T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİLERİNİN SPİNOR GÖSTERİMİ

Neslihan Cansu TANDOĞAN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2019

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR danışmanlığında, Neslihan Cansu TANDOĞAN tarafından hazırlanan bu çalışma 21/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR İmza:

Üye : Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun 19 /08 /2019 tarih ve 32../5........ sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mustafa Fatih ERTUGAY
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

"Üç Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin Spinor Gösterimi" isimli "Yüksek Lisans" tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 21/06/2019

Neslihan Cansu
TANDOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA İNVOLÜT-EVOLÜT EĞRİLERİNİN SPİNOR GÖSTERİMİ

Neslihan Cansu TANDOĞAN

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, Öklid uzayında temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra spinorlara giriş yapması açısından kompleks sayılardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tezin temelini oluşturan spinorlar tanıtılmıştır. Ayrıca, üç boyutlu Öklid uzayındaki eğrilerin spinor gösterimleri verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin Frenet vektörlerine karşılık gelen C^2 uzayının bir elemanı olan bir spinor dikkate alınarak İnvolüt-Evolüt eğrilerinin spinor formülasyonu incelenmiştir. Bunun için, öncelikle, İnvolüt-Evolüt eğrilerinin arasındaki ilişkiler kullanılarak bu eğrilere karşılık gelen C^2 uzayındaki spinorların arasındaki ilişkiler teoremlerle ifade edilmiştir. Ayrıca İnvolüt-Evolüt eğrilerine karşılık gelen bu iki spinorun bileşenleri arasındaki ilişkinin nasıl olduğu bir teoremle verilmiştir. Son olarak bir örnek verilerek tanım ve teoremler desteklenmiştir. Beşinci bölüm ise sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

2019, 45 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Spinorlar, İnvolüt-Evolüt Eğrileri.

ABSTRACT

Master Thesis

SPINOR REPRESENTATION OF INVOLUTE-EVOLUTE CURVES IN THREE DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Neslihan Cansu TANDOĞAN

Erzincan Binali Yıldırım University
Instute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tülay ERİŞİR

This thesis consists of five chapters. The first section has been designated for introduction. In the second section, basic definitions and theorems have been given in Euclidean space. Then, complex numbers have been mentioned in terms of introduction to spinor. In the third chapter, spinors, which form the basis of this thesis, have been introduced. In addition, spinor representations of curves in three-dimensional Euclidean space are given.

The fourth section constitutes the original part of this thesis. In this section, the spinor formulation of Involute-Evolute curves in three-dimensional Euclidean space has been examined by considering spinors that are elements of space C^2. To do this, first of all, the relations between the spinors in the space C^2 corresponding to these curves have been expressed with theorems by using the relationships between the Involute-Evolute curves. In addition, the relationship between the components of these two spinor, which corresponds to the Involute-Evolute curves, has been given by a theorem. Finally, an example supporting the definitions and theorems has been given. The fifth section has been designated for conclusions and propositions.

2019, 45 Pages

Keywords: Spinors, Involute-Evolute Curves.

TEŞEKKÜR

Yazmış olduğum bu tezde her zaman desteğini asla esirgemeyen, zorlandığım durumlarda yardımcı olan, yorulduğumda motive kaynağı olan danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Tülay ERİŞİR' e, manevi desteklerinden dolayı annem, babam ve nişanlıma sonsuz teşekkürlerimi iletirim.

Neslihan Cansu TANDOĞAN
Haziran, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

α, β	E^3 de Herhangi İki Eğri
E^n	n - Boyutlu Öklid Uzayı
I	E^n de Açık Aralık
P, Q, R	E^n de Herhangi Üç Nokta
R^n	n Boyutlu Reel İç Çarpım Uzayı
V	Vektör Uzayı
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$	E^n de Herhangi İki Vektör
κ, τ	Üç Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Eğrilikleri
$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$	Üç Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Vektörleri
$\langle , \rangle$	İç Çarpım
$\lVert \ \rVert$	Norm
$\wedge$	Vektörel Çarpım
ξ, ϕ	Spinorlar
$\overline{\xi}$	ξ Spinorunun Eşleniği
ξ^t	ξ Spinorunun Transpozu
$\hat{\xi}$	ξ Spinorunun Eşi

1. GİRİŞ

Eğri teorisi, diferensiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biridir. Şu ana kadar birçok çalışmada, farklı boyutlarda ve farklı uzaylarda eğri teorisi çalışılmıştır. Günümüzde de çalışmalara devam edilmektedir. Üç boyutlu Öklid uzayı ise bu tezde olduğu gibi eğri çalışmaları için en çok tercih edilen uzaydır. Eğri teorisinin sadece teorikte değil güncel yaşantıda da uygulamaları oldukça fazladır. Örneğin; ekonomide sayısal veriler, eğriler sayesinde yorumlanmaktadır. Kalp grafisinde ekranda çıkan görüntü yine bir eğridir. Eğri teorisinin tarihsel süreci göz önüne alınırsa, Newton ve Leibniz' in eğri ve eğrilik üzerine çalışmaları eğri teorisinin temel taşlarındandır. 1700' lü yıllarda Euler, eğrilik tanımını verdikten sonra Monge, uzay eğrisi teorisini ortaya koymuştur. 1847-1851 yıllarında ise Frenet ve Serret, birbirinden bağımsız olarak şu an Frenet çatısı ve Serret-Frenet formülleri olarak bilinen formüller üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Uzayda hareketli bir nokta genellikle bir eğri çizer. Bu durumda, hareket için harcanan zaman parametre aralığını temsil eder. Dolayısıyla bir eğriyi tanımlamada parametre önemli bir yer tutmaktadır. Hatta özel olarak eğrinin parametresi, yay parametresi olarak seçilirse büyük bir kolaylık sağlanmaktadır. Eğriyi tanımladıktan sonra ise parametreye bağlı olarak eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplanabilir. Bunlar eğriyi karakterize eden hesaplamalardır. Uzayda herhangi iki eğri alındığında; bu iki eğrinin karşılıklı noktalarındaki Frenet vektörleri ve eğrilikleri arasında ilişki kurularak bazı özel eğri tanımları yapılmıştır. Bunlardan en çok bilinenleri İnvolüt-Evolüt eğrileridir. 1668 yılında C. Huygens daha kusursuz bir saat yapmaya çalışırken involütleri keşfetmiştir (Millman ve Parker, 1977). Daha sonra İnvolüt-Evolüt eğri çiftleri ile ilgili bilinen temel teorem ve sonuçlara Millman ve Parker (1977), Hacısalihoğlu (1983) ve Sabuncuoğlu (2014) açıklık getirmişlerdir. Üç boyutlu Öklid uzayında İnvolüt-Evolüt eğrileri ile ilgili yapılan bir diğer temel çalışma ise Çalışkan ve Bilici tarafından verilmiştir (2002). Günümüze kadar farklı uzaylarda ve farklı boyutlarda İnvolüt-Evolüt eğrileri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır (Turgut ve Esin, 1992; Bükcü ve Karaca, 2007; Bilici ve Çalışkan, 2009; Akyiğit vd., 2010).

Spinorlar ilk kez Kuantum Mekaniğinde fizikçiler tarafından kullanılmıştır. 1913' te ise spinorların en genel matematiksel formu Cartan tarafından basit grupların lineer gösterimleri araştırılırken keşfedilmiştir (Cartan, 1913). 1928' de Dirac tarafından tanımlanan Dirac operatörü kavramı sonrasında ortogonal grupların evrensel örtü gruplarının temsillerinin ilk inşası bu çalışmada ortaya çıkmıştır. Dört boyutlu uzayda ise spinorlar, aslında bir spinorun bileşenlerinden oluşan dört dalga fonksiyonu olan bir elektron için verilen Dirac' ın ünlü denklemlerini oluşturur. Genel olarak bunun gibi spinorlarla ilgili sayısız çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların en iyilerinden bir tanesi de Weyl ve Brauer tarafından verilen çalışmadır (1935). Geometrik anlamda ise spinorlar ilk kez yine Cartan tarafından kullanılmıştır (1966). Cartan aynı zamanda Lie gruplarını ilk keşfedenlerden biri olup Fransız bir matematikçidir. Cartan' ın çalışmasındaki amaçlardan biri spinorların sadece geometrik tanımını vererek spinor teorisini geliştirmek ve bununla birlikte diferensiyel geometri, grup teorisi ve matematiksel fiziğe önemli katkılarda bulunmaktır. Şu ana kadar ki literatürde olan "Matematikçiler tarafından kullanılan spinorlar ile fizikçiler tarafından kullanılan spinorlar farklıdır" algısı aslında şu şekildedir. Fizikçilerin ve matematikçilerin özellikle de tensör üzerine çalışmalar yapan bilim insanlarının kullandığı spinorlar C^2 uzayı üzerine tanımlı C değerli katlı lineer dönüşümlerdir. Bu özellikleri sayesinde tensörlere benzetilirler. Ya da bu tezde de olduğu gibi spinorlara geometrik anlamda multilineer özellikleri olmadan sadece vektörel objeler olarak bakılabilir.

Özel üniter matrisler grubu olan $SU(2)$ yi temsil eden Pauli matrisleri ile iki kompleks bileşenli spinorlar cebiri, üç boyutlu reel uzayda dönme hareketlerinin güzel bir gösteriminin verilmesini sağlar. Bununla ilgili Vivarelli' nin bir çalışması mevcuttur. Vivarelli bu çalışmasında, üç boyutlu Öklid uzayında Euler teoreminin vektör formülünden türetilen bir indeksli spinorlara ve kuaterniyonlara yeni bir yaklaşım sunmuştur (1984). Daha sonra Del Castillo ve Barrales, üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin Frenet vektörleri ve eğriliklerinin spinor gösterimini ifade etmiştir (2004). Bu çalışma eğri teorisi çalışanlar için spinorlarla ilgili temel bir çalışmadır. Bu çalışmadan yola çıkarak Kişi ve Tosun, üç boyutlu Öklid uzayında yüzey üzerinde bir eğrinin Darboux çatısının spinor gösterimini elde etmiştir ve Frenet çatısı ile Darboux çatısının arasındaki ilişkinin spinor formülasyonunu vermiştir (2015). Daha sonra Ünal vd. üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin Bishop çatısının spinor denklemlerini elde etmiştir (2013). Bahsedilen çalışmalardan yola çıkarak Erişir vd. "Üç boyutlu Minkowski uzayında eğrinin Frenet çatısına nasıl bir spinor karşılık gelebilir?" sorusunun cevabı olarak hiperbolik spinorları çalışmışlardır (Erişir vd., 2015; Ketenci vd., 2015; Balcı vd., 2015).

Bu tezin amacı ise üç boyutlu Öklid uzayında bazı özel eğrilerin spinor gösterimini vermektir. Bunun için öncelikle Cartan (1966) tarafından verilen spinorlar tanıtılmıştır. Daha sonra Del Castillo ve Barrales (2004) tarafından ifade edilen üç boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin Frenet vektörleri ve eğriliklerinin spinor formülasyonu verilmiştir. Bu temel bilgilerden yola çıkılarak üç boyutlu Öklid uzayında İnvolüt-Evolüt eğrileri göz önüne alınmıştır. Bu eğrilerin her birine aslında C^2 uzayında bir vektör olan spinorlar karşılık getirilmiştir. Bu eşleştirme sayesinde İnvolüt-Evolüt eğrilerinin arasındaki ilişkiler göz önüne alınarak bu eğrilere karşılık gelen spinorları arasındaki ilişkiler teoremlerle ifade edilmiştir. Son olarak tezde verilen tanım ve teoremleri destekleyen bir örnek verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm iki alt başlıktan oluşmaktadır. İlk bölümde Öklid uzayında başlıca temel ve tanımlara yer verilmiştir. İkinci bölümde ise spinorlara hazırlık olarak kompleks sayılar ile ilgili başlıca tanımlar verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1. A boştan farklı bir cümle ve V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer, aşağıdaki şartları sağlayan

$$\begin{aligned} f: A\times A &\to V \\ (P,Q) &\to f(P,Q)=\boldsymbol{PQ} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa A ya V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

(A1) $\forall P,Q,R\in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$

(A2) $\forall P\in A$ ve $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$ için $f(P,Q)=\boldsymbol{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q\in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2. A, bir reel afin uzay ve V, A ile birleştirilen $n-$boyutlu vektör uzayı olsun. $V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n): x_i\in R\}$ vektör uzayında herhangi iki vektör $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V\times V &\to R \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\to \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \end{aligned}$$

şeklinde Öklid iç çarpımı tanımlanırsa A afin uzayına Öklid uzayı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Özel olarak $A=R^n$ cümlesi $V=R^n$ ile birleşen $n-$boyutlu bir afin uzay ve $V=R^n$ bir iç çarpım uzayı olduğundan R^n afin uzayı bir Öklid uzayıdır. Bundan sonra $A=R^n$

Öklid uzayı standart Öklid uzayı anlamında E^n ile gösterilecektir.

Tanım 2.3. $\forall \boldsymbol{x} \in R^n$ için

$$\begin{aligned} \| \; \| &: R^n \to R^+ \\ \boldsymbol{x} &\to \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona norm fonksiyonu ve $\|\boldsymbol{x}\|$ pozitif reel sayısına da $\boldsymbol{x}$ vektörünün normu denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3. yardımıyla uzaklık tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.4.

$$\begin{aligned} d &: E^n \times E^n \to R^+ \\ (X,Y) &\to d(X,Y) = \|\boldsymbol{XY}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu; $d(X,Y)$ reel sayısına da X ve Y noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.5.

$$\begin{aligned} d &: E^n \times E^n \to R^+ \\ (X,Y) &\to d(X,Y) = \|XY\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.6. $\forall X,Y,Z \in E^n$ için $\boldsymbol{XY}$ ile $\boldsymbol{XZ}$ vektörleri arasındaki $\theta \in R$ açısı, $0 \le \theta \le \pi$ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{XY}, \boldsymbol{XZ} \rangle}{\|\boldsymbol{XY}\| \|\boldsymbol{XZ}\|}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.7. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında $n+1$ tane nokta $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ şeklinde alınsın. Bu nokta cümlesine R^n, $n-$boyutlu reel vektör uzayında karşılık gelen $\{\boldsymbol{P_0P_1}, \boldsymbol{P_0P_2}, ..., \boldsymbol{P_0P_n}\}$ vektör $n-$lisi R^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ sistemine E^n de Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.8. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında

$$E_0 = (0,0,...,0),\ \ E_1 = (1,0,0,...,0),............E_n = (0,0,...,1)$$

noktaları bir dik çatı oluştururlar ve $\langle \boldsymbol{E_0E_i}, \boldsymbol{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij}$ dir. E^n deki $\{E_0, E_1, E_2, ..., E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.9. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında bir X noktasının standart Öklid çatısına göre ifadesi

$$\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_i$$

olmak üzere

$$x_i : E^n \to R\ (1 \le i \le n)$$

şeklinde tanımlı x_i fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları denir. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $n-$li fonksiyon cümlesine ise Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.10. $I \subseteq R$ bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E^n \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned}$$

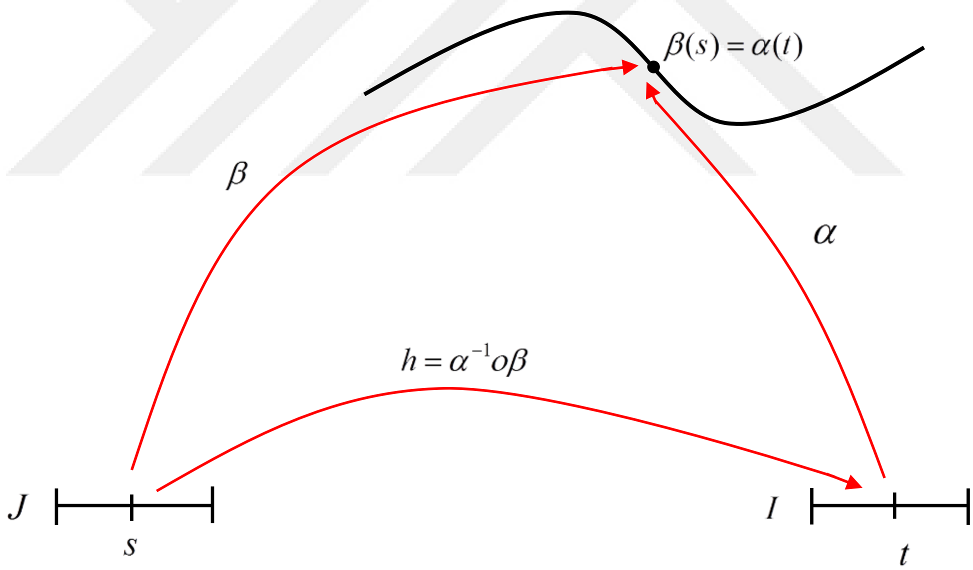
şeklinde tanımlanan diferensiyellenebilir α fonksiyonuna E^n de bir eğri denir.

Burada (I,α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu, $I \subset R$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.11. E^n de (I,α) ve (J,β) şeklinde iki koordinat komşuluğu ile verilen $\alpha : I \to E^n$ ve $\beta : J \to E^n$ diferensiyellenebilir eğriler göz önüne alınsın.

$$h : \alpha^{-1} o \beta : J \to I$$

olacak şekilde bir diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa $\beta = \alpha o h$ eğrisine α eğrisinin yeniden parametrizasyonu denir ya da α eğrisinin I aralığındaki parametresinin J aralığındaki parametre ile değişimi denir (Hacısalihoğlu, 1983).



Şekil 2.1. Parametre değişimi (Hacısalihoğlu, 1983)

Tanım 2.12. E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında α eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\to R \\ t &\to \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da eğrinin skalar hızı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.13. E^n, n- boyutlu Öklid uzayında E^n eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ oluyorsa α eğrisine birim hızlı eğri denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.14. $\alpha : I \to E^n$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ olmak üzere α eğrisi birim hızlı ise $s \in I$ parametresine eğrinin yay parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.15. Her noktasındaki hızı sıfırdan farklı olan eğriye ($\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| \neq 0$) regüler eğri denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.16. $\alpha : I \to E^n$, (I,α) koordinat komşuluğunda verilen bir eğri olsun. $a, b \in I$ için a dan b ye α eğrisinin yay uzunluğu, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğa karşılık gelir ve

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \ t \in I$$

şeklinde tanımlanır. Bu reel sayıya a dan b ye α eğrisinin yay uzunluğu denir. Yay uzunluğu koordinat komşuluğundan bağımsızdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.17. $\alpha : I \subset R \to E^n$ herhangi bir eğri olmak üzere $\psi = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ şeklinde verilen lineer bağımsız cümlesi göz önüne alınsın. $\forall \alpha(k)$ ve $k > r$ için $\alpha^k \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere ψ cümlesinden elde edilen $\{\boldsymbol{V}_1(t), \boldsymbol{V}_2(t), ..., \boldsymbol{V}_r(t)\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı, her bir $\boldsymbol{V}_i$, $1 \leq i \leq r$ vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.18. Herhangi bir $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı $\{\boldsymbol{V}_1(t), \boldsymbol{V}_2(t), ..., \boldsymbol{V}_r(t)\}$ olsun. Buna göre aşağıda tanımlanan k_i fonksiyonuna i. eğrilik fonksiyonu denir.

$$k_i : I \to R, \quad 1 \le i < r$$
$$s \to k_i(t) = \langle \mathbf{V}_i'(t), \mathbf{V}_{i+1}(t) \rangle$$

Burada $t \in I$ için $k_i(t)$ reel sayısına da $\alpha(t)$ noktasında α eğrisinin i. eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.17 ve Tanım 2.18' den yola çıkılarak E^3, üç boyutlu Öklid uzayında Serret-Frenet vektörleri ve eğrilikleri ile ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.2. $\alpha : I \to E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Serret- Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{B}(t)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(t) &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t) \\ \boldsymbol{N}(t) &= \boldsymbol{B}(t) \times \boldsymbol{T}(t) \\ \boldsymbol{B}(t) &= \frac{1}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.3. $\alpha : I \to E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$, α eğrisinin yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(s) &= \alpha'(s) \\ \boldsymbol{N}(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}\alpha''(s) \\ \boldsymbol{B}(s) &= \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.4. $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi verilsin. $t \in I$ herhangi bir parametre olmak üzere (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği $\kappa(t)$ ve burulması $\tau(t)$, sırasıyla,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} \tag{2.3}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.5. $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. Verilen bu eğrinin Frenet 3- ayaklısı $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ olsun. Eğrilik ve burulması $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olmak üzere, (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}'(s) &= \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \\ \boldsymbol{N}'(s) &= -\kappa(s)\boldsymbol{T}(s) + \tau(s)\boldsymbol{B}(s) \\ \boldsymbol{B}'(s) &= -\tau(s)\boldsymbol{N}(s) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Benzer şekilde birim hızlı olmayan bir eğrinin Frenet türev formülleri aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 2.6. $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi herhangi bir $t \in I$ parametresi ile verilsin. Verilen bu eğrinin Frenet 3- ayaklısı $\{\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{B}(t)\}$ olsun. Eğrilik ve burulması $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ olmak üzere, (α) eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}'(t) &= \|\alpha'(t)\|\kappa(t)\boldsymbol{N}(t) \\ \boldsymbol{N}'(t) &= \|\alpha'(t)\|\left(-\kappa(t)\boldsymbol{T}(t) + \tau(t)\boldsymbol{B}(t)\right) \\ \boldsymbol{B}'(t) &= -\|\alpha'(t)\|\tau(t)\boldsymbol{N}(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.7. $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$, (α) eğrinin yay parametresi olsun. Eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter koşul eğrinin eğriliğinin sıfır olmasıdır (Yüce, 2017).

Teorem 2.8. $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$, (α) eğrinin yay parametresi olmak üzere (α) eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul eğrinin burulmasının sıfır olmasıdır (Yüce, 2017).

Teorem 2.9. $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ eğrinin yay parametresi olsun. Eğrinin eğriliği sabit ve sıfırdan büyük $(\kappa = sabit > 0)$ ve eğrinin burulması sıfır $(\tau = 0)$ olması için gerek ve yeter koşul (α) eğrisinin çember olmasıdır (Yüce, 2017).

Teorem 2.10. $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ eğrinin yay parametresi olsun. Eğrinin eğriliği sabit ve sıfırdan büyük $(\kappa = sabit > 0)$ ve eğrinin burulması sabit $(\tau = sabit)$ olması için gerek ve yeter koşul (α) eğrisinin dairesel helis olmasıdır (Yüce, 2017).

Tanım 2.19. $\alpha : I \to E^3$, (I, α) koordinat komşuluğunda birim hızlı bir eğri; $\beta : I \to E^3$, (I, β) koordinat komşuluğunda herhangi bir eğri olsun. Bu eğrilerin Frenet 3- ayaklıları, sırasıyla, $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ ve $\{\boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*\}$ olmak üzere;

$$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^* \rangle = 0 \tag{2.6}$$

ise (β) eğrisine (α) eğrisinin İnvolütü (basit) ve (α) eğrisine de (β) eğrisinin Evolütü (mebsut) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

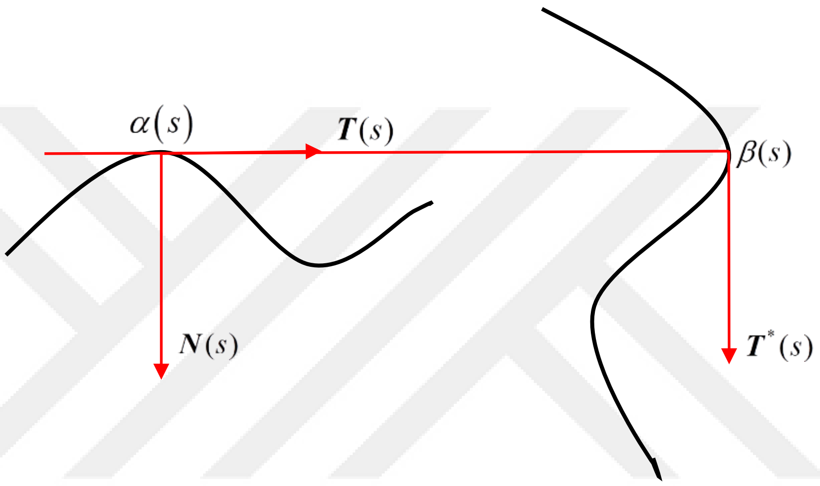
Teorem 2.11. $\alpha : I \to E^3$ ve $\beta : I \to E^3$ eğrileri verilsin. (α) birim hızlı bir eğri ve (β) birim hızlı olmayan bir eğri olmak üzere, (β) eğrisi (α) eğrisinin bir involütü olarak göz önüne alınsın. Bu durumda $\forall s \in I$, $c = sbt$ için

$$d(\alpha(s),\beta(s)) = |c-s|$$

dir. Böylece

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c-s)\boldsymbol{T}(s) \tag{2.7}$$

eşitliği yazılabilir (Hacısalihoğlu, 1983).



Şekil 2.2. İnvolüt-Evolüt Eğrileri

Teorem 2.12. $\alpha : I \to E^3$ ve $\beta : I \to E^3$ eğrileri verilsin. α ve β, İnvolüt- Evolüt eğri çifti olsun. (α) eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$ ile (β) eğrisinin Frenet vektörleri $\{\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*\}$ arasında

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^* &= \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{N}^* &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-\kappa\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B}\right) \\ \boldsymbol{B}^* &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\tau\boldsymbol{T}+\kappa\boldsymbol{B}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

bağıntıları vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.13. $\alpha : I \to E^3$ ve $\beta : I \to E^3$ eğrileri verilsin. (α) ve (β), E^3 de İnvolüt-Evolüt eğri çifti olsun. (α) eğrisinin Frenet eğrilikleri κ, τ ve (β) eğrisinin Frenet eğrilikleri κ^*, τ^*;

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \frac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\left|(c-s)\kappa\right|} \\ \tau^* &= \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\left|(c-s)\kappa\right|(\kappa^2+\tau^2)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.2. Kompleks Sayılar

Kompleks sayıların cümlesi

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1 \right\} \tag{2.10}$$

biçiminde ifade edilir. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için $\operatorname{Re}(z) = x$ ifadesine z kompleks sayısının reel kısmı, $\operatorname{Im}(z) = y$ ifadesine ise z kompleks sayının sanal kısmı denir (Sasane ve Sasane, 2014).

Bir $z = x + iy$ kompleks sayısının eşleniği ve normu sırasıyla

$$\bar{z} = x - iy \ \text{ ve } \ \|z\| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.11}$$

eşitlikleriyle tanımlanır (Sasane ve Sasane, 2014).

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{C}$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

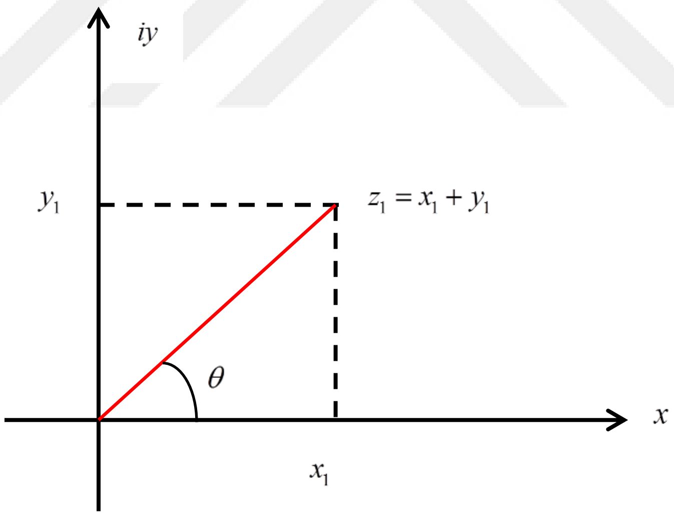
$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\lambda z_1=\lambda(x_1+iy_1)=\lambda x_1+i\lambda y_1$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Sasane ve Sasane, 2014).

Teorem 2.18. C cümlesi, üzerinde tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üstünde 2-boyutlu bir vektör uzayıdır (Sasane ve Sasane, 2014).

Kompleks sayılar cümlesi ile $\mathbb{R}^2$ arasında birebir bir eşleme mevcuttur. Yani her bir kompleks sayıya düzlem üstünde bir tek nokta, tersine düzlem üstündeki her bir noktaya da C de bir tek kompleks sayı karşılık gelir. $z_1=x_1+iy_1$ kompleks sayısı düzlemde (x_1,y_1) noktasına eşlenir ve kompleks sayının reel kısmı kartezyen koordinatlarda apsise, sanal kısmı da ordinata karşılık gelir (Sasane ve Sasane, 2014).



Şekil 2.3. Kompleks Düzlem

Şekil 2.2 ile verilen düzleme kompleks düzlem denir. Kompleks düzlemde $z_1=(x_1,y_1)$ ve $z_2=(x_2,y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$\|z_1-z_2\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \qquad (2.12)$$

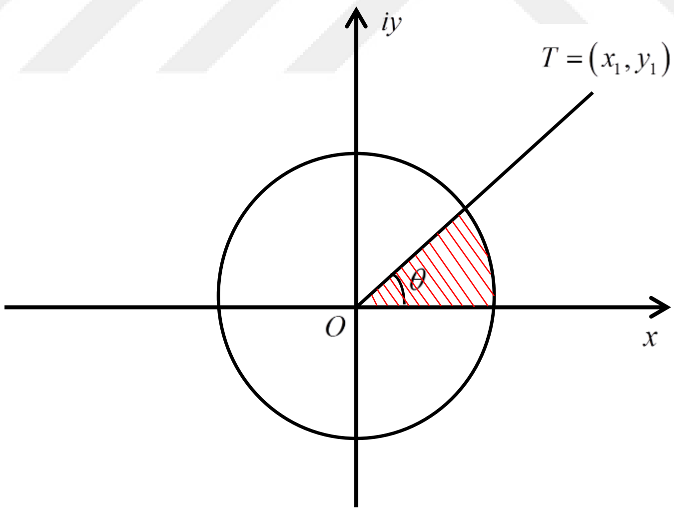
eşitliği ile tanımlanır. Bu düzlemde başlangıç noktasına olan uzaklıkları 1 birim olan kompleks sayıların cümlesi merkezcil birim çemberdir. Bu noktalar $x^2 + y^2 = 1$ şartını sağlarlar (Sasane ve Sasane, 2014).

Kompleks düzlemde her bir $z_1 = (x_1, y_1)$ kompleks sayısı bir $\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile gösterilebilir.

Bu durumda $\overrightarrow{OT}$ vektörü ile reel eksen arasında kalan yay uzunluğuna $z_1 = (x_1, y_1)$ sayısının argümenti denir ve

$$\theta_1 = \arctan \frac{y_1}{x_1} \tag{2.13}$$

biçiminde gösterilir (Sasane ve Sasane, 2014).



Şekil 2.4. Bir Kompleks Sayının Kompleks Düzlemde Gösterilmesi

$z_1 = (x_1, y_1)$ kompleks sayısının argümenti θ olmak üzere bir kompleks sayı

$$z_1 = \|z_1\| (\cos\theta + i \sin\theta) \tag{2.14}$$

eşitliği ile de ifade edilebilir. Bu gösterime kompleks sayının kutupsal gösterimi denir. Kutupsal koordinatlarda gösterim kompleks sayıların bir çok özelliğinin incelenmesinde kolaylık sağlar. Örneğin iki kompleks sayının çarpımı öyle bir kompleks sayıdır ki bu yeni kompleks sayının normu, çarpılan sayıların normları çarpımına; argümenti ise çarpılan sayıların argümentleri toplamına eşittir. Kısaca

$$z_1 = \|z_1\|\left(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)\right) \text{ ve } z_2 = \|z_2\|\left(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right) \tag{2.15}$$

olmak üzere

$$z_1 z_2 = \|z_1\|\|z_2\|\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$$

dir. $z = (x, y)$ kompleks sayısı

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Euler denklemi yardımıyla

$$z = \|z\|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = \|z\|e^{i\theta} = \|z\|e^{i(\theta + 2\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Bu durumda bir $z = (x, y)$ kompleks sayısının n. tam sayı kuvveti

$$z^n = \|z\|^n e^{i(n\theta)} = \|z\|^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

eşitliği ile tanımlanır (Sasane ve Sasane, 2014).

Teorem 2.19. Her $z = x + iy$ kompleks sayısı

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

biçiminde 2×2 tipinde bir reel matris ile ifade edilebilir (Tian, 1998).

Tanım 2.21. $\alpha(z)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ matrisine z kompleks sayısının temel matrisi denir (Tian, 1998).

Teorem 2.20. $z_1 = x_2 + iy_2$ ve $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha(z)$ temel matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar (Tian, 1998).

1. $\alpha(z_1 z_2) = \alpha(z_1)\alpha(z_2)$,

2. $\alpha(\alpha(z_1) z_2) = \alpha(z_1)\alpha(z_2)$,

3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha(z_1) = \alpha(z_2)$,

4. $\alpha(z_1 + z_2) = \alpha(z_1) + \alpha(z_2)$,

5. $\alpha(\lambda z_1) = \lambda \alpha(z_1)$,

6. $iz(\alpha(z_1)) = z_1 + \overline{z_1}$,

7. $\|z_1\|^2 = \det(\alpha(z_1))$.

Teorem 2.21. $z = x + iy \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x+yi & 0 \\ 0 & x-yi \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \alpha(z) \tag{2.16}$$

eşitliği mevcuttur. Burada $P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ dir (Tian, 1998). Denk. 2.16 eşitliğine evrensel benzerlik eşitliği denir. Bu eşitlik yardımı ile aşağıdaki sonuçlar söylenebilir:

1. $\mathbb{C}$ cümlesi

$$\mathbb{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesine izomoftur. Bu iki cümle arasındaki izomorfizma

$$\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$$

$$z = x + iy \to \alpha(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

2. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

matrisi ile ifade edilebilir.

3. $\mathbb{C}'$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{C}$ cümlesi üstünde tek bir biçimde köşegenleştirilebilir (Tian, 1998).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Spinorlar

Bu bölümde geometrik anlamda temel bir çalışma olan Cartan (1966) tarafından tanıtılan spinorlar verilmiştir. Daha sonra Del Castillo ve Barrales (2004) tarafından verilen çalışmadaki spinorlardan bahsedilmiştir.

C^3, üç boyutlu kompleks vektör uzayı olmak üzere $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in C^3$ izotropik vektörü göz önüne alınsın. Bu durumda $\left\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right\rangle = 0$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}=0$ olur. C^3 vektör uzayında izotropik vektörler cümlesi, C^2 uzayında iki boyutlu bir yüzey oluşturur. Bu iki boyutlu yüzey ξ_1 ve ξ_2 koordinatları tarafından parametrelendirilirse

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1^{\,2}-\xi_2^{\,2} \\ x_2 &= i(\xi_1^{\,2}+\xi_2^{\,2}) \\ x_3 &= -2\xi_1\xi_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde alınabilir. Denk. 3.1'in çözümünden ise

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \pm\sqrt{\frac{x_1-ix_2}{2}}, \\ \xi_2 &= \pm\sqrt{\frac{-x_1-ix_2}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan görülür ki; C^3 kompleks vektör uzayında her bir izotropik vektör $\left(\xi_0,\xi_1\right)$ ve $\left(-\xi_0,-\xi_1\right)$ olacak şekilde C^2 uzayında iki vektöre karşılık gelir. Tersine; C^2 uzayında bu şekilde verilen her iki vektöre aynı $\boldsymbol{x}$ izotropik vektörü karşılık gelir. Cartan, bu şekilde tanımlanan $\xi=\left(\xi_0,\xi_1\right)$ şeklindeki iki boyutlu kompleks vektörleri, spinor olarak adlandırmıştır. Ayrıca, Cartan, spinorların sadece iki boyutlu kompleks vektörler olmadığını aynı zamanda üç boyutlu kompleks izotropik vektörlerin bir temsili olduğunu vurgulamıştır (Cartan, 1966).

R^3, üç boyutlu reel vektör uzayında orijin etrafında dönmelerin grubu olan $SO(3)$ grubunu ve 2×2 boyutlu üniter matrisler grubu olan $SU(2)$ grubunu göz önüne alalım. Bilindiği üzere $SO(3)$ grubu, $SU(2)$ grubuna homomorfiktir. $SO(3)$ grubunun elemanları R^3 vektör uzayındaki vektörleri hareket ettirirken $SU(2)$ grubunun elemanları iki kompleks bileşenli vektörleri yani spinorları hareket ettirir (Goldstein, 1980; Sattinger ve Weaver, 1986; Del Castillo ve Barrales, 2004). Bu homomorfizm ve Cartan (1966) nın tanıttığı spinorlar göz önüne alınarak $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in R^3$ olmak üzere $\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}$ izotropik vektörü

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

spinoru ile eşleşsin. Bu durumda Denk. 3.2 yardımıyla $\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}=(x_1,x_2,x_3)\in C^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}x_1&=\xi_1^2-\xi_2^2\\ x_2&=i(\xi_1^2+\xi_2^2)\\ x_3&=-2\xi_1\xi_2\end{aligned}$$

alınabilir (Cartan, 1966; Del Castillo ve Barrales, 2004) . Bilindiği üzere Pauli matrisleri

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad P_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad P_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

olmak üzere bu matrisler, 2×2 boyutlu Hermityen ve üniter matrisler cümlesi için bir baz oluşturur. Pauli matrisleri ve $C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ matrisi kullanılarak σ matrisleri

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturulur (Del Castillo, 2003; Payne, 1952). Diğer taraftan bir ξ spinorunun eşi $\hat{\xi}$ olmak üzere; spinorun eşi

$$\hat{\xi} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\xi} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} \\ \overline{\xi_1} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Del Castillo ve Barrales, 2004). Bu bilgiler vasıtasıyla $\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}$ izotropik vektörü

$$\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b} = \xi^t \sigma \xi \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada t indisi transpozu simgeler. Bu durumda $\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}$ izotropik vektörünün bileşenleri Denk. 3.3 yardımıyla

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi^t \sigma_1 \xi = \xi_1^{\,2} - \xi_2^{\,2}(,,) \\ x_2 &= \xi^t \sigma_2 \xi = i(\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2}) \\ x_3 &= \xi^t \sigma_3 \xi = -2\xi_1\xi_2 \end{aligned}$$

şeklindeki gibi hesaplanır (Del Castillo ve Barrales, 2004).

Benzer şekilde bir $\boldsymbol{c} \in R^3$ vektörü göz önüne alınsın. $\boldsymbol{c}$ reel vektörü için

$$\boldsymbol{c} = -\hat{\xi}^t \sigma \xi \tag{3.4}$$

yazılırsa $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) \in R^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} c_1 &= -\hat{\xi}^t \sigma_1 \xi = -\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} & \overline{\xi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi_1}\xi_2 \\ c_2 &= -\hat{\xi}^t \sigma_2 \xi = -\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} & \overline{\xi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = i(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi_1}\xi_2) \\ c_3 &= -\hat{\xi}^t \sigma_3 \xi = -\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} & \overline{\xi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b} &= \xi^t \sigma \xi = (\xi_1^{\,2} - \xi_2^{\,2}, i(\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2}), -2\xi_1\xi_2) \\ \boldsymbol{c} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi = (\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi_1}\xi_2, i(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi_1}\xi_2), |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur (Del Castillo ve Barrales, 2004). Burada $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{ib}\in C^3$ bir izotropik vektör ve $\boldsymbol{c}\in R^3$ dür.

Gerçekten de

$$\overline{\boldsymbol{c}}=(\overline{\xi_1}\xi_2+\xi_1\overline{\xi_2},-i(\overline{\xi_1}\xi_2-\xi_1\overline{\xi_2}),|\xi_1|^2-|\xi_2|^2)=\boldsymbol{c}$$

olduğundan $\boldsymbol{c}\in R^3$ dür. Şimdi bu vektörlerin boyları hesaplansın. Öncelikle $\boldsymbol{c}\in R^3$ vektörünün boyu için

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{c}\|&=\sqrt{\left(\overline{\xi_1}\xi_2+\xi_1\overline{\xi_2}\right)^2+i^2\left((\overline{\xi_1}\xi_2-\xi_1\overline{\xi_2})\right)+\left(|\xi_1|^2-|\xi_2|^2\right)^2}\\
&=\sqrt{\overline{\xi_1}^2\xi_2^2+\xi_1^2\overline{\xi_2}^2+2|\xi_1|^2|\xi_2|^2-\xi_1^2\overline{\xi_2}^2-\overline{\xi_1}^2\xi_2^2+2|\xi_1|^2|\xi_2|^2+|\xi_1|^4+|\xi_2|^4-2|\xi_1|^2|\xi_2|^2}\\
&=\sqrt{|\xi_1|^4+2|\xi_1|^2|\xi_2|^2+|\xi_2|^4}\\
&=\sqrt{\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)^2}\\
&=|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\\
&=\overline{\xi}^t\xi
\end{aligned}\tag{3.6}$$

bulunur. $\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}\in C^3$ bir izotropik vektör olduğundan $\langle\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}\rangle=0$ dır. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}\rangle&=\langle(x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle\\
&=\left\langle\left(\xi_1^2-\xi_2^2,i(\xi_1^2+\xi_2^2),-2\xi_1\xi_2\right),\left(\xi_1^2-\xi_2^2,i(\xi_1^2+\xi_2^2),-2\xi_1\xi_2\right)\right\rangle\\
&=\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)^2+i^2(\xi_1^2+\xi_2^2)^2+\left(-2\xi_1\xi_2\right)^2\\
&=\xi_1^4+\xi_2^4-2\xi_1^2\xi_2^2-\xi_1^4-\xi_2^4-2\xi_1^2\xi_2^2+4\xi_1^2\xi_2^2\\
&=0
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\langle\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}\rangle=0+0i$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}\rangle&=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle+\langle i\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle+\langle\boldsymbol{a},i\boldsymbol{b}\rangle+\langle i\boldsymbol{b},i\boldsymbol{b}\rangle\\
&=\|\boldsymbol{a}\|^2+i\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle+i\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+i^2\|\boldsymbol{b}\|^2\\
&=\|\boldsymbol{a}\|^2+2i\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-\|\boldsymbol{b}\|^2
\end{aligned}$$

denkleminden

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2 \tag{3.7}$$

ve

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 \tag{3.8}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}\|^2 &= \langle \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}} \rangle = \langle \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b} \rangle \\
= \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 &= \left\langle \begin{matrix} \left(\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), -2\xi_1\xi_2\right), \\ \left(\overline{\xi_1^2} - \overline{\xi_2^2}, \bar{i}(\overline{\xi_1^2} + \overline{\xi_2^2}), \overline{-2\xi_1\xi_2}\right) \end{matrix} \right\rangle \\
&= \left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right)\left(\overline{\xi_1^2} - \overline{\xi_2^2}\right) + i\bar{i}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)(\overline{\xi_1^2} + \overline{\xi_2^2}) + 4\xi_1\overline{\xi_1}\xi_2\overline{\xi_2} \\
&= |\xi_1|^4 + |\xi_2|^4 - \xi_1^2\overline{\xi_2^2} - \overline{\xi_1^2}\xi_2^2 + |\xi_1|^4 + |\xi_2|^4 + \xi_1^2\overline{\xi_2^2} + \overline{\xi_1^2}\xi_2^2 + 4|\xi_1|^2|\xi_2|^2 \\
&= 2\left(|\xi_1|^4 + |\xi_2|^4 + 2|\xi_1|^2|\xi_2|^2\right)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\|\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 = 2\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)^2 \tag{3.9}$$

olduğu göz önüne alınırsa Denk. 3.7, Denk. 3.8 ve Denk. 3.9' dan

$$\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{c}\| = \overline{\xi}^t \xi$$

bulunur. O halde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R^3$ vektörlerinin boyları eşittir.

Diğer taraftan $\langle \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ iç çarpımı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle &= \left\langle \left(\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), -2\xi_1\xi_2\right), (\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi_1}\xi_2, i(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi_1}\xi_2), |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2) \right\rangle \\
&= \left(\xi_1^2 - \xi_2^2\right)\left(\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi_1}\xi_2\right) + i^2\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)\left(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi_1}\xi_2\right) - 2\xi_1\xi_2\left(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle &= 2\xi_1^{\,2}\,\overline{\xi_1}\xi_2-2\xi_2^{\,2}\xi_1\overline{\xi_2}-2\xi_1\xi_2\left|\xi_1\right|^2+2\xi_1\xi_2\left|\xi_2\right|^2\\
&= 2\xi_1^{\,2}\,\overline{\xi_1}\xi_2-2\xi_2^{\,2}\xi_1\overline{\xi_2}-2\xi_1\xi_2\overline{\xi_1}\xi_1+2\xi_1\xi_2\overline{\xi_2}\xi_2\\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla $\langle \boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle+i\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=0$ olduğundan $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=0$ ve $\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=0$ eşitlikleri bulunur. Ek olarak Denk. 3.8 göz önüne alınırsa

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in R^3$ vektörleri karşılıklı ortogonaldir. Ayrıca $\langle \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$ olduğundan $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ sıralı üçlüsü bir sağ sistem teşkil eder (Del Castillo ve Barrales, 2004).

Ek olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1. ξ ve ϕ herhangi iki spinor ve $\lambda,\mu\in C$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\textbf{\textit{i)}} && \overline{\phi^t\sigma\xi}=-\hat{\phi}^t\sigma\hat{\xi}\\
&\textbf{\textit{ii)}} && \widehat{\lambda\phi+\mu\xi}=\overline{\lambda}\hat{\phi}+\overline{\mu}\hat{\xi}\\
&\textbf{\textit{iii)}} && \hat{\hat{\xi}}=-\xi\\
&\textbf{\textit{iv)}} && \phi^t\sigma\xi=\xi^t\sigma\phi
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

eşitlikleri sağlanır (Del Castillo ve Barrales, 2004).

Önerme 3.2. Sıfırdan farklı bir ξ spinoru için $\{\xi,\hat{\xi}\}$ spinor ikilisi lineer bağımsızdır (Del Castillo ve Barrales, 2004).

3.2. Eğrilerin Spinor Gösterimi

$I\subseteq R$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha: I\to E^3$ olacak şekilde birim hızlı (α) regüler eğrisi göz önüne alınsın. O halde s, (α) eğrisinin yay parametresi olmak üzere

$\|\alpha'(s)\| = 1$ dir. Dolayısıyla Denk. 3.3 ve Denk. 3.4 göz önüne alınırsa (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ Frenet üçlüsüne

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} + i\boldsymbol{B} &= \xi^t \sigma \xi \\ \boldsymbol{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi \end{aligned} \tag{3.11}$$

olacak şekilde bir ξ spinoru karşılık gelir. Burada (α) eğrisi birim hızlı olduğundan $\overline{\xi}^t \xi = 1$ dir. Yani eşitliği $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 1$ vardır (Del Castillo ve Barrales, 2004). Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} + i\boldsymbol{B} &= \xi^t \sigma \xi = (\xi_1^{\,2} - \xi_2^{\,2}, i(\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2}), -2\xi_1\xi_2) \\ \boldsymbol{T} &= -\overline{\xi}^t \sigma \xi = (\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi_1}\xi_2, i(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi_1}\xi_2), |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2) \end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılır.

Şimdi (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ Frenet üçlüsüne karşılık gelen ξ spinoru için $\dfrac{d\xi}{ds}$ araştırılsın. $\{\xi, \hat{\xi}\}$ spinor ikilisi spinorlar için bir baz teşkil ettiğinden

$$\frac{d\xi}{ds} = f\xi + g\hat{\xi} \tag{3.13}$$

yazılabilir. Burada f ve g fonksiyonları keyfi, kompleks değerli fonksiyonlardır. Diğer taraftan Denk. 3.11 deki ilk eşitliğin türevi alınır ve Denk. 2.4 göz önüne alınırsa

$$-\kappa\boldsymbol{T} - i\tau(\boldsymbol{N} + i\boldsymbol{B}) = 2f(\boldsymbol{N} + i\boldsymbol{B}) - 2g\boldsymbol{T} \tag{3.14}$$

bulunur. Buradan $f = \dfrac{-i\tau}{2}$, $g = \dfrac{\kappa}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla Denk. 3.13 yardımıyla

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2}(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}) \tag{3.15}$$

bulunur. Burada $\kappa, \tau,$ (α) eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Dolayısıyla $\frac{d\xi}{ds}$ ye karşılık gelen eğrinin Frenet denklemi tek bir spinor denklemi tarafından ifade edilir (Del Castillo ve Barrales, 2004).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, Del Castillo ve Barrales (2004) tarafından yapılan çalışmadan yola çıkılarak bir (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ Frenet vektörleri ile, aslında, C^2 uzayında bir vektör olan bir ξ spinorunun eşleştirilmesi göz önüne alınmıştır. Bu çalışmadan yola çıkılarak, öncelikle, birim hızlı bir (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ Frenet vektörlerinin ξ spinoru cinsinden ayrı ayrı hesaplanması bir teorem ile ifade edilmiştir. Daha sonra, (α) eğrisinin involütü olarak alınan birim hızlı olmayan bir (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*,\boldsymbol{T}^*\}$ Frenet vektörlerine bir ϕ spinoru karşılık getirilerek bu Frenet vektörleri ve spinoru arasındaki ilişki verilmiştir. Bu teoremlerden yola çıkılarak İnvolüt-Evolüt eğrilerinin Frenet vektörlerine iki spinor karşılık getirilmiştir. Dolayısıyla İnvolüt-Evolüt eğrilerinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiler kullanılarak bu eğrilere karşılık gelen C^2 uzayındaki spinorlar arasındaki ilişkiler teoremlerle ifade edilmiştir. Son olarak bir örnek verilmiştir.

$I \subseteq R$ bir açık aralık olmak üzere $\alpha : I \to E^3$ olacak şekilde birim hızlı (α) regüler eğrisi göz önüne alınsın. Bu durumda Denk. 3.11 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere bu eğrinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ Frenet üçlüsüne bir ξ spinoru karşılık gelsin. O halde bu vektörlerin spinor denklemleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi \\ \boldsymbol{N} &= \frac{1}{2}\left(\xi^t \sigma \xi - \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}\right) \\ \boldsymbol{B} &= -\frac{i}{2}\left(\xi^t \sigma \xi + \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

dir.

İspat: $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı regüler bir eğri olmak üzere bu eğrinin Frenet üçlüsü $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ göz önüne alınsın. O halde Denk. 3.11' den $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ Frenet üçlüsüne karşılık gelen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}+i\boldsymbol{B} &= \xi^t \sigma \xi \\ \boldsymbol{T} &= -\hat{\xi}^t \sigma \xi \end{aligned} \tag{4.2}$$

olacak şekilde bir ξ spinoru vardır. Burada Denk. 2.2 göz önüne alınırsa (α) eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\boldsymbol{T}(s)$ teğet vektörü için

$$\boldsymbol{T} = \alpha' = -\hat{\xi}^t \sigma \xi \tag{4.3}$$

eşitliği yazılabilir. Denk. 4.3 göz önüne alınarak (α) eğrisinin ikinci türevi spinorlar cinsinden

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -(\hat{\xi}^t \sigma \xi)' = -\left(\left(\hat{\xi}'\right)^t \sigma \xi\right) - \hat{\xi}^t \sigma \xi' \\ &= -\left(\frac{1}{2}\left(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}\right)^t \sigma \xi\right) - \hat{\xi}^t \sigma \left(\frac{1}{2}\left(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}\right)^t \sigma \xi - i\tau\hat{\xi}^t \sigma \xi + \kappa\hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}\right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Son denklemde Önerme 3.1 dikkate alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa α'' ve spinor denkliği

$$\alpha'' = -\frac{1}{2}\left[i\tau\hat{\xi}^t \sigma \xi - \kappa\xi^t \sigma \xi - i\tau\hat{\xi}^t \sigma \xi + \kappa\hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}\right]$$

olmak üzere

$$\alpha'' = \frac{\kappa}{2}\left(\xi^t \sigma \xi - \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}\right) \tag{4.4}$$

olarak bulunur. Üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir $\alpha = \alpha(s)$ regüler eğrisi için $\alpha'' = \kappa \boldsymbol{N}$ eşitliği ve Denk. 4.4 göz önüne alınarak (α) eğrisinin $\boldsymbol{N}$ normal vektörü ξ spinor cinsinden

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}\left(\xi^t \sigma \xi - \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}\right) \tag{4.5}$$

olarak elde edilir. Ya da bir başka yazımla Denk. 4.5 ve Önerme 3.1 dikkate alınırsa $\boldsymbol{N}$ normal vektörü

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}\left(\xi^t \sigma \xi + \overline{\xi^t \sigma \xi}\right)$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde (α) eğrisinin $\boldsymbol{B}$ binormal vektörü ξ spinor cinsinden elde edilebilir. Bunun için Denk. 2.4' de verilen Frenet türev formüllerinden $\boldsymbol{N}' = -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}$ formülü kullanılarak $\boldsymbol{B}$ vektörüne karşılık gelen spinor denklemi aşağıdaki gibi bulunabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}' &= \frac{1}{2}\left(\xi'^t \sigma \xi + \xi^t \sigma \xi' - \hat{\xi}'^t \sigma \hat{\xi} - \hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}'\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}\right)^t \sigma \xi + \xi^t \sigma \frac{1}{2}\left(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}\right) - \frac{1}{2}\left(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}\right)^t \sigma \hat{\xi} - \hat{\xi}^t \sigma \frac{1}{2}\left(-i\tau\xi + \kappa\hat{\xi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[-i\tau\xi^t\sigma\xi + \kappa\hat{\xi}^t\sigma\xi - i\tau\xi^t\sigma\xi + \kappa\xi^t\sigma\hat{\xi} - i\tau\hat{\xi}^t\sigma\hat{\xi} - \kappa\xi^t\sigma\hat{\xi} - i\tau\hat{\xi}^t\sigma\hat{\xi} + \kappa\hat{\xi}^t\sigma\xi\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[-2i\tau\xi^t\sigma\xi - 2i\tau\hat{\xi}^t\sigma\hat{\xi} + 2\kappa\xi^t\sigma\hat{\xi} + 2\kappa\hat{\xi}^t\sigma\xi\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-i\tau\xi^t\sigma\xi - i\tau\hat{\xi}^t\sigma\hat{\xi} + \kappa\xi^t\sigma\hat{\xi} + \kappa\hat{\xi}^t\sigma\xi\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-i\tau\left(\xi^t\sigma\xi + \hat{\xi}^t\sigma\hat{\xi}\right) + 2\kappa\hat{\xi}^t\sigma\xi\right]
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2}\left[-i\tau\left(\xi^t\sigma\xi+\hat{\xi}^t\sigma\hat{\xi}\right)+2\kappa\hat{\xi}^t\sigma\xi\right]=-\kappa\left(-\hat{\xi}^t\sigma\xi\right)+\tau\boldsymbol{B}$$

eşitliğinden $\left(\alpha\right)$ eğrisinin $\boldsymbol{B}$ binormal vektörü

$$\boldsymbol{B}=-\frac{i}{2}\left(\xi^t\sigma\xi+\hat{\xi}^t\sigma\hat{\xi}\right) \tag{4.6}$$

veya

$$\boldsymbol{B}=-\frac{i}{2}\left(\xi^t\sigma\xi-\overline{\xi^t\sigma\xi}\right)$$

şeklinde bulunabilir. Böylece ispat biter.

Diğer taraftan bu eşitliklerin sağlaması kompleks sayılar kullanılarak yapılabilir. Gerçekten de; $\boldsymbol{N}+i\boldsymbol{B}=\xi^t\sigma\xi$ eşitliğinde $\left(\alpha\right)$ eğrisinin $\boldsymbol{N}$ normal ve $\boldsymbol{B}$ binormal vektörleri reel vektörler olduğundan bu vektörler

$$\boldsymbol{N}=\mathrm{Re}(\xi^t\sigma\xi)$$
$$\boldsymbol{B}=\mathrm{Im}(\xi^t\sigma\xi)$$

olarak yazılabilir. Buradan kompleks sayıların özellikleri $\left(\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}\right.$ ve $\left.i\,\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2}\right)$ kullanılarak

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}\left(\xi^t\sigma\xi+\overline{\xi^t\sigma\xi}\right)$$
$$\boldsymbol{B}=-\frac{i}{2}\left(\xi^t\sigma\xi-\overline{\xi^t\sigma\xi}\right)$$

eşitlikleri bulunur.

Bundan sonraki işlemlerde Denk. 4.3, 4.5 ve 4.6' da verilen (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ Frenet vektörlerine karşılık gelen spinor denklemlerinin bileşenleri kullanılacaktır. Dolayısıyla bu eşitliklerin bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Bunun için öncelikle $\hat{\xi}^t \sigma \hat{\xi}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} & \overline{\xi_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} \\ \overline{\xi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} & -\overline{\xi_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} \\ \overline{\xi_1} \end{pmatrix} = \overline{\xi_2}^2 - \overline{\xi_1}^2 \\
&\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} & \overline{\xi_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} \\ \overline{\xi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\overline{\xi_2} & i\overline{\xi_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} \\ \overline{\xi_1} \end{pmatrix} = i\left(\overline{\xi_2}^2 + \overline{\xi_1}^2\right) \\
&\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} & \overline{\xi_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} \\ \overline{\xi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\xi_1} & \overline{\xi_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{\xi_2} \\ \overline{\xi_1} \end{pmatrix} = \overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2} + \overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2} = 2\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitlikleri bulunur. Buradan Denk. 4.1 ve Denk. 4.7 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \left(\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi_1}\xi_2,\ \ i(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi_1}\xi_2),\ \ |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2\right) \\
\boldsymbol{N} &= \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \overline{\xi_2}^2 + \overline{\xi_1}^2,\ \ i\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \overline{\xi_1}^2 - \overline{\xi_2}^2\right),\ \ -2\xi_1\xi_2 - 2\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2}\right) \\
\boldsymbol{B} &= -\frac{i}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \overline{\xi_2}^2 - \overline{\xi_1}^2,\ \ i\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \overline{\xi_1}^2 + \overline{\xi_2}^2\right),\ \ -2\xi_1\xi_2 + 2\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2}\right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir.

(α) birim hızlı eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ Frenet üçlüsüne bir ξ spinoru karşılık gelirken, bu üçlü ile spinoru arasındaki ilişkiler Denk. 4.8' de verilmiştir. Birim hızlı olmayan bir (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{T}^*\}$ Frenet üçlüsüne bir ϕ spinoru karşılık gelirken, bu üçlü ile spinoru arasındaki ilişkiler benzer şekilde aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^* &= -\hat{\phi}^t \sigma \phi \\
\boldsymbol{N}^* &= \frac{1}{2}\left(\phi^t \sigma \phi - \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}\right) \\
\boldsymbol{B}^* &= -\frac{i}{2}\left(\phi^t \sigma \phi + \hat{\phi}^t \sigma \hat{\phi}\right)
\end{aligned}$$

verilebilir. Dolayısıyla (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{T}^*\}$ Frenet üçlüsünün spinor denklemleri bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^* &= (\phi_1\overline{\phi_2} + \overline{\phi_1}\phi_2,\ \ i(\phi_1\overline{\phi_2} - \overline{\phi_1}\phi_2),\ \ |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) \\
\boldsymbol{N}^* &= \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \overline{\phi_1}^2 - \overline{\phi_2}^2,\ \ i\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - \overline{\phi_1}^2 - \overline{\phi_2}^2\right),\ \ -2\left(\phi_1\phi_2 + \overline{\phi_1}\,\overline{\phi_2}\right)\right) \\
\boldsymbol{B}^* &= -\frac{i}{2}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \overline{\phi_2}^2 - \overline{\phi_1}^2,\ \ i\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \overline{\phi_1}^2 + \overline{\phi_2}^2\right),\ \ -2\left(\phi_1\phi_2 - \overline{\phi_1}\,\overline{\phi_2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

olacak şekilde verilebilir. Ek olarak, Denk. 4.9, Denk. 2.5’ de verilen eşitlikleri sağlar.

Diğer taraftan, birim hızlı bir eğri için Denk. 3.15’ deki verilen eşitliğe benzer olarak birim hızlı olmayan bir (β) eğrisinin spinor karşılığı için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2. $\beta : I \to E^3$ birim hızlı olmayan regüler bir eğri olmak üzere bu eğrinin $\{\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{T}^*\}$ Frenet üçlüsüne bir ϕ spinoru karşılık gelsin. O halde bu eğrinin Frenet denklemleri tek bir spinor denklemi cinsinden

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\|\beta'\|}{2}(-i\tau^*\phi + \kappa^*\hat{\phi}) \tag{4.10}$$

yazılır. Burada κ^* ve τ^*, sırasıyla, (β) eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

İspat: (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{T}^*\}$ Frenet üçlüsüne bir ϕ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda $\{\phi, \hat{\phi}\}$ spinor ikilisi bir baz teşkil ettiğinden

$$\frac{d\phi}{ds} = f\phi + g\hat{\phi} \tag{4.11}$$

yazılabilir. Burada f ve g fonksiyonları keyfi, kompleks değerli fonksiyonlardır. Diğer taraftan Denk. 4.9' daki ilk eşitliğin türevi alınır ve Denk. 2.5 ve Denk. 4.11 göz önüne alınırsa

$$\|\beta'\|\left(-\kappa^{*}\boldsymbol{T}^{*}-i\tau^{*}\left(\boldsymbol{N}^{*}+i\boldsymbol{B}^{*}\right)\right)=2f\left(\boldsymbol{N}^{*}+i\boldsymbol{B}^{*}\right)-2g\boldsymbol{T}^{*}$$

bulunur. Buradan $f=\dfrac{-i\tau^{*}\|\beta'\|}{2},\ g=\dfrac{\kappa^{*}\|\beta'\|}{2}$ elde edilir. Dolayısıyla Denk. 4.11 yardımıyla

$$\frac{d\phi}{ds}=\frac{\|\beta'\|}{2}(-i\tau^{*}\phi+\kappa^{*}\hat{\phi})$$

bulunur. Burada κ^{*} ve τ^{*}, sırasıyla, (β) eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır. Böylece ispat biter.

Şimdi üç boyutlu Öklid uzayında İnvolüt-Evolüt eğrilerine birer spinor karşılık getirilsin.

$\alpha,\beta:I\to E^{3}$ eğrileri sırasıyla (I,α) ve (I,β) koordinat komşuluğunda iki eğri olarak göz önüne alınsın. Bu eğrilerin Frenet vektörleri, sırasıyla, $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$ ve $\{\boldsymbol{T}^{*},\boldsymbol{N}^{*},\boldsymbol{B}^{*}\}$ olmak üzere (β) eğrisi (α) eğrisinin involütü, (α) eğrisi de (β) eğrisinin evolütü olsun. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3. $\alpha,\beta:I\to E^{3}$ olmak üzere (α,β) ikilisi İnvolüt-Evolüt eğrileri olsun. (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ ve (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^{*},\boldsymbol{B}^{*},\boldsymbol{T}^{*}\}$ Frenet vektörlerine karşılık gelen spinorlar, sırasıyla, ξ ve ϕ olmak üzere bu spinorlar arasında

$$\overline{\phi}\overline{\xi}^{t}\phi=C\phi\overline{\phi}^{t}\hat{\xi} \tag{4.12}$$

ilişkisi vardır. Burada $C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ dır.

İspat: (α,β), İnvolüt-Evolüt eğrileri olduğundan Denk. 2.16' dan biliniyor ki bu eğrilerin teğet vektörleri arasında $\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{T}^* \rangle = 0$ ilişkisi mevcuttur. O halde $\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}^* \in R^3$ olmak üzere Denk. 4.8 ve Denk. 4.9 göz önüne alınırsa

$$\left(\xi_1\overline{\xi_2}+\overline{\xi_1}\xi_2\right)\left(\phi_1\overline{\phi_2}+\overline{\phi_1}\phi_2\right)-(\xi_1\overline{\xi_2}-\overline{\xi_1}\xi_2)(\phi_1\overline{\phi_2}-\overline{\phi_1}\phi_2)+\left(|\xi_1|^2-|\xi_2|^2\right)\left(|\phi_1|^2-|\phi_2|^2\right)=0$$

eşitliği elde edilir. Burada denklem içinde gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$2\xi_1\overline{\xi_2}\,\overline{\phi_1}\phi_2+2\overline{\xi_1}\xi_2\phi_1\overline{\phi_2}+|\xi_1|^2|\phi_1|^2-|\xi_1|^2|\phi_2|^2-|\xi_2|^2|\phi_1|^2+|\xi_2|^2|\phi_2|^2=0 \tag{4.13}$$

olmak üzere

$$\left(\xi_1\overline{\phi_1}+\xi_2\overline{\phi_2}\right)\left(\overline{\xi_2}\phi_2+\overline{\xi_1}\phi_1\right)+\left(\xi_1\phi_2-\xi_2\phi_1\right)\left(\overline{\xi_2}\,\overline{\phi_1}-\overline{\xi_1}\,\overline{\phi_2}\right)=0 \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir. Denk. 4.14, matris çarpımı şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\phi_1}\\ \overline{\phi_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\xi_1} & \overline{\xi_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_2\\ -\phi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\phi_1} & \overline{\phi_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\xi_2}\\ -\overline{\xi_1}\end{pmatrix}=0 \tag{4.15}$$

eşitliği bulunur. Burada ξ ve ϕ spinorları $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$, $\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ şeklinde birer sütun matrisi gibi göz önüne alındığından Denk. 4.15,

$$\xi^t\,\overline{\phi}\,\overline{\xi}^t\phi-\xi^t C\phi\overline{\phi}^t\hat{\xi}=0$$

şeklinde elde edilir. Buradan ise son olarak

$$\overline{\phi}\,\overline{\xi}^t\phi=C\phi\overline{\phi}^t\hat{\xi}$$

eşitliği bulunur. Burada $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dir. Böylece ispat biter.

(α,β) ikilisi İnvolüt-Evolüt eğrileri olmak üzere bu eğrilerin Frenet vektörlerine karşılık gelen spinorlar arasındaki bir diğer ilişki aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 4.4. $\alpha,\beta: I \to E^3$ eğrileri birim hızlı İnvolüt-Evolüt eğrileri olarak göz önüne alınsın. (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}\}$ ve (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*,\boldsymbol{T}^*\}$ Frenet vektörlerine karşılık gelen spinorlar, sırasıyla, ξ ve ϕ olmak üzere bu spinorlar arasında

$$\xi^t \overline{\phi}\,\overline{\xi}^t \phi = \frac{1}{2} \tag{4.16}$$

ilişkisi vardır.

İspat: (α,β), eğri ikilisi İnvolüt-Evolüt eğrileri olarak göz önüne alınsın. (α) ve (β) eğrilerinin Frenet vektörleri birim vektörler olduğundan bu eğrilere karşılık gelen spinorları arasında $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1$ ve $|\phi_1|^2+|\phi_2|^2=1$ eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla

$$\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)\left(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2\right)=1 \tag{4.17}$$

eşitliği yazılır. Burada Denk. 4.17 düzenlenirse

$$|\xi_1|^2|\phi_1|^2+|\xi_1|^2|\phi_2|^2+|\xi_2|^2|\phi_1|^2+|\xi_2|^2|\phi_2|^2=1 \tag{4.18}$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla Denk. 4.13 ve Denk. 4.18 göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\xi_1 \overline{\xi_2}\,\overline{\phi_1}\phi_2 + \overline{\xi_1}\xi_2\phi_1\overline{\phi_2} + \xi_1\overline{\xi_1}\phi_1\overline{\phi_1} + \xi_2\overline{\xi_2}\phi_2\overline{\phi_2} &= \frac{1}{2} \\
\xi_1\overline{\phi_1}\left(\overline{\xi_2}\phi_2 + \overline{\xi_1}\phi_1\right) + \xi_2\overline{\phi_2}\left(\overline{\xi_1}\phi_1 + \overline{\xi_2}\phi_2\right) &= \frac{1}{2} \\
\left(\xi_1\overline{\phi_1} + \xi_2\overline{\phi_2}\right)\left(\overline{\xi_2}\phi_2 + \overline{\xi_1}\phi_1\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\xi^t \overline{\phi}\,\overline{\xi}^t \phi = \frac{1}{2} \tag{4.19}
$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat biter.

Şimdi (β) İnvolüt eğrisinin Frenet vektörlerine karşılık gelen ϕ spinorunun bileşenleri, (α) Evolüt eğrisinin Frenet vektörlerine karşılık gelen ξ spinorunun bileşenleri cinsinden elde edilsin. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.5. $\alpha, \beta : I \to E^3$ eğrileri İnvolüt-Evolüt eğrileri olarak göz önüne alınsın. (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ ve (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{T}^*\}$ Frenet vektörlerine karşılık gelen spinorlar, sırasıyla, ξ ve ϕ olmak üzere bu spinorlar arasında

$$
\begin{aligned}
\phi_1^2 &= \frac{\kappa - i\tau}{2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\left(\xi_1 - \overline{\xi}_2\right)^2 \\
\phi_2^2 &= \frac{\kappa - i\tau}{2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\left(\overline{\xi}_1 + \xi_2\right)^2
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

ilişkisi vardır.

İspat: $\alpha, \beta : I \to E^3$ eğrileri İnvolüt-Evolüt eğrileri olmak üzere (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ ve (β) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{T}^*\}$ Frenet vektörlerine karşılık gelen spinorlar, sırasıyla, ξ ve ϕ olsun. Bu durumda Denk. 2.8' in ikinci eşitliğinde Denk. 4.8 ve Denk. 4.9 yerine yazılırsa

$$N^* = \frac{1}{2}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2 - \overline{\phi}_2^2 + \overline{\phi}_1^2,\ i\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - \overline{\phi}_1^2 - \overline{\phi}_2^2\right), -2\left(\phi_1\phi_2 + \overline{\phi}_1\overline{\phi}_2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\begin{pmatrix} -\kappa\left(\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi}_1\xi_2,\ i(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi}_1\xi_2),\ |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2\right) \\ -i\frac{\tau}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \overline{\xi_2}^2 - \overline{\xi_1}^2,\ i\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \overline{\xi_1}^2 + \overline{\xi_2}^2\right),\ -2\xi_1\xi_2 + 2\overline{\xi_1}\overline{\xi_2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

elde edilir. Denk. 4.21’in bileşenleri karşılıklı birbirine eşitlenirse bu eşitliklerden aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\frac{1}{2}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2 - \overline{\phi}_2^2 + \overline{\phi}_1^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-\kappa\left(\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi}_1\xi_2\right) - i\frac{\tau}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \overline{\xi_2}^2 - \overline{\xi_1}^2\right)\right) \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 - \overline{\phi}_1^2 - \overline{\phi}_2^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-\kappa\left(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi}_1\xi_2\right) - i\frac{\tau}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \overline{\xi_1}^2 + \overline{\xi_2}^2\right)\right) \quad (4.23)$$

$$-\phi_1\phi_2 - \overline{\phi}_1\overline{\phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-\kappa\left(\xi_1\overline{\xi}_1 - \xi_2\overline{\xi_2}\right) - i\tau\left(\xi_1\xi_2 - \overline{\xi}_1\overline{\xi}_2\right)\right) \quad (4.24)$$

Benzer şekilde, Denk. 2.8’ in üçüncü eşitliğinde Denk. 4.8 ve Denk. 4.9 yerine yazılırsa

$$B^* = -\frac{i}{2}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \overline{\phi}_2^2 - \overline{\phi}_1^2,\ i\left(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \overline{\phi}_1^2 + \overline{\phi}_2^2\right), -2\left(\phi_1\phi_2 - \overline{\phi}_1\overline{\phi}_2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\begin{pmatrix} \tau\left(\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi}_1\xi_2,\ i(\xi_1\overline{\xi_2} - \overline{\xi}_1\xi_2),\ |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2\right) \\ -i\frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \overline{\xi_2}^2 - \overline{\xi_1}^2,\ i\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \overline{\xi_1}^2 + \overline{\xi_2}^2\right),\ -2\xi_1\xi_2 + 2\overline{\xi_1}\overline{\xi_2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

yazılır. Denk. 4.25’ de karşılıklı bileşenler birbirine eşitlendiği taktirde

$$-\frac{i}{2}\left(\phi_1^2 - \phi_2^2 + \overline{\phi}_2^2 - \overline{\phi}_1^2\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\tau\left(\xi_1\overline{\xi_2} + \overline{\xi}_1\xi_2\right) - i\frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \overline{\xi_2}^2 - \overline{\xi_1}^2\right)\right) \quad (4.26)$$

$$-\frac{i}{2}\left(\phi_1^{2}+\phi_2^{2}+\overline{\phi}_1^{2}+\overline{\phi}_2^{2} \right)=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\tau\left(\xi_1\overline{\xi_2}-\overline{\xi_1}\xi_2\right)-i\frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^{2}+\xi_2^{2}+\overline{\xi_1}^{2}+\overline{\xi_2}^{2}\right)\right) \quad (4.27)$$

$$i\left(\phi_1\phi_2-\overline{\phi}_1\overline{\phi}_2\right)=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\tau\left(\xi_1\overline{\xi_1}-\xi_2\overline{\xi_2}\right)-i\kappa\left(-\xi_1\xi_2+\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2}\right)\right) \quad (4.28)$$

eşitlikleri elde edilir. Denk.4.22 ve Denk.4.26 denklemlerinden

$$\phi_1^{2}-\phi_2^{2}=\frac{\kappa-i\tau}{2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\left(\xi_1-\overline{\xi_2}\right)^2-\left(\overline{\xi_1}+\xi_2\right)^2\right) \quad (4.29)$$

eşitliği ve Denk. 4.23 ve Denk. 4.27’ den

$$\phi_1^{2}+\phi_2^{2}=\frac{\kappa-i\tau}{2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\left(\xi_1-\overline{\xi_2}\right)^2+\left(\overline{\xi_1}+\xi_2\right)^2\right) \quad (4.30)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde Denk. 4.24 ve Denk. 4.28 göz önüne alınırsa

$$\phi_1\phi_2=\frac{\kappa-i\tau}{2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\xi_1-\overline{\xi_2}\right)\left(\overline{\xi_1}+\xi_2\right) \quad (4.31)$$

bulunur. Son olarak Denk. 4.29 ve Denk. 4.30 kullanılırsa

$$\phi_1^{2}=\frac{\kappa-i\tau}{2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\xi_1-\overline{\xi_2}\right)^2$$
$$\phi_2^{2}=\frac{\kappa-i\tau}{2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(\overline{\xi_1}+\xi_2\right)^2$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca bu denklemler Denk. 4.31’i sağlar. Böylece ispat biter.

Şimdi Teorem 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 ve 4.5’ i destekleyen aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.1. $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı eğrisi $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s,\ \frac{1}{\sqrt{2}} s \right)$ olarak alınsın. Bu durumda Denk. 2.2 göz önüne alınırsa birim hızlı (α) eğrisinin $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ Frenet vektörleri

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \boldsymbol{N}(s) &= \left(-\cos s,\ -\sin s,\ 0 \right) \\ \boldsymbol{B}(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca Denk. 2.3 kullanılırsa (α) eğrisinin κ ve τ Frenet eğrilikleri

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.33}$$

olarak elde edilir.

(α) eğrisinin $\{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\}$ Frenet üçlüsüne bir ξ spinoru karşılık gelsin. Bu durumda Denk. 4.2 ve Denk. 4.32 göz önüne alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-\cos s} + i\sqrt{1+\cos s} \right) \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1+\cos s} + i\sqrt{1-\cos s} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $\frac{d\xi}{ds}$ ifadesi Denk. 3.15 ve Denk. 4.33 kullanılarak

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-i\xi + \hat{\xi} \right)$$

olarak elde edilir.

Şimdi birim hızlı (α) eğrisinin bir involütü (β) eğrisi olsun. Bu durumda (α) ve (β) eğrisinin karşılıklı $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında Denk. 2.7' deki $\beta(s)=\alpha(s)+(c-s)\boldsymbol{T}(s)$ ilişkisi mevcuttur. Bu durumda birim hızlı olmayan (β) eğrisi

$$\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos s-(c-s)\sin s,\ \sin s+(c-s)\cos s, c\right)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $\left\|\beta'(s)\right\|=\frac{|c-s|}{\sqrt{2}}$ olmak üzere Denk. 2.1 kullanılırsa (β) eğrisinin Frenet vektörleri;

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}^*(s)&=(-\cos s,\ -\sin s,\ 0)\\
\boldsymbol{N}^*(s)&=(\sin s,\ -\cos s,\ 0)\\
\boldsymbol{B}^*(s)&=(0,\ 0,\ 1)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ve Frenet eğrilikleri;

$$\kappa^*=\frac{\sqrt{2}}{(c-s)},\quad \tau^*=0 \tag{4.35}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla Denk. 4.9 ve Denk. 4.34 göz önüne alınırsa (β) involüt eğrisine karşılık gelen ϕ spinoru

$$\begin{aligned}
\phi_1&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin s}+i\sqrt{1-\sin s}\right)\\
\phi_2&=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\sin s}+i\sqrt{1+\sin s}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Son olarak Denk. 4.10 ve Denk. 4.35 göz önüne alınırsa (β) eğrisinin Frenet denklemleri tek bir spinor formülü sayesinde

$$\frac{d\phi}{ds}=\frac{1}{2}\hat{\phi}$$

şeklinde bulunur

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde üç boyutlu Öklid uzayında bazı özel eğrilerin spinor gösterimi incelenmiştir. Bunun için öncelikle spinorlar tanıtılmıştır. Daha sonra üç boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin Frenet vektörleri ve eğriliklerinin spinor formülasyonu verilmiştir. Bu temel bilgilerden yola çıkarak üç boyutlu Öklid uzayında İnvolüt-Evolüt eğrilerinin her birine C^2 uzayının elemanları olan spinorlar karşılık getirilerek İnvolüt-Evolüt eğrilerinin spinor formülü elde edilmiştir. Ayrıca İnvolüt-Evolüt eğrilerine karşılık gelen spinorlar arsındaki ilişkiler teoremlerle ifade edilmiştir. Son olarak tezde verilen tanım ve teoremleri destekleyen bir örnek sunulmuştur.

Bu tez, bir eğriye bir spinor karşılık getirilerek yapılan çalışmaların (Del Castillo ve Barrales, (2004); Kişi ve Tosun, (2015); Ünal vd. (2013)) yanı sıra üç boyutlu Öklid uzayında eğri çiftlerinin spinor karşılığının nasıl olacağı sorusunun cevabı olacak bir çalışmadır. Dolayısıyla üç boyutlu Öklid uzayında eğri çiftlerinin C^2 uzayındaki spinor karşılığı çalışacaklar için temel bir çalışma olmuştur. Bu çalışmadan yola çıkılarak bundan sonraki çalışmalarda üç boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri gibi diğer eğri çiftlerinin de spinor gösterimi incelenebilir.

KAYNAKLAR

Akyiğit, M., Azak, A. Z. and Ersoy, S. (2010) "Involute-Evolute Curves in Galilean Space G_3," ***Scientia Magna***, 6(4), 75-80.

Balcı, Y., Erişir, T. and Güngör, M. A. (2015) "Hyperbolic Spinor Darboux Equations of Spacelike Curves in Minkowski 3-Space", ***Journal of the Chungcheong Mathematical Society***, 28(4), 525-535.

Brauer, R. and Weyl, H. (1935) "Spinors in n-dimensions", ***American Journal of Mathematics***, 57, 425-449.

Bükcü, B. and Karaca, M. K. (2007) "On the Involute and Evolute Curves of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space", ***International Journal of Contemporary Mathematical Sciences***, 5(2), 221-232.

Cartan, É. (1913) "Les Groupes Projectifs qui ne Laissent Invariante Aucune Multiplicite Plane", ***Bulletin de la Société Mathématique de France***, 41, 53-96.

Cartan, É. (1966) "The Theory of Spinors", ***Dover Publications***, New York, 1-157.

Çalışkan, M. and Bilici, M. (2002) "Some Characterizations for the Pair of Involute-Evolute Curves in Euclidean Space E^3", ***Bulletin of Pure and Applied Sciences***, vol 2/E, no:2, 289-294.

Çalışkan, M. and Bilici, M. (2009) "On the Involutes of the Spacelike Curves with a Timelike Binormal in Minkowski 3-Space", ***International Mathematical Forum***, 31(4), 1497-1509.

Del Castillo, G. F. T. and Barrales, G. S. (2004) "Spinor Formulation of the Differential Geometry of Curves, ***Revista Colombiana de Matemáticas***, 38, 27-34.

Del Castillo, G. F. T. (2003) 3-D Spinors, Spin-Weighted Functions and Their Applications, ***Birkhäuser,*** Boston.

Erişir, T., Güngör, M. A. and Tosun, M. (2015) "Geometry of the Hyperbolic Spinors Corresponding to Alternative Frame", ***Advances in Applied Clifford Algebras***, 25(4), 799-810.

Goldstein, H. (1980) "Classical Mechanics", 2nd ed., ***Addison-Wesley***, ***Reading, Mass.***

Hacısalihoğlu, H. H. (1983) "Diferensiyel Geometri" , ***Fen Fakültesi Yayınları***, Ankara Üniversitesi, Cilt I .

Ketenci, Z., Erişir, T. and Güngör, M. A. (2015) "A Construction of Hyperbolic Spinors According to Frenet Frame in Minkowski Space", ***Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories***, 13(2), 179-193.

Kişi, İ. and Tosun, M. (2015) “Spinor Darboux Equations of Curves in Euclidean 3-Space”, ***Mathematica Moravica***, 19(1), 87-93.

Millman, R. S. and Parker, G. D. (1977) “Elements of Differential Geometry”, ***Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs,*** New Jersey.

Sabuncuoğlu, A. (2014) “Diferensiyel Geometri”, ***Nobel Yayın Dağıtım,*** Ankara.

Sattinger, D. H. and Weaver, O. L. (1986) “Lie Groups and Algebras with Applications to Physics”, ***Geometry and Mechanics, Springer-Verlag***, Newyork.

Sasane, S. M. and Sasane, A. (2014) “A Friendly Approach to Complex Analysis”, ***Word Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,*** Singapore.

Payne W. T. (1952) “Elementary Spinor Theory”, ***American Journal of Physics,*** 20, 253.

Tian, Y. (1998) “Universal Similarity Factorication Equalities over Real Clifford Algebras” ***Advances in Applied Clifford Algebras***, 8(2), 365-402.

Turgut, A. and Esin, E. (1992) “Involute-Evolute Curve Couples of Higher Order in R^n and Their Horizontal Lift in TR^n”, ***Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics***, 41(3), 125-130.

Ünal, D., Kişi, İ. and Tosun, M. (2013) “Spinor Bishop Equation of Curves in Euclidean 3-Space”, ***Advances in Applied Clifford Algebras***, 23(3), 757-765.

Vivarelli, M. D. (1984) “Development of Spinor Descriptions of Rotational Mechanics from Euler’s Rigid Body Displacement Theorem”, ***Celestial mechanics***, 32, 193-207.

Yüce, S. (2017) “Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri”, ***Pegem Akademi***, Ankara.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Erişir, T. and **Kardağ, N. C.** (2019) "Spinor Representations of Involute Evolute Curves in E^3", ***Fundam. J. Math. Appl.,*** (Accepted).

Erişir, T. and **Kardağ, N. C.** (2019) "Spinor Formulation of Involute-Evolute Curves", ***17th International Geometry Symposium,*** Erzincan, 19-22 June.

ÖZGEÇMİŞ

Neslihan Cansu Tandoğan, 1991 yılında Erzincan' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Hatay ilinin Dörtyol ilçesinde bulunan Merkez Atatürk İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini Dörtyol Anadolu Lisesinde tamamladı. 2010 yılında girdiği Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2014 yılında mezun oldu. 2016 yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. Şuan Erzincan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde öğretmenlik yapmaktadır.