $GF(13^2)$ halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\ F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa $GF(13^2)$ halkasının temsillerinden

$$0, 1, b, 12a, 0, 12a, 12b, a, 0, a, b, 12a, \ldots$$

dizisi elde edilir. $j = 11$ için

$$0, 1, b, (j+1)a, 0, (j+1)a, (j+1)b, a, 0, a, b, \ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu 8 dir.

iii. $p = 17$ için $GF(17^2)$ cisminin temsili

$$GF(17^2) = \langle a, b\,;\;\; 17a = 17b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle$$

olup j, $\mathbb{Z}_{17}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır.

$\mathbb{Z}_{17} = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16} \}$ kümesinden

$0^2 = 0, 1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 8$, $6^2 = 2$, $7^2 = 15$, $8^2 = 13, 9^2 = 13$, $10^2 = 15$, $11^2 = 2$, $12^2 = 8$, $13^2 = 16$, $14^2 = 9$, $15^2 = 4$, $16^2 = 1$

yazılır. Buradan $\mathbb{Z}_{17}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{15} \}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{ \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Teorem 3.42 nin iii. şıkkın uygulaması olarak $j = 17 - 3 = 14$ olup cismin temsili

$$GF(17^2) = \langle a, b\,;\;\; 17a = 17b = 0, a^2 = a, b^2 = 14a, ab = b, ba = b \rangle$$

şeklinde olur. Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise $GF(17^2)$ halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\, F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa $GF(17^2)$ halkasının temsillerinden

$$0, 1, b, 15a, 16b, a, 0, a, b, 15a, \ldots$$

dizisi elde edilir. $j = 14$ için

$$0, 1, b, (j+1)a, (j+2)b, a, 0, a, b, (j+1)a, \ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu 6 dir.

iv. $p = 19$ için $GF(19^2)$ cisminin temsili

$$GF(19^2) = \langle a, b\ ;\ \ 19a = 19b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle$$

dir. Cismin temsilindeki j, $\mathbb{Z}_{19}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır.

$\mathbb{Z}_{19} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}\}$ kümesinden

$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 6, 6^2 = 17, 7^2 = 11, 8^2 = 7, 9^2 = 5$
$10^2 \equiv (-9)^2 = 5, \ldots$

dir. Benzer şekilde devam edilirse $\mathbb{Z}_{19}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{16}, \overline{17}\}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{\overline{2}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{18},\}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Teorem 3.42 nin iv. şıkkın uygulaması olarak $j = 19 - 4 = 15$ olup cismin temsili

$$GF(19^2) = \langle a, b\ ;\ \ 19a = 19b = 0, a^2 = a, b^2 = 15a, ab = b, ba = b \rangle$$

şeklinde olur. Tanım 3.31 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve a ile b ise $GF(19^2)$ halkasının gerenleri olmak üzere

$$F_{n+2} = b\,F_{n+1} + aF_n$$

bağıntısı kullanılırsa $GF(19^2)$ halkasının temsillerinden

$0,1,b,16a,17b,5a,3b,12a,15b,9a,5b,8a,13b,13a,7b,4a,11b,17a,9b,$

$0,9b,2a,11b,15a,7b,6a,13b,11a,5b,10a,15b,7a,3b,14a,17b,3a,b,18a$

$0,18a,18b,3a,2b,14a,16b,7a,4b,10a,14b,11a,6b,6a,12b,15a,8b,2a,10b$

$0,10b,17a,8b,4a,12b,13a,6b,8a,14b,9a,4b,12a,16b,5a,2b,16a,18b,a,$

$0,1,b,16a,\ldots$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu $4.19 = 76$ dır (Taşyurdu ve Gültekin, 2016)..

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Birimli Halkaların Fibonacci Dizilerinin Tridiagonal Matrisi

Bu bölümde birimli halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin matrisler ile ilişkisi verilmiştir. $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin terimlerinin matrislerle gösterimini ifade eden tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 4.1: Birimli halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizilerinin terimlerini üreten matris $n \in \mathbb{Z}^+$için

$$R = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad R^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ bF_n & bF_{n-1} \end{pmatrix}.$$

olarak tanımlanır (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

Decarli 1970 de halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin rekurens bağıntısını bir R halkasında, $F_0 = 0$ (halkanın sıfırı), $F_1 = I$ (halkanın birimi) a ve b ise R halkasının keyfi elemanları olmak üzere

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n \qquad n \geq 0 \tag{4.1}$$

olarak tanımladı. Bu rekurens bağıntısı kullanılarak halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin herhangi bir terimini elde etmek için kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesi gerekmektedir. Yukarıdaki Tanım 4.1 ise halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin terimlerini daha kolay elde etmemizi sağlamaktadır. Yani matrisler kullanılarak Fibonacci dizisinin terimleri bulunabilir. Örneğin; $\{F_n\}$ dizisinin F_{15} terimini elde etmek için kendisinden önceki tüm terimleri oluşturmadan R^{15} matrisi kullanılabilir.

$\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin terimleri tridiagonal matrisin determinatı kullanılarak da elde edilir. Bunun için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.2: $n \geq 0$ için $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin $F_n(a,b)$ tridiagonal matrisi

$$F_n(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \dots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

olmak üzere $F_0(a,b) = 0$ olup

$$\det(F_n(a,b)) = F_n \tag{4.2}$$

dir (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

İspat: İspatı tümevarım metodunu kullanarak yapabiliriz. $F_n(a,b)$ tridiagonal matrisinden,

$n = 1$ için; $\det(F_1(a,b)) = |1| = 1 = F_1$,

$n = 2$ için; $\det(F_2(a,b)) = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a = F_2$,

$n = 3$ için; $\det(F_3(a,b)) = \begin{vmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + b = F_3$,

$n = 4$ için; $\det(F_4(a,b)) = \begin{vmatrix} 1 & -b & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2ab = F_4$,

...

elde edilir. Şimdi (4.2) eşitliğinin $n = k$ doğru olduğunu kabul edip $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Kabulümüzden

$n = k - 1$ için; $\det(F_{k-1}(a,b)) = F_{k-1}$

$n = k$ için; $\det(F_k(a,b)) = F_k$

yazılır.

Buradan $n = k + 1$ için Teorem 2.23 den

$$\det(F_{k+1}(a,b)) = a\det(F_k(a,b)) + b\det(F_{k-1}(a,b))$$

$$= aF_k + bF_{k-1}$$

$$= F_{k+1}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. m Modülüne Göre Birimli Halkaların Fibonacci Dizileri

Bu bölümde a, b birim elemanlı bir halkanın keyfi elemanları ve bu halkanın sıfır elemanı 0, birim elemanı 1 olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için DeCarli'nin birimli halkalar üzerinden tanımladığı

$$F_{n+2} = bF_{n+1} + aF_n, \qquad n \geq 0$$

bağıntısına kullanılarak $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin derece ve katsayısının m modülüne göre dizileri elde edildi. $F_i^m = F_i(modm)$ olmak üzere birimli halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin her bir teriminin üssünü ve katsayısı m modülüne göre indirgenerek elde edilen

$$\{F^m\} = \{F_0^m, F_1^m, \cdots, F_n^m, \cdots\}$$

dizinin periyodik olduğu gösterilmiştir. $\{F^m\}$ dizisinin en küçük periyodunu ise hF^m ile gösterilmiştir. Yani hF^m, m modülüne göre birimli halkaların $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin periyodudur. Daha sonra bu dizinin periyodunun $R = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}$ matrisi tarafından gerilen devirli grubun mertebesine eşit olduğunu veren teorem verilmiştir. Yani

$$hF^m = |\langle R \rangle_m|$$

olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca p bir asal sayı olmak üzere p modülüne göre Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile birimli halkaların $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin periyodu karşılaştırıldığında

$$hF^p = pk(p)$$

sağlayan teorem elde edilmiştir. Buradan p bir asal sayı olmak üzere $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin her bir teriminin derecesi ve katsayısı p modülüne göre indirgenerek elde edilen $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin periyodunun yani hF^p nin çift sayı olduğunu gösteren teorem verilmiştir.

Tanım 3.31 den $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin terimleri

$F_0 = 0$

$F_1 = I$

$F_2 = Ia + 0b = a$

$F_3 = aa + bI = a^2 + b$

$F_4 = a(a^2 + b) + ba = a^3 + 2ab$

$F_5 = a(a^3 + 2ab) + b(a^2 + b) = a^4 + 3a^2b + b^2$

$F_6 = a(a^4 + 3a^2b + b^2) + b(a^3 + 2ab)$

$\quad = (a^5 + 3a^3b + ab^2) + (ba^3 + 2ab^2)$

$\quad = a^5 + 4a^3b + 3ab^2$

...

olup

$$\{F_n\} = \{0, I, a, a^2 + b, a^3 + 2ab, a^4 + 3a^2b + b^2, a^5 + 4a^3b + 3ab^2\}$$

şeklindedir.

Teorem 4.3: $\{F^m\}$ dizisi periyodiktir (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

İspat: $\{F^m\}$ dizisinin terimlerinin kümesi S olsun. Yani

$$S = \{a_1x + b_1y\,, a_2x + b_2y,:\ 0 \leq a_1, a_2, b_1, b_2 \leq m - 1\}$$

olur. Buradan S kümesi sonlu olup $|S| = (m^m)^2$ elde edilir. S kümesi sonlu olduğundan her hangi $i \geq j$ için

$$F_{i+1}^m = F_{j+1}^m, F_{i+2}^m = F_{j+2}^m = \cdots F_{i+k}^m = F_{j+k}^m$$

olacak şekilde i ve j doğal sayıları vardır. Birimli halkalardaki $\{F^m\}$ Fibonacci dizisinin tanımından

$$F_i^m = aF_{i-1}^m + bF_{i-2}^m$$

ve

$$F_j^m = aF_{j-1}^m + bF_{j-2}^m$$

olduğunu biliyoruz. Eğer

$$F_{i+1}^m = F_{j+1}^m \text{ ve } F_{i+2}^m = F_{j+2}^m$$

ise

$$F_{i+2}^m - F_{i+1}^m = F_{j+2}^m - F_{j+1}^m$$

$$F_i^m = F_j^m$$

elde edilir. Benzer olarak devam edilirse

$$F_{i-1}^m = F_{j-1}^m, F_{i-2}^m = F_{j-2}^m, \cdots\ F_{i-j}^m = F_{j-j}^m = F_0^m$$

olur. Bu ise $\{F^m\}$ dizisinin periyodik olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Örnek 4.4: Teorem 4.3 de $m = 2$ olarak alınırsa $\{F^2\}$ dizisi

$F_0 = 0$

$F_1 = I$

$F_2 = Ia + 0b = a$

$F_3 = aa + Ib = a^2 + b = I + b$

$F_4 = a + ba + ab = a + 2ba = a$

$F_5 = aa + Ib + bb = a^2 + b + b^2 = I + b + I = b$

$F_6 = ba + ab = I + I = 0$

$F_7 = 0a + bb = b^2 = I$

...

olup

$$\{F^2\} = \{0, I, b, I + b, a, b\ , 0, I, \dots\ \}$$

elde edilir ve bu dizi tekrar eder. Dolayısıyla dizi periyodik olup periyodu 6 dır. Yani $hF^2 = 6$ dır.

Teorem 4.3 ten

- $F_n \equiv F_{n+r.hF^m}(modm)$
- $F_{hF^m} = 0(mod\ m)$
- $F_{hF^m-1} = F_{hF^m+1} = 1(mod\ m)$

yazılabilir. Ayrıca hF^m, m modülüne gore birimli halkaların $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin periyodu olmak üzere $F_n \equiv 0(modm)$ ve $F_{n+1} \equiv 1(modm)$ ise $hF^m|n$ dir.

Birimli halkaların $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin reel katsayıları h_{ij} olmak üzere $A = (h_{ij})$ matrisi verilsin. Burada $A(modm)$ ise A matrisinin her bir girdisinin m modülüne indirgemesi olduğunu gösterir. Yani

$$A(modm) = h_{ij}(mod\ m)$$

dir. Buradan $R^i(modm)$, R^i matrisindeki her bir girdinin üssünün ve katsayısının m modülüne indirgenmesi olmak üzere $\langle R\rangle_m = \{R^i(modm) :\ i \geq 0\}$ bir devirli grubunu ve $|\langle R\rangle_m|$ de $\langle R\rangle_m$ in mertebesini gösterir.

Teorem 4.5: $hF^m = |\langle R\rangle_m|$ dir (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

İspat: hF^m in$|\langle R\rangle_m|$ ile bölündüğü ve $|\langle R\rangle_m|$in de hF^m ile bölündüğü gösterilirse ispat tamamlanır. Tanım 4.1. den, $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$R = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad R^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ bF_n & bF_{n-1} \end{pmatrix}$$

olmak üzere birimli halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin elemanları R tarafından üretildiğini biliyoruz. $s(m)$, m modülüne göre R matrisi ile üretilen devirli grubun mertebesi olsun. Buradan $|\langle R\rangle_m| = s(m)$ olmak üzere

$$\langle R\rangle_m = \left\{ \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^i (mod\ m) : i \in Z \right\}$$

olduğundan $o(R) = s(m)$ yazılır. Yani

$$\begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^{s(m)} (mod\ m) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

dir. hF^m, m modülüne gore birimli halkaların $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin periyodu olduğundan $F_{hF^m} = 0(mod\ m)$ ve $F_{hF^m+1} = 1(mod\ m)$ dir. Buradan $s(m)$, hF^m ile bölünür. $s(m) = |\langle R\rangle_m|$ olduğundan $|\langle R\rangle_m|$, hF^m ile bölünür. $|\langle R\rangle_m|$ in de hF^m ile bölündüğü gösterilirse ispat tamamlanır.

$hF^m = t$ olsun. Buradan $R^t = \begin{pmatrix} F_{t+1} & F_t \\ F_t & F_{t-1} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$R^t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (mod\ m)$$

olduğu görülür. Yani o(R), t ile bölünür. $|\langle R \rangle_m| = \text{o}(R)$ olduğundan $|\langle R \rangle_m|$ de t ile bölünür. Yani hF^m ,$|\langle R \rangle_m|$ ile bölünür. Böylece $hF^m = |\langle R \rangle_m|$ elde edilir. ■

Örnek 4.6: Teorem 4.5 in uygulaması olarak de $m = 2$ alınırsa

$F_0 = 0$

$F_1 = I$

$F_2 = Ia + 0b = a$

$F_3 = aa + Ib = a^2 + b = I + b$

$F_4 = a + ba + ab = a + 2ba = a$

$F_5 = aa + Ib + bb = a^2 + b + b^2 = I + b + I = b$

$F_6 = ba + ab = I + I = 0$

$F_7 = 0a + bb = b^2 = I$

...

olup

$$\{F^2\} = \{0, I, b, I + b, a, b\ , 0, I, \dots\ \}$$

dizisi elde edilir. $\{F^2\}$ Fibonacci dizisinin periyodu 6 olup $hF^2 = 6$ dır.

Diğer taraftan,

$$R = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+b & a \\ ab & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+I & a \\ ab & b \end{pmatrix}$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a+2ab & I+b \\ a^2b+b^2 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+I \\ b+I & ab \end{pmatrix}$$

$$R^4 = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} a^2+b^2+b & I+b \\ ab+a+b^2 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ ab & b+I \end{pmatrix}$$

$$R^5 = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 2ab & b \\ a^2b+b^2+b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ I & ab \end{pmatrix}$$

$$R^6 = \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ ab^2 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

olup

$$\langle R \rangle_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b+I & a \\ ab & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b+I \\ b+I & ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a \\ ab & b+I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ I & ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\}$$

elde edilir. Buradan $|\langle R \rangle_2| = 6$ dır. Dolayısıyla $hF^2 = |\langle R \rangle_2|$ dir.

Teorem 4.7: p tamsayı sayı olmak üzere $hF^p = pk(p)$dir (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

İspat: Teorem 4.5 ten $hF^p = \left|\langle R \rangle_p\right|$ olduğundan $\left|\langle R \rangle_p\right|$ in $pk(p)$ ile bölündüğü ve $pk(p)$ nin de $\left|\langle R \rangle_p\right|$ ile bölündüğü gösterilirse ispat tamamlanır. $\left|\langle R \rangle_p\right| = r$ olsun. Buradan $R = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ için $R^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ bF_n & bF_{n-1} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^r (mod\, p) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca $R^{pk(p)} = \begin{pmatrix} F_{pk(p)+1} & F_{pk(p)} \\ F_{pk(p)} & F_{pk(p)-1} \end{pmatrix}$ olur. $k(p)$, p moduna göre bilinen Fibonacci dizisinin periyodunu olmak üzere $F_{pk(p)} \equiv 0(mod\, p)$ ise $F_{pk(p)+1} \equiv F_{pk(p)-1} \equiv 1(mod\, p)$ yazabiliriz.

Buradan $R^{pk(p)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (mod\, p)$ elde edilir. Böylece $pk(p)$, $|\langle R \rangle_p|$ ile bölünür. Yani $hF^p = |\langle R \rangle_p|$ olduğundan $pk(p)$, hF^p ile bölünür. Şimdi de hF^p nin $pk(p)$ ile bölündüğünü göstermemiz gerekir. $hF^p = s$ olsun. Buradan $F_s = 0(mod\, p)$ ve $F_{s+1} = F_{s-1} = 1(mod\, p)$ dir. Böylece $hF^p = |\langle R \rangle_p| = s$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & I \\ b & 0 \end{pmatrix}^s (mod\, p) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

olur. $k(p)$, p moduna göre bilinen Fibonacci dizisinin periyodunu olmak üzere $k(p)|s$ dir. Yani hF^p , $pk(p)$ ile bölünür. Böylece $hF^p = pk(p)$ elde edilir. ■

Örneğin;

Örnek 4.8: Teorem 4.7 nin uygulaması olarak $p = 2$ için Örnek 4.6 dan $hF^2 = 6$ dır. Diğer taraftan $k(2) = 3$ için $pk(p) = 2.3 = 6$ olup $hF^2 = 2k(2)$ dir.

Teorem 4.9: $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere hF^m çift bir sayıdır (Taşyurdu ve Dilmen, 2017).

İspat: Teorem 4.8 de $hF^m = mk(m)$ olduğu gösterildi. $mk(m)'$nin çift bir sayı olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Teorem 3.22 den, $m \geq 3$ tamsayısı için $k(m)$ nin çift bir sayı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $mk(m)$ daima çift bir sayıdır. $hF^m = mk(m)$ olduğundan hF^mçift bir sayı olup ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.8: Teorem 4.9 un uygulaması olarak $m = 3$ için

$$hF^3 = 3.k(3) = 3.8 = 24$$

olup hF^3 çift sayıdır. $m = 5$ için

$$hF^5 = 5.k(5) = 5.20 = 100$$

olup hF^5 çift sayıdır.

Tablo 4.1. m Modülüne Göre Birimli Halkaların Fibonacci Dizisinin Periyodu ve Wall Sayıları ile İlişkisi

m	$k(m)$	hF^m	$hF^m = mk(m)$
2	3	6	$hF^2 = 2k(2)$
6	24	144	$hF^6 = 6k(6)$
10	60	600	$hF^{10} = 10k(10)$
15	40	600	$hF^{15} = 15k(15)$
17	36	612	$hF^{17} = 17k(17)$
131	130	17030	$hF^{131} = 131k(131)$
147	112	16464	$hF^{147} = 147k(147)$
257	516	132612	$hF^{257} = 257k(257)$
589	90	53010	$hF^{589} = 589k(589)$
610	60	36600	$hF^{610} = 610k(610)$
720	120	86400	$hF^{720} = 720k(720)$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada keyfi bir halka üzerinde tanımlanan $\{F_n\}$ Fibonacci dizileri ve özellikleri incelendi. Birimli halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin matris gösterimi tanımlandı. Ayrıca bu dizinin terimleri Tridiagonal matrisin determinantı ile üretildi. $\{F_n\}$ Fibonacci dizisinin her bir teriminin katsayısı ve derecesi m modülüne indirgeneyerek elde edilen dizilerin periyodik olduğu görüldü ve periyotları hesaplandı. Ayrıca bu dizilerin periyodunun $R = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile gerilen devirli grubun mertebesine eşit olduğu ve daima çift sayı olduğu görüldü Birimli halkalardaki $\{F_n\}$ Fibonacci dizilerinin periyotları ile bilinen Fibonacci dizilerinin Wall sayıları arasındaki ilişki bulundu. Öneri olarak, gözlenen bütün ilişkilerin diğer Pell, Lucas gibi sayı dizilerinde uygulamaları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Aydın, H. and Dikici, R. (1998) "General Fibonacci sequences in finite groups", ***Fibonacci Quart.***, 36 (3), 216-221.

Aydın, H. and Smith, G. C. (1994) " Finite p-quotients of some cyclically presented groups", ***J. London Math. Soc.***, 49, 83-92.

Bayraktar, M. (2006) "Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi", ***Gazi Kitabevi***, Ankara, ss. 275.

Buschman, R.G. (1963) "Fibonacci Numbers, Chebyshev Polynomials, Generalization sand Difference Equations", ***Fibonacci Quart.***, 1(4), 1-7.

Cahill, N.D., D'Errico, J.R., Narayan, D.A. and Narayan, J.Y. (2002) "Fibonacci determinats", ***College Mathematics Journal***, 3(3), 221-225.

Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F. (2004) "On the Fibonacci length of powers of dihedral groups", ***Application of Fibonacci Numbers***, Vol. 9, ed. F.T. Howard, Kluwer, Dordrecht, 69-85.

Çallıalp, F. (2001) "Örneklerle Soyut Cebir", ***Birsen Yayınevi***, İstanbul, ss. 300.

Decarli, D.J. (1970) "A Generalized Fibonacci Sequence Over An Arbitrary Ring", ***Fibonacci Quart.***, 8(2), 182-184,198.

Dikici, R. and Smith, G. C. (1995) "Recurrences in finite groups", ***Turkish J. Math.***, 19, 321-329.

Dikici, R. and Smith, G. C. (1997) " Fibonacci sequences in finite nilpotent groups", ***Turkish J. Math.***, 21, 133-142.

Fine, B. (1993) "Classification of Finite Rings of Order p^2", ***Mathematics Magazine***, 66, 248-252.

Horadam, A.F. (1961) "A Generalized Fibonacci Sequence", ***Amer. Math. Monthly***, 68(5), 445-459.

Karaduman, E. and Aydin, H. (2003a) "General 2-step Fibonacci sequences in nilpotent groups of exponent p and nilpotent class 4. Appl", ***Math. Comput***., 141, 491-497.

Karaduman, E. and Aydin, H. (2003b) "On Fibonacci sequences in nilpotent groups", ***Math. Balkanica***, 17 (3-4), 207-214.

Karaduman, E. and Yavuz, U. (2003) " On the period of Fibonacci sequences in nilpotent goups", ***Appl. Math. Comput.***, 142, 321-332.

Knox, S.W. (1992) "Fibonacci Sequences in Finite Groups," ***Fibonacci Quart.***, 30(2), 116-120.

Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications”, ***A Wiley-Interscience Publication***, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, pp. 652.

Lü, K. and Wang J. (2007) “k-step Fibonacci sequence modulo m”, ***Unil. Math***., 71, 169-178.

Renault, M. (1996) “The Fibonacci Sequence Under Various Moduli”, ***Master’s Thesis Wake Forest University***.

Shah, A.P. (1968) “Fibonacci-Tribonacci”, ***Fibonacci Quart.***, 6.2., 139-141.

Taşçı, D. (2007) “Soyut Cebir”, ***Alp Yayınevi***, Ankara, ss. 671.

Taşçı, D. (2011) “Lineer Cebir”, ***Ofset Hazırlık & Baskı, Öziş Matbaacılık***, Ankara, ss. 585.

Taşyurdu Y. and Dilmen Z. (2017) “On Period of Generalized Fibonacci Sequence Over Finite Ring and Tridiagonal Matrix“, ***Celal Bayar University Journal of Science***, 13(1), 165-169.

Taşyurdu, Y. and Gültekin, İ. (2013) “On period of Fibonacci sequences in finite rings with identity of order p^2 ”, ***Journal of Mathematics and System Science***, 2013, 349-352.

Taşyurdu, Y. and Gültekin, İ. (2016) “The Period of Fibonacci Sequences Over The Finite Field of Order p^2”, ***New Trends in Mathematical Sciences***, 4, 248-255.

Vajda, S. (1989) “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, ***Ellis Horwood***, Chichester.

Vorobyov, N.N. (1963) “The Fibonacci Numbers”, ***translated from the Russian by Normal D. Whaland, Jr., and Olga A. Tittlebaum, D. C. Heathand Co.***, Boston.

Vorobyov, N. (1976) “Elementary Numbers Theory” ***Allyn and Bacon inc,*** Boston, 285-299.

Wall, D.D. (1960) “Fibonacci series modulo$m$”, ***Amer. Math. Monthly***, 67(6), 525-532.

Wilcox, H.J. (1986) “Fibonacci sequences of period n in groups”, ***Fibonacci Quart.***, 24(4), 356-361.

Wyler, O. (1965) “On Second-order Recurrences”, ***Amer. Math. Monthly***, 72(5), 500-506.

EKLER

EK-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

- Taşyurdu, Y. and Dilmen, Z. (2015) "On Period of Generalized Fibonacci Sequence Over Finite Rings and Tridiogonal Matrix", ***International Conference on Advancement in Mathematical Sciences***, ANTALYA, TÜRKIYE, 5-7 Kasım 2015, 97-97.
- Taşyurdu, Y. and Dilmen, Z. (2017) "On Period of Generalized Fibonacci Sequence Over Finite Ring and Tridiagonal Matrix", ***Celal Bayar University Journal of Science***, 13(1), 165-169.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Elazığ’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Elazığ’da tamamladı. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezsiz Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve 2013 yılında mezun oldu. 2013 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.