T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA KONVOLÜSYONLAR VE YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİFE YIRTICI

BALIKESİR, MAYIS-2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA KONVOLÜSYONLAR VE YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİFE YIRTICI

BALIKESİR, MAYIS-2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Elife YIRTICI tarafından hazırlanan **"DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA KONVOLÜSYONLAR VE YAKLAŞIM"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22.05.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Prof. Dr. Fatma AYAZ	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması Bilimsel Araştırma Projeleri birimi tarafında 2014/114 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA KONVOLÜSYONLAR VE YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELİFE YIRTICI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, MAYIS-2015

Beş bölümden oluşan bu tezde değişken üslü Lebesgue uzayları tanımlanır. Bu uzayın önemli özellikleri verildikten sonra yaklaşım teorisinin bazı problemleri araştırılır.

Birinci bölümde bazı fonksiyonel uzaylarda konvolüsyon operatörleri ve yaklaşım sayıları arasındaki bağlantıyı ifade eden sonuçların kısa özeti verilmektedir.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar ve önemli fonksiyon uzayları tanımlanır.

Üçüncü bölümde bu tezin ana konusu olan değişken üslü Lebesgue uzayları tanımlanır, bu uzayların temel özellikleri verilir ve fonksiyon dizilerinin yakınsaklık çeşitleri tanımlanır. Değişik yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişki araştırılır.

Dördüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Önce, esas teoremlerin kanıtı için gereken yardımcı sonuçlar, daha sonra ise değişken üslü Lebesgue uzaylarında konvolüsyon operatörü ile en iyi yaklaşım sayıları arasındaki ilişki ve çarpanlar teoremi elde edilmiştir.

Son bölüm tezde elde edilen sonuçların kısa özetini içerir.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken üslü Lebesgue uzayları, konvolüsyon operatörü, çarpanlar teoremi

ABSTRACT

CONVOLUTIONS AND APPROXIMATION IN LEBESGUE SPACES WITH VARIABLE EXPONENT
MSC THESIS
ELİFE YIRTICI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:PROF. DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, MAY-2015

In this thesis which consists of five chapters, Lebesgue spaces with variable exponent are defined. İmportant properties of this spaces are given. Later, some problems of approximation theory are investigated.

In first chapter, a short abstract of results which express the connection between the convolution operators and the best approximations numbers is given.

In second chapter the basic notations and important function spaces used in thesis are defined.

In third chapter, main subject of this thesis: the Lebesgue spaces with variable exponent are defined, the basic properties of these spaces are given and the convergence types of function sequences are described. Relation between the different convergence types are investigated.

The fourth chapter consists of two sections. Firstly, the auxiliary results required for proofs of the main theorems are obtained. Afterwords, a connection between the convolution operators and the best approximations numbers and multipliers theorem in the Lebesgue spaces with variable exponent are obtained.

Last chapter includes the short summary of the results obtained in thesis.

KEYWORDS: Lebesgue spaces with variable exponent, convolution operator, multipliers theorem

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	: Reel eksen
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$L_{2\pi}^{p}$	: 2π periyotlu fonksiyonların L^{p} uzayı
$L_{p,\omega}[0,2\pi]$	: $[0,2\pi]$ üzerinde ω ağırlıklı L^{p} uzayı
$L_{2\pi}^{p(\cdot)}$	: $[0,2\pi]$ üzerinde ω ağırlıklı $L^{p(\cdot)}$ uzayı
$L_{\varphi}[0,2\pi]$	: $[0,2\pi]$ aralığında tanımlı Orlicz uzayı
$L_{\varphi,\omega}[0,2\pi]$	: $[0,2\pi]$ üzerindeki ω ağırlıklı Orlicz uzayı
$E_{n}(f)_{p}$	: $L_{2\pi}^{p}$ uzayında en iyi yaklaşım sayısı
$E_{n}(f)_{p(\cdot)}$	: $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ uzayında en iyi yaklaşım sayısı
$f*g$	: f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu
Mf	: Maksimal fonksiyon
$suppf$	: f fonksiyonunun desteği
χ_{E}	: Karakteristik fonksiyon

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimimin her aşamasında engin bilgi ve tecrübesiyle beni en iyi şekilde yönlendirip, çalışmalarıma desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve zor zamanlarımda manevi desteğini eksik etmeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE' ye çok teşekkür ederim.

Ders aşamasında ve sonrasında yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Ali GÜVEN' e, Doç. Dr. Ramazan AKGÜN' e ve yönlendirmelerinden dolayı Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e teşekkürlerimi sunarım.

Bana her türlü kolaylığı sağlamaya özen gösteren anneme, babama ve kardeşlerime, ayrıca her zaman yanımda olan arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, bir takım özelliklere sahip fonksiyonlara daha iyi özelliklere sahip, basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Bu basit fonksiyonlar kümesi çoğunlukla araştırılan fonksiyon uzaylarının bir alt uzayı olarak alınır. Polinomlar kümesi bu tip alt uzaylara örnek olarak düşünülebilir.

Yaklaşımın mümkün olduğu durumlarda, verilen bir fonksiyona, polinomlar kümesinden en iyi yaklaşan polinomu bulmak yaklaşım teorisinin bir diğer problemidir.

$L_{2\pi}^{p}$ Lebesgue uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemleri birçok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ ess \sup\limits_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $\mathfrak{I}_n$ derecesi n 'yi geçmeyen trigonometrik polinomların ailesi olmak üzere $f \in L_{2\pi}^{p}$ fonksiyonu için en iyi yaklaşım sayısı

$$E_n(f)_p := \inf_{T_n \in \mathfrak{I}_n} \|f - T_n\|_p$$

olarak tanımlıdır. $f, g \in L_{2\pi}^{p}$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$f * g(x) := \int\limits_0^{2\pi} f(x-y) g(y) dy$$

biçiminde tanımlıdır.

Konvolüsyon ve konvolüsyon tipi dönüşümler teorik ve uygulamalı matematiğin birçok alanında önemli bir rol oynar. Bu dönüşümler özellikle yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşası için başarıyla kullanılmaktadırlar. Bu yüzden birçok matematik probleminde en iyi yaklaşım sayısı ile konvolüsyon operatörü arasındaki ilişkiyi inceleme ihtiyacı duyulmaktadır.

σ, sınırlı varyasyonlu ve $\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u) = 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olduğunda

$$D(f;\sigma,h,p) := \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-hu)\,d\sigma(u) \right\|_p$$

olsun. Eğer $f \in L_{2\pi}^p$ $(1 < p < \infty)$ ve $0 < h < 1$ ise 1971 yılında M. F. Timan tarafından

$$D(f;\sigma,h,p) \le A(\sigma,p) \left\{ \sum_{\upsilon=0}^{n} E_{n_\upsilon - 1}^{\gamma}(f)_p \,\delta^{\gamma}(n_\upsilon, h) + E_{n_{m+1}}^{\gamma}(f)_p \right\}^{1/\gamma} \tag{1.1}$$

eşitsizliği kanıtlanmıştır [1]. Burada

$$\gamma = \min\{2, p\},$$
$$n_o = 1 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots, \quad n_{k+1}/n_k \ge q > 1, \quad n_{m+1} \le 1/h,$$
$$\delta(n_\upsilon, h) = \sum_{k=n_\upsilon}^{n_{\upsilon+1}-1} \left| \hat{\sigma}(kh) - \hat{\sigma}((k+1)h) \right| + \left| \hat{\sigma}(n_\upsilon h) \right|,$$
$$\hat{\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\,d\sigma(u)$$

ve $A(\sigma,p)$ sadece σ ve p ye bağlı bir sabittir.

φ bir Young fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left| f(x) \right| \right) dx < \infty$$

koşulunu sağlayan 2π periyotlu fonksiyonlar uzayına Orlicz uzayı denir ve $L_\varphi[0,2\pi]$ ile gösterilir.

$\psi,\ \varphi$'nin tamamlayıcı Young fonksiyonu olmak üzere bu uzaylarda

Orlicz normu;

$$\|f\|_{\varphi} := \sup\left\{\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\,dx : \int_0^{2\pi} \psi\left[|g(x)|\right]dx \le 1\right\},$$

Luxemburg normu;

$$\|f\|_{(\varphi)} := \inf\left(k>0 : \int_0^{2\pi} \varphi\left[k^{-1}|f(x)|\right]dx \le 1\right)$$

olarak tanımlıdır ve bu iki norm denktir.

Orlicz uzaylarında (1.1) eşitsizliği V. G. Ponomarenko ve M. F. Timan tarafından incelenmiş olup aşağıda görüleceği üzere benzer sonuç elde edilmiştir [2]:

$f \in L_{\varphi}(0,2\pi)$ olsun ve φ, bir $c>0$ sabiti için

$$\varphi(uv) \le c\varphi(u)\varphi(v)$$

koşulunu sağlasın. Üstelik $\varphi(u)$ için öyle $p_1,\ p_2$ $(1<p_1,\ p_2<\infty)$ sayıları olsun ki $\varepsilon,\delta>0$, $p_1+\varepsilon<p_1-\delta$ olduğunda $\varphi(u)/u^{p_1+\varepsilon}$ azalmayan, $\varphi(u)/u^{p_2+\varepsilon}$ artmayan olsun. Bu durumda $0<h<1$ koşulunu sağlayan her h sayısı için

$\varphi\left(\sqrt{u}\right)$ konveks olduğu durumda

$$D(f;\sigma,h,\varphi) \le M(\sigma,\varphi)\left(\left[\sum_{k=0}^{m} E^2_{2^k-1}(f)_{\varphi}\,\delta^2_{2^k,h}\right]^{1/2} + E_{2^{m+1}}(f)_{\varphi}\right),$$

$\varphi\left(\sqrt{u}\right)$ konkav olduğu durumda ise

$$D(f;\sigma,h,\varphi) \le \inf_{k>0} k^{-1}\left(1+\sum_{r=0}^{m}\varphi\left[M'(\varphi,\sigma)kE_{2^r-1}(f)_{\varphi}\,\delta_{2^r,h}\right]\right) + M''(\varphi,\sigma)E_{2^{m+1}}(f)_{\varphi}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada

$$\delta_{2^r,h}=\sum_{l=2^r}^{2^{r+1}-1}\left|\hat{\sigma}(lh)-\hat{\sigma}\left[(l+1)h\right]\right|+\left|\hat{\sigma}\left(2^r h\right)\right|,$$

$$\hat{\sigma}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}d\sigma(u)\ ,\qquad h\le 2^{-(m+1)}$$

dir. Ayrıca aynı çalışmada aşağıdaki sonuç da elde edilmiştir:

$f\in L_{\varphi}(0,2\pi)$ olsun ve $\varphi(u)$ yukarıdaki koşulları sağlasın. Eğer bir $F(x)$ sınırlı varyasyonlu, yani;

$$\|F(x)\|\le C_1,\ \sum_{\theta=2^m}^{2^{m+1}-1}\left|F(\theta h)-F\left((\theta+1)h\right)\right|\le C_2,\ h\le 2^{-m-1},$$

koşulunu sağlayan fonksiyonu $|x|<1$ olduğunda

$$\hat{\sigma}_1(x)=\hat{\sigma}_2(x)F(x)$$

bağıntısını sağlıyor ise

$$D(f;\sigma_1,h,\varphi)=C(\sigma_1,\sigma_2,\varphi)\left[D(f;\sigma_2,h,\varphi)+E_{2^{m+1}}(f)_{\varphi}\right]\qquad(1.2)$$

olur.

Öteleme dönüşümüne göre invaryantlık her uzay için geçerli olan bir özellik değildir. Bu özelliği sağlamayan uzaylardan biri ağırlıklı Orlicz uzaylarıdır. Bu nedenle öteleme dönüşümü operatörü, $(\sigma_h f)(x,u)$ ortalama değer fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(x,u)d\sigma(u)$$

olarak tanımlanır.

Ağırlıklı Orlicz uzaylarında

$$D(f;\sigma,h,\varphi):=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(.,u)d\sigma(u)\right\|_{\varphi,\omega} \tag{1.3}$$

ifadesi 2010 da D. M. İsrafilov ve Y. E. Yıldırır tarafından değerlendirilmiştir [3]:

$L_{\varphi,\omega}[0,2\pi]$ yansımalı, $f\in L_{\varphi,\omega}[0,2\pi]$, $\omega\in A_{p(\varphi)}[0,2\pi]$, bir $\alpha\in(0,1)$ için φ^{α} kuvazikonveks olsun ve φ fonksiyonu bir c sabiti için

$$\varphi(uv)\le c\varphi(u)\varphi(v)$$

koşulunu sağlasın. O zaman her m doğal sayısı için

$\varphi(\sqrt{u})$ konveks ise

$$D(f;\sigma,h,\varphi)\le c\left(\sum_{r=0}^{m}E_{2^r-1}^2(f)_{\varphi,\omega}\,\delta_{2^r,h}^2\right)^{1/2}+cE_{2^{m+1}}(f)_{\varphi,\omega},$$

$\varphi(\sqrt{u})$ konkav ise

$$D(f;\sigma,h,\varphi)\le c\inf_{k>0}k^{-1}\left(1+\sum_{r=0}^{m}c\varphi\left(kE_{2^r-1}(f)_{\varphi,\omega}\,\delta_{2^r,h}\right)\right)+cE_{2^{m+1}}(f)_{\varphi,\omega}$$

dir. Burada

$$\delta_{2^r,h}=\sum_{l=2^r}^{2^{r+1}-1}\left|\hat{\sigma}(lh)-\hat{\sigma}\left[(l+1)h\right]\right|+\left|\hat{\sigma}(2^r h)\right|,$$

$$\hat{\sigma}(x):=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ux}{ux}d\sigma(u)\ ,\quad 0<h\le\pi$$

dir. Ayrıca aynı çalışmada (1.2) eşitliğine benzer sonuç elde edilmiştir.

Bir f fonksiyonu verildiğinde bunun Fourier serisi f fonksiyonuna yakınsamayabilir. Fakat bu seriyi belli bir dizi ile çarptığımızda elde edilen yeni seri f fonksiyonunun ait olduğu uzayın bir elemanına yakınsayabilir. Bu tip problemlerin çözümünde elde edilen teoremlere çarpanlar teoremleri denir. Bu tip teoremler yaklaşım teorisinde gerekli olan eşitsizliklerin elde edilmesinde de sıkça kullanılır.

$L_{2\pi}^{p}$ Lebesgue uzaylarında Fourier serileri için çarpanlar teoremi [4] de Marcinkiewicz tarafından kanıtlandı. Benzer teorem Muckenhoupt ağırlıklarına sahip ağırlıklı Lebesgue uzayları için [5] çalışmasında ispat edilen Teorem 2 nin sonucu olarak elde edilmektedir. Ayrıca, ağırlıksız Smirnov uzaylarında çarpanlar ile ilgili benzer sonuçlardan [6] çalışmasında da kanıt yapılmadan bahsedilmektedir. Bu problem Ağırlıklı Smirnov uzaylarında ise [7] çalışmasında incelendi.

$L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzayları, Orlicz uzaylarında $\varphi(u) := u^{p(x)}$ alınarak elde edilir. Görüldüğü gibi değişken üslü Lebesgue uzayları, $L_{2\pi}^{p}$ klasik Lebesgue uzaylarının p sabitini değişken alarak elde edilen bir genellemesidir.

$L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonlar uzayının $L_{2\pi}^{p}$ uzayları ile benzer özellikleri olduğu kadar farklı bir çok özelliği de vardır. En önemli farklarından bir tanesi $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ uzaylarının dönüşüm operatörüne göre invaryant olmamasıdır. Sonuç olarak bu uzaylar genellikle rearrangement invaryant Banach fonksiyon uzayları değildir. Bu yüzden klasik araştırma yöntemlerinin bazıları bu uzaylarda geçerli olmayabilir.

Özel halde, $p(\cdot)$ sınırsız olduğu durumlarda önemli farklılıklar ortaya çıkar. Bu durumda $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ uzayları ayrılabilir değildir ve kompakt destekli sınırlı fonksiyonların sınıfı bu uzaylarda yoğun olmayabilir [8]. Bu nedenle karşımıza çıkacak birçok problemin çözümü için $p(\cdot)$ fonksiyonunun esaslı sınırlılığı önemli olacaktır.

1979'da Sharapudinov, bu uzaylarda Luxemburg normunu tanımlayarak ve $p(\cdot)$ esaslı sınırlı olduğu durumda $L^{p(\cdot)}([0,1])$ uzaylarının ayrılabilir olduğunu ve onun dual uzayının $L^{p'(\cdot)}([0,1])$ olduğunu göstererek reel eksende, aralıklar üzerinde değişken Lebesgue uzaylarının fonksiyon uzayı teorisini geliştirdi. Ayrıca bu uzaylar teorisinde önemli bir yere sahip olan

$$|p(x)-p(y)| \le \frac{c_0}{-\log(|x-y|)}, \qquad |x-y| \le 1/2,$$

log-Hölder süreklilik koşulunu tanıttı. Bu koşul özellikle maksimal fonksiyonun sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşullardan biridir.

Bu uzayların kısmi diferansiyel denklemler teorisinde birçok uygulamaları vardır ve bundan dolayı ayrı bir öneme sahiptirler. Özellikle elektroreolojik akışkanların matematiksel modellenmesinde kullanıldığı için 1990 yılından beri bu uzaylara ilgi artmıştır. Bahsedilen akışkanların fiziksel özellikleri ve uygulamaları için [9, 10] çalışmalarına bakılabilir.

Bu tezde yukarıda da öneminden bahsedilen, klasik Lebesgue uzaylarının bir genellemesi olan değişken üslü Lebesgue uzaylarında en iyi yaklaşım sayısı ile konvolüsyon operatörü arasındaki ilişki incelenmiş olup klasik sonuçların bu uzaylardaki bazı benzerleri elde edilmiştir. Ayrıca bu uzaylarda geniş uygulama alanlarına sahip çarpanlar teoremi de kanıtlanmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım $A\subset\mathbb{R}$ bir küme olsun. $\forall x,y\in A$ ve $\forall\alpha\in[0,1]$ için $\alpha x+(1-\alpha)y\in A$ oluyor ise A kümesine bir *konveks küme* denir.

2.1.2 Tanım $A\subset\mathbb{R}$ konveks bir küme olsun. $M:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x,y\in A$ ve $\forall\alpha\in[0,1]$ için

$$M\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\leq\alpha M(x)+(1-\alpha)M(y)$$

şartını sağlıyor ise M 'ye *konveks fonksiyon* denir [11, s. 1].

2.1.3 Tanım $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ konveks ve sürekli fonksiyonu $\varphi(0)=0$, $\forall x>0$ için $\varphi(x)>0$ ve

$$\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}=0\ ,\ \ \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\infty$$

koşullarını sağlıyor ise φ fonksiyonuna *Young fonksiyonu* denir. Ayrıca $y\geq0$ için

$$\psi(y):=\max\left\{xy-\varphi(x):x\geq0\right\}$$

biçiminde tanımlanan ψ fonksiyonuna φ' nin *tamamlayıcı Young fonksiyonu* denir [3].

2.1.4 Tanım $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\varphi(t)\leq\phi(t)\leq\varphi(ct),\quad t\geq0$$

olacak şekilde bir φ Young fonksiyonu ve $c\geq1$ sabiti var ise ϕ fonksiyonuna *kuvazikonveks fonksiyon* denir [18, s. 210].

2.1.5 Tanım ϕ kuvazikonveks fonksiyon olmak üzere

$$\frac{1}{p(\phi)} := \inf\left\{\beta : \phi^{\beta} \text{ kuvazikonveks}\right\}$$

sayısına ϕ' nin indeksi denir [18, s. 218].

2.1.6 Tanım $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$T_F\left(x\right) = \sup\left\{\sum_{1}^{n}\left|F\left(x_j\right) - F\left(x_{j-1}\right)\right| : n \in \mathbb{N},\ -\infty < x_0 < \ldots < x_n = x\right\}$$

fonksiyonuna F' in *total varyasyon fonksiyonu* denir. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} T_F\left(x\right) < \infty$$

ise F, $\mathbb{R}$ üzerinde *sınırlı varyasyonludur* denir [13, s. 102].

2.1.7 Tanım $a_k \in \mathbb{R}$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\mathrm{i}k\mathrm{t}}$$

fonksiyonuna n. dereceden trigonometrik polinom denir [19, s. 2]. Derecesi n'yi geçmeyen trigonometrik polinomların sınıfını $\mathfrak{I}_n$ ile gösterelim.

2.1.8 Tanım $a_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\mathrm{i}k\mathrm{t}}$$

serisine *trigonometrik seri* denir [19, s. 3].

2.1.9 Tanım $f \in L^1_{2\pi}$ olsun. f' nin k. Fourier katsayısı

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(y\right)e^{-iky}dy$$

biçiminde tanımlanır [19, s. 3].

2.1.10 Tanım $f \in L^1_{2\pi}$ olsun.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} ,$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi denir [19, s. 3]. $n = 0,1,2,...$ için f ' nin Fourier serisinin n. kısmi toplamı

$$S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikx}$$

olsun.

2.1.11 Tanım f ve g , $\mathbb{R}$ üzerinde yerel integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

fonksiyonuna f ve g 'nin konvolüsyonu denir.

2.1.12 Tanım $U_k = u_1 + u_2 + ... + u_k$, $k = 1,2,3...$ olmak üzere

$$\sum_{\upsilon=1}^{n} u_\upsilon v_\upsilon = \sum_{\upsilon=1}^{n-1} U_\upsilon (v_\upsilon - v_{\upsilon+1}) + U_n v_n$$

dönüşümüne *Abel dönüşümü* denir [12, s. 3].

2.1.13 Tanım $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$supp\, f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

kümesine f fonksiyonunun desteği denir. Eğer $supp\, f$ kompakt bir küme ise o zamanda f fonksiyonu kompakt desteğe sahiptir denir.

$$L^\infty_{comp}([0,2\pi]) := \{ f : f \text{ sürekli ve } supp\, f \subset [0,2\pi] \text{ kompakt} \}$$

olsun.

2.1.14 Tanım $E_j \subset [0,2\pi]$ $j=1,2,..,n$, ikişerli ayrık kümeler ve a_j sayıları sonlu tane birbirinden farklı sayılar olmak üzere

$$s(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$$

olarak gösterilen s fonksiyonuna *basit fonksiyon* denir [13]. Basit fonksiyonların sınıfını $S_{2\pi}$ ile gösterelim.

2.2 Bazı Fonksiyon Uzayları

2.2.1 Tanım φ Young fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)dx < \infty$$

koşulunu sağlayan 2π periyotlu fonksiyonlar uzayına *Orlicz uzayı* denir ve $L_\varphi[0,2\pi]$ ile gösterilir.

ψ, φ 'nin tamamlayıcı Young fonksiyonu olmak üzere f fonksiyonunun

Orlicz normu,

$$\|f\|_\varphi := \sup\left\{\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|dx : \int_0^{2\pi} \psi[|g(x)|]dx \le 1\right\},$$

Luxemburg normu,

$$\|f\|_{(\varphi)} := \inf\left(k > 0 : \int_0^{2\pi} \varphi\left[k^{-1}|f(x)|dx\right] \le 1\right)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\forall f \in L_\varphi[0,2\pi]$ için

$$\|f\|_{(\varphi)} \le \|f\|_\varphi \le 2\|f\|_{(\varphi)}$$

eşitsizliği sağlanır [3].

2.2.2 Tanım $\omega:[0,2\pi]\to[0,\infty]$, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\omega^{-1}\left(\{0,\infty\}\right)$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna *ağırlık fonksiyonu* denir.

ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere 2.2.1 Tanımda dx yerine $\omega(x)dx$ yazarak $L_{\varphi,\omega}[0,2\pi]$ ağırlıklı Orlicz uzayı elde edilir. Bu uzayda Orlicz normu $\|f\|_{\varphi,\omega}$, Luxemburg normu ise $\|f\|_{(\varphi,\omega)}$ ile gösterilir [3].

2.2.3 Tanım $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olsun. Eğer

$$\sup_I\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-p'}(x)\,dx\right)^{1/p'}<\infty$$

ise ω ağırlık fonksiyonu, $A_p[0,2\pi]$ Muckenhoupt sınıfına aittir denir [3]. Burada I, $[0,2\pi]$'nin herhangi bir alt aralığı, $|I|$, I' nın uzunluğudur.

Orlicz uzaylarında Young fonksiyonu olarak $\varphi(u)=u^p$ fonksiyonunu seçersek klasik Lebesgue uzaylarını elde ederiz.

2.2.4 Tanım $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $0<p<\infty$ için

$$\|f\|_p:=\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

olsun.

$$\|f\|_p<\infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ fonksiyonlarının sınıfına *Lebesgue uzayları* denir ve $L_{2\pi}^p$ ile gösterilir. $L_{2\pi}^p$ sınıfı $1\le p<\infty$ durumunda

$$\|f\|_p:=\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$p=\infty$ durumunda

$$\|f\|_{\infty} := ess \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

normu ile birer Banach uzaylarıdır [13, s. 181-184].

2.2.5 Tanım Verilen bir ω ağırlığı ve p, $1\le p<\infty$, için

$$\|f\|_{p,\omega} := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \,\omega(x)\,dx\right)^{1/p} < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $L_{p,\omega}[0,2\pi]$ ile gösterilir ve bu uzaya *ağırlıklı Lebesgue uzayı* denir.

2.2.6 Tanım $f\in L^1_{2\pi}$ olmak üzere herhangi bir $x\in[0,2\pi]$ için

$$Mf(x) := \sup_{I\ni x} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|\,dy ,$$

fonksiyonuna, f fonksiyonunun *Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu* denir [8]. Burada supremum x i içeren tüm $I\subset[0,2\pi]$ aralıkları üzerinden alınmaktadır.

Harmonik analizde bir çok klasik operatörün özelliklerinin incelenmesinde maksimal fonksiyonun sınırlılığı önemlidir. Bu fonksiyonun $L^p_{2\pi}$ uzaylarında sınırlılığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim:

2.2.7 Teorem $1\le p<\infty$ için $f\in L^p_{2\pi}$ olsun. Her $t>0$ için

$$\left|\{x\in[0,2\pi]:\ Mf(x)>t\}\right| \le \frac{c_1}{t^p}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx$$

dir. Ayrıca, eğer $1<p\le\infty$ ise

$$\|Mf\|_p \le c_2 \|f\|_p$$

dir. Burada c_1 ve c_2 sabitleri f fonksiyonundan bağımsız olup sadece p ’ye bağlıdırlar [8, s. 82].

Burada birinci eşitsizlik için maksimal fonksiyon *zayıf* (p,p) koşulunu sağlıyor, ikinci eşitsizlik için ise maksimal fonksiyon *güçlü* (p,p) koşulunu sağlıyor denir.

Klasik Lebesgue uzaylarında bazı fonksiyonların özelliklerini incelemek zorlaşıyor ya da bu uzaylar pratik uygulamalarda sık kullanılan birçok fonksiyonun araştırılması için yetersiz kalıyor.

Örneğin;

$$f(x)=|x|^{-1/3}$$

fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon oldukça iyi özelliklere sahip olmasına rağmen $[1,\infty]$ aralığındaki hiçbir p için $L_p(\mathbb{R})$ sınıfına giremez. Fakat $\mathbb{R}$ ' yi parçalara ayırırsak görülebilir ki

$$f\in L^2([-2,2]) \text{ ve } f\in L^4(\mathbb{R}\setminus[-2,2])$$

olur. Bu yöntemle hareket edilirse daha karmaşık fonksiyonların incelenmesi durumunda daha fazla parça ve daha fazla fonksiyon sınıflarına ihtiyaç duyulur.

Örneğin;

$$g(x)=|x|^{-1/3}+|x-1|^{-1/4}$$

fonksiyonu için $g\in L^2([-1,1/2])$, $g\in L^3([1/2,2])$ ve $g\in L^{9/2}(\mathbb{R}\setminus[-1,2])$ dir. Bunun çok iyi bir yaklaşım olmadığı kolayca görülmektedir.

Değişken Lebesgue uzayları ise bize farklı bir araştırma yöntemi sağlamaktadır. Burada bölgeleri ayırmak yerine üssü, yani p sabitini bir fonksiyon kabul ederek kümede tanımlı fonksiyonların yeniden sınıflandırılmaları elde edilebilir. Mesela yukarıdaki fonksiyonlar için

$$p(x)=\frac{9|x|+2}{2|x|+1}=\frac{9}{2}-\frac{5/2}{2|x|+1}$$

değişken üssü düşünürsek

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x\right) \right|^{p(x)} dx < \infty \text{ ve } \int_{\mathbb{R}} \left| g\left(x\right) \right|^{p(x)} dx < \infty$$

olduğu görülür. Başka bir deyişle; tek bir üs bazı önemli fonksiyonların davranışlarını daha detaylı araştırmamıza olanak sağlar [8]. Şimdi bu sınıfları tanımlayalım ve bir takım özelliklerini verelim.

3. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARI

3.1 $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ Sınıfının Temel Teorisi

Bu bölümde $p(\cdot)$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan ölçülebilir, negatif olmayan ve 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere, ölçülebilir ve 2π periyotlu fonksiyonların sınıfı olan $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ değişken üslü sınıflar tanıtılacak ve bir takım özellikleri verilecektir. $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ile

$$\int_0^{2\pi} \left| f(x) \right|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan 2π periyotlu, ölçülebilir, reel değerli fonksiyonların sınıfını gösterelim. Ayrıca $\widetilde{L}_{2\pi}^{\infty}$ ile ölçülebilir, 2π periyotlu ve esaslı sınırlı fonksiyonların sınıfını gösterelim.

Genel durumda $f, g \in \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$h(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$$

lineer birleşim fonksiyonu $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ sınıfına ait olmayabilir. Bu fonksiyonun $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ sınıfına ait olması için $p(\cdot)$' nin ölçülebilir ve negatif olmaması dışında daha fazla kısıtlayıcı şarta ihtiyaç vardır. Bu amaçla

$$p_- := ess \inf_{x \in [0,2\pi]} p(x)$$

$$p_+ := ess \sup_{x \in [0,2\pi]} p(x)$$

sayılarını tanımlayalım.

3.1.1 Lemma $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ 'nin lineer olması için gerekli ve yeterli koşul $p(\cdot)$ değişken üssün esaslı sınırlı olmasıdır [14, s. 14].

Kanıt Yeterlilik: $f, g \in \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\left(p(x) \geq 0\right)$ olsun.

$$\left|\alpha f(x) + \beta g(x)\right|^{p(x)/p_+} \leq \left(\left|\alpha f(x)\right| + \left|\beta g(x)\right|\right)^{p(x)/p_+}$$

$$\leq \left|\alpha f(x)\right|^{p(x)/p_+} + \left|\beta g(x)\right|^{p(x)/p_+}$$

ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak

$$\left(\int_0^{2\pi} \left|\alpha f(x) + \beta g(x)\right|^{p(x)} dx\right)^{1/p_+} = \left(\int_0^{2\pi} \left|\alpha f(x) + \beta g(x)\right|^{p_+ p(x)/p_+} dx\right)^{1/p_+}$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi} \left(\left|\alpha f(x)\right|^{p(x)/p_+} + \left|\beta g(x)\right|^{p(x)/p_+}\right)^{p_+} dx\right)^{1/p_+}$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi} \left|\alpha f(x)\right|^{p(x)} dx\right)^{1/p_+} + \left(\int_0^{2\pi} \left|\beta g(x)\right|^{p(x)} dx\right)^{1/p_+}$$

$$\leq \left(\left|\alpha\right| + 1\right)\left(\left(\int_0^{2\pi} \left|f(x)\right|^{p(x)} dx\right)^{1/p_+}\right) + \left(\left|\beta\right| + 1\right)\left(\int_0^{2\pi} \left|g(x)\right|^{p(x)} dx\right)^{1/p_+} < \infty$$

elde edilir. Buradan $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olduğu görülür.

Gereklilik: Varsayalım ki $p_+ = \infty$ olsun.

$$\Omega_n := \left\{t \in [0, 2\pi];\ (n-1) \leq p(t) < n\right\},\quad n = 1, 2, ...$$

kümelerini ve

$$\int_{\Omega_n} c_n^{p(x)} dx = \frac{1}{n^2}$$

olmak üzere

$$f(x) := c_n \ , \quad x \in \Omega_n$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} c_n^{p(x)} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

olur. Öte yandan

$$\int_0^{2\pi} |2f(x)|^{p(x)} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |2c_n|^{p(x)} dx$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \int_{\Omega_n} c_n^{p(x)} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} n^{-2} = \infty$$

olduğu görülür. Böylece $f \in \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fakat $2f \notin \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ elde edilir. Bu da $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ’ nin lineerliği ile çelişir. ■

3.1.2 Lemma $f, g \in \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $p_+ < \infty$ olsun.

$$d(f,g) = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/p_+}$$

dönüşümü $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ kümesi üzerinde bir metriktir [14, s. 16].

Kanıt Sabit durumda olduğu gibi hemen her yerde eşit fonksiyonları eşit kabul edeceğiz. O zaman açıktır ki *d*’ nin metrik olduğunu göstermek için

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$$

olduğunu görmek yeterli olacaktır.

$L_{2\pi}^{p_+}$ sınıfında $0 \le \gamma \le 1$ için

$$|\alpha+\beta|^{\gamma} \le |\alpha|^{\gamma} + |\beta|^{\gamma}$$

eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$d(f,h) = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)-h(x)|^{p(x)}\, dx \right)^{1/p_+}$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \left| \left(f(x)-g(x) \right) + \left(g(x)-h(x) \right) \right|^{p_+ p(x)/p_+}\, dx \right)^{1/p_+}$$

$$\le \left(\int_0^{2\pi} \left(|f(x)-g(x)|^{p(x)/p_+} + |g(x)-h(x)|^{p(x)/p_+} \right)^{p_+} dx \right)^{1/p_+}$$

$$\le d(f,g) + d(g,h)\ . \blacksquare$$

$$f+g : \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)} \times \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)} \to \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)},\ \ \alpha f : \mathbb{R} \times \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)} \to \widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$$

işlemleri yukarıdaki metriğe göre $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ lineer uzayında süreklidir [14]. Sonuç olarak $0 \le p(x) < p_+ < \infty$ olduğu durumda $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ uzayının lineer bir topolojik uzay olduğu görülür. İleride $p(x) \ge 1$ koşulunun konulduğu durumda $\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ uzayının normlu bir uzay olduğu görülecektir.

3.1.3 Tanım $p(\cdot) : \mathbb{R} \to [1,\infty]$ ve f ölçülebilir, 2π periyotlu fonksiyonlar olsun.

$$\Omega_\infty := \{ x \in [0,2\pi] : \ p(x) = \infty \}$$

olmak üzere

$$\rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{[0,2\pi]\setminus\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)}\, dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty} |f(x)|$$

fonksiyoneline *modüler fonksiyonel* denir.

Modüler fonksiyonelin önemli özellikleri aşağıdaki önermelerde görülmektedir.

3.1.4 Önerme $p(x)$ ölçülebilir ve $1 \le p(x) < p_+ < \infty$ olsun. O zaman $\lambda \ge 1$ ise

$$\lambda^{p_-} \rho_{p(\cdot)}(f) \le \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) \le \lambda^{p_+} \rho_{p(\cdot)}(f)$$

eşitsizliği, $0 < \lambda < 1$ ise de

$$\lambda^{p_+} \rho_{p(\cdot)}(f) \le \rho_{p(\cdot)}(\lambda f) \le \lambda^{p_-} \rho_{p(\cdot)}(f)$$

eşitsizliği geçerlidir [8, s. 20].

3.1.5 Önerme [8, s. 17] $p(\cdot) := \mathbb{R} \to [1, \infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda:

1. $\forall f$ fonksiyonu için $\rho_{p(\cdot)}(f) \ge 0$ ve $\rho_{p(\cdot)}(|f|) = \rho_{p(\cdot)}(f)$,
2. Hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho_{p(\cdot)}(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$,
3. Eğer $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$ ise hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < \infty$,
4. $\rho_{p(\cdot)}$ konvekstir, yani: $\beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$ için

$$\rho_{p(\cdot)}(\alpha f + \beta g) \le \alpha \rho_{p(\cdot)}(f) + \beta \rho_{p(\cdot)}(g),$$

5. Hemen her yerde $|f(x)| \ge |g(x)|$ ise $\rho_{p(\cdot)}(f) \ge \rho_{p(\cdot)}(g)$ olur,
6. $\Lambda > 0$ sayısı için $\rho_{p(\cdot)}(f / \Lambda) < \infty$ ise $\lambda \to \rho_{p(\cdot)}(f / \lambda)$ dönüşümü $[\Lambda, \infty)$ üzerinde sürekli ve azalandır. Ayrıca

$$\lambda \to \infty \text{ iken } \rho_{p(\cdot)}(f / \lambda) \to 0 \ .$$

3.1.6 Tanım $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir ve 2π periyotlu fonksiyon olmak üzere en azından bir $\lambda=\lambda(f)>0$ sayısı için $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right)<\infty$ koşulunu sağlayan 2π periyotlu, ölçülebilir f fonksiyonların sınıfını $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ile gösterelim [8, s. 18].

$p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir fonksiyonu için $p_-=\infty$ veya $p_+<\infty$ olması durumunda $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olması $f\in\widetilde{L}_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olmasına denktir.

3.1.7 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir, 2π periyotlu bir fonksiyon olsun. $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olmak üzere

$$\|f\|_{p(\cdot)}:=\inf\left\{\lambda>0:\ \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda)\le 1\right\}$$

fonksiyonu $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ üzerinde bir normdur [8, s. 21].

Kanıt 1) $f\equiv 0$ ise $\forall\lambda>0$ için $\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda)=0\le 1$ dır. Böylece $\|f\|_{p(\cdot)}=0$ olur. Aksine; eğer $\|f\|_{p(\cdot)}=0$ ise o zaman $\forall\lambda>0$ sayısı için

$$1\ge\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda)=\int_{[0,2\pi]\setminus\Omega_\infty}\left(|f(x)|/\lambda\right)^{p(x)}dx+\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty}|f(x)/\lambda|$$

olur. Buradan görülebilir ki $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty}|f(x)|\le\lambda$ dır. Böylece hemen her $x\in\Omega_\infty$ için $f(x)=0$ elde edilir.

Benzer şekilde eğer $\lambda<1$ ise 3.1.4 Önermeden

$$1\ge\lambda^{-p_-}\int_{[0,2\pi]\setminus\Omega_\infty}|f(x)|^{p(x)}dx$$

elde edilir. Böylece $\left\|f(\cdot)^{p(\cdot)}\right\|_{L^1([0,2\pi]\setminus\Omega_\infty)}=0$ olduğu görülür. Bu yüzden hemen her x için $f(x)=|f(x)|^{p(x)}=0$ olur ve $f\equiv 0$ elde edilir.

2) $\alpha \in \mathbb{R}$ alalım. Eğer $\alpha = 0$ ise $\|\alpha f\|_{p(\cdot)} = |\alpha| \|f\|_{p(\cdot)}$ eşitliği **1)** dekine benzer şekilde görülür. $\alpha \neq 0$ olsun.

$$\|\alpha f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(|\alpha| f / \lambda\right) \leq 1\right\}$$

$$= |\alpha| \inf \left\{\lambda / |\alpha| > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(f / \left(\lambda / |\alpha|\right)\right) \leq 1\right\}$$

$$= |\alpha| \inf \left\{\mu > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(f / \mu\right) \leq 1\right\} = |\alpha| \|f\|_{p(\cdot)}$$

3) $\|f\|_{p(\cdot)} < \lambda_f$ ve $\|g\|_{p(\cdot)} < \lambda_g$ olacak şekilde λ_f, λ_g sayılarını alalım. O halde

$$\rho_{p(\cdot)}\left(f / \lambda_f\right) \leq 1 \text{ ve } \rho_{p(\cdot)}\left(g / \lambda_g\right) \leq 1$$

olur. $\rho_{p(\cdot)}$' nin konvekslik özelliğinden

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f+g}{\lambda}\right) = \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{f}{\lambda_f} + \frac{\lambda_g}{\lambda}\frac{g}{\lambda_g}\right)$$

$$\leq \frac{\lambda_f}{\lambda}\rho_{p(\cdot)}\left(f / \lambda_f\right) + \frac{\lambda_g}{\lambda}\rho_{p(\cdot)}\left(g / \lambda_g\right) \leq 1$$

elde edilir. Böylece $\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \lambda_f + \lambda_g$ olur. Şimdi tüm λ_f ve λ_g üzerinden her iki tarafın infimumu alınır ise $\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}$ elde edilir. ■

3.1.8 Önerme $p(\cdot) : \mathbb{R} \to [1, \infty]$ ölçülebilir ve 2π periyotlu fonksiyon olmak üzere eğer $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $\|f\|_{p(\cdot)} > 0$ ise

$$\rho_{p(\cdot)}\left(f / \|f\|_{p(\cdot)}\right) \leq 1$$

olur. Ayrıca $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonu hemen her yerde sıfırdan farklı olmak üzere $\rho_{p(\cdot)}\left(f / \|f\|_{p(\cdot)}\right) = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $p_+ < \infty$ olmasıdır [8, s. 24].

3.1.9 Teorem $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$**, üzerinde tanımlı olan norm ile bir Banach uzayı olur.**

3.1.10 Teorem Verilen bir $p(\cdot)$ öçülebilir fonksiyonu için $p_+ < \infty$ olsun. O zaman $L^{\infty}_{comp}([0,2\pi])$ kümesi $L^{p(\cdot)}_{2\pi}$ de yoğundur.

3.1.11 Teorem Verilen bir $p(\cdot)$ ölçülebilir fonksiyonu için $p_+ < \infty$ olsun. O zaman $S_{2\pi}$ kümesi $L^{p(\cdot)}_{2\pi}$ de yoğundur.

3.2 $L^{p(\cdot)}_{2\pi}$'nin Dual Uzayı ve Denk Normlar

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

olsun. Biliyoruz ki $p<\infty$ olduğunda $L^{p}_{2\pi}$ 'nin dual uzayı $L^{p'}_{2\pi}$ uzayına izometrik izomorftur. Bu sayede özel olarak $p>1$ olduğunda $L^{p}_{2\pi}$ uzayının yansımalı olduğunu söyleyebiliriz. Bu özellik $p_+ < \infty$ olduğu durumda $L^{p(\cdot)}_{2\pi}$ uzayına da genişletilebilir.

$L^{p(\cdot)}_{2\pi}$ normlu uzayının dual uzayını $\left(L^{p(\cdot)}_{2\pi}\right)'$ ile gösterelim.

3.2.1 Tanım

$$\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1, \quad x\in[0,2\pi]$$

biçimindeki $p'(\cdot)$ fonksiyonuna $p(\cdot)$' nin konjuge fonksiyonu denir.

3.2.2 Teorem $p(x)$, $1<p_- \le p_+ <\infty$ koşulunu sağlayan ölçülebilir, 2π periyotlu bir fonksiyon olsun. O zaman $\left(L^{p(\cdot)}_{2\pi}\right)'$ dual uzayı $L^{p'(\cdot)}_{2\pi}$ uzayına izometrik izomorftur ve $\Phi\in\left(L^{p(\cdot)}_{2\pi}\right)'$ fonksiyoneli, bir $g\in L^{p'(\cdot)}_{2\pi}$ için

$$\Phi(f)=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx\ ,\ f\in L^{p(\cdot)}_{2\pi}$$

ile temsil edilir. Ayrıca

$$\|\Phi\| \leq c_1 \|g\|_{p'(\cdot)} \leq c_2 \|\Phi\|$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri vardır [14, s. 21].

3.2.3 Teorem $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ normlu uzayının yansımalı olması için gerekli ve yeterli koşul $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ olmasıdır [8, s. 63].

3.2.4 Teorem $p(x) \geq 1$, f ölçülebilir ve 2π periyotlu fonksiyonlar olsun. O zaman $g \in L_{2\pi}^{p'(\cdot)}$ olmak üzere

$$\|f\|'_{p(\cdot)} := \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

fonksiyonu $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normuna denk bir normdur.

Değişken üslü Lebesgue uzaylarında yukarıda vermiş olduğumuz normlar dışında Amemiya normu denilen bir norm daha tanımlanmaktadır. Aşağıdaki önerme Amemiya normunun daha önce verdiğimiz norma denk olduğunu ifade etmektedir.

3.2.5 Önerme $p(\cdot): \mathbb{R} \to [1, \infty]$ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$\|f\|_{p(\cdot)}^{A} := \inf_{\lambda > 0} \left(\lambda + \lambda \rho_{p(\cdot)} \left(f / \lambda \right) \right)$$

fonksiyonu tüm $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ için

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)}^{A} \leq 2 \|f\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliğini sağlar [8, s. 26].

3.3 $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$' de Temel Tanımlar ve Teoremler

3.3.1 Teorem $p(\cdot), q(\cdot)$ $[0,2\pi]$ üzerinde tanımlı ölçülebilir ve $1 \le p(x) \le q(x) \le q_+ < \infty$ olsun. O zaman her $f \in L_{2\pi}^{q(\cdot)}$ için

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le r_{p,q} \|f\|_{q(\cdot)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$r_{p,q} = \max\left\{ \frac{1}{\alpha_-} + \frac{2\pi}{\alpha'_-}, 1 \right\}, \quad \alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$$

dir [14, s. 33-34].

Şimdi uygulamada çok kullanışlı olan bir gömülme bağıntısını verelim: $1 \le p < q < \infty$ için

$$L_{2\pi}^{p} + L_{2\pi}^{q} = \left\{ f = g + h : \; g \in L_{2\pi}^{p}, \; h \in L_{2\pi}^{q} \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu küme

$$\|f\|_{p,q} := \inf_{f=g+h} \left\{ \|g\|_p + \|h\|_q \right\}$$

normu ile Banach uzayıdır [8, s. 42].

3.3.2 Teorem $p(\cdot) : \mathbb{R} \to [1, \infty]$ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$L_{2\pi}^{p(\cdot)} \subset L_{2\pi}^{p_+} + L_{2\pi}^{p_-}$$

ve

$$\|f\|_{p_+, p_-} \le 2 \|f\|_{p(\cdot)}$$

olur [8, s. 42].

3.3.3 Tanım $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$, ölçülebilir ve 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere $1<p_-\le p_+<\infty$ koşulunu sağlayan $p(\cdot)$ fonksiyonların sınıfını $\wp_{2\pi}$ ile gösterelim.

3.3.4 Tanım $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $|x-y|\le 1/2$ koşulunu sağlayan her $x,y\in\mathbb{R}$ için

$$|p(x)-p(y)|\le \frac{c_0}{-\log(|x-y|)}$$

olacak şekilde bir c_0 sabiti var ise $p(\cdot)$ fonksiyonu yerel log-Hölder süreklidir denir. Yerel log-Hölder sürekli $p(\cdot)$ fonksiyonların sınıfı $LH_0(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

3.3.5 Tanım $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $x\in\mathbb{R}$ için

$$|p(x)-p_\infty|\le \frac{c_\infty}{\log(e+|x|)}$$

olacak şekilde c_∞ ve p_∞ sabitleri bulunabiliyor ise $p(\cdot)$ fonksiyonuna sonsuzda log-Hölder süreklidir denir ve sonsuzda log-Hölder sürekli olan fonksiyonların sınıfı $LH_\infty(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

3.3.6 Tanım $\wp_{2\pi}$ den olup ayrıca log-Hölder sürekli olan $p(\cdot)$ fonksiyonlarının sınıfını $\hat{\wp}_{2\pi}$ ile gösterelim.

3.3.7 Tanım $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olmak üzere

$$T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\mathrm{i}kx}$$

n dereceli trigonometrik polinomu için

$$E_n(f)_{p(\cdot)}=\inf_{T_n\in\Im_n}\|f-T_n\|_{p(\cdot)}$$

sayısına, f fonksiyonuna, derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar sınıfında en iyi yaklaşım sayısı denir.

[15, *Teorem 1.1*] den $n=0,1,...$ için $p(\cdot)\in\hat{\wp}_{2\pi}$ olduğunda

$$E_n(f)_{p(\cdot)}=\left\|f-T_n^*\right\|_{p(\cdot)}$$

olacak şekilde $T_n^*\in\Im_n$ trigonometrik polinomunun varlığı görülür.

[14, s. 91-95] de kanıtlandı ki: $p(\cdot)\in\hat{\wp}_{2\pi}$ ise $\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ trigonometrik sistemi $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ uzayı için bir taban oluşturur. Başka bir deyişle $S_n(f)$ f fonksiyonunun *n.* kısmi toplamı olmak üzere

$$\left\|S_n(f)\right\|_{p(\cdot)}\le c_{p(\cdot)}\left\|f\right\|_{p(\cdot)}\qquad (n=0,1,2,...)$$

dir. Ayrıca, eğer $p(\cdot)\in\hat{\wp}_{2\pi}$ ise $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonuna kısmi toplamlar ile yaklaşım en iyi yaklaşıma denktir. Bu aşağıdaki sonuçtan da görülmektedir.

3.3.8 Sonuç $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olsun. $p(\cdot)\in\hat{\wp}_{2\pi}$ ise

$$\left\|f-S_n(f)\right\|_{p(\cdot)}\le cE_n(f)_{p(\cdot)}$$

dir.

Kanıt T_n, f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun. Bu durumda

$$\left\|f-S_n(f)\right\|_{p(\cdot)}\le\left\|f-T_n\right\|_{p(\cdot)}+\left\|S_nf-T_n\right\|_{p(\cdot)}$$

$$=E_n(f)_{p(\cdot)}+\left\|S_n(f-T_n)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le E_n(f)_{p(\cdot)}+c_1\left\|f-T_n\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le cE_n(f)_{p(\cdot)}\quad\blacksquare$$

3.3.9 Teorem $p(\cdot)\in\hat{\wp}_{2\pi}$ olmak üzere $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olsun. Mf , f ' in maksimal fonksiyonu olmak üzere

$$\|Mf\|_{p(\cdot)}\le c\|f\|_{p(\cdot)}$$

olur [16].

Değişken üslü Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar klasik öteleme dönüşümüne göre invaryant olmayabilir. Yani; $f(x)\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ iken $f(x+h)\notin L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olabilir.

Örneğin [17]: $1\le r<s<\infty$ olmak üzere

$$p(x)=\begin{cases} r\ :\ x\in[0,1), \\ s\ :\ x\in(-1,0)\end{cases}$$

ve

$$f(x)=\begin{cases} x^{-1/s}\ :\ x\in[0,1), \\ 0\quad\ :\ x\in(-1,0)\end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Açıktır ki, $f\in L^{p(\cdot)}((-1,1))$ dir. Fakat $h\in(0,1)$ ve $\forall\lambda>0$ sayısı için

$$\rho_{p(\cdot)}\left(f(x+h)/\lambda\right)\ge\lambda^{-1}\int_{-h}^{0}(x+h)^{-1}dx=\infty$$

olur. Bu da gösterir ki $f(x+h)\notin L_{p(\cdot)}((-1,1))$ dir. Bu sebepten konvolüsyon operatörünü $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olmak üzere

$$(\sigma_h f)(x,u):=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+tu)\,dt,\quad 0<h<\pi,\quad -\infty<u<\infty$$

ortalama değer fonksiyonunu kullanarak tanımlayacağız.

$f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olsun. $\sigma(u)$, reel eksen üzerinde sınırlı varyasyonlu olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f)(x,u)\, d\sigma(u)$$

konvolüsyon operatörünü tanımlayalım ve normunu

$$D(f;\sigma,h,p(\cdot)) := \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f)(\cdot,u)\, d\sigma(u) \right\|_{p(\cdot)}$$

olarak işaretleyelim.

3.3.10 Teorem (Extrapolasyon teoremi 1) F, $[1,\infty)$ aralığındaki herhangi bir p_0 ve her $\omega \in A_{p_0}$ ağırlığı için

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^{p_0}\, \omega(x)\, dx \le c \int_{\mathbb{R}} g(x)^{p_o}\, \omega(x)\, dx$$

koşulunu sağlayan, negatif olmayan, ölçülebilir (f,g) fonksiyon çiftlerinin sınıfı olsun. Bu durumda eğer $p(\cdot) \in \hat{\wp}_{2\pi}$ ise her $(f,g) \in F$ fonksiyon çifti için

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le c \|g\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği geçerlidir [8, s. 211].

3.3.11 Teorem (Extrapolasyon teoremi 2) $p_0 \ge 1$ olmak üzere F, $\forall \omega \in A_{p_0}$ için

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^{p_0}\, \omega(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}} g(x)^{p_o}\, \omega(x)\, dx$$

koşulunu sağlayan, negatif olmayan, ölçülebilir (f,g) fonksiyon çiftlerinin sınıfı olsun. Eğer $p(\cdot) \in \hat{\wp}_{2\pi}$ ise$1 < r < \infty$ biçimindeki her r ve $\{(f_i, g_i)\} \subset F$ dizisi için

$$\left\| \left(\sum_i f_i^r \right)^{1/r} \right\|_{p(\cdot)} \le c_{p(\cdot)} \left\| \left(\sum_i g_i^r \right)^{1/r} \right\|_{p(\cdot)}$$

olur [8, s.212].

3.3.12 Teorem (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)

$p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir ve 2π periyotlu bir fonksiyon olsun. $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$, $g\in L_{2\pi}^{p'(\cdot)}$ için $fg\in L_{2\pi}^{1}$ ve

$$\int_0^{2\pi}\left|f(x)g(x)\right|dx\le K_{p(\cdot)}\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}$$

dir. Burada

$$K_{p(\cdot)}=\frac{1}{p_-}-\frac{1}{p_+}+1$$

dir [8, s. 27].

Kanıt Eğer $\|f\|_{p(\cdot)}=0$ veya $\|g\|_{p'(\cdot)}=0$ ise $fg\equiv 0$ olur. Bu durumda istenilen eşitsizlik barizdir. $\|f\|_{p(\cdot)}$, $\|g\|_{p'(\cdot)}>0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca homojenlikten genelliği bozmadan $\|f\|_{p(\cdot)}=\|g\|_{p'(\cdot)}=1$ olarak alabiliriz. Young eşitsizliğinden

$$\int_0^{2\pi}\left|f(x)g(x)\right|dx\le\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{p(x)}\left|f(x)\right|^{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}\left|g(x)\right|^{p'(x)}\right)dx$$

$$\le\frac{1}{p_-}\rho_{p(\cdot)}(f)+\frac{1}{p'_-}\rho_{p'(\cdot)}(g)$$

elde edilir. 3.1.8 Önerme ve

$$\frac{1}{p'_-}=\frac{1}{(p_+)'}=1-\frac{1}{p_+}$$

eşitliği kullanılarak

$$\int_0^{2\pi}\left|f(x)g(x)\right|dx\le\frac{1}{p_-}+1-\frac{1}{p_+}$$

olduğu görülür. ■

3.3.13 Teorem (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ fonksiyonu için $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve her $y\in\mathbb{R}$ için $f(\cdot,y)\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olsun. Bu durumda

$$\left\|\int_0^{2\pi} f(\cdot,y)\,dy\right\|_{p(\cdot)} \le K_{p(\cdot)}\int_0^{2\pi}\left\|f(\cdot,y)\right\|_{p(\cdot)} dy$$

dir [8, s. 34].

Kanıt İstenilen eşitsizliğin sağ tarafı sonsuz ise açık bir sonuç ortaya çıkar. Bu yüzden bu integralin sonlu olduğunu varsayalım.

$$g(x):=\int_0^{2\pi} f(x,y)\,dy$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve $\|h\|_{p'(\cdot)}\le 1$ biçiminde bir $h\in L_{2\pi}^{p'(\cdot)}$ alalım. O halde Fubini teoremi [13, s. 67] ve 3.3.12 Teoremden

$$\int_0^{2\pi}\left|g(x)h(x)\right|dx \le \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x,y)\right|dy\left|h(x)\right|dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x,y)h(x)\right|dxdy$$

$$\le K_{p(\cdot)}\int_0^{2\pi}\left\|f(\cdot,y)\right\|_{p(\cdot)}\|h\|_{p'(\cdot)}\,dy$$

$$\le K_{p(\cdot)}\int_0^{2\pi}\left\|f(\cdot,y)\right\|_{p(\cdot)} dy$$

elde edilir. Her iki tarafın $\|h\|_{p'(\cdot)}\le 1$ üzerinden supremumu alınır ise

$$\|g\|'_{p(\cdot)} \le K_{p(\cdot)}\int_0^{2\pi}\left\|f(\cdot,y)\right\|_{p(\cdot)} dy,$$

eşitsizliği sağlanır. 3.2.4 Teoremden de istenilen eşitsizlik elde edilir. ■

3.4 $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$' de Yakınsaklık

Bu bölümde [8] kaynağından yararlanılmıştır.

3.4.1 Tanım $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $\{f_k\}\subset L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\beta\left(f-f_k\right)\right)\to 0,\ \ k\to\infty$$

olacak şekilde $\exists\beta>0$ sayısı varsa $f_k\to f$ *modüler yakınsaktır* denir. Eğer

$$\|f-f_k\|_{p(\cdot)}\to 0,\quad k\to\infty$$

ise $f_k\to f$ *normda yakınsaktır* denir.

3.4.2 Önerme $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\{f_k\}$ dizisinin f fonksiyonuna normda yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall\beta>0$ sayısı için $\rho_{p(\cdot)}\left(\beta\left(f-f_k\right)\right)\to 0,\ k\to\infty$ olmasıdır.

Bu önermeden de anlaşılacağı gibi normda yakınsaklık modülerde yakınsaklığı gerektirir. Fakat tersinin her zaman doğru olduğunu söyleyemeyiz.

Örnek; $E=(1,\infty)$ ve $p(x)=x$ olsun.

$$f\equiv 1\ \text{ ve }\ f_k=\chi_{(1,k)}$$

olarak alalım. O halde

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\left(f-f_k\right)/2\right)=\int_k^\infty 2^{-x}dx\to 0,\quad k\to\infty$$

olduğu için modülerde $f_k\to f$ olur. Öte yandan, $\forall k\geq 1$ için

$$\rho_{p(\cdot)}\left(f-f_k\right)=\int_k^\infty 1^x dx=\infty$$

olduğundan f_k, f ' e normda yakınsamaz.

Aşağıdaki teorem normda ve modülerde yakınsaklıkların denk olmaları için $p(\cdot)$ fonksiyonu üzerine konulacak koşulları göstermektedir:

3.4.3 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Normda yakınsaklığın modülerde yakınsaklığa denk olması için gerekli ve yeterli koşul $p_- = \infty$ veya $p_+ < \infty$ olmasıdır.

Klasik Lebesgue uzaylarında iyi bilinen üç yakınsaklık teoremi; monoton yakınsaklık, baskın yakınsaklık teoremi ve Fatou lemması değişken üslü Lebesgue uzayları için de belli şartlar altında geçerlidir.

3.4.4 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$**,** ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere negatif olmayan $\{f_k\}\subset L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonların dizisi, hemen her yerde artarak bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak olsun. O zaman

$$\|f_k\|_{p(\cdot)} \to \|f\|_{p(\cdot)}$$

olur.

3.4.5 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ **,** ölçülebilir fonksiyon olmak üzere $\{f_k\}\subset L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyon dizisi hemen her yerde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak olsun. Eğer

$$\liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{p(\cdot)} < \infty$$

ise $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le \liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{p(\cdot)}$$

olur.

3.4.6 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$, ölçülebilir bir fonksiyon ve $p_+<\infty$ olsun. Eğer hemen her yerde $f_k \to f$ noktasal yakınsak ve hemen her yerde $|f_k(x)|\le g(x)$ olacak şekilde bir $g\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonu var ise $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve

$$\|f-f_k\|_{p(\cdot)}\to 0,\quad k\to\infty$$

olur.

3.4.7 Sonuç $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$, ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $p_+<\infty$ olsun. Varsayalım ki negatif olmayan $\{f_k\}$ fonksiyonların dizisi hemen her yerde artarak bir $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonuna noktasal yakınsak olsun. O zaman $\|f-f_k\|_{p(\cdot)}\to 0$ olur.

3.4.8 Tanım Verilen herhangi bir $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ bölgesinde $\{f_k\}$ fonksiyonların bir dizisi olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı ve $k\ge K$ için

$$\left|\left\{x\in\Omega:\left|f(x)-f_k(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde $\exists K>0$ sayısı var ise $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ölçümde yakınsaktır denir.

$\{f_k\}$, f ’ e ölçümde yakınsak olsun. O zaman f fonksiyonuna hemen her yerde noktasal yakınsak olan bir $\{f_{k_j}\}\subset\{f_k\}$ altdizisi vardır.

3.4.9 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $\{f_k\}\subset L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ dizisi f fonksiyonuna normda yakınsak ise ölçümde de yakınsaktır.

Kanıt Varsayalım ki $\{f_k\}$, f ’ e normda yakınsak olsun fakat ölçümde yakınsak olmasın. O zaman bir altdiziye geçerek, $(0,1)$ aralığında öyle bir ε sayısı vardır ki $\forall k$ için $\left|\left\{x\in\Omega:\left|f(x)-f_k(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|\ge\varepsilon$ olduğunu varsayabiliriz.

$$A_k := \left\{ x \in \Omega : \left| f(x) - f_k(x) \right| \geq \varepsilon \right\} ,$$

$$\Omega_\infty := \left\{ x \in \Omega : p(x) = \infty \right\}$$

olsun. Herhangi bir k için ya $\left| A_k \cap \Omega_\infty \right| \geq \varepsilon / 2$ ya da $\left| A_k \setminus \Omega_\infty \right| \geq \varepsilon / 2$ olduğundan başka bir altdiziye geçerek tüm k için bu eşitsizlerin geçerli olduğunu varsayabiliriz.

Eğer $\left| A_k \cap \Omega_\infty \right| \geq \varepsilon / 2$ ise o zaman

$$\left\| f - f_k \right\|_{p(\cdot)} \geq \left\| \left(f - f_k \right) \chi_{\Omega_\infty} \right\|_{p(\cdot)}$$

$$= \left\| f - f_k \right\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \geq \varepsilon$$

elde edilir. Bu da f_k ’ nın f ’ e normda yakınsak olması ile çelişir.

Eğer $\left| A_k \setminus \Omega_\infty \right| \geq \varepsilon / 2$ ise o zaman

$$\rho\left(\frac{f - f_k}{\varepsilon^2 / 2} \right) \geq \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \left(\frac{\left| f(x) - f_k(x) \right|}{\varepsilon^2 / 2} \right)^{p(x)} dx$$

$$\geq \int_{A_k \setminus \Omega_\infty} \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^{p(x)} dx$$

$$\geq \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^{p_-} \left| A_k \setminus \Omega_\infty \right| \geq 1$$

elde edilir. Bu yüzden $\left\| f - f_k \right\|_{p(\cdot)} \geq \varepsilon^2 / 2 > 0$ olur ki bu da yine f_k ’nın f ’e normda yakınsaması ile çelişir. O halde varsayımımız yanlış olup, f_k , f ’ e ölçümde yakınsaktır. ■

3.4.10 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty]$, ölçülebilir bir fonksiyon için $p_+<\infty$ olsun. O zaman $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $\{f_k\}\subset L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ için aşağıdakiler denktir:

1. $f_k\to f \quad (norm)$,
2. $f_k\to f \quad (modüler)$,
3. $f_k\to f \quad (ölçüm)$ ve $\exists\gamma>0$ için $\rho_{p(\cdot)}(\gamma f_k)\to\rho_{p(\cdot)}(\gamma f)$

3.5 Konvolüsyonlar ve Süreklilik Modülü

Bu bölümde, değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşımın değerlendirilmesi için kullanılan süreklilik modülünün konvolüsyon dönüşümleri yardımı ile inşa edilmesi incelenmiştir.

$\lambda>0$ olduğunda $\Delta_\lambda:=\left[-\dfrac{1}{2\lambda},\dfrac{1}{2\lambda}\right]$ aralıkları için

$$K_\lambda(x):=\begin{cases}\lambda, & x\in\Delta_\lambda\\ 0, & x\in[-\pi,\pi]\setminus\Delta_\lambda\end{cases}$$

Steklov çekirdeğini tanımlayalım. K_λ , $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ve 2π periyotludur. Buradan hareketle Steklov operatörü

$$\left(S_\lambda(f)\right)(x):=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\lambda(t)\,dt \qquad (3.1)$$

olarak tanımlanır. Eğer $h=\dfrac{1}{\lambda}$ olarak alırsak (3.1) eşitliği

$$f_h(x):=S_{1/h}(f)=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt$$

eşitliğine dönüşür. Görmek kolaydır ki $\upsilon,\gamma,c_j>0$ sabitler olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

A. $\int_{-\pi}^{\pi} \left|K_\lambda(x)\right| dx \le c_1$,

B. $\sup\limits_x \left|K_\lambda(x)\right| \le c_2 \lambda^{\upsilon}$,

C. $\left|K_\lambda(x)\right| \le c_3, \quad \lambda^{-\gamma} \le |x| \le \pi$

Bu yüzden [14, Teorem 2.4.1] den $\left\{S_\lambda(f) = f_h\right\}_{\lambda \ge 1}$ ailesi $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ 'de düzgün sınırlıdır. Böylece keyfi bir $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ için $p(\cdot) \in LH_0([0,2\pi])$ olduğunda

$$\left\| f - S_\lambda(f) \right\|_{p(\cdot)} \to 0, \quad \lambda \to \infty$$

ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_\lambda(f)(x) \right|^{p(x)} dx \to 0, \quad \lambda \to \infty$$

olur.

3.5.1 Lemma $p(\cdot) \in LH_0[0,2\pi]$ olmak üzere $p(x) \ge 1$ olsun. $1 \ge \gamma > 0$ için

$$\Upsilon_{\lambda,\tau}(f) := \Upsilon_{\lambda,\tau}(f)(x+\tau) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\lambda(t - x - \tau) dt$$

$$= \lambda \int_{x+\tau-1/2\lambda}^{x+\tau+1/2\lambda} f(t) dt$$

olsun. O zaman $\left\{\Upsilon_{\lambda,\tau}(f)\right\}_{1 \le \lambda < \infty,\ |\tau| \le \pi/2\lambda\gamma}$ operatörler ailesi $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$' de düzgün sınırlıdır; şöyle ki $1 \le \lambda < \infty$, $|\tau| \le \pi / 2\lambda\gamma$ için

$$\left\| \Upsilon_{\lambda,\tau}(f) \right\|_{p(\cdot)} \le c_{p(\cdot)} (2\pi + 1)^{p_+} \| f \|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği geçerlidir [14, s. 78-80].

$p(\cdot) \in LH_0[0,2\pi]$, $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $0 < h \le 1$ olsun. $\lambda = 1/h$ alınırsa

$$f_h(x) = S_\lambda(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\lambda(t - x) dt$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t) dt$$

olur. $\gamma > 0$ için

$$\Omega^{\gamma}\left(f,0\right)_{p(\cdot)} := 0$$

ve $\delta > 0$ olduğunda

$$\Omega^{\gamma}\left(f,\delta\right)_{p(\cdot)} := \sup_{\substack{h,\tau \\ 0\le \tau^{1/\gamma} \le h \le \delta}} \left\| f - f_h\left(\cdot + \tau\right)\right\|_{p(\cdot)} \tag{3.2}$$

olarak tanımlanan fonksiyona *f* fonksiyonunun $\gamma -$ *süreklilik modülü* denir.

3.5.2 Teorem $0 < \gamma \le 1$ olsun. O zaman $g\left(\delta\right) := \Omega^{\gamma}\left(f,\delta\right)_{p(\cdot)}$ fonksiyonu $\left[0,\infty\right]$ aralığı üzerinde azalmayan ve $\delta = 0$ da süreklidir [14, s. 81].

Kanıt $g\left(\delta\right)$ fonksiyonunun (3.2) tanım gereği azalmayan olduğu açıktır. Şimdi $\delta = 0$ için $g\left(\delta\right)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayacağız. Yani,

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega^{\gamma}\left(f,\delta\right) = 0 \tag{3.3}$$

olduğunu göstereceğiz:

Eğer f fonksiyonu $\left[0,2\pi\right]$ üzerinde sürekli ise $x \in \left[0,2\pi\right]$ ve $\left|\tau\right| \le h^{\gamma}$ için $f_h\left(x+t\right)$ Steklov fonksiyonu $h \to 0$ iken f fonksiyonuna yakınsar. Bu yüzden $\left|\tau\right| \le h^{\gamma}$ ise

$$\left\| f\left(\cdot\right) - f_h\left(\cdot + h\right)\right\|_{p(\cdot)} \to 0, \quad h \to 0$$

olur. Biliyoruz ki sürekli fonksiyonların kümesi $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ de yoğundur. Bu yüzden eğer $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$, $\tau \le h^{\gamma}$ ise o zaman 3.5.1 Lemma ve Banach-Steinhaus teoremine göre

$$\left\| f\left(\cdot\right) - f_h\left(\cdot + h\right)\right\|_{p(\cdot)} \to 0, \quad h \to 0$$

olduğu görülür. Bu da (3.3) eşitliğinin doğruluğunu gösterir.■

4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA EŞİTSİZLİKLER

4.1 Yardımcı Sonuçlar

4.1.1 Sonuç $p(\cdot) \in \hat{\wp}_{2\pi}$ için $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ olsun. $\hat{A}_k(x) = \hat{f}_k e^{ikx}, \quad A_{2^{-1}} = 0, \; k = 0,1,2,...$ olmak üzere

$$c_1 \| f \|_{p(\cdot)} \leq \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{l=2^{j-1}}^{2^j - 1} \hat{A}_l(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)} \leq c_2 \| f \|_{p(\cdot)}$$

dır.

Bu tip eşitsizliklere Littlewood-Paley tipi eşitsizlik denir ve ilk kez 1936 yılında $1 < p < \infty$ için $L_{2\pi}^{p}$ uzaylarında J. E. Littlewood ve R. Paley tarafından kanıtlanmıştır. Daha sonra çeşitli uzaylarda benzer sonuçlar elde edilmiştir. Biz burada kanıtı extrapolasyon teoreminin bir sonucu olarak ifade edeceğiz.

Kanıt $f \in L_{comp}^{\infty}$ alalım.

$$Tf(x) := \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{l=2^{j-1}}^{2^j - 1} \hat{A}_l(x) \right|^2 \right)^{1/2}$$

olmak üzere $(Tf, |f|)$ ikilisi için $[5]$ den $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için

$$\| Tf \|_{p,\omega} \leq c \| f \|_{p,\omega}$$

olduğunu biliyoruz. O halde $f \in L_{comp}^{\infty}$ için bu eşitsizlik ve hipotez gereği extrapolasyon teoreminin koşulları sağlanır. Böylece bu fonksiyon çifti gereken eşitsizliğin sağ tarafını sağlar. Sol taraf da benzer şekilde gösterilir. L_{comp}^{∞} kümesi $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ de yoğun olduğundan bu eşitsizlik $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ den olan her fonksiyon için de geçerlidir.■

4.1.2 Sonuç $p(\cdot)\in\wp_{2\pi}$ olmak üzere f_n $(n=1,2,3,...)$, $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ uzayında fonksiyonların bir dizisi ve S_{n,k_n}, k_n n' nin bir fonksiyonu olmak üzere f_n ' in Fourier serisinin k_n. kısmi toplamı olsun. O halde

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| S_{n,k_n}(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)} \le c \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)}$$

dir. Burada c sabiti f_n ' den bağımsızdır.

Kanıt $\{f_n\}$, L_{comp}^{∞} sınıfında fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$f(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(x) \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$Tf(x) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| S_{n,k_n}(x) \right|^2 \right)^{1/2}$$

olmak üzere p_0, $1<p_0<\infty$ ve her $\omega\in A_{p_0}$ ağırlığı için $\|Tf\|_{p_0,\omega} \le C\|f\|_{p_0,\omega}$ dir $[5]$. Bu eşitsizlik ve hipotez gereği extrapolasyon teoreminin koşulları sağlanır. Bu durumda L_{comp}^{∞} sınıfından olan her fonksiyon dizisi için gerekli eşitsizlik geçerlidir. L_{comp}^{∞} kümesi $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ de yoğun olduğundan $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ den olan her fonksiyon için de bu eşitsizlik geçerlidir.■

4.2 Ana Sonuçlar

4.2.1 Teorem $p(\cdot):\mathbb{R}\to[1,\infty)$ fonksiyonu için $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonunu alalım. $p(\cdot)\in\wp_{2\pi}$ ise her $m\in\mathbb{N}$ için

$$D\big(f;\sigma,h,p(\cdot)\big) \le c_{p(\cdot)} \sum_{k=0}^{m} E_{2^k-1}(f)_{p(\cdot)}\, \delta_{2^k,h} + c_{p(\cdot)} E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot)}$$

dir. Burada

$$\delta_{2^k,h} := \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \left|\hat{\sigma}(lh) - \hat{\sigma}((l+1)h)\right| + \left|\hat{\sigma}(2^k h)\right|,$$

$$\hat{\sigma}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{ux} d\sigma(u), \quad 0 < h < \pi$$

dir.

Kanıt $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ alalım. $S_{2^{m+1}}(f)$ ile f 'in Fourier serisinin 2^{m+1} inci kısmi toplamını gösterelim ve $h \le 2^{-m-1}$ olsun. $D(f;\sigma,h,p(\cdot))$ sayısının tanımından ve normun özelliklerinden

$$D(f;\sigma,h,p(\cdot)) \le \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\sigma_h f)(x,u) - \left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f\right)(x,u) \right] d\sigma(u) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$+ \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f\right)(x,u)\, d\sigma(u) \right\|_{p(\cdot)} \tag{4.1}$$

elde edilir. 3.3.13 ve 3.3.9 Teoremleri sırası ile uygulanır ise

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\sigma_h f)(x,u) - \left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f\right)(x,u) \right] d\sigma(u) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le K_{p(\cdot)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| (\sigma_h f)(\cdot,u) - \left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f\right)(\cdot,u) \right\|_{p(\cdot)} d\sigma(u)$$

$$= K_{p(\cdot)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \sigma_h \left(f - S_{2^{m+1}} f \right)(\cdot,u) \right\|_{p(\cdot)} d\sigma(u)$$

$$\le c_{p(\cdot)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \left(f - S_{2^{m+1}} f \right) \right\|_{p(\cdot)} d\sigma(u)$$

$$\le c_{p(\cdot)} E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot)} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u)$$

$$\le c_{p(\cdot)} E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot)} \tag{4.2}$$

elde edilir.

Genelliği kaybetmeden f 'nin Fourier serisini

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} := \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k(x)$$

olarak alalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f\right)(x,u)\, d\sigma(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} S_{2^{m+1}} f(x+tu)\, dt \right] d\sigma(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \hat{f}_k e^{ik(x+tu)} dt \right] d\sigma(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \hat{f}_k e^{ikx} \int_{-h}^{h} e^{iktu} dt \right] d\sigma(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \hat{A}_k(x) \int_{-h}^{h} e^{iktu} dt \right] d\sigma(u)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \hat{A}_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikhu} - e^{-ikhu}}{2ikhu} d\sigma(u)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \hat{A}_k(x) \hat{\sigma}(kh). \tag{4.3}$$

(4.1), (4.2) ve (4.3) kullanılarak

$$D\left(f;\sigma,h,p(\cdot)\right) \le \left\| \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \hat{A}_k(x) \hat{\sigma}(kh) \right\|_{p(\cdot)} + c_{p(\cdot)} E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot)}$$

olduğu görülür. Her $a,b \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < 1$ için $(a+b)^p < a^p + b^p$ eşitsizliği ve 4.1.1 Sonuç kullanılarak

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \hat{A}_k(x)\hat{\sigma}(kh) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{p(\cdot)} \left\| \left(\sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \hat{A}_l(x)\hat{\sigma}(lh) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)}$$

$$:= c_{p(\cdot)} \left\| \left(\sum_{k=0}^{m} \Delta_{k,\sigma}^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)}$$

$$< c_{p(\cdot)} \left\| \sum_{k=0}^{m} \left(\Delta_{k,\sigma}^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)}$$

$$= c_{p(\cdot)} \left\| \sum_{k=0}^{m} \Delta_{k,\sigma} \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c_{p(\cdot)} \sum_{k=0}^{m} \left\| \Delta_{k,\sigma} \right\|_{p(\cdot)} \tag{4.4}$$

elde edilir. Şimdi $l \leq 2^k - 1$ için $\hat{A}_l = 0$ durumunda

$$\Delta_{k,\sigma} = \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \hat{A}_l(x)\hat{\sigma}(lh)$$

toplamına Abel dönüşümünü uygularsak

$$\Delta_{k,\sigma} = \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \left[S_l(f,x) - S_{2^{k+1}-1}(f,x) \right] \left[\hat{\sigma}(lh) - \hat{\sigma}((l+1)h) \right]$$

$$+ \left[S_{2^{k+1}-1}(f,x) - S_{2^k-1}(f,x) \right] \hat{\sigma}(2^k h)$$

olduğu görülür. Buradan da

$$\left\| \Delta_{k,\sigma} \right\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \left\| S_l(f,x) - S_{2^{k+1}-1}(f,x) \right\|_{p(\cdot)} \left| \hat{\sigma}(lh) - \hat{\sigma}((l+1)h) \right|$$

$$+ \left\| S_{2^{k+1}-1}(f,x) - S_{2^k-1}(f,x) \right\|_{p(\cdot)} \left| \hat{\sigma}(2^k h) \right|$$

$$=\left\|S_{2^k}(f,x)-S_{2^{k+1}-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot)}\times$$

$$\times\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^k+1\right)h\right)\right|$$

$$+\ldots+\left\|S_{2^{k+1}-2}(f,x)-S_{2^{k+1}-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot)}\times$$

$$\times\left|\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-2\right)h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-1\right)h\right)\right|$$

$$+\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-S_{2^k-1}(f,x)\right\|_{p(\cdot)}\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)\right|$$

$$\leq\left[\left\|S_{2^k}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot)}+\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot)}\right]\times$$

$$\times\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^k+1\right)h\right)\right|$$

$$+\ldots+\left[\left\|S_{2^{k+1}-2}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot)}+\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot)}\right]\times$$

$$\times\left|\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-2\right)h\right)-\hat{\sigma}\left(\left(2^{k+1}-1\right)h\right)\right|$$

$$+\left[\left\|S_{2^{k+1}-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot)}+\left\|S_{2^k-1}(f,x)-f(x)\right\|_{p(\cdot)}\right]\left|\hat{\sigma}\left(2^k h\right)\right|$$

$$\leq CE_{2^k-1}(f)_{p(\cdot)}\,\delta_{2^k,h} \tag{4.5}$$

olur. Böylece (4.4) ve (4.5) den

$$\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\hat{\sigma}(kh)\right\|_{p(\cdot)}\leq c_{p(\cdot)}\sum_{r=0}^{m}E_{2^k-1}(f)_{p(\cdot)}\,\delta_{2^k,h} \tag{4.6}$$

olduğu görülür. (4.1) ve (4.6) dan da istenilen eşitsizlik elde edilir. ■

4.2.2 Lemma $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$

$$|\lambda_l| \leq M \ , \ \sum_{\upsilon=2^l}^{2^{l+1}-1} |\lambda_\upsilon - \lambda_{\upsilon+1}| \leq M \ \ (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

koşulunu sağlayan sayıların bir dizisi ve $p(\cdot) \in \hat{\wp}_{2\pi}$ olsun. a_υ, b_υ $(\upsilon = 1, 2, \ldots)$ sayıları, $f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonunun Fourier katsayıları olmak üzere

$$a_0 \lambda_0 / 2 + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \lambda_\upsilon \left(a_\upsilon \cos \upsilon x + b_\upsilon \sin \upsilon x \right)$$

serisi bir $F \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ fonksiyonunun Fourier serisidir ve

$$\|F\|_{p(\cdot)} \leq c \|f\|_{p(\cdot)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c > 0$, f fonksiyonundan bağımsız bir sabittir.

Kanıt

$$\Delta_{\mu,s} := \sum_{\upsilon=2^{\mu-1}}^{s} A_\upsilon(x) \ , A_\upsilon(x) := a_\upsilon \cos \upsilon x + b_\upsilon \sin \upsilon x \ \ \left(s \geq 2^{\mu-1}, \mu = 1, 2, \ldots \right)$$

$$\Delta_\mu = \sum_{\upsilon=2^{\mu-1}}^{2^\mu - 1} A_\upsilon(x)$$

ve

$$\Delta'_\mu := \sum_{\upsilon=2^{\mu-1}}^{2^\mu - 1} \lambda_\upsilon A_\upsilon(x)$$

olsun. O zaman [12, s. 347] de olduğu gibi

$$|\Delta'_\mu|^2 \leq 2M \left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^\mu - 1} |\Delta_{\mu,s}|^2 |\lambda_s - \lambda_{s+1}| + |\Delta_\mu|^2 |\lambda_{2^\mu}| \right)$$

elde edilir. 4.1.2 Sonuç ve her x için $p(x) \leq p_+$ özelliği kullanılarak

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta'_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}\right)=\int_{0}^{2\pi}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta'_{\mu}\right|^{2}\right)^{p(x)/2}dx$$

$$\leq\int_{0}^{2\pi}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}2M\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1}\left|\Delta_{\mu,s}\right|^{2}\left|\lambda_{s}-\lambda_{s+1}\right|+\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\left|\lambda_{2^{\mu}}\right|\right)\right)^{p(x)/2}dx$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(2M\right)^{p(x)/2}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1}\left|\Delta_{\mu,s}\right|^{2}\left|\lambda_{s}-\lambda_{s+1}\right|+\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\left|\lambda_{2^{\mu}}\right|\right)\right)^{p(x)/2}dx$$

$$\leq c\int_{0}^{2\pi}\left(2M\right)^{p(x)/2}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\left(\sum_{s=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1}\left|\lambda_{s}-\lambda_{s+1}\right|+\left|\lambda_{2^{\mu}}\right|\right)\right)^{p(x)/2}dx$$

$$\leq c\int_{0}^{2\pi}\left(2M\right)^{p_{+}}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\right)^{p(x)/2}dx$$

$$=C\rho_{p(\cdot)}\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\{\lambda>0\ ;\ \rho\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}/\ \lambda\right)\leq 1\right\}\subset\left\{\lambda>0\ ;\ \rho\left(\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta'_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}/\ \lambda\right)\leq 1\right\}$$

olduğu görülür. Her iki tarafın infimumu alınır ise

$$\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta'_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot)}\leq\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot)}$$

olur. Şimdi 4.1.1 Sonuç kullanılır ise

$$C_{1}\left\|F\right\|_{p(\cdot)}\leq\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta'_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq\left\|\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\Delta_{\mu}\right|^{2}\right)^{1/2}\right\|_{p(\cdot)}\leq C_{2}\left\|f\right\|_{p(\cdot)}\ .\qquad\blacksquare$$

4.2.3 Teorem $p(\cdot)\in\hat{\wp}_{2\pi}$ için $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ ve $F(x)$ fonksiyonu sınırlı varyasyonlu yani;

$$\|F\|\le c_1\ ,\ \sum_{\theta=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left|F(\theta h)-F\left((\theta+1)h\right)\right|\le c_2\ ,\ h\le 2^{-m-1}\ ,\ \mu\in\mathbb{N}$$

olsun. Eğer σ_1 ve σ_2

$$\hat{\sigma}_1(x)=\hat{\sigma}_2(x)F(x)\ ,\ \ |x|<1$$

koşullarını sağlıyor ise

$$D\big(f;\sigma_1,h,p(\cdot)\big)=c\Big[D\big(f;\sigma_2,h,p(\cdot)\big)+E_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot)}\Big]$$

dir.

Kanıt $f\in L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ için 4.1.1 Teoremin kanıtında $D\big(f;\sigma,h,p(\cdot)\big)$ 'nin değerlendirmesi için kullanılan tekniği tekrarlarsak,

$$D\big(f;\sigma_1,h,p(\cdot)\big)\le\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}\right)(x)\,d\sigma_1(u)\right\|_{p(\cdot)}+cE_{2^{m+1}}(f)_{p(\cdot)}\qquad(4.7)$$

elde edilir. Buradan (4.3) eşitliği, hipotez ve 4.2.2 Lemma kullanılarak

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}\right)(x)\,d\sigma_1(u)\right\|_{p(\cdot)}=\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\hat{\sigma}_1(kh)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{A}_k(x)\hat{\sigma}_2(kh)F(kh)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{f}_k e^{ikx}\hat{\sigma}_2(kh)F(kh)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$\le c\left\|\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1}\hat{f}_k e^{ikx}\hat{\sigma}_2(kh)\right\|_{p(\cdot)}$$

$$= c\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f\right)(x,u)\, d\sigma_2(u) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$= c\left\| \int_{-\infty}^{\infty} S_{2^{m+1}} \left(\sigma_h f\right)(x,u)\, d\sigma_2(u) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$= c\left\| S_{2^{m+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma_h f\right)(x,u)\, d\sigma_2(u) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$\leq c\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_h f(x,u)\, d\sigma_2(u) \right\|_{p(\cdot)}$$

$$= D\left(f;\sigma_2, h, p(\cdot)\right)$$

olduğu görülür. Böylece (4.7) ve bu eşitsizlikten istenilen elde edilir.■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında klasik Lebesgue uzaylarının bir genelleşmesi olan değişken üslü Lebesgue uzayları tanıtılmış ve bu uzayların temel özellikleri kanıtları ile birlikte verilmiştir. Daha sonra klasik Lebesgue uzayları ve benzer uzaylarda elde edilen sonuçların değişken üs durumunda da geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu benzerlikten hareketle daha önce klasik uzaylarda tanımlı konvolüsyon operatörlerinin değişken üslü uzaylarda özellikleri yaklaşım teorisi açısından incelenmiş, bu operatörler ile en iyi yaklaşım sayıları arasındaki bağlantıyı ifade eden eşitsizlikler kanıtlanmıştır. Özel halde değişken üs sabit olduğu durumlarda elde edilen sonuçlar klasik sonuçlar ile örtüşmektedir.

Bu sonuçların elde edilmesi için uyguladığımız yöntem, klasik Lebesgue uzaylarında var olan bazı önemli teoremlerin değişken üslü Lebesgue uzaylarındaki benzerlerinin elde edilmesinde kullanılacaktır.

6. KAYNAKLAR

[1] Timan, M. F., “Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and transformations of convolution type” (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 198, 776–778, (1971).

[2] Ponomarenko, V. G. and Timan, M. F. “On the behaviour of convolution type transformations in the Orlicz space”, in: Theory of the Approximation of Functions, Vol.3, *Proceedings of the Institute of Application Mathematics and Mechanics*, Donetsk, 187-191, (1998).

[3] Yıldırır, Y. E. and Israfilov, D. M., “The Properties of convolution type transforms in weighted Orlicz spaces”, *Glasnik Matematicki*, 45(65), 461-474, (2010).

[4] Marcinkiewicz, J., “Sur les multiplicateurs des series de Fourier”, *Studia Mathematica* , 8, 78-91, (1939).

[5] Kurtz, D. S., “Littlewood-Paley and multipliers theorems on weighted L^p spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc*., 259, 235-254, (1980).

[6] Kokilašhvili, V., “A direct theorem for the approximation in the mean of analytic functions by polynomials”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185, 749-752, (1969).

[7] Guven, A. and Israfilov, D. M., “Multiplier theorems in weighted Smirnov spaces”, *J. Korean Math. Soc*., 45(6), 1535-1548, (2008).

[8] Cruz-Uribe, D. V. and Fiorenza A., *Variable Lebesgue Spaces Foundations and Harmonic Analysis*, Heidelberg: Birkhäuser, (2013).

[9] Halsey, T. C., “*Electrorheological fluids*”, Science, New Series, 258(5083), 761-766, (1992).

[10] Stangroom, J. E., “*Electrorheological fluids*”, Physics in Technology, 14, 290-296, (1983).

[11] Krasnosel’skiĭ, M. A. and Rutickiĭ, Y. B., *Convex functions and Orlicz spaces*, Groningen: P. Noordhoff Ltd., (1961).

[12] Zygmund, A., *Trigonometric Series, Vol. I-II*, Chambridge Univ. Press, (1959).

[13] Folland, G. B., *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*, New York: A Wiley-lnterscience Publication John Wiley & Sons, Inc., (1999).

[14] Sharapudinov, I. I., *Some problems of approximation theory in the variable exponent Lebesgue spaces*, (in Russian), Vladikafkas, (2012).

[15] Devore, R. A. and Lorentz, G. G., *Constructive Approximation*, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1993).

[16] Diening, L., “Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$”, *Math. Inequal.Appl*., 7, 245-253, (2004).

[17] Kováčik, O., and Rákosník, J., “On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$”, *Czechoslovak Math. J.* 41(116), 592-618, (1991).

[18] Genebashvili, I., Gogatishvili, A., Kokilashvili, V. and Krbec, M., *Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type*, USA: Longman, (1998).

[19] Katznelson, Y., *An introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, (2003).