T.C.
ERZİNCAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU LİE GRUPLARDA AW(k) TİPİ BERTRAND EĞRİLERİ

Sezer ÇAKAL

Danışman: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2018

Kabul ve Onay Sayfası

Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ danışmanlığında, Sezer ÇAKAL tarafından hazırlanan bu çalışma 11.05.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği/oy ~~çokluğu~~ (…/…) ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Engin ÖZKAN	İmza:
Danışman	: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 08./06./2018. tarih ve 21./5……. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Paşa YALÇIN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Üç boyutlu Lie gruplarda AW(*k*)-tipi Bertrand eğrileri" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim.

11/05/2018.

(İmza)

Sezer ÇAKAL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU LİE GRUPLARDA AW(k) TİPİ BERTRAND EĞRİLERİ

Sezer ÇAKAL

Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ

Bu çalışmada 3 boyutlu Lie gruplarda AW(*k*), (k= 1, 2, 3), tipinden eğriler ele alındı. Lie gruplarda tanımlanmış olan harmonik eğrilik fonksiyonu düşünülerek verilen bir eğrinin AW(*k*)-tipinden olma şartları elde edildi. Daha sonra AW(*k*)-tipinden eğrilerin Helis eğrisi ve Düzlem eğrileriyle olan ilişkileri incelendi. Son olarak 3-boyutlu Lie gruplarda Bertrand eğrileriyle AW(3), AW(2) ve zayıf AW(2) tipinden eğriler arasındaki ilişkiler gösterildi.

2018, 32 Sayfa

Anahtar Kelimeler: AW(*k*)-tipi eğri; Bertrand eğrileri; Helis eğrisi; Lie gruplar.

ABSTRACT

Master Thesis

BERTRAND CURVES OF AW(K)-TYPE İN THREE DİMENSİONAL LİE GROUPS

Sezer ÇAKAL

Erzincan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ

In this paper, the curves of AW(k) type have been studied in 3 dimensional Lie groups, on condition that the value is taken for ($k = 1, 2, 3$). The conditions that a curve in the type of AW(k), considering the Harmonic curvature functions defined in the Lie groups, have been acquired. Afterwards, the relations of curves of AW(k) type with helix and plane have been investigated. Finally, the relations between the Bertrand curves and AW(3), AW(2) and weak AW(2) have been put forward in 3 dimensional Lie groups.

2018, 32 Pages

Keywords: AW(k)-type curve; Bertrand curves; Helix; Lie Groups.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Çalışmalarımda katkıları olan Araş. Gör. Dr. İsmail AYDOĞDU ve Araş. Gör. Dr. Şaban GÜVENÇ' e teşekkürlerimi sunarım.

Sezer ÇAKAL

Mayıs 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\tilde{\alpha}$	α-nın Bertrand ikilisi
C^{∞}	Sürekli türevlere sahip olan fonksiyonların kümesi
d	Öklid metriği
$D_{\alpha'}$W	W vektörünün hız vektörü yönündeki kovaryant türevi
$\nabla_X Y$	Y vektör alanının X yönündeki kovaryant türevi
Δ	Afin konneksiyon
E^3	3-Boyutlu Öklid uzayı
E^n	n-Boyutlu Öklid uzayı
$\mathcal{F}$	Cisim
$\mathfrak{g}$	Lie cebiri
H	Harmonik eğrilik fonksiyonu
$\langle\ ,\ \rangle$	İç Çarpım İşlemi
$\mathcal{X}(f)$	f fonksiyonu üzerindeki vektör alanları uzayı
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanları uzayı
κ	Eğrinin birinci eğriliği
$[X, Y]$	X ve Y vektör alanlarının Lie çarpımları
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
T_pM	M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
τ	Eğrinin ikinci eğriliği
τ_G	G Lie grubunun torsiyonu
$\dot{W}$	W'nin kovaryant türevi

Kısaltmalar

CAM	ComputerAided Design
DNA	Deoksiribo Nükleik Asit
NST	Nonstres Test

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi, diferansiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biridir. Eğriler, günlük hayatta sıklıkla karşımıza çıkan geometrik cisimlerdir. Örneğin, bir anne adayı bebeğinin kalp atışlarının ritmini NST filmindeki eğri sayesinde öğrenebilir. Eğrisel yapıları; ekonomide verilerin analizinde, gemi ve uçak rotalarının belirlenmesinde, üniversitede öğrenci notlarının sıralanmasında ve fizikte parçacıkların hareketinde kullanırız. Görüldüğü gibi eğriler hayatımızın vazgeçilmez bir parçasıdır.

Jeodezik eğriler, rektifian eğriler ve Helis eğrileri; Silindirik helis, Dairesel helis, Slant helisler vb. bazı özel eğri çeşitleri vardır ki, bu tür eğrilerin karakterizasyonları geçmişten günümüze çalışma konusu olmuştur. Ayrıca verilen bir eğriyle ilişkili olan eğri çiftleri, yaygın bir şekilde çalışılmaktadır. Bu eğriler arasında en çok çalışılanlar Bertrand eğri çiftleri, involüt–evolüt eğri çiftleri, Mannheim eğrileridir. Bertrand eğri çifti, bilgisayar destekli grafik çizim programlarında (CAM) önemli rol oynamaktadır (Izumiya, 2002, 2004; Liu, Y., 2008).

$\mathbb{R}^3$de bir eğri, sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa veyaκ eğriliğinin τ burulmasına oranı sabit ise genel helis olarak adlandırılır. Bu tür eğriler birçok çalışmada kullanılmıştır (Camcı ve İlarslan, 2009). Ayrıca helis eğrileri, günlük hayatta pek sık karşılaştığımız eğri türüdür. Örneğin, bir fasulyenin çubuğa sarılırken takip ettiği yol, DNA sarmalında moleküllerin diziliş şekli ve bir vidanın izlediği yol (spiral) helis eğrisidir. Spiral helis; kullanılan arazi alanını en aza indirgemek ve sağlamlık katmak amacıyla köprü yapımında, grafik çizim programlarında, fraktal geometride karşımıza çıkmaktadır. En sıradışı spiraller, hiperbolik *k*-Fibonacci fonksiyonlarla bağlantılı olan *k*-Fibonacci spiralleri olarak anılır. Fibonacci sayıları ile ilgili Altın Oran, teorik fizikte ve yüksek enerji parçalarının hareket yapısında karşımıza çıkmaktadır (ElNaschie, 2001, 2005; Falcon 2008).

Lie grubu, grup yapısına sahip diferansiyellenebilen bir manifold ve aynı zamanda diferansiyellenebilen topolojik bir gruptur. Dülger (2010, sf.1)’ in belirttiği üzere ‘‘Lie grubunun birbiri ile bağlantılı cebirsel, topolojik ve geometrik yapısı vardır. Lie grupları incelenirken matematiğin bu üç dalı ile ilgili yapılar çalışılır’’. Ayrıca bu grup yapısı; cebirsel özellik, bağlantılılık ve kompaktlık kriterlerine göre sınıflandırılabilir.

Çöken ve Çiftçi (2008), birleştirilebilen killing form kullanılarak tanımlanan Lie grubu üzerindeki metriğin dağılımını gösterdi. Böylece bu metrikle bağlantısını kullanarak Lie gruplara Levi-Civita konneksiyonlarını uygulanabilir hale getirdi. Sonuç olarak, bağlantılı bir G Lie grubuna yarı-Riemann manifoldunun özel bir hali olarak bakılabileceğini gösterdi. Daha sonra Çiftçi, 3-boyutlu Lie gruplarda bi-invaryant metriği kullanarak genel helisleri tanımladı. Genelleştirilmiş Lancret's teoremini Lie gruplara uyguladı. Ayrıca Çiftçi, silindirler ve genel helislerin jeodezikleri arasında bağlantılar kurdu (Çiftçi, 2009).

Okuyucu ve Gök (2012, 2014), 3-boyutlu Lie gruplarda bi-invaryant metrikle Bertrand eğrilerini tanımladı. Sonra harmonik eğrilik fonksiyonunu kullanarak Mannheim eğrilerin, Slant helislerin ve genel helislerin karakterizasyonlarını verdiler.

AW(k)-tipinden alt manifold kavramını ilk olarak tanımlayan K.Arslan, bu alt manifoldların bazı özelliklerini elde etti. Daha sonra bu kavramı eğrilere indirgedi ve AW(k), (k=1, 2, 3), tipinden eğri kavramını literatüre kazandırdı.

Arslan ve Hacısalihoğlu (2000), AW(k) tipi eğrilerle bu eğrilerin birinci harmonik eğriliği arasında bazı ilişkiler tespit etti.

Özgür ve Gezgin (2005), 3-Boyutlu Öklid uzayında Bir Frenet eğrisinin AW(k)-tipinden olma şartlarını elde etti. Sonra, AW(k)-tipinden eğrilerin, harmonik eğriliklerini ve Bertrand eğrileriyle olan ilişkilerini incelediler (Okuyucu ve Gök, 2012).

Külahci, Bektaş ve Ergut (2007), 3 boyutlu boş koni içindeki AW(k)-tipinden eğrileri inceleyip bu tip eğrilerin eğrilik durumlarını elde ettiler. Daha sonra 2009'da AW(k)-tipinden eğriler ile Bertrand eğrilerini arasındaki ilişkileri incelediler. Ayrıca Lorentz uzayında AW(k)-tipi Frenet eğrilerinin eğrilik durumlarını inceleyip, bu eğrilerin hangi durumlarda helis eğrisi olduğunu tespit ettiler.

Kızıltuğ ve Yaylı (2014), 3 boyutlu Galilean uzayının equiform geometrisinde AW(k)-tipinden eğrileri ve Bertrand eğrilerini incelediler. AW(k)-tipinden eğrilerin eğrilik hallerini elde ettiler. Ayrıca 3 boyutlu Galilean uzayının equiform geometrisinde Bertrand eğrilerinin dairesel helis olduğunu gösterdiler. Dahası zayıf AW(2) ve AW(3) tipinden Bertrand eğrilerinin var olduğunu ancak zayıf AW(3) ve AW(2) tipinden Bertrand eğrilerinin olmadığını gösterdiler.

Kızıltuğ ve Yaylı (2015), 3 boyutlu Öklid uzayında Quaterniyonik eğrilerin AW(k)-tipinden eğrilik durumlarını elde ettiler. Daha sonra Quaterniyonik Mannheim eğrilerini ele aldılar. Ayrıca E^3 de, AW(2) ve AW(3) tipi Quaterniyonik eğrilerin, Quaterniyonik Mannheim eğrileri olduklarını gösterdiler. Fakat AW(1) tipinden Mannheim eğrisi olmadığını gösterdiler.

Kızıltuğ ve Çakal (2017), 3- boyutlu Lie gruplarda AW(k)-tipinden Bertrand eğrilerini çalıştılar. Bu bağlamda bir Frenet eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonunu kullanarak AW(k) tipinden eğri olma şartlarını ve bu AW(k) tipinden eğrilerin Helis eğrisi ve düzlem eğrileriyle ilişkilerini incelediler.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lie grupları ile ilgili temel tanımlar verildi. İki vektör alanının lie çarpımı kullanılarak kovaryant türev kavramı gösterildi. Daha sonra Lie grubunun torsiyonu ve Levi-Civita konneksiyonu kullanılarak Lie grubunun harmonik eğriliği ve Frenet formülleri elde edildi.

Dördüncü bölüm orijinal teorem ve sonuçlar içermektedir. Bu bölümde Lie gruplarda bir Frenet eğrisinin AW(k)-tipinden, (k=1,2,3), eğri olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edildi. Üç boyutlu Lie gruplarda AW(k)-tipinden eğriler, Helis ve düzlem eğrileriyle alakalı bazı teorem ve sonuçlar verildi. Daha sonra Lie gruplarda Bertrand eğrisi tanımlanıp AW(k)-tipinden eğriler, Bertrand eğrileri ve Helis eğrileri arasında bazı eşitlikler ve sonuçlar elde edildi.

Sonuç bölümünde, yukarıdaki çalışmalardan yola çıkılarak Lie gruplarda mannheim eğrileri ve involute-evolute eğri çifti gibi bazı özel eğrilerin tanımlanabileceği ve bu eğrilerle AW(k)-tipinden eğriler arasındaki ilişkilerin gösterilebileceği ifade edildi.

.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. *n*-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A$\neq \emptyset$ bir cümle ve V de $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $\gamma: A\, x\, A \rightarrow V$ dönüşümü P, Q $\in$ A noktaları için $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \rightarrow \gamma(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

(*i*) $\forall$ P, Q, $R \in$ Aiçin $\gamma(P, R) = \gamma(P,\mathrm{Q}) + \gamma(\mathrm{Q}, R)$

(*ii*) $\forall P\in$ A ve $\forall$ $\alpha \in V$ için $\gamma(P, \mathrm{Q})= \alpha$ olacak şekilde bir tek Q $\in$ A noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.2. A, V vektör uzayı ile birleşen n-boyutlu bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise yani; x=$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ve y=$(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ olmak üzere, V de bir iç çarpım işlemi;

$$\langle\, , \rangle : V\, x\, V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanırsa A afin uzayına *n*-boyutlu Öklid Uzayı denir.E^n ile gösterilir. Bu işlem yardımıyla A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.3. d: $E^n x\, E^n \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir.

Tanım 2.1.4. Bir α vektörünün kendisiyle iç çarpımının kareköküne bu vektörün normu denir. Yani

$$\|\alpha\|=\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \tag{2.1}$$

Tanım 2.1.5. E^n, n-boyutlu Öklid uzayı ve I, $\mathbb{R}$-nin açık alt aralığı olmak üzere, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm (C^∞ sınıfından) ise $\alpha(I) \subset E^n$ cümlesine E^n

de bir eğri denir. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri, denir. $\forall s \in$ I için $\alpha'(s) \neq 0$ ise α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.6. Bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisinin T teğet vektörü sabit k doğrusuyla sabit bir açı yapıyorsa bu α eğrisine genel helis denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.7. Bir α eğrisinin N asli normal vektörü sabit k doğrusuyla sabit bir açı yapıyorsa, bu α eğrisine slant helis denir (Camcı, İlarslan, Kula ve Hacısalihoğlu, 2009).

Tanım 2.1.8. α: I $\subset\mathbb{R} \to E^3$ bir uzay eğrisi olsun. α eğrisi, bir uzay eğrisi olduğundan her bir noktasında, T teğet, N asli normal ve B binormal vektörlerden oluşan bir $\{T, N, B\}$ ortonormal koordinat sisteminin var olduğunu biliyoruz. Bu $\{T, N, B\}$ üçlüsüne hareketli üçlü ya da Frenet Çatısı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.9. T teğet vektörü olmak üzere bir eğri boyunca ilerlediğimiz zaman teğetin değişim oranını ifade eden $k=\frac{dT}{ds}=\kappa N$ vektörüne eğrilik vektörü denir ve κ çarpanına, eğrinin birinci eğriliği veya eğrinin eğriliği adı verilir (Struik, 1988).

Tanım 2.1.10. $\alpha: I \subset R \to E^n$ bir eğri ve B eğrinin bir noktasındaki bi-normal vektörü olmak üzere

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

eşitliğini sağlayan τ fonksiyonuna α eğrisinin ikinci eğriliği veya burulması denir (Struik, 1988).

Tanım 2.1.11. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in$ I ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında M-nin 1. ve 2. eğrilikleri sırasıyla $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere,

$$H: I \to \mathbb{R}$$

$$s \to H(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau(s)}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M nin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci harmonik eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.12. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ ve $\beta: I \subset R \rightarrow E^3$ eğrileri diferansiyellenebilir iki eğri olsun. α eğrisinin Frenet 3 ayaklısı $\{T, N, B\}$ ve βeğrisinin Frenet 3 ayaklısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere $\forall\, s \in I$ için $\{N,\ N^*\}$ ikilisi lineer bağımlı oluyorsa, bir başka deyişle asli normalleri çakışıyorsa (α , β) sıralı ikilisine Bertrand eğri çifti denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.13. $f: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\overrightarrow{v_p} \in T_{E^n}(p)$ olsun. Bu durumda $\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere;

$$\overrightarrow{v_p}[f]=\frac{d}{dt}\Big(f\big(\mathrm{P}_1 + \mathrm{t}(\mathrm{Q}_1 - \mathrm{P}_1) + \cdots + \mathrm{P}_\mathrm{n} + \mathrm{t}(\mathrm{Q}_\mathrm{n} - \mathrm{P}_\mathrm{n})\big)\Big)\ \Big|_{t=0}$$

reel sayısına *f*-nin $\overrightarrow{v_p}$ye göre türevi denir (Hacısalihoğlu, 1993).

Tanım 2.1.14. *M n*-boyutlu, diferansiyellenebilir (C^∞) bir manifold olsun. *M* üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ve *M* den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$olmak üzere, *M* üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve bi-lineer Riemann metriği g ile birlikte *M* ye bir Riemann manifold adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir. *M* manifoldunun herhangi iki P ve Q noktası için; M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse *M* ye bağlantılı manifold adı verilir (Kobayashi ve Nomizu, 1996).

Tanım 2.1.15. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇da *M* üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon olmak üzere, $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

(ii) $X_g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ şartlarını sağladığında ∇ ya *M* nin Levi-Civita konneksiyonu denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.1.16. *M* n-boyutlu bir C^∞ manifold ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M, M$ de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ ' nın yüksek mertebeden türevleri

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), \dots, \gamma^{(d)}(s)$$

lineer bağımsız ve

$$\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s), \dots, \gamma^{(d)}(s), \gamma^{(d+1)}(s)$$

$\forall s \in I$ için lineer bağımlı ise γ ya oskülatör mertebesi d olan bir Frenet eğrisi denir. d.mertebeden her Frenet eğrisi için γ boyunca $\gamma'(s) = v_1(s)$ olmak üzere bir $v_1, v_2, v_3, \dots, v_d$ ortonormal çatısı bulunabilir. Bu çatıya Frenet çatısı denir ve κ_1, κ_2, κ_3 , … , κ_{d-1}: I⟶ ℝ (d-1)-fonksiyonları Frenet eğrilikleri olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\nabla_{v_1}\gamma'(s) = \gamma''(s) = \kappa_1(s)v_2(s)$$

$$\nabla_{v_1}v_2(s) = -\kappa_1(s)v_1(s) + \kappa_2(s)v_3(s)$$

……………………………………..

$$\nabla_{v_1}v_i(s) = -\kappa_{i-1}(s)v_{i-1}(s) + \kappa_i(s)v_{i+1}(s)$$

$$\nabla_{v_1}v_{i+1}(s) = -\kappa_i(s)v_i(s) \tag{2.2}$$

burada ∇ , M de Levi-Civita koneksiyonudur (Ferus ve Schirrmacher, 1982).

Tanım 2.1.17. M n- boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü;

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z\,; \qquad \forall X, Y, Z \in \chi(M),$$

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z\,;\ \forall X, Y, Z \in \chi(M) \text{ ve } \forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R}),$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y\,; \qquad \forall X, Y \in \chi(M) \text{ ve } \forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

özellliklerini sağlıyor ise ∇' ya M üzerinde bir Afin Konneksiyon adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, Lie grupları ve Lie cebiri ile ilgili temel tanımlar verildi. İki vektör alanının Lie çarpımı ve bu Lie çarpımı kullanarak kovaryant türev kavramı gösterildi. Daha sonra lie grubunun torsiyonu ve Levi-Civita konneksiyonu kullanılarak Lie grubunun harmonik eğriliği ve Frenet formülleri elde edildi.

3.1. Lie Grubu

Tanım 3.1.1. G bir küme olsun. G kümesi üzerinde tanımlanan

$$\mu : G \, x \, G \to G$$

$$(a, b) \to \mu(a, b)$$

ikili işlemi kapalı ve birleşmeli ise ayrıca etkisiz elemana ve ters elemana sahip ise G ye bir grup denir (Gilmore, 2008).

Tanım 3.1.2. G diferansiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\mu : G \, x \, G \to G$$

$$\mu(a, b) = ab$$

ve

$$\nu: G \to G$$

$$x \to x^{-1}$$

dönüşümleri diferansiyellenebilir ise G ye Lie grubu denir (Gilmore, 2008).

Tanım 3.1.3. G bir Lie grubu olmak üzere $h \in G$ noktasında L_g nin türevi

$$(dLg)_h: T_hG \longrightarrow T_{gh}G$$

$$\dot{h}(t) = (dLg)_h \dot{h}(t) = \frac{d}{dt}(L_g(h(t))$$

Şeklindedir (Talpaert, 2001).

Tanım 3.1.4. G bir Lie grubu olsun. G üzerindeki bir Riemann metrik $\forall g, h \in G$ve

$u, v \in T_h G$ için,

$$\langle u, v\rangle_h = \langle d\left(L_g\right)_h(u), d\left(L_g\right)_h(v)\rangle_{L_g(h)}$$

ifadesini sağlıyorsa, bu

Riemann metriğine sol invaryanttır denir. Benzer şekilde sağ invaryant Riemann metrik,$\forall g, h \in G$ve $u, v \in T_h G$ için

$$\langle u, v\rangle_h = \langle d\left(R_g\right)_h(u), d\left(R_g\right)_h(v)\rangle_{R_g(h)}$$

ifadesini sağlar. G üzerinde sağ ve sol invaryant özeliklerinin her ikisini de sağlayan Riemann metriğine bi-invaryanttır denir (Carmo,1992).

Tanım 3.1.5. V ve U bir K cismi üzerinde vektör uzayları olsunlar. Bir F:$V \to U$ dönüşümü için aşağıdaki koşullar sağlanırsa F ye lineer dönüşüm denir (Seymour Lıpschutz, 1968).

(i) Herhangi $u, v \in V$ için $F(u + v) = F(u) + F(v)$
(ii) Herhangi $k \in$ K ve herhangi $u \in V$ için $F(ku) = kF(u)$

Tanım 3.1.6. V bir $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $[\,,]: V \times V \to V$ dönüşümü de

(i) Bi-lineer
(ii) $\forall\, X, Y \in V$ için$[X, Y] = -[Y, X]$
(iii) $\forall\, X, Y, Z \in V$ için$\left[X, [Y, Z]\right] + \left[Y, [Z, X]\right] + \left[Z, [X, Y]\right] = 0$

şartlarını sağlıyor ise $[\,,]$ dönüşümüne V üstünde bir Lie (parantez) operatörü denir (Hacısalioğlu, 1993).

Tanım 3.1.7. $\mathcal{F}$ bir cisim olsun. $\mathcal{F}$cismi üzerinde bir vektör uzayı $\mathfrak{g}$ olmak üzere, $\mathfrak{g}$ üzerinde tanımlanan bi-lineer Lie parantez operatörü

(i) $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ için $[x;\ y] = -[y, x]$

(ii) $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}$ için $[x;\ [y;\ z]]\ +\ [y;\ [z;\ x]]\ +\ [z;\ [x;\ y]]\ =\ 0$

ifadelerini sağlıyorsa $\mathfrak{g}$ ye $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir Lie cebiri denir (Boothby, 1975).

Tanım 3.1.8. Bir G Lie grubundaki sol invaryant vektör alanlarının G-nin e etkisiz elemanında $\mathfrak{g} = T_eG$ şeklinde tanımlanan cebire Lie cebiri denir (Carmo,1992).

Tanım 3.1.9. G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$, G-nin Lie cebiri olsun. $\forall X \in \mathfrak{g}$ yi $X_e \in T_eG$ ye götüren $\mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ şeklindeki fonksiyon bir lineer izomorfizmdir (Carmo, 1992).

Tanım 3.1.10. G, bi-invaryant metrik $\langle\, ,\rangle$ile birlikte bir Lie grubu ve D, G Lie grubunun Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer $\langle\, ,\rangle$ G bi-invaryant metrikse $\forall$ X,Y,Z∈ g için

$$\langle X, [Y, Z]\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle$$

dır. Lie gruplarda bir vektör alanı yönünde kovaryant türev,

$$D_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

şeklinde tanımlanır(Çiftçi, 2009).

Tanım 3.1.11. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ yay uzunluklu bir eğri ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ g Lie cebirinin ortonormal bir bazı olsun.$w_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ve $z_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlar olmak üzere W=$\sum_{i=1}^{n} w_i X_i$ ve Z= $\sum_{i=1}^{n} z_i X_i$ olarak tanımlanırsa, W ve Z herhangi iki vektör alanı olur. Bu durumda W ve Z vektör alanlarının Lie çarpımı;

$$[W, Z]=\sum_{i,j=1}^{n} w_i z_i \left[x_i, x_j\right]$$

şeklinde tanımlanır(Çiftçi, 2009).

Tanım 3.1.12. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G$ şeklinde Lie gruplarda bir eğri olsun. $\mathrm{T} = \alpha'$ ve $\dot{W}$=$\sum_{i=1}^{n} wiXi$ ya da $\dot{W}$=$\sum_{i=1}^{n} \frac{dw}{dt} X_i$ olmak üzere, $D_{\alpha'}W$ notasyonu ile α eğrisi boyunca W- nin kovaryant türevi;

$$D_{\alpha'}W=\dot{W}+\frac{1}{2}[T,W]$$

ile verilir. Eğer W-nin, α eğrisi için sol invaryant vektör alanı olduğunu kabul edersek $\dot{W}$=0 olur (Çiftçi, 2009).

Tanım 3.1.13. G, 3- boyutlu Lie grubu ve α eğrisinin Frenet elemanları (T, N, B, κ, τ) olmak üzere α eğrisinin eğriliği,

$$\kappa=\|\dot{T}\|$$

şeklinde tanımlanır (Carmo ve Monfedo, 1976).

Tanım 3.1.14. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$, Frenet elemanları (T, N, B, κ, τ) ile verilmiş parametrik bir eğri olsun. Bu durumda Lie grubunun torsiyonu,

$$\tau_G=\frac{1}{2}[T,N]B$$

ya da

$$\tau_G=\frac{1}{2\kappa^2\,\tau}\langle\ddot{T}[T,\dot{T}]\rangle+\frac{1}{4\kappa^2\,\tau}\|[T,\dot{T}]\|^2$$

şeklinde tanımlanır (Çiftçi, 2009).

Tanım 3.1.15. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$, Frenet elemanları (T, N, B, κ, τ) ile verilmiş yay uzunluklu parametrik bir eğri olsun

$$\tau_G=\frac{1}{2}[T,N]B$$

olmak üzere, α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz (Okuyucu, Gök ve Yaylı, 2012).

$$H=\frac{\tau-\tau_G}{\kappa}$$

Teorem 3.1.16. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$, Frenet elemanları (T, N, B, κ, τ) ile verilmiş yay uzunluklu parametrik bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisi genel helis ise

$$H=sabit$$

dir (Çiftçi, 2009).

Tanım 3.1.17. 3.mertebeden her Frenet eğrisi için

$$\alpha'(s)=T(s)$$

olacak şekilde α boyunca $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormal 3-çatısı ilişkilendirilebilir ve Frenet eğrilikleri diye anılan $\kappa, \tau: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları 3 boyutlu Lie gruplarda tanımlanan Frenet formülleri ile ilişkilendirilebilir. Yani,

$$D_T T(s) = \kappa(s) N(s) \tag{3.1}$$

$$D_T N(s) = -\kappa(s) T(s) + (\tau - \tau_G)(s) B(s) \tag{3.2}$$

$$D_T B(s) = (\tau_G - \tau)(s) N(s) \tag{3.3}$$

dır (Okuyucu, Gök ve Yaylı, 2014).

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$, 3-boyutlu Lie gruplarda birim hızlı parametrik bir eğri olsun. α eğrisi, eğer $\alpha'(s)$,$\alpha''(s)$, $\alpha'''(s)$ türevleri lineer bağımsız ve $\alpha'(s)$,$\alpha''(s)$, $\alpha'''(s)$, $\alpha''''(s)$ türevleri her $s \in I$ için lineer bağımlı ise, oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olarak anılır.

burada D, G Lie grubunun Levi-Civita konneksiyonu ve $\tau_G = \frac{1}{2}\langle [T, N] B \rangle$.

Önerme 3.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$, üç boyutlu Lie gruplarda bir Frenet eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\alpha'(s) = T(s) \tag{3.4}$$

$$\alpha''(s) = \kappa(s) N(s) \tag{3.5}$$

$$\alpha'''(s) = -\kappa^2(s) T(s) + \kappa'(s) N(s) + \kappa^2(s) H(s) B(s) \tag{3.6}$$

$$\alpha''''(s) = (3\kappa(s)\kappa'(s)) T(s) + (\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s))) N(s) +$$

$$(2\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + (\kappa(s)H(s))') B(s) \tag{3.7}$$

dir.

İspat. 3-boyutlu Lie gruplarda (3.1), (3.2), (3.3) Frenet formülleri ve

$$H = \frac{\tau - \tau_G}{\kappa}$$

eşitliği kullanılarak yukarıdaki eşitlikler elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde 3-boyutlu Lie gruplarda bir Frenet eğrisinin AW(k)-tipinden (k=1, 2, 3) eğri olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edildi. 3-boyutlu Lie gruplarda AW(k)-tipinden eğriler, Helis ve düzlem eğrileriyle alakalı bazı teorem ve sonuçlar verildi. Daha sonra Lie gruplarda Bertrand eğrisi tanımlanıp AW(k)-tipinden eğriler, Bertrand eğrileri ve Helis eğrileri arasında bazı eşitlikler ve sonuçlar elde edildi.

4.1. 3 Boyutlu Lie Gruplarda AW(k)-tipinden Eğriler

Tanım 4.1.1. 3 boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan Frenet eğrisine;

(i) Eğer,

$$N_3(\mathrm{s}) = \langle N_3(\mathrm{s})\,, N_2^*(\mathrm{s})\,\rangle N_2^*(\mathrm{s}) \tag{4. 1}$$

şartını sağlıyor ise AW(2)-zayıf tipindendir denir.

(ii) Eğer,

$$N_3(s)\ = \langle N_3(s)\,, N_1^*(s)\rangle N_1^*(s) \tag{4.2}$$

şartını sağlıyor ise AW(3)-zayıf tipindendir denir(Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

Burada $N_1^*(s)$ ve $N_2^*(s)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$N_1^*(s) = \frac{N_1(s)}{\|N_1(s)\|} \tag{4.3}$$

$$N_2^*(s) = \frac{N_2(s) - \langle N_2(s)\,, N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)}{\|N_2(s) - \langle N_2(s)\,, N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)\|} \tag{4. 4}$$

Tanım 4.1.2. 3-boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan Frenet eğrisi,

(i) Eğer,

$$N_3(s) = 0 \tag{4.5}$$

şartını sağlıyor ise AW(1)-tipindendir denir.

(ii) Eğer,

$$\|N_2(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_2(s)\rangle N_2(s) \tag{4.6}$$

şartını sağlıyorsa AW(2)-tipindendir denir.

(iii) Eğer,

$$\|N_1(s)\|^2 N_3(s) = \langle N_3(s), N_1(s)\rangle N_1(s) \tag{4.7}$$

şartını sağlıyorsa AW(3)-tipindendir denir (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

Notasyon.

$$N_1(s) = \kappa(s)N(s) \tag{4.8}$$

$$N_2(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa^2(s)H(s)B(s) \tag{4.9}$$

ve

$$N_3(s) = (\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s) \tag{4.10}$$

ile gösterelim (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

Uyarı 4.1.1. $\alpha'(s)$,$\alpha''(s)$, $\alpha'''(s)$, $\alpha''''(s)$ türevlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart N_1, N_2, N_3-ün lineer bağımlı olmasıdır.

Önerme 4.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$,3-boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Eğer α, AW(2) zayıf tipinden ise

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s) = 0 \tag{4.11}$$

dir (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$, AW(2) zayıf tip bir Frenet eğrisi olduğu için (4.1) gereği

$$N_3(s) = \langle N_3(s), N_2^*(s)\rangle N_2^*(s)$$

eşitliğini yazabiliriz.(4. 4) eşitliğinden

$$N_2^*(s) = \frac{N_2(s) - \langle N_2(s), N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)}{\|N_2(s) - \langle N_2(s), N_1^*(s)\rangle N_1^*(s)\|}$$

dır. (4.3) eşitliğini elde etmek için (4.8) eşitliği (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$N_1^*(s) = \frac{N_1(s)}{\|N_1(s)\|} = \frac{\kappa(s)N(s)}{\kappa(s)} = N(s) \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.12) eşitlikleri (4.4) de yerlerine yazılırsa,

$$N_2^*(s) = \frac{\kappa'(s)N(s) + \kappa^2(s)H(s)B(s) - \langle\left(\kappa'(s)N(s) + \kappa^2(s)H(s)B(s)\right), N\rangle\, N}{\left\|\kappa'(s)N(s) + \kappa^2(s)H(s)B(s) - \langle\left(\kappa'(s)N(s) + \kappa^2(s)H(s)B(s)\right), N\rangle N\right\|}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_2^*(s) = \frac{\kappa'(s)N(s) + \kappa^2(s)H(s)B(s) - \kappa'(s)N(s)}{\|\kappa'(s)N(s) + \kappa^2(s)H(s)B(s) - \kappa'(s)N(s)\|}$$

$$N_2^*(s) = \frac{\kappa^2(s)H(s)B(s)}{\kappa^2(s)H(s)}$$

$$N_2^*(s) = B(s) \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) ve (4.10) eşitlikleri (4. 1) de yerlerine yazılırsa,

$$(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s)$$

$$= \langle((\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s)), B(s)\rangle\; B(s).$$

Gerekli iç çarpım işlemi yapılırsa

$$(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s)$$

$$= (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s)$$

elde edilir. Her iki taraftan aynı ifadeler sadeleştirilirse,

$$(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s))N(s) = 0$$

elde edilir. $N(s) \neq 0$olduğundan

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)=0$$

bulunur

Sonuç 4.1.1. $\alpha: I \subset R \to G,$ AW(2)- zayıf tip bir Frenet eğrisi olsun. Eğer α bir düzlem eğrisi ise o zaman,

$$\kappa(s) = \mp \frac{\sqrt{2}}{s+c} \tag{4.14}$$

burada, c sabit (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. α, AW(2) zayıf tip bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda (4.11) eşitliğinden

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s) = 0$$

dır. Ayrıca α, bir düzlem eğrisi olduğu için

$$H(s) = 0 \tag{4.15}$$

olduğundan (4.15) eşitliği (4.11) eşitliğinde yerine konursa

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s) = 0$$

elde edilir. Böylece son eşitliğin çözümü bize (4. 14) eşitliğini verir.

Önerme 4.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G,$ 3-boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. α eğrisi, AW(3) zayıf tip bir eğri ise bu durumda

$$3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s)+\kappa^2(s)H'(s)=0 \tag{4.16}$$

dır (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. α eğrisi, AW(3) zayıf tipinden bir eğri olduğu için(4. 2) eşitliğinden

$$N_3(s) \ = \langle N_3(s)\, , N_1^*(s) \rangle N_1^*(s)$$

dır. (4.10)ve (4.12) eşitlikleri (4.2) de yerlerine yazılırsa

$$(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s) =$$
$$\langle(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s), N(s)\rangle N(s)$$

olacağından ve gerekli düzenlemelerde yapılırsa,

$$(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s)$$

$$= (\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)))N(s)$$

elde edilir. Her iki taraftan aynı ifadeler sadeleştirilirse,

$$(3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s) = 0$$

bulunur. $B(s) \neq 0$olduğundan,

$$3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s) = 0$$

dır.

Teorem 4.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$ 3-boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisi AW(1)-tipinden ise

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s) = 0 \tag{4.17}$$

ve

$$3\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s) = 0 \tag{4.18}$$

dır (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. α eğrisi, AW(1) tipinden bir eğri olduğu için (4. 5) eşitliği gereği,

$$N_3(s) = 0$$

dır. Bu durum (4.10) eşitliğine uygulanırsa,

$$(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s) = 0$$

olur. Ayrıca, N ve B vektörleri lineer bağımsız olduğu için bu vektörlerin katsayıları sıfır olması gerekir. Böylece

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s) = 0$$

ve

$$3\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s) = 0$$

dır.

Sonuç 4.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$ 3- boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda AW(1) tipinden Helis eğrisi yoktur (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. α eğrisi bir Helis eğrisi olsun.Bu durumda Teorem (3.1.16) gereği

$$H(s) = c$$

Dolayısıyla

$$H'(s) = 0$$

dır. Bu durumda (4.17) ve (4.18) eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s) = 0$$

ve

$$3\kappa'(s)\kappa(s)H(s) = 0$$

dır. Yukarıdaki diferansiyel denklemlerin çözümü olmadığı için, AW(1) tipinden Helis eğrisi yoktur.

Teorem 4.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$ 3- boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. O zaman α eğrisinin AW(2)-tipinden bir eğri olması için aşağıdaki eşitliği sağlaması gerekir (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

$$3\kappa'(s)^2\kappa(s)H(s) + \kappa'(s)\kappa^2(s)H'(s) - \kappa''(s)\kappa^2(s)H(s)$$

$$+\kappa^5(s)H(s)\big(1 - H^2(s)\big) = 0 \qquad (4.19)$$

İspat. α eğrisi AW(2) tipinden bir Frenet eğrisi olduğundan (4.6) gereği $N_2(s)$ ve $N_3(s)$ lineer bağımlıdır.(4.9) eşitliğinde $N(s)$ ve $B(s)$ vektörlerinin katsayılarına sırasıyla $\gamma(s)$ ve $\beta(s)$, (4.10) eşitliğinde $N(s)$ ve $B(s)$ vektörlerinin katsayılarına sırasıyla $\eta(s)$ ve $\delta(s)$ diyelim. Bu durumda (4. 9) ve (4.10) eşitliklerini sırasıyla

$$N_2(s) = \gamma(s)\mathrm{N(s)}+\beta(s)\mathrm{B(s)}, \tag{4.20}$$

$$N_3(s) = \eta(s)\mathrm{N(s)}+\delta(s)\mathrm{B(s)}, \tag{4.21}$$

şeklinde yazılabilir. Burada γ, β, η ve δ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. N_2(s) ve N_3(s) lineer bağımlı oldukları için, determinant katsayıları 0'a eşittir.

$$\begin{vmatrix} \gamma(s) & \beta(s) \\ \eta(s) & \delta(s) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.22}$$

burada,

$$\gamma(s) = \kappa'(s),\ \ \beta(s) = \kappa^2(s)H(s)$$

ve

$$\eta(s)= \kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)),$$

$$\delta(s) = 3\kappa'(s)\kappa(s)H(s)+\kappa^2(s)H'(s).$$

(4.22) eşitliğinde bu ifadeler yerlerine yazılır ve determinant değeri hesaplanırsa (4.19) eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.1.3. Eğer $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$ 3.mertebeden bir Frenet eğrisi ise AW(2) tipinden genel bir helistir, bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilebilir (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

$$3\kappa'(s)^2 - \ \kappa''(s)\kappa(s) + \kappa^4(s)(1 - H^2(s)) \ = 0. \tag{4.23}$$

İspat. α eğrisi, AW(2) tipinden bir eğri olduğu için (4.19) eşitliği sağlanır. Öte yandan α eğrisi genel helis ise Teorem (3.1.16) dan $H(s)$ bir sabittir.Dolayısıyla $H'(s)$=0 olması gerekir. Bu nedenle (4.19) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$3\kappa'(s)^2\kappa(s)H(s) - \kappa''(s)\kappa^2(s)H(s) + \kappa^5(s)H(s)\big(1 - H^2(s)\big) = 0$$

Ayrıca α, genel helis olduğu için $\kappa(s) \neq 0$ ve $H(s)$ bir sabittir. Dolayısıyla eşitliğin her iki tarafı $\kappa(s)H(s)$ ile sadeleştirilirse,

$$3(\kappa'(s))^2 - \kappa''(s)\kappa(s) + \kappa^4(s)(1 - H^2(s))=0$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$3- boyutlu Lie gruplarda genel Helis eğrisi olsun. Eğer α eğrisi, AW(2) tipinden ise,

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{-As^2 + B(s) + C}}$$

ve

$$(\tau - \tau_G)(s) = \sqrt{1 - A}\,\kappa(s) \tag{4.24}$$

Burada A=$1 - H^2(s)$ ve B ve C reel sabitlerdir (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. α eğrisi, AW(2) tipinden genel bir helis olsun. O zaman (4.23) eşitliği sağlanır. Eğer (4.23) de $\kappa(s)$=x değişikliği yapılırsa,

$$x\frac{d^2x}{ds^2} - 3\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = Ax^4, \quad A = 1 - H^2(s) \tag{4.25}$$

elde edilir. x=y^p alınır ve 2 kez diferansiyeli alınırsa,

$$\frac{dx}{ds} = py^{p-1}\frac{dy}{ds} \tag{4.26}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = p(p-1)y^{p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + py^{p-1}\frac{d^2y}{ds^2} \tag{4.27}$$

elde edilir. Şimdi (4.26) ve (4.27) eşitlikleri (4.25) de yerine konursa,

$$y^p\left[py^{p-1}\frac{d^2y}{ds^2} + p(p-1)y^{p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] - 3p^2y^{2p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = Ay^{4p}$$

$$py^{2p-1}\frac{d^2y}{ds^2} + p(p-1)y^{2p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - 3p^2y^{2p-2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = Ay^{4p}$$

elde edilir. Son eşitliğin içine $p(p-1) = 3p^2$ (i.e. $p = \frac{-1}{2}$) koyulursa,

$$py^{2p-1}\frac{d^2y}{ds^2} = Ay^{4p}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -2A$$

şimdi son denklem çözülebilir.

$$\frac{dy}{ds} = -2As + B$$

olduğu için

$$y = -As^2 + Bs + C.$$

bulunur. Ayrıca, $x = y^{\frac{-1}{2}}$ nin kullanımı ile,

$$x = (-As^2 + Bs + C)^{\frac{-1}{2}}.$$

elde edilir.

$$H(s) = \frac{(\tau - \tau_G)(s)}{\kappa(s)}$$

olduğundan istenen sonuca ulaşılır.

Teorem 4.1.4. α, 3 boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda α eğrisi, AW(3) tipinden ise

$$3\kappa'(s)\kappa(s)H(s)+\kappa^2(s)H'(s) = 0 \qquad (4.\ 28)$$

dır (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. α, AW(3) tipi 3.mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda (4. 7) eşitliği sağlanır. (4.8) ve (4.10) eşitlikleri (4. 7) eşitliğinde yerlerine konursa eşitliğin sol tarafı,

$$\kappa^2(s)\Big[(\kappa''(s) - \kappa^3(s)(1 - H^2(s)))N(s) + (3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s) + \kappa^2(s)H'(s))B(s)\Big]$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı ise,

$$\kappa^2(s)\left(\kappa''(s)-\kappa^3(s)\big(1-H^2(s)\big)\right)N(s)$$

elde edilir. Her iki taraf eşitlenirse,

$$\kappa^2(s)\left[\left(\kappa''(s)-\kappa^3(s)\left(1-H^2(s)\right)\right)N(s)+\left(3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s)+\kappa^2(s)H'(s)\right)B(s)\right]$$

$$=\kappa^2(s)\left(\kappa''(s)-\kappa^3(s)\left(1-H^2(s)\right)\right)N(s)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$(3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s)+\kappa^2(s)H'(s))B(s)=0$$

bulunur. $B(s)\neq 0$ olduğundan,

$$(3\,\kappa'(s)\kappa(s)H(s)+\kappa^2(s)H'(s))=0$$

olur. Böylece (4.28) eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.5. α eğrisi oskülatör mertebesi 3 olan genel Helis olsun. Bu durumda α eğrisinin AW(3)-tipinden olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin dairesel Helis olmasıdır (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. :⇒ αeğrisi genel helis olduğundan Teorem (3.1.15) den

$$H'(s)=0$$

dır. Böylece denklem (4.28)

$$\kappa'(s)\kappa(s)H(s)=0$$

olur. $H(s)\neq 0$ olduğundan $\kappa'(s)=0$. Bu durumda $\kappa(s)$ sabit olur. Ayrıca α, genel helis olduğu için $(\tau-\tau_G)(s)$ sabit olmalıdır. Dolayısıyla α, dairesel helistir.

⇐: α eğrisi dairesel helis olsun. Bu durumda $\kappa(s)$ ve $(\tau-\tau_G)(s)$ sabit olduğundan $H(s)$de sabit olur. Dolayısıyla $\kappa'(s)=0$ ve $H'(s)$=0 bulunur. Böylece

$$3\kappa'(s)\kappa(s)H(s)=0$$

ve

$$\kappa^2(s)H'(s) = 0$$

elde edilir. Taraf tarafa toplama yapılırsa,

$$3\kappa'(s)\kappa(s)H(s)+\kappa^2(s)H'(s) = 0$$

eşitliği yazılabilir. Son eşitlikαeğrisinin AW(3)-tipinden bir eğri olduğu sonucunu doğurur.

4.2. 3 Boyutlu Lie Gruplarda AW(k)-tipinden Bertrand Eğrileri

Tanım 4.2.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to G$,$\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde bir eğri olsun.α eğrisiyle $s \in I$ da asli normalleri eşit olacak şekilde bir $\tilde{\alpha}: I \subset \mathbb{R} \to G$ eğrisi varsa α, Bertrand eğrisi olarak adlandırılır. Bu durumda $\tilde{\alpha}$, α-nın bir Bertrand çifti olarak tanımlanır (Okuyucu, Gök ve Yaylı, 2012).

Teorem 4.2.1. $\alpha \subset G$ bir Bertrand eğrisi olsun.$(\alpha, \tilde{\alpha})$ Bertrand ikilisi için, λ sabit olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır (Okuyucu, Gök ve Yaylı, 2014).

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda N(s) \tag{4.29}$$

Sonuç 4.2.1. $(\alpha, \tilde{\alpha})$ Bertrand ikilisi ise,

$$\big(\tilde{\alpha}(s)\big)' = \big(1 - \lambda\kappa(s)\big)T(s) + \big(\lambda\kappa(s)H(s)\big)B(s) \tag{4.30}$$

dır (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. $(\alpha, \tilde{\alpha})$ bir Bertrand ikilisi olduğundan (4.29) eşitliğinden

$$\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

dır. Bu eşitlikte s-ye göre türev alınırsa

$$(\tilde{\alpha})'(s) = \alpha'(s) + \lambda' N(s) + \lambda N'(s) = \alpha'(s) + \lambda' N(s) + \lambda(-\kappa T + \tau B)(s)$$

dır. Burada λ sabit olduğundan $\lambda' = 0$ olur. Bu durumda $\alpha'(s) = T$ yerine konursa

$$(\tilde{\alpha})'(s) = T + \lambda(-\kappa T + \tau B)(s)$$

$$(\tilde{\alpha})' = (1 - \lambda\kappa(s))T + \lambda\,\tau B(s)$$

elde edilir.

$$H=\frac{\tau-\tau_G}{\kappa} \text{ ve } (\tau-\tau_G)=\kappa H$$

olduğundan bu eşitlikler yukarıda yerlerine konulursa (4.30) elde edilir. Yani,

$$\big(\tilde{\alpha}(s)\big)' = \big(1-\lambda\kappa(s)\big)T(s) + \big(\lambda\kappa(s)H(s)\big)B(s)$$

dır.

Önerme 4.2.1. α eğrisi, 3-boyutlu Lie gruplarda oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. $\kappa(s)\neq 0$ olmak üzere, α- nın bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda\kappa(s) + \mu\kappa(s)H(s) = 1 \qquad (4.31)$$

şeklinde doğrusal bir ilişki var olmasıdır. Burada λ, μ sıfırdan farklı sabitler ve H, αeğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonudur (Okuyucu, Gök, Yaylı ve Ekmekçi, 2014).

Sonuç 4.2.2. $\kappa(s)\neq 0$ ve $(\tau-\tau_G)\neq 0$ olmak üzere, α eğrisinin bir Bertrand eğrisi olması için aşağıdaki eşitlik sağlanacak şekilde sıfırdan farklı λ gibi gerçel bir sayı var olmalıdır (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

$$\lambda\big(\kappa'(s)\kappa(s)H(s) - \kappa(s)\big(\kappa(s)H(s)\big)'\big) - \big(\kappa(s)H(s)\big)' = 0 \qquad (4.32)$$

İspat. Önerme(4.2.1) den αeğrisibir Bertrand eğrisi ise $\lambda\neq 0$ ve μ;

$$\lambda\kappa(s) + \mu\kappa(s)H(s) = 1$$

olacak şekilde gerçek sayılardır. Bu

$$\frac{1-\lambda\kappa(s)}{\kappa H(s)} = sabit$$

olacak şekilde $\lambda\neq 0$ reel bir sayı var olduğu duruma denktir. Son eşitliğin her iki tarafının diferansiyeli alınırsa,

$$\frac{(1-\lambda\kappa)'\kappa H - (1-\lambda\kappa)(\kappa H)'}{(\kappa H)^2} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$-\lambda\kappa'\kappa H-(1-\lambda\kappa)(\kappa H)'=0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda(\kappa'\kappa H-\kappa(\kappa H)')-(\kappa H)'=0$$

elde edilir. $\forall\ s\in I$için,

$$\lambda\big(\kappa'(s)\kappa(s)H(s)-\kappa(s)\big(\kappa(s)H(s)\big)'\big)-\big(\kappa(s)H(s)\big)'=0$$

dır.

Önerme 4.2.2. $\kappa(s)\neq 0$ ve $(\tau-\tau_G)\neq 0$ olmak üzere, $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ bir Bertrand eğrisi olsun. α eğrisinin AW(2)-tipi olması için gerek ve yeter şart λ gibi sıfırdan farklı gerçek bir sayı var olmasıdır. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

$$3\big(\kappa'(s)\big)^2H(s)+\kappa^2(s)\frac{\lambda\kappa'(s)H(s)}{\lambda\kappa(s)-1}-\kappa^2(s)H(s)\big(3\kappa'(s)H(s)+\kappa(s)H'(s)\big)=0 \quad (4.33)$$

İspat. α eğrisi AW(2)-tipinden olduğu için (4.19) eşitliğinden

$$3\kappa'(s)^2\kappa(s)H(s)+\kappa'(s)\kappa^2(s)H'(s)-\kappa''(s)\kappa^2(s)H(s)$$

$$+\kappa^5(s)H(s)\big(1-H^2(s)\big)=0$$

dır. Ayrıcaα bir Bertrand eğrisi olduğu için (4.32) eşitliğinden

$$\lambda\big(\kappa'(s)\kappa(s)H(s)-\kappa(s)\big(\kappa(s)H(s)\big)'\big)-\big(\kappa(s)H(s)\big)'=0$$

olduğundan bu iki eşitlik birlikte düşünülüp gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.33) elde edilir.

Teorem 4.2.2. $\kappa(s)\neq 0$ ve $(\tau-\tau_G)\neq 0$ olmak üzere, $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ bir Bertrand eğrisi olsun. Eğer α eğrisi AW(3) tipi ise , α bir dairesel helistir (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

İspat. $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$,$\kappa(s)\neq 0$ ve $(\tau-\tau_G)\neq 0$ olacak şekilde AW(3)-tipi bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda (4.28) ve (4.32) eşitliklerini birlikte düşünürsek,

$$H'(s)\big(2\lambda\kappa^3(s)-\kappa^2(s)\big)=0 \tag{4.34}$$

eşitliğini elde ederiz. $\kappa(s)\neq 0$ olduğu için, (4.34) eşitliğinden

$$H'(s)=0$$

dır. Dolayısıyla $H(s)$ sabittir, böylece α eğrisi bir dairesel helistir.

Önerme 4.2.3. $\kappa(s)\neq 0$ ve $(\tau-\tau_G)\neq 0$ olmak üzere, $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to G$ bir Bertrand eğrisi olsun. Eğer α eğrisi, AW(2) zayıf tipinden ise aşağıdaki eşitlik yazılabilir (Kızıltuğ ve Çakal, 2017).

$$H'(s)\big(\lambda\kappa^2(s)-\kappa(s)\big)+H'(s)\left(2\lambda\kappa(s)\kappa'(s)-2\kappa'(s)\right)-\kappa^3(s)H(s)\big(1-H^2(s)\big)=0 \tag{4.35}$$

İspat. α, AW(2) zayıf tipi olduğu için (4.11) eşitliğinden

$$\kappa''(s)-\kappa^3(s)\big(1-H^2(s)\big)=0$$

dır. α, bir Bertrand eğrisi olduğu için, (4.32) eşitliği ele alınırsa

$$\lambda\big(\kappa'(s)\kappa(s)H(s)-\kappa(s)\big(\kappa(s)H(s)\big)'\big)-\big(\kappa(s)H(s)\big)'=0$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$H'(s)\big(\lambda\kappa^2(s)-\kappa(s)\big)=\kappa'(s)H(s) \tag{4.36}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin diferansiyeli alınırsa,

$$\kappa''(s)=\frac{H''(s)\big(\lambda\kappa^2(s)-\kappa(s)\big)\ +\ H'(s)\big(2\lambda\kappa(s)\kappa'(s)-2\kappa'(s)\big)}{H(s)} \tag{4.37}$$

eşitliği elde edilir. (4.11) eşitliğinde (4.37) eşitliği yerine yazılırsa (4.35) elde edilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, 3 boyutlu Lie gruplarda, Harmonik eğrilik fonksiyonunu kullanarak bir Frenet eğrisinin AW(k)-tipinden eğri olma şartları verilmiş ve AW(k)-tipinden eğrilerin helis eğrisi ve düzlem eğrileriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Burada geçmiş çalışmalardan farklı olarak, 3 boyutlu Lie gruplarda Bertrand eğrileriyle AW(3), AW(2) ve zayıf AW(2) tipinden eğriler arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar diğer bazı özel eğri çiftlerine de uygulanabilir. Örneğin Mannheim eğrilerine ve involute- evolute eğri çiftine uygulanabilir. Mannheim eğrilerinin ve involute- evolute eğri çiftlerinin Lie gruplarda tanımı yapıldıktan sonra bu eğrilerin AW(k)-tipinden eğriler ile ilişkileri gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Arslan, K. ve Özgür, C. (1999) ‘‘Curves and surfaces of AW(*k*)-type’’,***Geometry and Topology of Submanifolds***, 9 (Valeciennes /Lyan /Leuven, 1997), World. Sci. Publishing, River Edge, NJ, pp. 21-26.

Boothby, W.M. (1975) ‘‘ An introduction to differantiable manifolds and rieamann geometry’’, ***Department of Matematics Washington University***, Newyork, 149- 150.

Camcı, Ç., İlarslan, K., Kula, L. ve Hacısalihoğlu, H. H. (2009) ‘‘Harmonic curvatures and generalized helices in E^n’’,***Chaos, Solitons & Fractals*** .40(5), 2590-6.

Crouch, P. ve Silva, F.L.(1995) ‘‘The dynamic interpolation problem on Riemannian manifolds Lie Groups and symmetric spaces’’, ***J. Dyn. Control Syst***. 2177-202.

Çiftçi, Ü. (2009) ‘‘A generalization of Lancert’s theorem, ***J. Geom. and Phys.***’’ 59, 1597- 1603.

Çöken A.C. ve Çiftçi, Ü. (2008) ‘‘A note on the geometry of Lie groups’’, ***Nonlinear Analysis***, TMA68, 2013- 16.

Do Carmo ve Manfredo P. (1976) ‘‘Differantial Geometry of curves and surfaces’’, ***Prentice-Hall, Inc,*** Englewood Cliffs, N.J. 16-17.

Do Carmo ve Manfredo P. (1992) Riemannian Geometry, Birkhäuser Boston, 297.

Dülger M.Y. (2010) ‘‘Lie grupları ve Lie dönüşüm grubu olarak etkileri ’’,(Yüksek Lisans), ***K. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Kırıkkale, 1.

ElNaschie, M.S. (2005) ‘‘Experimental and theoretical arguments for the number and mass of the Higgsparticles’’,***Chaos. Solitons&Fractals***,23, 1091–8.

ElNaschie M.S. (2001) ‘‘Notes on super strings and the infinite sums of Fibonacci and Lucas numbers’’, ***Chaos. Solitons&Fractals*** 10, 1937–40.

Falcon S. ve Plaza A. (2008)‘‘On the three-dimensional k-fibonacci spirals’’, ***Chaos. Solitons&Fractals.***, 38(4), 993–1003.

Ferus, D. ve Schirrmacher, S. (1982) “Submanifolds in Euclidean Space with simple geodesics”, ***Math Ann***., 260(1), 57-62.

Gilmore, R.(2008)‘‘Lie Groups, Physics and Geometry’’***Cambridge University Press***, New York,319.

Hacısalihoğlu H.H.(1983) Diferansiyel Geometri, ***İ. Ü. Yayınları***, Ankara, 340.

Hacısalihoğlu H.H. (1993) Diferansiyel Geometri, ***A. Ü. Yayınları***, Ankara, Cilt 1, 62-258.

Hacısalihoğlu H.H. (2000) Diferansiyel Geometri, ***A.Ü. Fen Fakültesi***, Ankara, Cilt 1, 154- 175.

Hacısalihoğlu H.H. (2000) Diferansiyel Geometri, ***A.Ü. Fen Fakültesi***, Ankara, Cilt 2, 54- 68.

Izumiya S. ve Takeuchi N. (2002) ‘‘Generic properties of helices and Bertrand curves’’, ***J. Geom.***, 7497–109.

Izumiya S. ve Takeuchi N. (2004) ‘‘New special curves and developable surfaces’’, ***Turkish J Math.***, 28(2), 153–163.

Kızıltuğ S. ve Çakal S. (2017) ‘‘Bertrand Curves of AW(k)- Type in three dimensional Lie Groups’’, ***Journal of Mathematical and Computational Science***, vol.7, 806-816.

Kızıltuğ S. ve Yaylı Y. (2014) ‘‘Bertrand Curves of AW(k)- Type in the Equiform Geometry of the Galilean Space’’ , ***Abstract and Applied Analysıs***, no.10, 6-6.

Kızıltuğ S. ve Yaylı Y. (2015) ‘‘On the Quaternionic Mannheim curves of Aw(k)-type in Euclidean Space E^3’’, ***Kuwait Journal of Scıence Engıneering***, vol.42, 128-140.

Kobayashi S. veNomizu K. (1996) ‘‘ Foundations of differential geometry’’, ***John Wileyandsons, Inc***., New York.

Külahcı, M., Bektas, M. ve Ergüt, M. (2009) ‘‘On Harmonic curvatures of a Frenet curve in Lorentzian space’’, ***Chaos. Solitons & Fractals***, 41, 1668- 1675.

Okuyucu, O.Z. , Gök, İ. , Yaylı, Y. ve Ekmekci, N. (2014)‘‘Bertrand Curves in Three Dimensional Lie Groups’’, arXiv:1211.6424v [math. DG].

Okuyucu, O.Z. , Gök, İ. , Yaylı, Y. ve Ekmekci, N. (2012) ‘‘Slant Helices in Three Dimensional Lie Groups’’, preprint arXiv:1203.1146v2 [math. DG].

Özgür, C. ve Gezgin, F. (2005) ‘‘On some curves of AW(k)-type’’, ***Differ. Geom. Dyn. Syst.***7, 74- 80.

Seymour Lıpschutz, Ph.D. (1968) ‘‘Lineer algebra’’***Schaum’s Outline Serıes Mcgraw-Hıll***, Tokyo, 315.

Struik, D.J. (1988)‘‘Lectures on Classical Differential Geometry’’, 2nd ed. Addison Wesley, Dover.

Talpaert, Y.(2001)‘‘Diferentiel Geometry with Applications to Mechanics and Physics’’. ***Marcel Dekker, Inc***. New York-Basel, 454.

EKLER

Ek-1. Tez çalışması süresince yapılan akademik çalışmalar

Kızıltuğ S. ve Çakal S. ‘‘Bertrand Curves of AW(k)- Type in three dimensional Lie Groups’’, ***Journal of Mathematical and Computational Science***, vol.7, 806-816, Erzincan, Temmuz 2017.

ÖZGEÇMİŞ

18 Eylül 1984 tarihinde Erzurum'da doğdu. İlk, orta öğrenimini Horasan' da ve lise öğrenimini Bayburt'ta tamamladı. 2004 yılında Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. 2015 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.