T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİBONACCİ SAYILARININ GRUPLANMASIYLA ELDE EDİLEN YENİ SAYI DİZİLERİ

İnan DURUKAN

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Engin ÖZKAN danışmanlığında, İnan DURUKAN tarafından hazırlanan bu çalışma 27/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Engin ÖZKAN	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 21/06/2019 tarih ve 22/10..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Fibonacci Sayılarının Gruplanmasıyla Elde Edilen Yeni Sayı Dizileri" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 27/05/2019

(İmza)

İnan DURUKAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FİBONACCİ SAYILARININ GRUPLANMASIYLA ELDE EDİLEN YENİ SAYI DİZİLERİ

İnan DURUKAN

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Alt indisleri arasındaki farkların çift sayı olduğu iki Fibonacci sayısının toplamını ve farkını veren bağıntılar Koshy tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada ise alt indisleri arasındaki farkların tek sayı olduğu iki Fibonacci sayısının toplamını ve farkını veren bağıntılar üreteç fonksiyonları yardımıyla verildi.

Benzer bağıntılar Lucas sayıları için de verildi. Ayrıca iki yeni Fibonacci ailesi elde edildi.

2019, 32 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Binet formülü, Fibonacci sayı dizisi, Fibonacci dizi ailesi, Lucas sayı dizisi, Üreteç fonksiyonlar.

ABSTRACT

Master Thesis

NEW NUMBER SEQUENCES OBTAINED WITH GROUPING OF FIBONACCI NUMBERS

İnan DURUKAN

Erzincan Binali Yıldırım University
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

The relations of the sum and difference of two Fibonacci numbers, in which the difference of subscripts is even, was given by Koshy.

In this study, the relations of the sum and difference of two Fibonacci numbers, in which is the difference of subscripts is odd, is introduced by using the generating functions.

Similar results is given for Lucas numbers. Also two new family of Fibonacci numbers are obtained.

2019, 32 Pages

Keywords: Binet Formula, Fibonacci number sequence, Fibonacci sequence family, Generating functions, Lucas number sequence.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Yüksek Lisans dönemi boyunca hep yanımda yer alan değerli arkadaşım Songül ÇELİK'e ve çalışmalarım boyunca kendisinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı eşim Eylem DURUKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İnan DURUKAN
Mayıs, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\{f_n\}$	Bilinen Fibonacci dizisi
F_n	n. Fibonacci sayısı
$\{f_n(x)\}$	Fibonacci polinomları dizisi
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$ nın m modülüne göre değeri
$\{f_k^m\}$	m modülüne göre k-step Fibonacci dizileri
G_n	n. Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
$G(x)$	Üreteç fonksiyonu
$\{G_n\}_{n=2}^{\infty}$	Genel rekürens dizisi
$\{j_n\}$	Jacobsthal-Lucas sayı dizisi
$j_n(x)$	Jacobsthal- Lucas polinomları
$\{J_n\}$	Jacobsthal sayı dizisi
$J_n(x)$	Jacobsthal polinomları
L_n	n. Lucas sayısı
$\{l_n\}$	Lucas sayı dizisi
$\{l_n(x)\}$	Lucas polinomları dizisi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
P_n	n. Pell sayısı
$\{P_n\}$	Pell sayı dizisi
$P_n(x)$	n. Pell polinomu
$\{Q_n\}$	Pell-Lucas sayı dizisi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi

1. GİRİŞ

Orta çağın en büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilen Fibonacci, 1170 yılında İtalya'nın Pisa şehrinde doğmuştur. Tam adı Leonardo Fibonacci'dir.

1201 yılında "Liber Abaci" adında "abaküs kitabı" veya "hesaplama kitabı" anlamına gelen bir matematik kitabı yazmıştır. Bu kitapla Avrupa'ya Arap rakamlarını ve bugün kullandığımız sayı sistemini tanıtmıştır. Bu kitap, Fibonacci sayı dizisinin temeli olan, bir çift tavşanın doğurarak neslini çoğaltmasını ele alan bir problemi de anlatıyor. Bu problem "Bir çift yetişkin tavşan, her ay yeni bir çift tavşan yavrulamaktadır. Bu yavrular, bir ayın sonunda erişkin hale gelmekte ve sonraki her ay yeni bir çift yavru yapmaktadır. Herhangi bir ay sonunda yavruların ve yetişkin tavşanların sayısını bulunuz. Bu süre zarfında tavşanların hiçbirinin ölmediği varsayılacaktır." şeklindeydi. Bu probleme göre tavşan çifti sayılarındaki artış 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … şeklindeki bir sayı dizisinin sayılarına denk gelmektedir. Bu sayılara Fibonacci sayıları, bu sayıların oluşturduğu diziye ise Fibonacci sayı dizisi denir. Bu sayı dizisinde ilk iki terim hariç her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamına eşittir. Ayrıca ardışık iki sayıdan büyük olanının küçük olanına oranı, sayılar büyüdükçe " Altın Oran" denen ve yaklaşık değeri 1,61803 olan sayısına yakınsar. Altın oran, doğada sayısız canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında bulunan özel bir orandır. İlk olarak kimler tarafından keşfedildiği bilinmese de, Mısırlıların ve Yunanlıların bu konu üzerinde yapmış oldukları bazı çalışmalar olduğu görülmektedir. Öklid, milattan önce 300′lü yıllarda yazdığı "elementler" adlı tezinde "ekstrem ve önemli oranda bölmek" olarak altın oranı ifade etmiştir. Mısırlıların Keops Piramidinde, Leonardo da Vinci'nin "İlahi Oran" adlı çalışmada sunduğu resimlerde altın oran kullanıldığı bilinmektedir.

Özellikle son yıllarda Fibonacci sayı dizisini içeren birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan önemli olanlarından bazıları aşağıdaki gibidir.

lvie, J.(1972) çalışmasında, genelleştirilmiş Fibonacci dizileri için Q-matris formunun genel şeklinin tanımını vererek Q-matrisinin bazı özelliklerine yer vermiştir.

Hoggatt, V. E. Jr. ve Bicknell, M.(1973) çalışmalarında, Fibonacci polinomlarını ve bu polinomların Pascal üçgeniyle ilişkilerine yer vermişlerdir.

Koshy, T.(1998) çalışmasında, alt indisleri arasındaki farkların çift sayı olduğu iki Fibonacci sayısının toplamını ve farkını veren bağıntılar verilmiştir.

Koshy, T.(2001) kitabında, Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili çok sayıda özelliğe yer verilmiştir.

Özkan, E., Aydın, H. ve Dikici, R.(2003) çalışmalarında, 3-adım Fibonacci dizilerinin Wall sayılarına ilişkin iki yeni teorem ispatlamışlardır. Bununla birlikte 3-adım Fibonacci dizileriyle ilgili beş varsayım vermişlerdir. Ayrıca $5x10^5$ den küçük asal sayılar için bu varsayımların bilgisayar doğrulamasını vermişlerdir.

Özkan, E.(2003) çalışmasında, p üslü (p asal sayıdır) ve nilpotent sınıfı 4 olan bir nilpotent grubunda 3 adım Genel Fibonacci dizileri oluşturulmuş ve dizinin terimini bulmak için formüller verilmiştir.

Özkan, E.(2004) çalışmasında, p üslü (p bir asal sayıdır) ve nilpotent sınıfı n olan bir nilpotent grubunda 3 adımlı Fibonacci dizilerini oluşturan dizinin α. terimini bulmak için formüller vermiştir.

Campbell, C. M. ve Campbell, P. P.(2005) çalışmalarında, belirli centro-polihedral gruplarının orbitlerini tanımlamışlardır. Ayrıca bu grupların Fibonacci uzunluğunu incelemiş ve bazı durumlarda uzunlukların tribonacci dizilerine bağlı olduğunu göstermişlerdir.

Öcal, A.A., Tuglu, N. ve Altinisik, E.(2005) çalışmalarında, *k*-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarını temsil eden bazı gösterimleri vermişlerdir. Bu temsiller yardımıyla, *k*-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülünü elde etmişlerdir.

Stakhov, A. ve Rozin, B.(2006) çalışmalarında, Fibonacci ve Lucas p-sayılarını tanımlamış ve bu diziler için Binet formüllerini bulmuşlardır. Ayrıca p' nin farklı değerleri için ayrı ayrı Binet formüllerini vermişlerdir.

Özkan, E.(2007) çalışmasında, kısıtlanmış Fibonacci dizileriyle ilgili bazı önemli teoremler ispatlanmıştır.

Kiliç, E. ve Tasci, D.(2008) çalışmalarında, alışılmış Lucas sayıları ve genelleştirilmiş k basamak Fibonacci sayıları üzerinde durmuşlardır. Daha sonra Lucas sayılarının genelleştirilmesi için yeni bir tanım vermişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş k basamak Fibonacci ve k basamak Lucas fonksiyonlarını verip bu fonksiyonlar arasında yeni bağıntılar ortaya çıkarmışlardır.

Mikkawy, M. ve Sogabe, T.(2010) çalışmalarında, k -Fibonacci sayılarında yeni aile tanımını vermişlerdir.

Özkan, E., Altun, İ. ve Göçer, A.(2017) çalışmalarında, Fibonacci ailesi ve Lucas sayıları arasında yeni bir ilişki vermişlerdir. Sonra yeni bir k-Lucas sayı ailesi tanımlayıp bunun Lucas sayıları ve Lucas sayı ailesi ile ilgili bazı özelliklerini ispatlamışlardır.

Özkan, E., Aydoğdu, A. ve Altun, İ.(2017) çalışmalarında, Fibonacci sayı ailesinin ve Lucas sayı ailesinin bazı özellikleri kanıtlanmıştır. Ayrıca, Fibonacci sayı ailesi ile Lucas sayı ailesi arasında bazı bağıntılar verilmiştir.

Yang, Y. ve Zang, Z.(2018) çalışmalarında, iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayılarının yeni bir genellemesini elde ettiler. Bu dizi ile iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas sayıları arasında bağıntılar elde etmişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet ve toplam formüllerini incelemişlerdir.

Köme, C. ve Yazlık, Y.(2018) çalışmalarında, elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları olan r-circulant matrislerin terslerini ve determinantlarını hesaplamışlardır.

Coskun, A. ve Taskara, N.(2018) çalışmalarında, iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas matris dizilerini tanımlayarak bu matris dizilerinin Binet formüllerini ve bazı temel özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas matris dizileri arasında bazı bağıntıları elde etmişlerdir.

Özkan, E., Taştan, M. ve Aydoğdu, A. (2018) çalışmalarında, yeni 2- Fibonacci polinomları tanımlamışlardır. Ayrıca 2- Fibonacci polinomları arasında bazı yeni bağıntılar vermişlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Üreteç Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. $a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots$ bir reel sayı dizisinin terimleri olmak üzere,

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \ a_2 x^2 + \ a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (2.1)$$

fonksiyonuna $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Koshy, 2001).

Örnek olarak pozitif tamsayıların üreteç fonksiyonları

$$G(x) = 1 + 2x + \ 3x^2 + \ 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \quad (2.2)$$

şeklindedir. Ayrıca her bir üreteç fonksiyonun birde eşiti vardır.

Bazı önemli fonksiyonlar ve onların eşitleri aşağıda verilmişlerdir.

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (2.3)$$

$$G(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (2.4)$$

$$G(x) = x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2 x^n + \cdots = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \quad (2.5)$$

Örnek 2.3.2.

$a_n = \ a_{n-1} + 2a_{n-2}$ indirgenme bağıntısına sahip $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonunun eşitini $a_0 = 3$ ve $a_1 = 0$ başlangıç değerleri için bulalım.

$$G(x) = 3 + 0x + 6x^2 + 6x^3 + 18x^4 + 30x^5 + \cdots \quad (2.6)$$

$$-xG(x) = -3x + 0x^2 - 6x^3 - 6x^4 - 18x^5 + \cdots \quad (2.7)$$

$$-2x^2 G(x) = -6x^2 - 0x^3 - 12x^4 - 12x^5 + \cdots \quad (2.8)$$

(2.6), (2.7) ve (2.8) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak ve $G(x)$’ i yalnız bırakırsak,

$$G(x) = \frac{3 - 3x}{1 - x - 2x^2} \tag{2.9}$$

eşitliği elde edilmiş olur.

2.2. Fibonacci Sayıları

Tanım 2.2.1. $F_0 = 0,\ \ F_1 = 1,$ ve $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{2.10}$$

ile tanımlanan $\{f_n\}$ sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir (Vajda, 1989).

Şimdi Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonunu bulup bu fonksiyon yardımıyla Binet formülünü elde edeceğiz.

$$G(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \cdots + F_n x^n + \cdots \tag{2.11}$$

Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu (2.12) deki gibi tanımlanırsa

$$G(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \cdots \tag{2.12}$$

$$-xG(x) = -x^2 + -x^3 - 2x^4 - 3x^5 - 5x^6 + \cdots \tag{2.13}$$

$$-x^2 G(x) = -x^3 - x^4 - 2x^5 - 3x^6 + \cdots \tag{2.14}$$

(2.12), (2.13) ve (2.14) eşitlikleri alt alta toplanırsa ve $G(x)$ yalnız bırakılırsa, Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu;

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{2.15}$$

şeklinde olur.

Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonundan yararlanarak Binet formülünü elde edelim.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere,

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}$$

şeklinde basit kesirlere ayırırsak,

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Buradan devam edersek,

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right]$$

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right]$$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)x^n$$

olur. Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonun bu yeni formundaki x^n nin katsayısı Fibonacci sayı dizisinin Binet formülüdür. Yani

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.1.

$n\geq 1$ için,

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=F_{n+2}-1 \tag{2.16}$$

dir (Koshy, 2001).

İspat:

Eşitliğin sol tarafını kullanarak sağ tarafını elde edeceğiz.

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right]$$

$$=F_{n+2}-1$$

ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.2.2.

$n \geq 1$ olmak üzere, Fibonacci dizisi için

$$(F_n, F_{n+1}) = 1$$

dir (Koshy, 2001).

İspat:

Varsayalım ki $\mathrm{d} > 1$ sayısı $\mathrm{F_n}$ ve $\mathrm{F_{n+1}}$ i böler. O halde onların farkı olan $\mathrm{F_{n+1}} - \mathrm{F_n} = \mathrm{F_{n-1}}$ sayısı d tarafından bölünür. Buradan ve $\mathrm{F_n} - \mathrm{F_{n-1}} = \mathrm{F_{n-2}}$ bağıntısından $\mathrm{d}|\mathrm{F_{n-2}}$ ye ulaşılır. Benzer şekilde devam edersek $\mathrm{d}|\mathrm{F_{n-3}}$, $\mathrm{d}|\mathrm{F_{n-4}}$ ... ve sonunda $\mathrm{d}|\mathrm{F_1}$ olduğu görülür. Fakat $\mathrm{F_1} = 1$ olduğundan herhangi bir $\mathrm{d} > 1$ sayısı tarafından bölünemez. Böylece çelişki elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur. ■

2.3. Lucas Sayıları

Tanım 2.3.1. $L_0 = 2,\ \ L_1 = 1,$ ve $n \geq 1$ için

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{2.17}$$

ile tanımlanan $\{l_n\}$ sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir (Koshy, 2001).

Lucas sayı dizisinin Binet formülü $L_n = \alpha^n + \beta^n$ şeklinde yazılır.

Ayrıca Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.1.

$n \geq 1$ için Fibonacci ve Lucas sayıları arasında

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n \tag{2.18}$$

bağıntısı vardır (Koshy, 2001).

İspat:

Bağıntının sol tarafını kullanarak sağ tarafını elde edeceğiz.

$$L_{n-1} + L_{n+1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$$

$$= \alpha^n(\alpha^{-1} + \alpha) + \beta^n(\beta^{-1} + \beta)$$

$\alpha.\beta = -1$ eşitliğinden faydalanırsak,

$$= \alpha^n(\alpha - \beta) + \beta^n(\beta - \alpha)$$

$$= (\alpha - \beta)(\alpha^n - \beta^n) \text{ elde edilir.}$$

$(\alpha - \beta) = \sqrt{5}$ olduğunu biliyoruz,

$$= (\alpha-\beta)^2 \frac{(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha-\beta)}$$

$$= 5F_n$$

böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.3.2.

$n \geq 1$ için $5L^2{}_{2n+1} + 20$ ifadesi daima tam kare bir sayıdır (Lucas, 1876).

İspat:

$5L^2{}_{2n+1} + 20$ ifadesinde L_n yerine binet formülündeki eşitini yazalım.

$$5L^2{}_{2n+1} + 20 = 5(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})^2 + 20$$

$$= 5[\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+1}] + 20$$

$$= 5[\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2(\alpha\beta)^{2n+1}]$$

$$= 5(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})^2$$

$$= 5\left(\sqrt{5}F_{2n+1}\right)^2$$

$$= 25F^2{}_{2n+1}$$

olduğundan $5L^2{}_{2n+1} + 20$ ifadesi bir tam karedir. ■

Teorem 2.3.3.

$n \geq 1$ için Lucas sayıları arasında

$$L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n \qquad (2.19)$$

bağıntısı mevcuttur (Hoggatt, 1965).

İspat:

Bağıntının sol tarafını kullanarak sağ tarafını elde edeceğiz.

$$
\begin{aligned}
L_n L_{n+1} &= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\
&= (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + (\alpha\beta)^n \beta + (\alpha\beta)^n \alpha) \\
&= (L_{2n+1} + (-1)^n \beta + (-1)^n \alpha) \\
&= \left(L_{2n+1} + (-1)^n (\beta + \alpha)\right) \\
&= L_{2n+1} + (-1)^n
\end{aligned}
$$

ispat tamamlanmış olur. ■

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Rekürens Sayı Dizileri

Tanım 3.1. Her $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $s, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $G_0 = s,\ G_1 = t$ başlangıç değerleri için

$$G_n = aG_{n-1} + bG_{n-2} \quad , n \geq 2 \tag{3.1}$$

bağıntısı ile verilen $\{G_n\}_{n=2}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine genel rekürens dizi denir (M.Renault, 1996).

Yukarıda verilen sayı dizileri ile ilgili bazı bağıntılar

- $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$
- $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$
- $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ Cassini Formülü
- $\beta^{2k} + \alpha^{2k} = 5{F_k}^2 + 2(-1)^k$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $F_{n+r} = L_r F_n + (-1)^n F_{n-r}$
- $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$
- $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$
- $Q_n = \frac{P_{n+1} + P_{n-1}}{2}$
- $Q_n^2 = 2P_n^2 + (-1)^n$
- $q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$
- $q_n = Q_n - Q_{n-1}$
- $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$

şeklindedir (Koshy, 2001).

Teorem 3.1.1.

$n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq n$ olmak üzere; Fibonacci sayılarında alt indisler arasındaki farkın çift sayı olduğu $\{(m+n)-(m-n)=2n\}$ iki Fibonacci sayısının toplamları arasında,

$$F_{m+n}+F_{m-n}=\begin{cases} L_m F_n \ , & n \ tek \ sayı \\ L_n F_m \ , & n \ çift \ sayı \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklindeki bağıntı mevcuttur (Koshy 1998).

İspat:

Eşitliğin sol tarafını kullanarak Binet formülleri yardımıyla sağ tarafını elde edeceğiz.

$$F_{m+n}+F_{m-n}=\frac{\alpha^{m+n}-\beta^{m+n}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^m(\alpha^n+\alpha^{-n})-\beta^m(\beta^n+\beta^{-n})}{\alpha-\beta}$$

$\alpha^{-n}=(-\beta)^n$ eşitliğini yerine yazalım.

$$=\frac{\alpha^m(\alpha^n+(-\beta)^n)-\beta^m(\beta^n+(-\alpha)^n)}{\alpha-\beta}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\alpha^m(\alpha^n-\beta^n)-\beta^m(\beta^n-\alpha^n)}{\alpha-\beta} \ , & n \ tek \ sayı \\ \dfrac{\alpha^m(\alpha^n+\beta^n)-\beta^m(\beta^n+\alpha^n)}{\alpha-\beta} \ , & n \ çift \ sayı \end{cases}$$

elde edilir. İşlemlere devam edersek,

$$=\begin{cases} \dfrac{(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^m+\beta^m)}{\alpha-\beta} \ , & n \ tek \ sayı \\ \dfrac{(\alpha^n+\beta^n)(\alpha^m-\beta^m)}{\alpha-\beta} \ , & n \ çift \ sayı \end{cases}$$

$$=\begin{cases} L_m F_n \ , & n \ tek \ sayı \\ L_n F_m \ , & n \ çift \ sayı \end{cases}$$

ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1.2.

$n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq n$ olmak üzere; Fibonacci sayılarında alt indisler arasındaki farkın çift sayı olduğu iki Fibonacci sayısının farkları arasındaki bağıntı,

$$F_{m+n} - F_{m-n} = \begin{cases} L_n F_m \ , & n \ tek \ sayı \\ L_m F_n \ , & n \ çift \ sayı \end{cases} \tag{3.3}$$

şeklindedir (Koshy 1998).

Teorem 3.1.3. (Catalan bağıntısı)

k pozitif tamsayı ve $n \geq k$ olmak üzere; Fibonacci sayıları arasında

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2 \tag{3.4}$$

bağıntısı vardır (Koshy, 2001).

İspat:

Bağıntının sol tarafını kullanarak sağ tarafını elde edeceğiz.

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = \left(\frac{\alpha^{n+k} - \beta^{n+k}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha^{2n} - (\alpha^{n+k}\beta^{n-k} + \alpha^{n-k}\beta^{n+k}) + \beta^{2n}}{5} - \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-1)^n}{5}$$

$$= \frac{-[(\alpha\beta)^n\alpha^{-k}\beta^k + (\alpha\beta)^n\alpha^k\beta^{-k}] + 2(-1)^n}{5}$$

$$= \frac{2(-1)^n - (-1)^n(-1)^k\beta^{2k} - (-1)^n(-1)^k\alpha^{2k}}{5}$$

$$= \frac{2(-1)^n - (-1)^{n+k}(\beta^{2k} + \alpha^{2k})}{5}$$

$\beta^{2k} + \alpha^{2k} = 5{F_k}^2 + 2(-1)^k$ eşitliğinden faydalanırsak,

$$= \frac{2(-1)^n + (-1)^{n+k+1}\left(5{F_k}^2 + 2(-1)^k\right)}{5}$$

$$= (-1)^{n+k+1}{F_k}^2 + \frac{2(-1)^n + 2(-1)^{n+2k+1}}{5}$$

$$= (-1)^{n+k+1}{F_k}^2$$

ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.1.3. de $k = 1$ alınırsa Cassini Formülü elde edilir.

3.2. Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

Tanım 3.2. $G_1 = a$, $G_2 = b$ ve $n \geq 3$ için

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} \tag{3.5}$$

şeklindeki rekürens bağıntısıyla tanımlanan diziye Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir (Koshy,2001).

Bu dizinin terimleri $a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \ldots$ şeklinde ilerler.

Teorem 3.2.1.

G_n n. Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı olmak üzere $n \geq 3$ için

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1} \tag{3.6}$$

dir (Koshy,2001).

İspat:

$3 \leq i \leq k$ koşulunu sağlayan tüm i tamsayıları için $G_i = aF_{i-2} + bF_{i-1}$ doğru olsun.

$$G_{k+1} = G_k + G_{k-1}$$

$$= (aF_{k-2} + bF_{k-1}) + (aF_{k-3} + bF_{k-2})$$

$$= a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2})$$

$$= aF_{k-1} + bF_k$$

o halde Teorem 3.2.1. tüm $3 \leq k$ tamsayıları için doğrudur. ■

Teorem 3.2.2.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere, $c = a + (a-b)\beta$ ve $d = a + (a-b)\alpha$ için

Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için binet formülü;

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.3.

$n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq n$ olmak üzere; Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarında alt indisler arasındaki farkın çift sayılar olduğu iki Fibonacci sayısının toplamları arasında

$$G_{m+n} + G_{m-n} = \begin{cases} G_m L_n & , n\ tek\ sayı \\ (G_{m+1} + G_{m-1})F_n & , n\ çift\ sayı \end{cases} \tag{3.7}$$

bağıntısı vardır (Koshy 1998).

Teorem 3.2.4.

$n \in \mathbb{N}$ ve $m \geq n$ olmak üzere; Fibonacci sayılarında alt indisler arasındaki farkın çift sayılar olduğu iki Fibonacci sayısının farkları arasında

$$G_{m+n} - G_{m-n} = \begin{cases} (G_{m+1} + G_{m-1})F_n & , n\ tek\ sayı \\ G_m L_n & , n\ çift\ sayı \end{cases} \tag{3.8}$$

bağıntısı vardır (Koshy 1998).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yeni Fibonacci Sayı Dizisi Ailesi

Teorem 3.1.1. de Fibonacci sayılarında, alt indisler arasındaki farkın çift sayılar olduğu $\{(m+n)-(m-n)=2n\}$ iki Fibonacci sayısının toplamları arasındaki bağıntılar 1998 de Koshy tarafından elde edilmişti. Bu çalışmada ise Fibonacci sayılarında, alt indisler arasındaki farkların tek sayılar olduğu $\{(m+n+1)-(m-n)=2n+1\}$ iki Fibonacci sayısının toplamı ve farkı incelenecektir.

Öncelikle alt indisleri arasındaki farkın 3 olduğu iki Fibonacci sayısının toplamını inceleyelim.

$$\begin{aligned} F_{m+2}+F_{m-1} &= F_{m+1}+F_m+F_{m-1} \\ &= 2F_m+2F_{m-1} \\ &= 4F_{m-1}+2F_{m-2} \\ &= 6F_{m-2}+4F_{m-3} \\ &= 10F_{m-3}+6F_{m-4} \cdots \end{aligned}$$

Benzer şekilde devam edildiğinde katsayılar $2, 4, 6, 10, 16, 26, \ldots$ Fibonacci sayılarındaki gibi her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olarak ilerlemektedir.

Alt indisleri arasındaki farkın 5 olduğu iki Fibonacci sayısının toplamı incelenirse

$$\begin{aligned} F_{m+3}+F_{m-2} &= F_{m+2}+F_{m+1}+F_{m-2} \\ &= 2F_{m+1}+F_m+F_{m-2} \\ &= 3F_m+F_{m-1}+F_{m-1}+F_{m-2} \\ &= 4F_m+F_{m-1} \\ &= 5F_{m-1}+4F_{m-2} \end{aligned}$$

$$= 9F_{m-2} + 5F_{m-3} \dots$$

Benzer şekilde devam edildiğinde katsayılar $4, 5, 9, 14, 23, \dots$ yine Fibonacci sayıları gibi her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olarak ilerlemektedir.

Alt indisleri arasındaki farkın 7 olduğu iki Fibonacci sayısının toplamı incelendiğinde, katsayılar $4, 9, 13, 22, 35, \dots$ şeklinde ilerlemektedir.

"n" satır ve "p" sütun numarası olmak üzere; Fibonacci dizisinin, alt indisleri arasındaki farkın 1 olduğu (n=0) iki Fibonacci sayısının toplamından elde edilen katsayılar 1. Satıra, farkın 3 olduğu (n=1) iki Fibonacci sayısının toplamından elde edilen katsayılar 2. Satıra ve bu şekilde devam edilerek oluşturulan Tablo 4.1 aşağıda verilmiştir.

Tablo 4.1. Alt indisleri arasındaki farkın tek sayıların olduğu iki Fibonacci sayısının toplamlarından elde edilen katsayılar.

p / **n**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	2	3	5	8	13	21
1	2	4	6	10	16	26
2	4	5	9	14	23	37
3	4	9	13	22	35	57
4	10	12	22	34	56	90
5	10	23	33	56	89	145
6	26	31	57	88	145	233
7	26	60	86	146	232	378
8	68	81	149	230	379	609
9	68	157	225	382	607	989

Tablo 4.1. incelendiğinde her satırdaki sayılar Fibonacci dizisindeki gibi her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamına eşittir. Böylece yeni bir Fibonacci sayı dizisi ailesi elde edilmiş olur. $n = 0$ için bilinen Fibonacci sayı dizisi elde edilir.

Tablo 4.1.' de birinci sütunda yer alan $2, 2, 4, 4, 10, 10, 26, 26, \dots$ sayılarının üreteç fonksiyonu bulalım. Bu fonksiyon $G_1(z)$ olsun.

$$G_1(z) = 2 + 2z + 4z^2 + 4z^3 + 10z^4 + 10z^5 + 26z^6 + 26z^7 + \cdots \qquad (4.1)$$

Şeklinde yazılabilir. (4.1)' deki eşitliğin her iki tarafını önce z^4 sonra $-3z^2$ ile çarpalım.

$$z^4 G_1(z) = 2z^4 + 2z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 10z^8 + 10z^9 + 26z^{10} + 26z^{11} + \cdots \quad (4.2)$$

$$-3z^2 G_1(z) = -6z^2 - 6z^3 - 12z^4 - 12z^5 - 30z^6 - 30z^7 - 786z^8 - \cdots \qquad (4.3)$$

(4.1), (4.2) ve (4.3) eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$(z^4 - 3z^2 + 1)G_1(z) = 2 + 2z - 2z^2 - 2z^3$$

elde edilir. $G_1(z)$' i yalnız bırakırsak,

$$G_1(z) = \frac{2 + 2z - 2z^2 - 2z^3}{z^4 - 3z^2 + 1}$$

olur. Şimdi $G_1(z)$ fonksiyonunu basit kesirlere ayıralım.

$$G_1(z) = \frac{-z-1}{z^2+z-1} + \frac{-z-1}{z^2-z-1}$$

Elde edilen her bir basit kesir ayrı ayrı incelenirse;

$$\frac{-z-1}{z^2+z-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n F_{n+2}$$

ve

$$\frac{-z-1}{z^2-z-1} = 1 + z^2 - z^3 + 2z^4 - 3z^5 + 5z^6 - 8z^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (-1)^n F_{n-1}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde Tablo 4.1.' deki birinci sütunun üreteç fonksiyonu

$$G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+2} + (-1)^{n+2} F_{n-1})$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer adımlar Tablo 4.1.' in ikinci sütunu için uygulanırsa;

$$G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+3} + (-1)^{n+3} F_{n-2})$$

elde edilir. Böyle devam edersek, "p" Tablo 4.1.' in sütun numarası olmak üzere, p. sütun için üreteç fonksiyonunu

$$G_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(F_{n+p+1} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p}\right) \qquad (4.4)$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 4.1.1.

Tablo 4.1.1.' in sütunları arasında,

$$G_k(z) = G_{k-1}(z) + G_{k-2}(z)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat:

Şimdi $G_1(z) + G_2(z) = G_3(z)$ olduğunu gösterelim.

$$G_1(z) + G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+2} + (-1)^{n+2} F_{n-1}) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+3} + (-1)^{n+3} F_{n-2})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+2} + (-1)^{n+2} F_{n-1} + F_{n+3} + (-1)^{n+3} F_{n-2})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(F_{n+3} + F_{n+2} + (-1)^{n+2} (F_{n-1} - F_{n-2})\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(F_{n+4} + (-1)^{n+2} (F_{n-3})\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \big(F_{n+4} + (-1)^{n+4}(F_{n-3})\big)$$

$$= G_3(z)$$

elde edilir. O halde $G_3(z) = G_1(z) + G_2(z)$ doğrudur.

Şimdi $p = k$ için $G_k(z) = G_{k-1}(z) + G_{k-2}(z)$ doğru olsun. Buradan $p = k + 1$ için $G_{k+1}(z) = G_k(z) + G_{k-1}(z)$ eşitliğinin doğru olduğunu göstereceğiz.

Bunun için $G_k(z) = G_{k-1}(z) + G_{k-2}(z)$ eşitliğinin her iki tarafına $G_{k-1}(z)$ ekleyelim.

$$G_k(z) + G_{k-1}(z) = 2G_{k-1}(z) + G_{k-2}(z)$$

$$= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+k} + (-1)^{n+k} F_{n-k+1})\right) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+k-1} + (-1)^{n+p-1} F_{n-k+2})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n [(F_{n+k} + F_{n+k} + F_{n+k-1}) + (-1)^{n+k+2}(F_{n-k+1} + F_{n-k+1} - F_{n-k+2})]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n [(F_{n+k} + F_{n+k+1}) + (-1)^{n+k+2}(F_{n-k+1} - F_{n-k})]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n (F_{n+k+2} + (-1)^{n+k+2} F_{n-k-1})$$

elde edilmiş olur ki, buda $G_{k+1}(z)$' ye eşittir. Böylece ispat tamamlanmış olur.■

Teorem 4.1.1. bize her bir sütun için, o sütunun üreteç fonksiyonunun kendisinden önce gelen ilk iki sütunun üreteç fonksiyonunun toplamı olarak yazılabileceğini göstermiş olur.

Teorem 4.1.2.

Fibonacci sayılarında, alt indisler arasındaki farkın $1, 3, 5, 7, \ldots$ gibi tek sayıların oluşturduğu iki Fibonacci sayısının toplamını $F_{m+n+1} + F_{m-n}$ şeklinde gösterirsek, m, $n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N}^+$ için

$$F_{m+n+1} + F_{m-n} = \left(F_{n+p+1} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p}\right) F_{m-p-1}$$
$$+\left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p-1}\right) F_{m-p} \tag{4.5}$$

bağıntısı vardır.

İspat:

$n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak

üzere; Fibonacci sayıları için binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir.

$$F_{m+n+1} + F_{m-n} = \left(F_{n+p+1} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p}\right) F_{m-p-1}$$
$$+\left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p-1}\right) F_{m-p}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki Fibonacci sayılarının yerine Binet formüllerini yazarak doğrudan ispat yöntemiyle sol tarafını elde edeceğiz.

$$\left(F_{n+p+1} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p}\right) F_{m-p-1} + \left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p-1}\right) F_{m-p}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n+p+1} - \beta^{n+p+1}}{\alpha - \beta} + (-1)^{n+p+1} \cdot \frac{\alpha^{n-p} - \beta^{n-p}}{\alpha - \beta}\right) \frac{\alpha^{m-p-1} - \beta^{m-p-1}}{\alpha - \beta}$$

$$+\left(\frac{\alpha^{n+p+2} - \beta^{n+p+2}}{\alpha - \beta} + (-1)^{n+p+2} \cdot \frac{\alpha^{n-p-1} - \beta^{n-p-1}}{\alpha - \beta}\right) \frac{\alpha^{m-p} - \beta^{m-p}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{n+m} - \beta^{n+p+1}\alpha^{m-p-1} + (-1)^{n+p+1}\alpha^{n+m-2p-1} - (-1)^{n+p+1}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+ \frac{-\alpha^{n+p+1}\beta^{m-p-1} + \beta^{n+p} - (-1)^{n+p+1}\alpha^{n-p}\beta^{m-p-1} + (-1)^{n+p+1}\beta^{n+m-2p-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+ \frac{\alpha^{n+m+2} - \beta^{n+p+2}\alpha^{m-p} + (-1)^{n+p+2}\alpha^{n+m-2p-1} - (-1)^{n+p+2}\alpha^{m-p}\beta^{n-p-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+ \frac{-\alpha^{n+p+2}\beta^{m-p} + \beta^{n+m+2} - (-1)^{n+p+2}\alpha^{n-p-1}\beta^{m-p} + (-1)^{n+p+2}\beta^{n+m-2p-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{n+m}(\alpha^2+1) - \beta^{n+p+1}\alpha^{m-p-1}(\alpha\beta+1) - (-1)^{n+p+1}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p-1}(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+ \frac{-\alpha^{n+p+1}\beta^{m-p-1}(\alpha\beta+1) + \beta^{n+m}(\beta^2+1) - (-1)^{n+p+1}\alpha^{n-p-1}\beta^{m-p-1}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{n+m}(\alpha^2+1) + \beta^{n+m}(\beta^2+1)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+ \frac{(-1)^{n+p}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p-1}(\beta-\alpha) + (-1)^{n+p}\alpha^{n-p-1}\beta^{m-p-1}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{n+m+1}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{m+n+1}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right) + (-1)^{n+p}(\alpha-\beta)(\alpha\beta)^{n-p-1}(\beta^{m-n}-\alpha^{m-n})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\frac{1}{\alpha} = -\beta, \;\; \alpha\beta = -1$$

eşitliklerini yerlerine yazarsak,

$$= \frac{\alpha^{m+n+1}(\alpha-\beta) - \beta^{m+n+1}(\alpha-\beta) + (-1)^{2n-1}(\alpha-\beta)(\beta^{m-n}-\alpha^{m-n})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n+1} - \beta^{m+n+1}}{(\alpha-\beta)} + \frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{(\alpha-\beta)}$$

$$= F_{m+n+1} + F_{m-n}$$

böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.1.3.

Lucas sayılarında, alt indisler arasındaki farkın $1, 3, 5, 7, \ldots$ gibi tek sayıların oluşturduğu iki Lucas sayısının toplamını $L_{m+n+1} + L_{m-n}$ şeklinde gösterirsek,

m, $n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N}^+$ için

$$L_{m+n+1} + L_{m-n} = \left(F_{n+p+1} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p}\right) L_{m-p-1}$$

$$+\left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p-1}\right) L_{m-p} \tag{4.6}$$

şeklindeki bağıntı vardır.

İspat:

$$L_{m+n+1} + L_{m-n} = \left(F_{n+p+1} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p}\right) L_{m-p-1}$$

$$+\left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p-1}\right) L_{m-p}$$

eşitliğinin sağ tarafının Binet formüllerini kullanarak doğrudan ispat yöntemiyle sol tarafını elde edeceğiz.

$$\left(F_{n+p+1} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p}\right) L_{m-p-1} + \left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p-1}\right) L_{m-p}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n+p+1} - \beta^{n+p+1}}{\alpha - \beta} + (-1)^{n+p+1} \cdot \frac{\alpha^{n-p} - \beta^{n-p}}{\alpha - \beta}\right) (\alpha^{m-p-1} + \beta^{m-p-1})$$

$$+ \left(\frac{\alpha^{n+p+2} - \beta^{n+p+2}}{\alpha - \beta} + (-1)^{n+p+2} \cdot \frac{\alpha^{n-p-1} - \beta^{n-p-1}}{\alpha - \beta}\right) (\alpha^{m-p} + \beta^{m-p})$$

$$= \frac{\alpha^{n+m} - \beta^{n+p+1}\alpha^{m-p-1} + (-1)^{n+p+1}\alpha^{n+m-2p-1} - (-1)^{n+p+1}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p}}{\alpha - \beta}$$

$$+ \frac{\alpha^{n+p+1}\beta^{m-p-1} - \beta^{n+m} + (-1)^{n+p+1}\alpha^{n-p}\beta^{m-p-1} - (-1)^{n+p+1}\beta^{n+m-2p-1}}{\alpha - \beta}$$

$$+\frac{\alpha^{n+m+2}-\beta^{n+p+2}\alpha^{m-p}+(-1)^{n+p+2}\alpha^{n+m-2p-1}-(-1)^{n+p+2}\alpha^{m-p}\beta^{n-p-1}}{\alpha-\beta}$$

$$+\frac{\alpha^{n+p+2}\beta^{m-p}-\beta^{n+p+2}+(-1)^{n+p+2}\alpha^{n-p-1}\beta^{m-p}-(-1)^{n+p+2}\beta^{n+m-2p-1}}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n+m}(\alpha^2+1)-\alpha^{m-p-1}\beta^{n+p+1}(\alpha\beta+1)-(-1)^{n+p+1}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p-1}(\beta-\alpha)}{\alpha-\beta}$$

$$+\frac{\alpha^{n+p+1}\beta^{m-p-1}(\alpha\beta+1)-\beta^{n+m}(\beta^2+1)+(-1)^{n+p+1}\alpha^{n-p-1}\beta^{m-p-1}(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n+m}(\alpha^2+1)-\beta^{m+n}(\beta^2+1)}{\alpha-\beta}$$

$$+\frac{(-1)^{n+p}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p-1}(\beta-\alpha)-(-1)^{n+p}\alpha^{n-p-1}\beta^{m-p-1}(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^{n+m+1}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-\beta^{m+n+1}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)+(-1)^{n+p+1}(\alpha-\beta)(\alpha\beta)^{n-p-1}(\alpha^{m-n}+\beta^{m-n})}{\alpha-\beta}$$

$$\frac{1}{\alpha}=-\beta,\ \ \alpha\beta=-1$$

eşitliklerini yerlerine yazarsak,

$$=\frac{\alpha^{m+n+1}(\alpha-\beta)+\beta^{m+n+1}(\alpha-\beta)+(-1)^{2n}(\alpha-\beta)(\alpha^{m-n}+\beta^{m-n})}{\alpha-\beta}$$

$$=\alpha^{m+n+1}+\beta^{m+n+1}+\ \alpha^{m-n}+\beta^{m-n}$$

$$=L_{m+n+1}+L_{m-n}$$

böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdide Fibonacci sayılarında alt indisler arasındaki farkın 1, 3, 5, 7, ... gibi tek sayılar olduğu iki Fibonacci sayısının farkını inceleyelim.

"n" satır ve "p" sütun numarası olmak üzere; Fibonacci dizisinin alt indisleri arasındaki farkın 1 olduğu (n=0) iki Fibonacci sayısının farkından elde edilen katsayılar 1. Satıra, farkın 3 olduğu (n=1) iki Fibonacci sayısının farkından elde edilen katsayılar 2. Satıra ve bu şekilde devam edilerek oluşturulan Tablo 4.2 aşağıda verilmiştir.

Tablo 4.2. Alt indisleri arasındaki farkın tek sayıların olduğu iki Fibonacci sayısının farkından elde edilen katsayılar.

p / n	1	2	3	4	5	6
0	2	2	4	6	10	16
1	2	5	7	12	19	31
2	6	7	13	20	33	53
3	6	14	20	34	54	88
4	16	19	35	54	89	143
5	16	37	53	90	143	233
6	42	50	92	142	234	376
7	42	97	139	236	375	611

Tablo 4.2. incelendiğinde her satırdaki sayılar Fibonacci dizisindeki gibi her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamına eşittir. Böylece yeni bir Fibonacci sayı dizisi ailesi elde edilmiş olur.

"p" Tablo 4.2. in sütun numarası olmak üzere; p. sütun için üreteç fonksiyonu,

$$G_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p+1}\right) \tag{4.7}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 4.1.4.

Tablo 4.1.4 ün sütunları arasında;

$$G_k(z) = G_{k-1}(z) + G_{k-2}(z)$$

bağıntısı vardır.

İspat:

İspat Teorem 4.1.1 de kullanılan yöntemle benzer şekilde yapılır. ■

Teorem 4.1.5.

Fibonacci sayılarında, alt indisler arasındaki farkın $1, 3, 5, 7, \ldots$ gibi tek sayıların oluşturduğu iki Fibonacci sayısının farkını $F_{m+n+1} - F_{m-n}$ şeklinde gösterelim.

$\mathrm{m}, n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N}^{+}$ için

$$F_{m+n+2} - F_{m-n-1} = \left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p+1}\right) F_{m-p-1} + \left(F_{n+p+3} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p}\right) F_{m-p} \tag{4.8}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{m+n+2}} - \mathrm{F}_{\mathrm{m-n-1}} = \left(\mathrm{F}_{\mathrm{n+p+2}} + (-1)^{\mathrm{n+p+1}} \mathrm{F}_{\mathrm{n-p+1}}\right) \mathrm{F}_{\mathrm{m-p-1}} + \left(\mathrm{F}_{\mathrm{n+p+3}} + (-1)^{\mathrm{n+p+2}} \mathrm{F}_{\mathrm{n-p}}\right) \mathrm{F}_{\mathrm{m-p}}$$

eşitliğinin sağ tarafını kullanarak Binet formülleri yardımıyla sol tarafını elde edeceğiz.

$$\left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p+1}\right) F_{m-p-1} + \left(F_{n+p+3} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p}\right) F_{m-p}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n+p+2} - \beta^{n+p+2}}{\alpha - \beta} + (-1)^{n+p+1} \cdot \frac{\alpha^{n-p+1} - \beta^{n-p+1}}{\alpha - \beta}\right) \frac{(\alpha^{m-p-1} - \beta^{m-p-1})}{\alpha - \beta}$$

$$+ \left(\frac{\alpha^{n+p+3} - \beta^{n+p+3}}{\alpha - \beta} + (-1)^{n+p+2} \cdot \frac{\alpha^{n-p} - \beta^{n-p}}{\alpha - \beta}\right) \frac{(\alpha^{m-p} - \beta^{m-p})}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{n+m+1} - \beta^{n+p+2}\alpha^{m-p-1} + (-1)^{n+p+1}\alpha^{m+n-2p} - (-1)^{n+p+1}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p+1}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$+ \frac{-\alpha^{n+p+2}\beta^{m-p-1} + \beta^{n+m+1} - (-1)^{n+p+1}\alpha^{n-p+1}\beta^{m-p-1} + (-1)^{n+p+1}\beta^{n+m-2p}}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$+\frac{\alpha^{n+m+3}-\alpha^{m-p}\beta^{n+p+3}+(-1)^{n+p+2}\alpha^{n+m-2p}-(-1)^{n+p+2}\alpha^{m-p}\beta^{n-p}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+\frac{-\alpha^{n+p+3}\beta^{m-p}+\beta^{m+n+3}-(-1)^{n+p+2}\alpha^{n-p}\beta^{m-p}+(-1)^{n+p+2}\beta^{n+m-2p}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{\alpha^{n+m+1}(\alpha^2+1)-\alpha^{m-p-1}\beta^{n+p+1}(\alpha\beta+1)-(-1)^{n+p+1}\alpha^{m-p-1}\beta^{n-p}(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+\frac{-\alpha^{n+p+2}\beta^{m-p-1}(\alpha\beta+1)+\beta^{n+m+1}(\beta^2+1)-(-1)^{n+p+1}\alpha^{n-p}\beta^{m-p-1}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{\alpha^{n+m+2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\beta^{m+n+2}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$-\frac{(-1)^{n+p+1}(\alpha-\beta)(\alpha\beta)^{n-p}(-\alpha^{m-n-1}+\beta^{m-n-1})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\frac{1}{\alpha}=-\beta,\ \ \alpha\beta=-1$$

eşitliklerini yerine koyalım,

$$=\frac{\alpha^{m+n+2}(\alpha-\beta)+\beta^{m+n+2}(\beta-\alpha)+(\alpha-\beta)(-\alpha^{m-n-1}+\beta^{m-n-1})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{\alpha^{m+n+2}-\beta^{m+n+2}}{(\alpha-\beta)}-\frac{\alpha^{m-n-1}-\beta^{m-n-1}}{(\alpha-\beta)}$$

$$=F_{m+n+2}-F_{m-n-1}$$

böylelikle ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.1.6.

Lucas sayılarında, alt indisler arasındaki farkın $1, 3, 5, 7, \ldots$ gibi tek sayıların oluşturduğu iki Lucas sayısının farkını $L_{m+n+1}-L_{m-n}$ şeklinde gösterelim.

m, $n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N}^+$ için

$$L_{m+n+1} - L_{m-n} = \left(F_{n+p+2} + (-1)^{n+p+1} F_{n-p+1}\right) L_{m-p-1}$$

$$+\left(F_{n+p+3} + (-1)^{n+p+2} F_{n-p}\right) L_{m-p} \qquad (4.9)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat:

Teorem 4.1.5. de kullanılan yöntemle benzer şekilde yapılır. ■

Fibonacci sayılarında, alt indisler arasındaki farkın tek sayılar oluşturduğu iki Fibonacci sayısının toplamları arasında aşağıdaki bağıntılar da elde edilmiştir.

- $F_{m+2} + F_{m-1} = (F_n + L_n) F_{m-n-1} + (F_{n+1} + L_{n+1}) F_{m-n}$
- $F_{m+3} + F_{m-2} = \left(\frac{7}{2} F_n + \frac{1}{2} L_n\right) F_{m-n-1} + \left(\frac{7}{2} F_{n+1} + \frac{1}{2} L_{n+1}\right) F_{m-n}$
- $F_{m+4} + F_{m-3} = \left(\frac{3}{2} F_n + \frac{5}{2} L_n\right) F_{m-n-1} + \left(\frac{3}{2} F_{n+1} + \frac{5}{2} L_{n+1}\right) F_{m-n}$
- $F_{m+5} + F_{m-4} = (9F_n + L_n) F_{m-n-1} + (9F_{n+1} + L_{n+1}) F_{m-n}$
- $F_{m+6} + F_{m-5} = \left(\frac{7}{2} F_n + \frac{13}{2} L_n\right) F_{m-n-1} + \left(\frac{7}{2} F_{n+1} + \frac{13}{2} L_{n+1}\right) F_{m-n}$
- $F_{m+7} + F_{m-6} = \left(\frac{47}{2} F_n + \frac{5}{2} L_n\right) F_{m-n-1} + \left(\frac{47}{2} F_{n+1} + \frac{5}{2} L_{n+1}\right) F_{m-n}$
- $F_{m+8} + F_{m-7} = (9F_n + 17L_n) F_{m-n-1} + (9F_{n+1} + 17L_{n+1}) F_{m-n}$

$$F_{m+9} + F_{m-8} = \left(\frac{123}{2} F_n + \frac{13}{2} L_n\right) F_{m-n-1} + \left(\frac{123}{2} F_{n+1} + \frac{13}{2} L_{n+1}\right) F_{m-n}$$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, Fibonacci Sayı Dizisi ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizisi ile ilgili, alt indisler arasındaki farkın çift sayılar olduğu iki Fibonacci sayısının toplamı ve farkıyla ilgili bağıntılar incelendi. Daha sonra alt indisleri arasındaki farkın tek sayılar olduğu iki Fibonacci sayısının toplamını ve farkını veren bağıntılar Üreteç Fonksiyonlar yardımıyla elde edildi. Bu bağıntılara benzer bağıntılar Lucas sayıları için de bulundu. Bu bağıntılar elde edilirken iki farklı yeni Fibonacci aileleri oluşturuldu. Öneri olarak, elde edilen bu Fibonacci dizi ailesinin özellikleri incelenebilir. Benzer çalışma, Pell sayı dizisi ve Jacobsthal sayı dizisi için uygulanabilir.

KAYNAKLAR

Buschman, R.G. (1963) “Fibonacci numbers, Chebyshev polynomials, generalizations and difference equations”, ***Fibonacci Quarterly***, 1(4), 1-7.

Bicknell, M. (1975) “A primer on the Pell sequences and related sequences”, ***Fibonacci Quarterly***, 13, 345-349.

Cahit, K. and Yazlik, Y. (2018) “On the determinants and inverses of r−circulant matrices with biperiodic Fibonacci and Lucas numbers”, ***Flomat***, 32 (10).

Çallıalp, F. (2001) “Örneklerle soyut cebir”, ***Birsen Yayınevi***, 300 s, İstanbul.

Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F. (2004) “On the Fibonacci length of powers of dihedral groups”, ***Application of Fibonacci numbers***, Vol. 9, ed. F.T. Howard, Kluwer, Dordrecht, 69-85.

Coskun, A. and Taskara, N.(2018) “A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences”, ***Applied Mathematics and Computation***, 320, 400–406.

Decarli, D.J. (1970) “A generalized Fibonacci sequence over an arbitrary ring”, ***Fibonacci Quarterly***, 8(2), 182-184,198.

Deveci, Ö. and Karaduman, E. (2016) “On the Pell polynomials and the Pell sequences in groups”, ***Chiang Mai Journal of Science***, 247-256.

Hoggatt, V. E, Jr. (1965), “Problem B-60”, ***The Fibonacci Quarterly***, 3:3 (Oct.), 238.

Horadam, A.F. (1961) “A generalized Fibonacci sequence”, ***American Mathematics Monthly***, 68(5), 445-459.

Karaduman, E. and Aydin, H. (2003) “On Fibonacci sequences in nilpotent groups”, ***Mathematics Balkanica***, 17 (3-4), 207-214.

Karaduman, E. and Yavuz, U. (2003) “ On the period of Fibonacci sequences in nilpotent goups”, ***Applied Mathematic and Computation***, 142, 321-332.

Kalman, D. and Mena, R. (2003) “ The Fibonacci numbers-exposed”, ***Mathematics Magazine***, 76(3), 167-181.

Kılıç, E., Altınkaynak, B. and Taşçı, D. (2006) “ On the computing of the generalized order- k Pell numbers” ***Applied Mathematics and Computation***, 181,511-515.

Kılıç, E. and Taşçı D. (2010) “ Negatively subscripted Fbonacci and Lucas numbers and their complex factorizations ” ***Ars combinatoria***, 275-288.

Knox, S.W. (1992) “Fibonacci sequences in finite groups,” ***Fibonacci Quarterly***, 30(2), 116-120.

Koshy, T.(1998) “New Fibonacci and Lucas identities” ***The Mathematical Gazette***, 82 (Nov.), 481-184.

Koshy, T. (2001) “Fibonacci and Lucas numbers with applications” ***Wiley-Interscience publishing***, Canada.

Lee, G. and Cho S. H. (2008) “The generalized Pascal matrix via the genaralized Fibonacci matrix and the Pell matrix” ***Journol of the Korean Mathematical Society***, 45(2), 479-491.

Melham , R. (1999) “Sums involving Fibonacci and Pell numbers” ***Portugaliae Mathematica***, 56(3),309-317.

Renault, M. (1996) “The Fibonacci sequence under various moduli”, ***Master’s Thesis Wake Forest University***.

Özkan E. and Taştan M. and Aydoğdu A. (2018) “2-Fibonacci polynomials in the family of Fibonacci numbers. ”, ***Notes on Number Theory and Discrete Mathematics***, 24, 47-55.

Özkan E. and Altun İ. and Göçer A. (2017) “On relationship among a new family of k-Fibonacci, k-Lucas numbers, Fibonacci and Lucas numbers”, ***Chiang Mai Journal of Scıence,*** 44, 1744-1750.

Özkan E., Aydoğdu A. and Altun İ.(2017) “Some identities for a family of Fibonacci and Lucas numbers”, ***Journal of Mathematics and Statistical Science***, 3, 295-303.

Özkan, E. (2007) “On truncated Fibonacci sequences”, ***Indıan Journal of Pure Mathematıcs***, 38(4), 241-251.

Özkan E. (2004) “Fibonacci sequences in nilpotent groups with class n”, ***Chiang Mai Journal of Science***, 31, 205-212.

Özkan E.(2003) “On General Fibonacci sequences in groups”, ***Turkısh Journal of Mathematıcs***, 27, 525-537.

Özkan, E. (2003) Aydın, H. and Dikici, R. “3-step Fibonacci series modulo *m* ”, ***Applied Mathematics and Computation***, 143, 165-172.

Stakhov, A. and Rozin, B. and “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers” ***Chaos, Solitons & Fractals***, 27 (5), 1162–1177, 2006.

Taşçı, D. (2007) “Soyut cebir”, ***Alp Yayınevi***, 671 s, Ankara.

Vajda, S. (1989) “Fibonacci & Lucas numbers and golden section”, ***Ellis Horwood, Chichester***.

Wall, D.D. (1960) “Fibonacci series modulo m”, ***American Mathematics Monthly***, 67(6), 525-532.

Wilcox, H.J. (1986) “Fibonacci sequences of period n in groups”, ***Fibonacci Quarterly***, 24(4), 356-361.

Wyler, O.,(1965) “On Second-order Recurrences”, ***American Mathematics Monthly*** , 72(5), 500-506.

Yang, J. and Zhang, Z. (2018) “Some identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequences”, ***Applied Mathematics and Computation***, 339, 451–458.

ÖZGEÇMİŞ

1979 da Erzincan'da doğdu. İlkokulu Karadiğin Köyü İlkokulu' nda, Ortaokulu Kemah Y.İ.B.O' da, Liseyi Erzincan Anadolu Öğretmen Lisesinde okudu. Daha sonra 1997 yılında Erzincan Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı. 2001 yılında MEB' de göreve başladı. 2015- 2016 bahar döneminde Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansa başladı.