T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARINA İTERATİF YAKLAŞIMLAR

Fatma SOLMAZ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN danışmanlığında, Fatma SOLMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 19/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 08/07/2019 tarih ve 26/3....... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Küme değerli dönüşümlerin sabit noktalarına iterativ yaklaşımlar" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 19/06/2019

Fatma SOLMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARINA İTERATİF YAKLAŞIMLAR

Fatma SOLMAZ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN

Karaca ve Yıldırım (2015); Picard, Mann, Ishikawa, Picard-Mann S-iterasyonlarından daha hızlı yakınsayan yeni bir iterasyon tanımlamışlardır. Biz bu tezde ilk olarak bu iterasyonun küme değerli versiyonunu verdik. İkinci olarak bu iterasyonun, Banach uzayında uygun koşullar altında küme değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına güçlü ve zayıf yakınsadığını inceledik. Son olarak da teoremlerimizin uygulanabilir olduğunu gösteren örnekler verdik. Elde ettiğimiz sonuçlar son dönem yapılmış olan çalışmaları genelleştirmiştir.

2019, 45 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Genişlemeyen dönüşüm, Küme değerli dönüşüm, Sabit nokta, Zayıf ve kuvvetli yakınsama

ABSTRACT

Master Thesis

ITERATIVE APPROXIMATIONS TO FIXED POINTS OF SET VALUED MAPPINGS

Fatma SOLMAZ

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Tufan ÖZDİN

Karaca and Yıldırım (2015); Picard, Mann, Ishikawa, Picard-Mann have defined a new iteration that converges faster than S-iterations. In this thesis, we first gave a cluster-valued version of this iteration. Secondly, we examined that iteration converges strongly and weakly to the fixed points of nonexpansive mapping under appropriate conditions in Banach space. Finally, we gave examples showing that our theorems are applicable. Our results generalized the recent studies.

2019, 45 Pages

Keywords: Nonexpansive mapping, Set valued conversion, Fixed point, Weak and strong convergence

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmam sırasında, değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman ihtiyacım olsa bana kıymetli zamanını ayırarak sabırla ve büyük bir ilgi ile elinden gelenin fazlasını yapan, çalışmamın herhangi bir aşamasında sorun yaşadığımda güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyerek yardımcı olan çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Birol GÜNDÜZ' ü rahmetle anıyorum.

Yine bu çalışmamın son aşamasında bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübesiyle beni destekleyen, çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma en samimi duygularımla teşekkür ediyorum.

Fatma SOLMAZ
Haziran, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

2^C	C nin kuvvet kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\Vert \quad \Vert$	Norm
l_∞	Sınırlı dizilerin kümesi
$Dom(T)$	T dönüşümünün tanım kümesi
$Graph(T)$	T dönüşümünün grafiği
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktası kümesi
$C(X)$	X in kapalı alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X in kapalı sınırlı alt kümelerinin ailesi
$D(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$D[x,r]$	x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$T: X \multimap Y$	X den Y ye küme değerli dönüşüm

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz, esas olarak doğrusal ve doğrusal olmayan kategorilere ayrılan matematiğin önemli bir dalıdır.

19. yüzyılın sonlarında özellikle diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşmak için kullanılan sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar üç ayrı başlık altında toplanabilir. Bunlar 1912 yılında Brouwer sabit nokta teoremi ile gelişmeye başlayan topolojik sabit nokta teorisi, Tarski sabit nokta teoremi ile başlayan ayrık sabit nokta teorisi ve 1922'de Banach sabit nokta teoremi ile gelişen metrik sabit nokta teorisidir.

Sabit nokta teorisi, bir X kümesinde $x = Tx$ operatör denkleminin çözümü ve bu çözümün varlığını garanti eden koşullarla ilgilenir. Burada T, X kümesinde tanımlanan bir dönüşümdür. Böyle bir sorunun çözüm kümesi boş küme, sonlu bir küme, sayılabilir veya sayılamayan sonsuz bir küme olabilir. Sabit nokta teorisi, çeşitli matematiksel analiz dallarında ortaya çıkan problemleri çözmek için gerekli araçları sağlar. Ayrık fizibilite problemleri, varyasyonel eşitsizlik problemleri, doğrusal olmayan optimizasyon problemleri, denge problemleri, tamamlayıcılık problemleri, seçim ve eşleştirme problemleri, integral ve diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kanıtlanması sabit nokta teorisi ile yakından ilişkilidir. Sorunların uzun bir listesi, sabit nokta problemini çözme kategorisine girer. Özellikle, çözümler doğrusal olmayan fonksiyonel analizde derin köklere sahiptir.

Sabit nokta teorisinde yapılan araştırmalar genellikle

a) Sabit noktanın varlığını garanti eden eşlemeler üzerindeki daha az kısıtlayıcı koşulların araştırılmasını,
b) Sabit noktanın benzersizliğini sağlayan koşulların araştırılmasını,
c) Modifikasyonunu, zenginleştirilmesini, daha genel alanlar elde etmek için tanım alanlarının genişletilmesini,
d) Karakterizasyonun tanımlanmasını,
e) Sabit noktaların yapıları veya yaklaşımlarını ve
f) İncelenen sabit nokta haritalama noktalarının yapısını içerir.

1922'de kanıtlanmış olan Banach Sabit Nokta Teoremi, metrik sabit nokta teorisinin merkezinde yer almaktadır ve doğrusal olmayan fonksiyonel analizin birçok yönünde temel bir rol oynamıştır. $x = Tx$ operatör denkleminin çözümünün varlığını ve benzersizliğini belirlemek için ardışık yaklaşımların (Picard'ın 1890'da başlattığı bir fikir) kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Bu ilke, geniş bir uygulama yelpazesi ile güçlü bir araç olarak hizmet eder; özellikle, diferansiyel veya integral denklemlerin çözümlerinin varlığını kanıtlamak için kullanılabilir. Matematik ve diğer ilgili disiplinlerdeki uygulamaları nedeniyle birçok yönden genelleştirilmiştir.

Banach Sabit Nokta Teoremi uzantıları, eşlemelerin etki alanını genelleştirerek veya eşlemeler üzerinde kontraktif durumu genişletilerek elde edilmiştir. Literatür, geniş kapsamlı uygulamalara yol açan çok sayıda uzantı ve değişkenle doludur.

Bu monografın amacı, belirli haritalamaların sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile ilgili sonuçları ve metrik sabit nokta teorisi kapsamına giren araştırmaların bu yönlerini sunmaktır.

Bu tez altı bölümden oluşmuşmaktadır. Giriş bölümünden sonraki bölümde kaynak özeti kısmı bulunmaktadır.

Üçüncü bölüm kuramsal temellerden oluşmaktadır. Bu bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullanacağımız temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Daha sonra bazı dönüşümler tanıtılmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlarda var olduğu incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, tek değerli ve küme değerli dönüşümler için iterasyon yöntemleri verilmiştir.

Beşinci bölümde ise Karaca ve Yıldırım (2015); Picard, Mann, İshikawa, Picard-Mann S-iterasyonlarından daha hızlı yakınsayan yeni bir iterasyon tanımlamışlardır. Bu tezde ilk olarak bu iterasyon sürecinin küme değerli versiyonu verildi daha sonra bu iterasyonun Banach uzayında uygun koşullar altında küme değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına güçlü ve zayıf yakınsadığı incelendi. Son olarak da teoremlerimizin uygulanabilir olduğunu gösteren örnekler verildi.

Altıncı bölümde bu araştırmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Tek ve küme değerli dönüşümler için sabit nokta teorisi, uygulamalı matematik, pür ve teorik matematiğin farklı dallarında önemli bir role sahiptir. Sabit noktaların varlığı ve tekliğinin yanı sıra bir iterasyon vasıtasıyla sabit noktaların elde edilmesi birçok yazarın dikkatini çekmiştir. Hausdorff Metriği, küme değerli dönüşümlerin sabit noktalarının hesaplanmasında önemli rol oynamaktadır. Küme değerli genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teorisi hem Hilbert uzaylarında hemde Banach uzaylarında tek değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta teorisinden zordur. Markin (1973) küme değerli dönüşümler için daraltan dönüşüm kavramını tanımladı ve küme değerli daraltan dönüşümler için Banach daralma prensibinin uyarlanmış versiyonunu ispatladı. Ayrıca Lim (1974) düzgün konveks Banach uzaylarında küme değerli genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların varlığını ispatladı. Küme değerli dönüşüm çalışmaları konveks optimizasyon, kontrol teorisi, diferansiyel denklemler ve ekonomide uygulamaları olan ve hızlı büyüyen bir araştırma alanıdır.

İterasyonlar küme değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını hesaplamak için uzunca bir süredir kullanılmaktadır. 2005'de Sastry ve Babu (2005) Mann ve İshikawa iterasyonlarının sabit nokta kümesi boş olmayan ve kompakt bir kümede tanımlanan küme değerli bir T dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığını ispatlamışlardır.

Panyanak (2007); Satry ve Babu (2005) tarafından verilen yakınsama sonucunu düzgün konveks Banach uzaylarında genelleştirilmiş fakat T'nin tanım kümesi kompakt olarak kalmıştır. Ayrıca Panyanak açık bir problem üretmiştir. Daha sonra, Song ve Wang (2008) Satry ve Babu (2005) Teorem 5'in ve Panyanak (2007) deki Teorem 3.1 in ispatlarında bir hata bulmuşlardır. Onlar bu hatayı gidermiş ve Ishikawa iterasyonunu kullanarak Panyanak'ın sorusuna olumlu bir cevap vermişlerdir. Onların ana sonuçlarında T'nin tanım kümesi hala kompakt olarak kalmıştır ki bu da güçlü bir şarttır ve T, (I) şartını sağlamaktadır.

Shahzad ve Zegeye (2009); Panyanak (2007), Sasty ve Babu(2005), Song ve Wang (2008) de verilen sonuçları genişletmiş ve Quasi genişlemeyen dönüşümlere genelleştirmiştir. Onlar ayrıca T'nin tanım kümesini kompakt olması gerektiğini ve $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ şeklindeki T üzerindeki kısıtlamayı kaldıran yeni iterasyon tanımlamışlardır. Bunu yapmak için küme değerli $T: K \to P(K)$ dönüşümü için

$P_T(x) = \{y \in Tx: \|x - y\| = d(x, Tx)\}$'i tanımlamışlardır. Böylece Panyanak'ın sorusuna daha genel bir kümede cevap bulmuşlardır. Khan ve Yıldırım (2012); Shahzad ve Zegeye (2009) nin çalışmaları ışığında S-iterasyonunun küme değerli versiyonunu çalışmışlardır.

3. KURAMSAL TEMELLER

3.1. Genel Kavramlar

Tanım 3.1.1 (Metrik ve metrik uzay) : X boştan farklı bir cümle olsun.

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği)

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.1.2 (Vektör Uzay) : V boştan farklı bir küme ve F bir cisim olsun.

$$+ : V \times V \to V \,, (x, y) \to x + y,$$

$$. : F \times V \to V \,, (\alpha, X) \to \alpha x \,,$$

dönüşümleri ile toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım. Eğer her $x, y, z \in V$ ve $a, b \in F$ için;

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $x + y = y + x$
3. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in V$ elemanı vardır.
4. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in V$ elemanı ($-x$ toplamada ters elemandır) vardır.
5. $(ab)x = a(bx)$
6. $a(x + y) = ax + ay$
7. $(a + b)x = ax + bx$
8. $1. x = x$ (1 çarpmada birim ya da etkisiz elemandır).

şartları sağlanıyorsa V ye F üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

$F = \mathbb{R}$ alınırsa V ye reel vektör uzayı ve $F = \mathbb{C}$ alınırsa V ye kompleks vektör uzayı adı verilir.

Tanım 3.1.3 (Normlu Uzay) : N, bir lineer uzay olsun. $\| \quad \| : N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. bu fonksiyon için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad (\alpha \epsilon F)$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\| \quad \|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(N, \| \quad \|)$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Örnek 3.1.4 : $(\mathbb{R}^n, \| \quad \|_1)$ ve $(\mathbb{C}^n, \| \quad \|_1)$ normlu uzayları $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ de $\| \quad \|_1$,

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

olarak tanımlanırsa

N1) $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ve

N2) $\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\|x\|_1$

olduğu açıktır. Üçgen eşitsizliğine gelince,

N3) $\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_{i+}y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

dir.

Tanım 3.1.5 (Banach Uzayı) : N normlu lineer uzay olsun. N, norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir. N nin normlu reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 3.1.6 : Reel sayılar cümlesinde $\|x\| = |x|$ olarak tanımlanırsa $\mathbb{R}$ nin normlu reel lineer uzay olduğu bilinir. Ayrıca $\mathbb{R}$ tamdır. O halde $\mathbb{R}$ Banach uzayıdır.

Aynı şekilde her $z \in \mathbb{C}$ için $\|z\| = |z|$ olarak tanımlanırsa komleks sayılar cümlesi de Banach uzayıdır. Bu Banach uzayları en basit Banach uzayları olmakla beraber çok önemlidirler.

$\mathbb{R}^n$ de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\| \quad \|_2$ normu

$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ olarak tanımlanırsa $\mathbb{R}^n$ Banach uzayı olur.

Tanım 3.1.7 (İç Çarpım) : X , F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle\, , \rangle : X \times X \to F$ fonksiyonu,

- **i.** $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ dir.
- **ii.** $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ dir. $(\alpha \in F)$
- **iii.** $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ dir.
- **iv.** $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dır.

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona **iç çarpım** (veya **iç çarpım fonksiyonu**) denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına **iç çarpım uzayı (**veya **ön-Hilbert uzayı)** denir. Şu halde bir iç çarpım uzayı bir vektör uzayı ile bir iç çarpım fonksiyonundan ibarettir. İç çarpım uzayını $(X, \langle\, , \rangle)$ veya kısaca X ile göstereceğiz (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.1.8 (Hilbert Uzayı) : X bir iç çarpım uzayı ve $\| \quad \|$, iç çarpım normu olsun.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y\, , x - y\rangle}$$

olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise Hilbert uzayı denir.

Bu tanımdan anlaşılmaktadır ki Hilbert uzayları, özel Banach uzaylarıdır (Bayraktar, 2006).

Örnek 3.1.9 : $\mathbb{C}^n$ üniter uzayının

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n}$$

iç çarpımına göre bir iç çarpım uzayı olduğunu biliyoruz. Ayrıca tanıma göre

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z\rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right)^{1/2}$$

olduğundan $\mathbb{C}^n$ kompleks Banach uzayıdır ve tamdır. Dolayısıyla Hilbert uzayıdır.

3.2. Sabit Nokta Kavramı

3.2.1. Tek Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Kavramı

Tanım 3.2.1.1 (Sabit Nokta) : X boştan farklı bir küme ve $T : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktasıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin ;

1. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x^2$ dönüşümünün iki sabit noktası vardır ve $F(T) = \{0,1\}$ dir.
2. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I : X \to X$ özdeş dönüşümü için X in her noktası sabit noktadır.
3. $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $T : X \to X$, $Tx = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ için $F(T) = \{\sqrt{3}\}$ tür.
4. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T : X \to X$, $Tx = \alpha_1 + x$ şeklindeki öteleme dönüşümlerinin sabit noktaları yoktur.
5. $X = [0,1]$ ve $Y = [1,2]$ olmak üzere herhangi bir $T : X \to Y$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

X boştan farklı bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n. iterasyonu denir. T^n $(n \geq 1)$ dönüşümüne de T nin n. iterasyonu denir. $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılabilir.

$T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.
2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ dönüşümü $T(a) = b$, $T(b) = a$, $T(c) = c$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{a, b, c\}$ olduğu halde $F(T) = \{c\}$ dir.

X boş olmayan bir küme ve $T_1, T_2 : X \to X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $T_1 x = T_2 x = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x noktasına T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2)$ ile gösterilir. Örneğin,

1. $X = \mathbb{R}$, $T_1, T_2 : X \to X$, $T_1 x = x^2 - 6x + 12$ ve $T_2 x = x^2 - 5x + 9$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{3\}$ tür.
2. $X = \mathbb{R}^2$, $T_1, T_2 : X \to X$, $T_1(x, y) = (-x, y)$ ve $T_2(x, y) = (3x, y)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{(0, y)\}$ dir.

Tanım 3.2.1.2 (Lipschitzian Dönüşüm) : (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde $k \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre Lipschitz şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x, y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 3.2.1.3 (Daraltan dönüşüm) : (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (conctraction) denir.

Eğer (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm ise, bu dönüşümün bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir (Banach Daralma Prensibi).

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünü alalım. Bu T dönüşümü daraltan dönüşümdür, fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n daraltan bir dönüşüm olabilir.

Örnek 3.2.1.4 : $C[0,1] = \{f: f: [0,1] \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ olsun. $C[0,1]$ üzerindeki metrik

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$$

olmak üzere ve $T: C[0,1] \to C[0,1]$,

$$T(f(t)) = \int_0^t f(s)ds$$

olsun.

i. T dönüşümü daraltan bir dönüşüm müdür?

$$d\big(T(f), T(g)\big) = \int_0^1 \big|T\big(f(t)\big) - T(g(t))\big| dt$$

$$= \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)ds - \int_0^t g(s)ds \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^t |f(s) - g(s)|\, dsdt$$

$$\leq \int_0^1 \left\{ \int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds \right\} dt$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds = d(f,g)$$

olur. Yani $d\big(T(f), T(g)\big) \leq d(f,g)$ dir.

Burada $k = 1$ olup, T dönüşümü daraltan değildir.

ii. T^2 daraltan dönüşüm müdür?

$$d\big(T^2(f), T^2(g)\big) = \int_0^1 |T^2(f(t) - T^2(g(t))|\, dt$$

$$= \int_0^1 \big|T\big(T(f(t))\big) - T\big(T(g(t))\big)\big|\, dt$$

$$= \int_0^1 \left| T\left[\int_0^t f(s)ds\right] - T\left[\int_0^t g(s)ds\right]\right| dt\,,$$

olur.

$$\int_0^t f(s)ds = u(t), \quad \int_0^t g(s)ds = v(t)$$

olarak alınırsa,

$$d\big(T^2(f), T^2(g)\big) = \int_0^1 |T(u(t)) - T(v(t))| dt$$

$$= \int_0^1 \left| \int_0^t u(z)dz - \int_0^t v(z)dz \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^t \left| \int_0^t f(s)ds - \int_0^t g(s)ds \right| dzdt$$

$$\leq \int_0^1 \left\{ \int_0^t \left[\int_0^t |f(s) - g(s)| ds \right] dz \right\} dt$$

$$\leq \int_0^1 \left\{ \int_0^t \left[\int_0^1 |f(s) - g(s)| ds \right] dz \right\} dt$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^t d(f,g) dz \right] dt = \int_0^1 d(f,g) \left[\int_0^t dz \right] dt$$

$$= d(f,g) \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} d(f,g)$$

elde edilir. Burada $k = \frac{1}{2} < 1$ olup T^2 dönüşümü daraltandır.

Teorem 3.2.1.5 (Banach Daralma İlkesi) : (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq k < 1$ sabit sayısı varsa, bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat : x_0 , X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0 \, , \; x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 \, , \ldots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0$$

olsun. İlk olarak $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ve daha sonra bu dizinin limit noktasının $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. $n \geq 0$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

olur. $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq k^n d(x_0, x_1) + \cdots + k^{m-1} d(x_0, x_1)$$

$$\leq k^n d(x_0, x_1)[1 + k + k^2 + \cdots]$$

$$= \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)\ ,\ (n \to \infty)$$

olur. Yani,

$$d(x_n, x_m) = \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

dir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa, $d(x_n, x_m) \to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X metrik uzayı tam olduğundan $x_n \to x$ ve dolayısıyla $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ de $n \to \infty$ için limit alınırsa $Tx = x$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y , T nin başka bir sabit noktası yani , $Ty = y$ olsun. Bu durumda

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu durum $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Bu da $x = y$ demektir.

Örnek 3.2.1.6 : $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $T: K \to K$, $Tx = \frac{x}{4}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{5}$ olarak seçelim. Buradan

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{25}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 = \frac{1}{125}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = \frac{1}{625}$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0$$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ dir. Sabit nokta tanımından da

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{5} = x \Rightarrow x = 5x \Rightarrow x = 0$$

dır. Yani $x = 0,$ T dönüşümünün sabit noktasıdır. Ancak dönüşümlerin sabit noktalarını tanımdan hareket ederek bulmak her zaman kolay değildir. Bu sebeple farklı dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının bulunmasında iterasyon metotları kullanılır.

Teorem 3.2.1.7 : (X,d) tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi ve Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0 , T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Tanım 3.2.1.8 (Kesin Daraltan Dönüşüm) : (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Teorem 3.2.1.9 : (X,d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0 \text{ dir (Khamsi ve Kirk 2001).}$$

Örnek 3.2.1.10 : $X = [1, +\infty), d(x, y) = |x - y|$ ve $Tx = x + \frac{1}{x}$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ için

$$d\big(T(x), T(y)\big) = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = \left(1 - \frac{1}{xy}\right)|x - y| < d(x, y)$$

olur. Dolayısıyla T dönüşümü kesin daraltandır. Ancak $T_x = x + \frac{1}{x} \neq x$, yani; T nin sabit noktası yoktur.

Bu tip dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

Tanım 3.2.1.11 (Genişlemeyen Dönüşüm) : (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T ye genişlemeyen(nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 3.2.1.12 : $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X,\ Tx = x - 2$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = |x - 2 - y + 2| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşüm ne daraltan ne de kesin daraltandır.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerinde bazı sınırlandırmalar yapılması gerekir. 1965 yılında Browder, Goebel ve Kirk düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

Sonuç 3.2.1.13 (Dönüşümler Arasındaki Bağlantı) : Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıda ki gerektirmeler yazılabilir.

$T -$ daraltan $\Rightarrow T -$ kesin daraltan $\Rightarrow T -$ genişlemeyen $\Rightarrow T -$ lipschitzian

Tanım 3.2.1.14 (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm) : X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$\|Tx - p\| = \|x - p\|$$

ise, T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Pertyshyn ve Williamson 1973).

$F(T) \neq \emptyset$ olması durumunda genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 3.2.1.15 (Kesin Konveks Uzay) : X bir Banach uzayı olsun. Eğer

$$x, y \in S_x = \{x \in X: \|x\| = 1\},$$

$x \neq y$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$$

şartı sağlanıyorsa, X Banach uzayına kesin konveks uzay denir.

Önerme 3.2.1.16: X bir Banach uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) X kesin konvekstir.
b) $1 < p < \infty$ olmak üzere her $x, y \in X$ ve her $t \in (0,1)$ için

$$\|tx + (1-t)y\|^p < t\|x\|^p + (1-p)\|y\|^p$$

dir (Agarwal vd. 2009).

Tanım 3.2.1.17 (Düzgün Konveks Uzay) : X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy ve Khamsi 1990).

Teorem 3.2.1.18 : Her düzgün konveks Banach uzayı, kesin konveks uzaydır (Agarval vd. 2009).

Teorem 3.2.1.18 in tersi genelde doğru değildir.

3.2.2. Küme Değerli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Kavramı

Tanım 3.2.2.1 (Küme Değerli Dönüşüm): X ve Y boştan farklı iki küme, 2^Y de Y'nin bütün boştan farklı alt kümelerinin ailesi olsun. $T: X \to 2^Y$ fonksiyonuna küme (çok) değerli dönüşüm denir. Bazen bu fonksiyon $T: X \multimap Y$ veya $T: X \rightsquigarrow Y$ biçiminde de gösterilir.

$T: X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü, X kümesinden alınan her bir x elemanına Y nin bir $T(x)$ alt kümesini karşılık getirir. Eğer her bir $x \in X$ e karşılık gelen $T(x)$ tek noktadan oluşuyorsa, T tek değerli dönüşüm olur.

Verilen bir $f: X \to Y$ tek değerli dönüşümü yardımıyla her $x \in X$ için $T(x) = \{f(x)\}$ şeklinde küme değerli bir dönüşüm tanımlanabilir. $T(x) \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa T ye has (proper) denir. Bu durumda T nin tanım kümesi

$$Dom(T) = \{x \in X: T(x) \neq \emptyset\}$$

ile ve grafiği de

$$Graph(T) = \{(x, y) \in X \times Y: y \in T(x)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.2.2.2: $T: [0,1] \to 2^{[0,1]}$, $T(x) = \begin{cases} \{1\} \; ; & x < \frac{1}{2} \\ \{0,1\} \; ; & x = \frac{1}{2} \\ \{0\} \; ; & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ fonksiyonunu küme değerli bir dönüşümdür.

Örnek 3.2.2.3: $T: [0, \infty) \to 2^{[0,\infty)}$, $T(x) = [0, x]$ fonksiyonu küme değerli bir dönüşümdür.

Tanım 3.2.2.4 (Küme Değerli Dönüşümlerin Sabit Noktası) : $T: X \to 2^X$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer $x \in X$ için $x \in T(x)$ oluyor ise x e T küme değerli dönüşümün sabit noktası denir (Nadler 1969).

Örnek 3.2.2.5 : $T: [0,1] \to 2^{[0,1]}$, $T(x) = \begin{cases} \{1\} \ ; & x < \frac{1}{2} \\ \{0,1\} \ ; & x = \frac{1}{2} \\ \{0\} \ ; & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ fonksiyonunun hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek 3.2.2.6 : $T: [0,\infty) \to 2^{[0,\infty)}$, $T(x) = [0,x]$ fonksiyonu için her bir $x \in [0,\infty)$ bir sabit noktadır.

Önek 3.2.2.7 : $K = [0,\infty)$ olmak üzere $T: K \to CB(K)$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \leq 1 \\ \left[x - \dfrac{3}{4}, x - \dfrac{1}{3}\right], & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x = 0$ bu dönüşümün tek sabit noktasıdır.

Küme değerli dönüşümlere önemli bir örnek olarak;

$S: Y \to X$ ‘e olmak üzere $T: X \to 2^Y$, her $x \in X$ için $T(x) = \{y \in Y : S(y) = x\}$ biçiminde tanımlanan ve T operatör çözüm fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyon verilebilir.

Küme değerli fonksiyonlar da sabit nokta teoremini ilk olarak 1969’ da Nadler vermiştir. Nadler’in vermiş olduğu teorem aynı zamanda Banach’ın vermiş olduğu teoremin küme değerli fonksiyonlara bir genişlemesidir.

Tanım 3.2.2.8 (Genişlemeyen Küme Değerli Dönüşüm) : (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

koşulunu sağlayan bir $k > 0$ sabiti varsa T’ye Lipchitz dönüşümü ve buradaki k sayısına da T’nin Lipchitz sabiti denir. Eğer $k < 1$ ise T Lipschitz küme değerli dönüşümüne daraltan, $k = 1$ ise T'ye genişlemeyen küme değerli dönüşüm denir (R. P, Agarwal, D. O'Regan, DR.Sahu.,2009).

NOT: Her T Lipschitz küme değerli dönüşümü süreklidir. Gerçekten;

$x_n \to x$ olan X'deki herhangi bir$\{x_n\}$ dizisi için

$$H(Tx_n, Tx) \leq kd(x_n, x)$$

dir. Buradan da istenen elde edilir.

Teorem 3.2.2.9 (Nadler Sabit Nokta Teoremi) : (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir daraltan küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T'nin X'de bir sabit noktası vardır (Sam B. Nadler, Jr., 1969).

İspat : Herhangi bir $x_0 \in X$ alınsın ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. O zaman k, T'nin Lipschitz sabiti olmak üzere

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + k$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Yine benzer biçimde

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + k^2$$

olacak biçimde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır.

Benzer biçimde devam edildiğinde her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$$

ve $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak biçimde bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi oluşturur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olduğundan ve T'nin daraltanlığı kullanıldığında

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) + k^n \\ &\leq k[H(x_{n-2}, x_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \\ &\leq k[kd(x_{n-2}, x_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \end{aligned}$$

$$\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n$$

$$\dots$$

$$\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n$$

elde edilir. $k < 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$$

olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin (X, d)'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) tam metrik uzay olduğundan $x_n \to v$ olacak biçimde bir $v \in X$ vardır. T dönüşümü daraltan olduğundan süreklidir ve bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tv) = 0$$

dir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve $d(x_{n+1}, Tv) \leq H(Tx_n, Tv)$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tv) = 0$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(v, Tv) \leq d(v, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tv)$$

olup

$$d(v, Tv) \leq \lim_{n\to\infty} d(v, x_{n+1}) + \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tv) = 0$$

bulunur. Tv kapalı bir küme olduğundan $v \in Tv$ olur. Böylece v, T'nin bir sabit noktasıdır.

Örnek 3.2.2.10 : $X = [0,1]$ ve $f: X \to X,\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{-x}{2} + 1;\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin. $T: X \to 2^X$ her $x \in X$ için $Tx = \{f(x)\} \cup \{0\}$ biçiminde tanımlansın. T daraltan dönüşüm olup $x = 0$ ve $x = \frac{2}{3}$ noktaları T nin bir sabit noktasıdır.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

4.1. Tek Değerli Dönüşümler İçin İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon yöntemleri kullanılır. Bunlardan bazıları şunlardır.

Picard İterasyonu : (X, d) bir metrik uzay, $K \subset X$ kapalı bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0\,, \qquad n = 1,2, \dots \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Picard 1890). Picard iterasyonu kimi zaman ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive ve approximations) olarakta adlandırılır.

Tam metrik uzayda daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için Picard iterasyonu kullanılır. Daraltan dönüşüm dışında farklı bir dönüşüm alınırsa Picard iterasyonu, dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Mann İterasyonu : Bu denklem 1953 yılında Mann tarafından kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. X bir normlu uzay, $K \subset X$ boştan farklı konveks bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n\,, \qquad n = 0,1,2, \dots \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

Franks ve Marzec 1971 yılında Mann'ın elde ettiği sonuçları; 1974 yılında da Rhoades, Franks ve Marzec'in sonuçlarını genişletmiştir. Rhoades 1974 yılında Mann iterasyonunun herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Ishikawa İterasyonu : S. Ishikawa tarafından 1974 yılında kurulmuş olup, Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği halinde yeni bir iterasyon metodu olarak ortaya atılmıştır. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır. (Berinde 2006). X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n\,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n\,, \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\dots \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Ishikawa 1974).

(4.3) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

2003-2004 yıllarında Rhoades ve Şoltuz dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının, Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

Noor İterasyonu : 2000 yılında Noor tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \alpha_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n,\ n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Noor 2000).

Krasnoselskij İterasyonu : $(N, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $T: N \to N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955)

Kirk İterasyonu : X bir normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $i = 0,1,2,\ldots,k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i > 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir.

(4.5) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

S-İterasyonu : X bir lineer uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \ n \geq 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanır. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in (0,1)$ dir. (Agarwal vd. 2007)

S-iterasyon yöntemi Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden bağımsızdır. Yani S-iterasyonu ile Mann veya Ishikawa iterasyonu birbirinden elde edilemez. Agarwal-O'Regan-Sahu, daraltan dönüşümler için S-iterasyon yönteminin yakınsama hızının

Picard iterasyon yönteminin yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir (Agarwal vd. 2007).

Yenilenmiş S-İterasyonu : X bir lineer uzay, $K \subset X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere modifiye edilmiş S-iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)T^n x_n + \alpha_n T^n y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n, \ n \geq 1, \end{cases} \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in (0,1)$ dir. (Agarwal vd. 2007)

Agarwal vd. (2007), çeşitli dönüşümler için hem S-iterasyon hem de modifiye edilmiş S-iterasyon yönteminin dönüşümün sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsamasını incelemişlerdir.

4.2. Küme Değerli Dönüşümler İçin İterasyon Yöntemleri

W. R. Mann'ın sonuçları, 1971 yılında Franks ve Marzec tarafından Franks ve Marzec'in sonuçları da 1974 yılında B. E. Rhoades tarafından genişletilmiştir. 1974 yılında B. E. Rhoades, kapalı ve sınırlı bir aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm(self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bu sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Sastry ve Babu (2005)'de, Mann iterasyonunu küme değerli dönüşümler için aşağıdaki gibi tanımlamış ve aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

(I) $T: X \to P(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $p \in F(T)$ olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Mann iterasyon şeması

$$x_{n+1} = \alpha_n y_n + (1-\alpha_n)x_n \ , \quad \alpha_n \in [0,1] \ , n \geq 0 \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\|y_n - p\| = d(p, Tx_n)$ olacak şekilde $y_n \in Tx_n$ dir.

Teorem 4.2.1 : K, H Hilbert uzayının kompakt konveks alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ genişlemeyen dönüşüm ve p, T nin sabit noktası olsun. (α_n), $0 \leq \alpha_n < 1$ ve $\sum \alpha_n = \infty$ şartını sağlasın. Bu durumda (4.8) de tanımlanan Mann iterasyon dizisi, T nin bir p sabit noktasına yakınsar (Sastry ve Babu 2005).

Sastry ve Babu (2005)'de, Ishikawa iterasyonunu küme değerli dönüşümler için aşağıdaki gibi tanımlamış ve aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

(II) $T: X \to P(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $p \in F(T)$ olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Ishikawa iterasyon şeması

$$\begin{cases} y_n = \beta_n z_n + (1-\beta_n)x_n\,, & \beta_n \in [0,1], \\ x_{n+1} = \alpha_n z'_n + (1-\alpha_n)x_n\,, & \alpha_n \in [0,1], \end{cases} \quad n \geq 0 \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|z_n - p\| = d(p, Tx_n)$ olacak şekilde $z_n \in Tx_n$ ve

$\|z'_n - p\| = d(p, Ty_n)$ olacak şekilde $z'_n \in Ty_n$ vardır.

Teorem 4.2.2 : K, H Hilbert uzayının kompakt konveks alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ genişlemeyen dönüşüm ve $p \in F(T)$ olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $0 \leq \alpha_n, \beta_n < 1$, $\beta_n \to 0$ ve $\sum \alpha_n \beta_n = \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda (4.9) da tanımlanan Ishikawa iterasyon dizisi T nin bir p sabit noktasına yakınsar (Sastry ve Babu 2005).

Song ve Wang (2008)'de, (II) Ishikawa iterasyonunu

$$\begin{cases} x_0 = x \in K \\ y_n = (1-b_n)x_n + b_n z_n \\ x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n u_n \end{cases} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $\|z_n - u_n\| \leq H(Tx_n, Ty_n) + \eta_n$ ve $\|z_n - u_n\| \leq H(Tx_n, Ty_n) + \eta_n$ olacak şekilde $z_n \in Tx_n$ ve $u_n \in Ty_n$ dir. $0 \leq a_n,\ b_n < 1$ olmak üzere (a_n), (b_n) reel dizileri, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ve $\sum a_n b_n = \infty$ şartını sağlar.

Teorem 4.2.3: K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \to CB(K)$ genişlemeyen dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her $p \in F(T)$ için $T(p) = \{p\}$ olsun. (α_n) ve (β_n), $0 \leq \alpha_n, \beta_n < 1$, $\beta_n \to 0$ ve $\sum \alpha_n \beta_n = \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda (4.10) da tanımlanan Ishikawa iterasyon dizisi T nin bir sabit noktasına yakınsar (Song ve Wang 2008).

Shahzad ve Zegeye (2009)'da, Sastry ve Babu (2005), Song ve Wang (2008), Panyanak (2007)'ın sonuçlarını genişleterek Ishikawa iterasyon şemasını çok değerli quasi genişlemeyen dönüşümler için aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir.

(III) $T: K \to CB(K)$ küme değerli bir dönüşüm, $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ olsun. (x_n) Ishikawa iterasyon şeması

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \qquad \forall n \geq 0 \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n \end{cases} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $z_n \in Tx_n$ ve $z'_n \in Ty_n$ dir.

Tanım 4.2.4 : K, B Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \to CB(K)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $t \in (0, \infty)$ için $f(0) = 0$ ve

$f(t) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ foksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$d(x, T_x) \geq f(d(x, F(T))$$

ise T ye (I) şartını sağlıyor denir (Senter ve Dotson 1974).

Tanım 4.2.5 : K, B Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T_1, T_2: K \to CB(K)$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $t \in (0, \infty)$ için $f(0) = 0$ ve $f(t) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ foksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{2}(\|x - T_1x\| + \|x - T_2x\|) \geq f(d(x, F(T))$$

ise T_1 ve T_2 dönüşümleri (II) şartını sağlıyor denir (Khan ve Fukhar-ud-in 2005).

Teorem 4.2.6 : K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $T: K \to CB(K)$ quasi genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her $p \in F(T)$ için $T(p) = \{p\}$ olsun. $\alpha_n, \beta_n \in [a, b] \subset (0,1)$ ve T nin (I) şartını sağladığını farz edelim. Bu durumda (4.11) de tanımlanan Ishikawa iterasyon dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Shahzad ve Zegeye 2009).

Ayrıca her $y \in F(T)$ için $T(y) = \{y\}$ şartını kaldırarak iterasyon şemasını (IV) deki gibi ifade etmişlerdir.

(IV) $T: K \to P(K)$ küme değerli bir dönüşüm ve $P_T(x) = \{y \in K : \|x - y\| = d(x, Tx)\}$ olsun. (x_n) Ishikawa iterasyon şeması

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \qquad \forall n \geq 0 \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n \end{cases} \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlansın. Burada , $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$, $z_n \in P_T(x_n)$ ve $z'_n \in P_T(y_n)$ dir.

Teorem 4.2.7 : K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \to P(K)$ küme değerli bir dönüşüm ve P_T genişlemeyen olsun. $\alpha_n, \beta_n \in [a, b] \subset (0,1)$ ve T nin (I) şartını sağladığını farz edelim. Bu durumda (4.12) de tanımlanan (x_n) Ishikawa iterasyon dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Shahzad ve Zegeye 2009).

Yukarıda verilen iterasyon yöntemlerinin hata terimli versiyonları üzerine de birçok çalışma yapılmıştır.

Cholamijak ve Suantai (2008)'de, düzgün konveks Banach uzaylarında tanımlı küme değerli quasi genişlemeyen iki dönüşüm için hata terimli iki yeni iterasyon yöntemini tanımlamış ve önerdikleri bu iterasyon şeması ile güçlü yakınsaklık teoremleri elde etmişlerdir. Ayrıca Banach uzaylarında tanımlı küme değerli iki quasi genişlemeyen dönüşümün ortak sabit noktasını bulmak için başka bir hata terimli iki adım iterasyon şeması tanıtmışlardır. Söz konusu iterasyon şemaları ve bu şemaların yakınsaklığı ile ilgili teoremler sırasıyla aşağıdaki gibidir;

(V) K, E Banach uzayının boş olmayan konveks alt kümesi, $\alpha_n, \beta_n, \alpha'_n, \beta'_n \in [0,1]$ ve $(u_n), (v_n)$ dizileri K da sınırlı olmak üzere $T_1, T_2 : K \to CB(K)$ çok değerli quasi genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere (x_n) dizisi

$$\begin{cases} y_n = \alpha'_n z'_n + \beta'_n x_n + (1 - \alpha'_n - \beta'_n)u_n \\ x_{n+1} = \alpha_n z_n + \beta_n x_n + (1 - \alpha_n - \beta_n)v_n \end{cases} \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $z'_n \in T_1 x_n$ ve $z_n \in T_2 y_n$ dir.

Teorem 4.2.8 : E düzgün konveks Banach uzay, K da E nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T_1, T_2 : K \to CB(K)$ quasi genişlemeyen iki dönüşüm ve

$F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ olmak üzere her $p \in F(T_1) \cap F(T_2)$ için $T_1 p = \{p\} = T_2 p$ olsun. Eğer

(i) T_1 ve T_2 (II) şartını sağlar

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n-\beta_n) < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha'_n-\beta'_n) < \infty$

(iii) $0 < l \leq \alpha_n, \alpha'_n \leq k < 1$

şartını sağlıyorsa (4.13) de tanımlanan (x_n) dizisi $F(T_1) \cap F(T_2)$ nin bir elemanına güçlü yakınsar (Cholamijak ve Suantai 2008).

(VI) $T_1, T_2 : K \to P(K)$ küme değerli iki dönüşüm ve $P_{T_i}x = \{y \in T_i x : \|x-y\| = d(x, T_i x)\}$, $i = 1,2$ olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere, x_n dizisi

$$\begin{cases} y_n = \alpha'_n z'_n + \beta'_n x'_n + (1-\alpha'_n-\beta'_n)u_n \\ x_{n+1} = \alpha_n z_n + \beta_n x_n + (1-\alpha_n-\beta_n)v_n \end{cases} \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $z'_n \in P_{T_1}x_n$ ve $z_n \in P_{T_2}y_n$ dir.

Teorem 4.2.9 : E düzgün konveks Banach uzay, K da E nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ olmak üzere $T_1, T_2 : K \to P(K)$ küme değerli iki dönüşüm ve P_{T_1}, P_{T_2} genişlemeyen olsun.

i) T_1 ve T_2 (II) şartını sağlar

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n-\beta_n) < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha'_n-\beta'_n) < \infty$

iii) $0 < l \leq \alpha_n, \alpha'_n \leq k < 1$

şartlarının sağlandığını farz edelim. Bu durumda (4.14) de tanımlanan (x_n) dizisi $F(T_1) \cap F(T_2)$ nin bir elemanına güçlü yakınsar (Cholamijak ve Suantai 2008).

Khan (2013) yeni bir iterasyon tanımlamış ve bu iterasyona Picard-Mann Hibrit iterasyonu diye adlandırmıştır. Ayrıca Khan, Picard-Mann Hibrit iterasyonunun daraltan dönüşümler için Picard, Mann, İshikawa iterasyonlarından hızlı yakınsadığını göstermiştir. Khan'ın (2013) iterasyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n' \end{cases} \tag{4.15}$$

Burada $\{\alpha_n\}$, (0,1) de bir dizi ve $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesidir.

Yakın dönemde Karaca ve Yıldırım (2015) hem S- iterasyonundan hem de Picard-Mann Hibrit iterasyonundan daha hızlı yakınsayan yeni iterasyon tanımlamayı istemişlerdir. Sonuç olarak aşağıdaki iterasyonu tanımlamışlardır ve Banach uzayında genişlemeyen dönüşümler için bu iterasyonları kullanarak bazı güçlü ve zayıf yakınsama teoremleri ispatlamışlardır. Karaca ve Yıldırım'ın iterasyonu $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ (0,1) aralığında diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n, \\ y_n = (1-\alpha_n)Tz_n + \alpha_n z_n, \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, \end{cases} \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır.

Biz bu tezde Shahzad ve Zegeye'nin fikrini kullanarak önce Karaca ve Yıldırım'ın iterasyonunun küme değerli versiyonunu verdik daha sonra Banach uzaylarında küme değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına bu iterasyonun güçlü ve zayıf yakınsadığını gösterdik. $x_1 \in K$ için iterasyonumuz aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} x_{n+1} = w_n, \\ y_n = (1-\alpha_n)z_n + \alpha_n v_n, \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n u_n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.17}$$

Burada $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(z_n)$ ve $w_n \in P_T(y_n)$, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, (0,1) aralığında dizilerdir.

4.3. Bazı Önemli Lemmalar

Aşağıdaki tanımlar ve lemmalar yakınsaklık teoremlerimiz için önem arz etmektedir.

Tanım 4.3.1: X Banach uzayında $x_n \to x$ zayıf yakınsaması $y \neq x$ olmak üzere her $y \in X$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa bu durumda x, Opial şartını sağlıyor denir. Hilbert uzayları ve bütün l^p uzayları $(1 < p < \infty)$ Opial şartını sağlayan Banach uzayları örnekleridir. Fakat $l^p[0,2\pi]$ $1 < p \neq 2$ Opial şartını sağlamaz.

Tanım 4.3.2: E bir Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $T: K \to P(K)$ küme değerli dönüşümü verilsin. K daki $\{x_n\}$ dizisi x noktasına zayıf ve $y_n \in Tx_n$ olmak üzere $\{y_n\}$ dizisi y'ye güçlü yakınsadığında $y \in Tx$ oluyorsa T dönüşümüne $y \in K$ da demiclosettir denir.

Lemma 4.3.3: $T: K \to P(K)$ küme değerli bir dönüşüm ve $P_T(x) = \{y \in Tx: \|x - y\| = d(x, Tx)\}$ ise aşağıdakiler denktir.

(1) $x \in F(T)$;

(2) $P_T(x) = \{x\}$;

(3) $x \in F(P_T)$

Ayrıca $F(T) = F(P_T)$

Lemma 4.3.4: X düzgün konveks bir reel Banach uzayı $t \in (0,1)$ olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X'de iki dizi olmak üzere uygun bir $r \geq 0$ için

$\lim_{n\to\infty} sup\|x_n\| \leq r$, $\lim_{n\to\infty} sup\|y_n\| \leq r$, $\lim_{n\to\infty} sup\|tx_n + (1-t)y_n\| = r$ şartını sağlasın. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$

dır.

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Yakınsaklık teoremimizde kullanacağımız iki önemli lemma ile başlayalım.

Lemma 5.1: E, normlu bir uzay ve K da E nin kapalı konveks alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ küme değerli, P_T genişlemeyen bir dönüşüm, $F(T) \neq \emptyset$ olsun. (4.17) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyonun $p \in F(T)$ için $lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Bu durumda Lemma 4.3.3 den $p \in P_T(p) = \{p\}$ dir. (4.17) kullanılarak

$$\begin{aligned}\|z_n - p\| &= \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n u_n - p\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|u_n - p\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n H(P_T(x_n), P_T(p)) \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|x_n - p\| \\ &= \|x_n - p\| \qquad (5.1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|y_n - p\| &= \|(1-\alpha_n)z_n + \alpha_n v_n - p\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \alpha_n\|v_n - p\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \alpha_n H(P_T(z_n), P_T(p)) \\ &\leq (1-\alpha_n)\|z_n - p\| + \alpha_n\|z_n - p\| \\ &= \|z_n - p\| \qquad (5.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|w_n - p\| \leq H(P_T(y_n), P_T(p)) \\ &\leq \|y_n - p\| \leq \|z_n - p\| \\ &\leq \|x_n - p\| \qquad (5.3)\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\{\|x_n - p\|\}$ dizisi azalan ve sınırlıdır. Dolayısıyla $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır.

Lemma 5.2 : K, E düzgün konveks Banach uzayının alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ küme değerli, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. (4.17) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyonu için $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, P_T(x_n)) = 0$ dır.

İspat: Lemma 5.1 den $p \in F(T)$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ vardır. $c \geq 0$ için

$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - p\| = c$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.17) ve Hausdorff metriği tanımında $\|u_n - p\| \leq H(P_T(x_n), P_T(p)) \leq \|x_n - p\|$ yazılır ve böylece

$$\limsup_{n\to\infty}\|u_n - p\| \leq c \tag{5.4}$$

bulunur.

$\|x_{n+1} - p\| \leq \|z_n - p\|$ olduğundan $\liminf\|x_{n+1} - p\| \leq \liminf\|z_n - p\|$ yazılır ve böylece

$$c \leq \liminf\|z_n - p\| \tag{5.5}$$

olur. Diğer yandan (5.1) in iki tarafının limsup'u alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty}\|z_n - p\| \leq c \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.5) ve (5.6) dan dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n - p\| = c \tag{5.7}$$

bulunur. (4.17) ve (5.7) den

$$c = \lim_{n\to\infty}\|z_n - p\| = \lim_{n\to\infty}\|(1-\beta_n)(x_n - p) + \beta_n(u_n - p)\| \tag{5.8}$$

elde edilir.

$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - p\| = c$ ve (5.4) göz önüne alınarak Lemma 4.3.4, (5.8)'e uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0 \tag{5.9}$$

olur. Buda bize $\lim_{n\to\infty} d(x_n, P_T(x_n)) = 0$ ifadesini verir.

Şimdi T sabit nokta fonksiyonuna zayıf yakınsak olan tanımlı $\{x_n\}$ dizisini gösteren ilk teoremimizi veriyoruz.

Teorem 5.3 : E, Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayı ve K , E nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ küme değerli dönüşümü için $F(T) \neq \emptyset$ ve P_T genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Eğer $I - P_T$ sıfırda demiclosed ise bu durumda (4.17) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $p \in F(T) = F(P_T)$ olsun. Lemma 5.1 den dolayı $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \|$ vardır. Şimdi T nin sabit nokta kümesinde $\{x_n\}$ dizisinin tek zayıf alt limite sahip olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için z_1 ve z_2 nin sırasıyla $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ alt dizilerinin zayıf limitleri olduğunu varsayalım. (5.9) ‘dan $\lim_{n\to\infty} \| x_n - u_n \| = 0$ olacak şekilde $u_n \in T_{x_n}$ vardır. $I - P_T$ sıfırda demiclosed olduğu için $z_1 \in F(P_T) = F(T)$ olsun. Benzer olarak $z_2 \in F(T)$olduğu görülebilir

Şimdi sabit noktanın tekliğini ispatlayalım. $z_1 \neq z_2$ olsun. Opial’in şartından

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_1\| &= \lim_{n_i\to\infty} ||x_{n_i} - z_1|| \\
&< \lim_{n_i\to\infty} ||x_{n_i} - z_2|| \\
&= \lim_{n\to\infty} ||x_n - z_2|| \\
&= \lim_{n_j\to\infty} ||x_{n_j} - z_2|| \\
&< \lim_{n_j\to\infty} ||x_{n_j} - z_1|| \\
&= \lim_{n\to\infty} ||x_n - z_1||
\end{aligned}$$

çelişkisini elde ederiz.

Böylece $\{x_n\}$ dizisi F(T) deki bir noktaya zayıf yakınsaktır. Amacımıza uygun olarak aşağıdaki tanımı verelim. Bu tanım Senter ve Dotson (1974) (I) şartının küme değerli versiyonudur.

Tanım 5.4: $T: K \to CB(K)$ ya küme değerli bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $\mathrm{r} > 0$ için $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için $d(x, Tx) \geq f(d(x, F(T))$ ise T ye (I) koşulunu sağlıyor denir.

(4.17) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin T nin bir sabit noktasına yakınsaklığını gösteren 2. teoremimiz aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.5: E düzgün konveks Banach uzayı ve K , E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ küme değerli dönüşümü (I) şartını sağlasın, ayrıca $F(T) \neq \emptyset$ ve P_T genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda (4.17) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: $p \in F(T)$ için Lemma 5.1 den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır. Bu limit $c \geq 0$ olsun. Eğer $c = 0$ ise ispat açıktır. Şimdi $c > 0$ durumunu düşünelim. Lemma 5.1 den $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizliğin her iki tarafının inf alınırsa

$$\inf_{p\in F(T)}\|x_{n+1} - p\| \leq \inf_{p\in F(T)}\|x_n - p\|$$

elde edilir. Buradan $d(x_{n+1}, F(T)) \leq d(x_n, F(T))$ yazılır. Dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_n, \mathrm{F(T)})$ vardır. (I) şartı ve Lemma 5.2 kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F(T))) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

yazılır. Buda

$$\lim_{n\to\infty} f(d(x_n, F(T))) = 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla f azalmayan fonksiyon ve $f(0) = 0$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$$

olur.

Şimdi $\{x_n\}$ nin K'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olduğunu varsayalım. O zaman $p \in F(T)$ için $\|x_m - p\| \leq \|x_n - p\|$ dir. Böylece

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - p\| + \|p - x_n\| \leq 2\|x_n - p\|$$

elde edilir. $F(T)$ kümesi üzerinde infimum alınarak $\|x_m - x_n\| \leq 2d\big(x_n, F(T)\big) \to 0$ $(n \to \infty)$ bulunur. Bu ise K daki $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ yakınsaktır. Yakınsadığı noktaya q diyelim. Geriye $q \in F(T)$ olduğunu göstermek kalır. Gerçekten $d\big(x_n, F(P_T)\big) = \inf_{y \in F(P_T)} \|x_n - y\|$ dir. Bu yüzden her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\|x_n - p_n^{(\varepsilon)}\right\| < d\big(x_n, F(P_T)\big) + \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $p_n^{(\varepsilon)} \in F(P_T)$ vardır. Buradan $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - p_n^{(\varepsilon)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ yazılır. Üçgen eşitsizliğinden $\left\|p_n^{(\varepsilon)} - q\right\| \leq \left\|x_n - p_n^{(\varepsilon)}\right\| + \|x_n - q\|$ ve böylece

$$\left\|p_n^{(\varepsilon)} - q\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Sonuç olarak ;

$$\|P_T(q) - q\| \leq \left\|q - p_n^{(\varepsilon)}\right\| + \left\|p_n^{(\varepsilon)} - P_T(q)\right\|$$

$$\leq \left\|q - p_n^{(\varepsilon)}\right\| + H\left(P_T\big(p_n^{(\varepsilon)}\big), P_T(q)\right)$$

$$\leq 2\left\|p_n^{(\varepsilon)} - q\right\|$$

ifadesi $\|P_T(q) - q\| < \varepsilon$ olmasını gerektirir. ε keyfi olduğundan

$\lim_{n\to\infty}\|P_T(q) - q\| = 0$ dır. Fakat P_T genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan $F(P_T)$ kapalıdır. Dolayısıyla $q \in F(P_T) = F(T)$

Teorem 5.5'in uygulanabilir olduğunu gösteren örnek verelim.

Örnek 5.6 : Alışılmış normla $E = (\mathbb{R}, \|\ \ \|)$ ve $K = [2, \infty)$ olsun. $T: K \to P(K)$ dönüşümü $Tx = \left[2, 2 + \frac{x}{2}\right]$ olarak tanımlansın. E nin düzgün konveks bir Banach uzayı,

K nın kapalı konveks ve $F(T) = [2,4]$ olduğunu görmek kolaydır. Her $n \geq 1$ için $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{2}$ olsun. Yukarıdaki teoremimizin şartlarını sağlayan $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonunu $f(r) = \frac{r}{3}$ olarak tanımlayalım. Şimdi $d(x, Tx) \geq f(d(x, F_T))$ olduğunu görelim. Eğer $x \in [2,4]$ ise

$d(x, Tx) = f(d(x, F_T)) = 0$ dır. Eğer $x \in [4, \infty)$ ise bu durumda;

$$d(x, Tx) = d\left(x, \left[2,2 + \frac{x}{2}\right]\right) = \left|x - (2 + \frac{x}{2})\right| = \frac{x - 4}{2}$$

ve

$$f(d(x, F_T)) = f(d(x, [2,4])) = f(|x - 4|) = \frac{x - 4}{3}$$

olur. Böylece her $x \in K$ için $d(x, Tx) \geq f(d(x, F_T))$ dir. Dikkat edilirse $x \in [2,4]$ için $P_T(x) = \{x\}$ dir. Eğer $x \in [4, \infty)$ ise bu durumda;

$$P_T(x) = \left\{y \in Tx: |y - x| = d\left(x, \left[2 + \frac{x}{2}\right]\right)\right\}$$

$$= \left\{y \in Tx: |y - x| = \left|x - \left(2 + \frac{x}{2}\right)\right| = \left|\frac{x}{2} - 2\right|\right\}$$

$$= \left\{y \in Tx: |y - x| = \frac{x}{2} - 2\right\}$$

$$= \left\{y \in Tx: y = \frac{x}{2} + 2\right\}$$

olur. Şimdi her $x \in K$ için P_T nin genişlemeyen olduğunu gösterelim. $x \in [2,4]$ durumu açıktır. Bu yüzden $x \in [4, \infty)$ alalım. Bu durumda;

$$H(P_T(x_n), P_T(y)) = H\left(\left\{\frac{x}{2} + 2\right\}, \left\{\frac{y}{2} + 2\right\}\right) = \left|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right|$$

olur. O halde Teorem 5.5 uygulanabilirdir.

Örnek 5.7 : $(\mathbb{R}, \|\quad\|)$ alışılmış normlu uzay ve $K = [0, 1]$ olmak üzere $T: K \to P(K)$,

$Tx = \left[0, \frac{2x+1}{4}\right]$ dönüşünü tanımlayalım. Bu durumda $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ise

$P_T(x) = \{x\}$ dir. $x \notin \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ise

$$P_T(x) = \left\{ y \in Tx : \ |y - x| = d\left(x, \left[0, \frac{2x+1}{4}\right]\right) \right\}$$

$$= \left\{ y \in Tx : \ |y - x| = \left| x - \frac{2x+1}{4} \right| \right\}$$

$$= \left\{ y \in Tx : \ |y - x| = \left| \frac{2x-1}{4} \right| \right\}$$

$$= \left\{ y \in Tx : \ x - y = \tfrac{2x-1}{4} \right\}$$

$$= \left\{ y \in Tx : \ y = \frac{2x+1}{4} \right\}$$

olur. Şimdi $P_T(x)$ in genişlemeyen olduğunu gösterelim. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ kümesinde bu durum açıktır. Bu yüzden $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alalım.

$$H\big(P_T(x), P_T(y^*)\big) = H\left(\frac{2x+1}{4}, \frac{2y^*+1}{4}\right)$$

$$= \left| \frac{2x+1}{4} - \frac{2y^x+1}{4} \right|$$

$$= \left| \frac{2(x - y^*)}{4} \right|$$

$$= \left| \frac{x - y^*}{2} \right|$$

$$\leq |x - y^*|$$

olur. O halde $P_T(x)$ genişlemeyendir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisini oluşturup, T nin bir sabit noktaya yakınsadığını gösterelim.

$x_1 = 1 \in K = [0, 1]$ alalım. Bu durumda $P_T(x_1) = \frac{2x_1+1}{4} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right\}$ ve $u_1 \in P_T(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ olur. Buradan

$$z_1 = (1-\beta_1)x_1 + \beta_1 u_1$$

$$z_1 = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)$$

$$P_T(z_1) = \left\{\frac{2z_1+1}{4}\right\} = \left\{\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)+1}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\right\}$$

$$v_1 \in P_T(z_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\right)$$

olur. Buradan

$$y_1 = (1-\alpha_1)z_1 + \alpha_1 v_1$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{32}\right)$$

$$P_T(y_1) = \left\{\frac{2y_1+1}{4}\right\} = \left\{\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{32}\right)+1}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{7}{64}\right\}$$

$$w_1 \in P_T(y_1) = \left\{\frac{1}{2} + \frac{7}{64}\right\}$$

olur.

$$x_2 = w_1$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{64}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$P_T(x_2) = \left\{\frac{2x_2+1}{4}\right\} = \left\{\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{64}\right)+1}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{7}{128}\right\}$$

$$u_2 \in P_T(x_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{128}\right)$$

$$z_2 = (1-\beta_2)x_2 + \beta_2 u_2$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{64}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{128}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{21}{256}\right)$$

$$P_T(z_2) = \left\{\frac{2z_2+1}{4}\right\} = \left\{\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{21}{256}\right)+1}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{21}{512}\right\}$$

$v_2 \in P_T(z_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{21}{512}\right)$

$$y_2 = (1-\alpha_2)z_2 + \alpha_2 v_2$$

$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{21}{256}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{21}{512}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{63}{1024}\right)$

$P_T(y_2) = \left\{\frac{2y_2+1}{4}\right\} = \left\{\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{63}{1024}\right)+1}{4}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{63}{1024}\right\}$

$w_2 \in P_T(y_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{63}{1024}\right)$

$$x_3 = w_2$$

ise $x_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{63}{1024}\right) < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$

$x_4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right), x_5 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right), \cdots, x_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$

Örnek 5.8 : $(\mathbb{R}, \|.\|)$ Banach uzayı ve $K = [1, \infty)$ kümesi verilsin. Açıkça K, $\mathbb{R}$ nin konveks boş olmayan kapalı alt kümesidir.

$T: K \to P(K),\ Tx = \left[1, 1 + \frac{x}{2}\right]$ dönüşümünü tanımlayalım.

Burada $F_T = [1,2]$ $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ olsun. $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(r) = \frac{r}{4}$ sürekli azalmayan fonksiyonunu tanımlayalım.

$\forall x \in K$ için $d(x, Tx) \geq f(d(x, F_T))$ olduğunu görüyoruz.

$x \in F_T = [1,2]$, $d(x, Tx) = 0 = f(d(x, F_T))$ olur. $x \in (2, \infty)$ olduğunda

$d(x, T_x) = d\left(x, \left[1, 1 + \frac{x}{2}\right]\right) = \left|x - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right| = \left|x - 1 - \frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x-2}{2}\right|$

$f\big(d(x, F_T)\big) = f\big(d(x, [1,2])\big) = f(|x-2|) = \frac{x-2}{4}$

elde edilir.

$\forall x \in K$ için $d(x, Tx) \geq f(d(x, F_T))$ dir.

$x \in [1,2]$ olduğunda $P_T(x) = \{x\}$ olduğunu belirleyelim. Eğer $x \in (2,\infty)$ ise o zaman

$$P_T(x) = \left\{y \in Tx:\ |y-x| = d\left(x, \left[1+\frac{x}{2}\right]\right)\right\}$$

$$= \left\{y \in Tx:\ |y-x| = \left|x - \left(1+\tfrac{x}{2}\right)\right| = \left|\tfrac{x}{2} - 1\right|\right\}$$

$$= \left\{y \in Tx:\ |y-x| = \tfrac{x}{2} - 1\right\}$$

$$= \left\{y \in Tx:\ y = \tfrac{x}{2} + 1\right\}$$

dır. $\forall x \in K$ için P_T genişlemeyendir. Böylece $x > 2$ alınırsa

$$H\big(P_T(x), P_T(p)\big) = H\left(\left\{1+\frac{x}{2}\right\}, \{p\}\right) = \left|1+\frac{x}{2} - p\right| \le |x-p|$$

olur. Son olarak da $\{x_n\}$ dizisinin T nin sabit noktasına güçlü yakınsadığını gösterelim.

$x_1 = 3 \in K = [1,\infty)$

$P_T(x_1) = \left\{\frac{x_1}{2} + 1\right\} = \left\{\frac{3}{2} + 1\right\} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

ve $u_1 \in P_T(x_1) = \left\{\frac{1}{2} + 2\right\}$

$$z_1 = (1-\beta_1)x_1 + \beta_1 u_1$$

$z_1 = \dfrac{1}{2}.3 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + 2\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{11}{4} = 2 + \dfrac{3}{4}$

$P_T(z_1) = \left\{\frac{z_1}{2} + 1\right\} = \left\{\frac{\frac{11}{4}}{2} + 1\right\} = \left\{\frac{11}{8} + 1\right\} = \left\{\frac{19}{8}\right\} = \left\{2 + \frac{3}{8}\right\}$

$v_1 \in P_T(z_1) = \left\{2 + \frac{3}{8}\right\}$

olur. Buradan

$$y_1 = (1-\alpha_1)z_1 + \alpha_1 v_1$$

$y_1 = \dfrac{1}{2}.\left(2 + \dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{3}{8}\right) = 1 + \dfrac{3}{8} + 1 + \dfrac{3}{16} = 2 + \dfrac{9}{16}$

$$P_T(y_1) = \left\{1 + \frac{y_1}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{\frac{41}{16}}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{41}{32}\right\} = \left\{\frac{73}{32}\right\} = \left\{2 + \frac{9}{32}\right\}$$

$$w_1 \in P_T(y_1) = \left\{2 + \frac{9}{32}\right\}$$

olur.

$$x_2 = w_1$$

$x_2 = \left\{2 + \frac{9}{32}\right\} < \left\{\frac{1}{2} + 2\right\}$ ve

$$P_T(x_2) = \left\{1 + \frac{x_2}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{\frac{73}{32}}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{73}{64}\right\} = \left\{\frac{137}{64}\right\} = \left\{2 + \frac{9}{64}\right\}$$

$$u_2 \in P_T(x_2) = \left\{2 + \frac{9}{64}\right\}$$

$$z_2 = (1 - \beta_2)x_2 + \beta_2 u_2$$

$$z_2 = \frac{1}{2}.\left(2 + \frac{9}{32}\right) + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{9}{64}\right) = 1 + \frac{9}{64} + 1 + \frac{9}{128} = 2 + \frac{27}{128}$$

$$P_T(z_2) = \left\{1 + \frac{z_2}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{\frac{283}{128}}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{283}{256}\right\} = \left\{\frac{539}{256}\right\} = \left\{2 + \frac{27}{256}\right\}$$

$$v_2 \in P_T(z_2) = \left\{2 + \frac{27}{256}\right\}$$

$$y_2 = (1 - \alpha_2)z_2 + \alpha_2 v_2$$

$$y_2 = \frac{1}{2}.\left(2 + \frac{27}{128}\right) + \frac{1}{2}\left(2 + \frac{27}{256}\right) = 1 + \frac{27}{256} + 1 + \frac{27}{512} = 2 + \frac{81}{512}$$

$$P_T(y_2) = \left\{1 + \frac{y_2}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{\frac{1105}{512}}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{1105}{1024}\right\} = \left\{\frac{2129}{1024}\right\} = \left\{2 + \frac{81}{1024}\right\}$$

$$w_2 \in P_T(y_2) = \left\{2 + \frac{81}{1024}\right\}$$

$$x_3 = w_2$$

ise

$x_3 = \left\{2 + \frac{81}{1024}\right\} < 2 + \frac{1}{3}$

Bu şekilde devam edilerek $x_n < 2 + \frac{1}{n}$ ' i elde edilir. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin $F_T = [1,2]$ noktasına güçlü yakınsadığını gösterir.

6. SONUÇLAR

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

Karaca ve Yıldırım (2015) de tek değerli genişlemeyen dönüşümler için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ $(0,1)$ aralığında diziler olmak üzere (4.16) ile ifade edilen

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n, \\ y_n = (1-\alpha_n)Tz_n + \alpha_n z_n, \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, \end{cases}$$

şeklindeki iterasyonu verdiler.

Biz bu iterasyonu, küme değerli genişlemeyen dönüşümler için $u_n \in P_T(x_n)$, $v_n \in P_T(z_n)$ ve $w_n \in P_T(y_n)$, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $(0,1)$ aralığında diziler ve $x_1 \in K$ olmak üzere (4.17) ile ifade edildiği gibi

$$\begin{cases} x_{n+1} = w_n, \\ y_n = (1-\alpha_n)z_n + \alpha_n v_n, \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n u_n, \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde yeniden yazdık.

Teorem 5.3 ile verilen “ E, Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayı ve K , E nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ küme değerli dönüşümü için $F(T) \neq \emptyset$ ve P_T genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Eğer $I - P_T$ sıfırda demiclosed ise bu durumda (4.17) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına zayıf yakınsar.” zayıf yakınsama,

Teorem 5.5 ile verilen “E düzgün konveks Banach uzayı ve K , E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ küme değerli dönüşümü (I) şartını sağlasın, ayrıca $F(T) \neq \emptyset$ ve P_T genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda (4.17) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına güçlü yakınsar.” güçlü yakınsama teoremleri ifade edildi.

Ayrıca, güçlü ve zayıf yakınsama teoremlerimizi destekleyen birkaç örnek verildi.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., O'Regan, D., and D. R. Sahu D. R. (2007) "Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings", ***Journal of Nonlinear and Convex Analysis,*** 8(1), 61–79.

Bayraktar, M. (2006) Fonksiyonel Analiz, ***Gazi Kitapevi,*** Ankara, 7-26.

Gorniewicz, L. (1999) Topological fixed point theory of multivalued mappings, ***Kluwer Academic Publishers,*** Dordrecht, Netherlands, 285-304.

Kaplan, M. (2014) "Genişlemeyen ve quasi genişlemeyen küme değerli dönüşümler için genelleştirilmiş sabit nokta yaklaşımları" Yayımlanmamış Doktora Tezi, ***Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Erzurum, 30-33, 54-61.

Karaca, N. and Yildirim, I. (2015) "Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process". ***Journal of Advanced Mathematical Studies,*** 8(2), 257-264.

Khan, S. H., Yildirim, I. (2012) "Fixed points of multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces", ***Fixed Point Theory and Applications,*** 2012(73), 9 sayfa.

Khan, S. H. (2013). "Picard-Mann hybrid iterative process", ***Fixed Point Theory and Applications,*** 2013(69), 10 sayfa.

Lim, T.C. (1974) "A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach spaces", ***Bulletin of the American Mathematical Society,*** 80(6), 1123-1126.

Markin, J. T. (1973) "Continuous dependence of fixed point sets", ***Proceeding of the American Mathematical Society,*** 38(3), 545-547.

Nadler Jr., S.B. (1969) "Multivalued contraction mappings", ***Pacific Journal of Advanced Mathematics,*** 30(2), 475-488.

Opial, Z. (1967) "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings", ***Bulletin of the American Mathematical Society,*** 73(4)**,** 591–597.

Panyanak, B. (2007) "Mann and Ishikawa iterative processes for multivalued mappings in Banach spaces", ***Computers and Mathematics with Applications,*** 54(6), 872-877.

Sastry, K.P.R., and Babu, G.V.R. (2005) "Convergence of Ishikawa iterates for a multivalued mapping with a fixed point", ***Czechoslovak Mathematical Journal,*** 55(4), 817-826.

Schu, J. (1991) "Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings", ***Bulletin of the Australian Mathematical Society,*** 43(1), 153–159.

Senter, H.F. and Dotson, W.G. (1974) "Approximatig fixed points of nonexpansive mappings", ***Proceeding of the American Mathematical Society,*** 44(2), 375–380.

Shahzad, N. and Zegeye, H. (2009) "On Mann and Ishikawa iteration schemes for multi-valued maps in Banach spaces", ***Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,*** 71(3-4), 838-844.

Song, Y. and Cho, Y.J. (2011) "Some notes on Ishikawa iteration for multivalued mappings", ***Bulletin of the Korean Mathematical Society,*** 48(3), 575-584.

Song, Y. And Wang, H. (2008) "Erratum to Mann and Ishikawa iterative processes for multivalued mappings in Banach spaces [Comp. Math. Appl., 54(2007), 872-877]", ***Computers and Mathematics with Applications,*** 55(12), 2999-3002.

Türkan, Ş. (2014) "Asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve sabit nokta iterasyonları" Yayımlanmamış Yükseklisans Tezi, ***Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Erzurum, 12-17.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Yozgat'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2008 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. 2015 yılında Erzincan'ın Tercan ilçesine Matematik Öğretmeni olarak atandı. Aynı yıl Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.