T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

HATİCE ASLAN

BALIKESİR, ARALIK - 2016

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM

DOKTORA TEZİ

HATİCE ASLAN

Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Ali GÜVEN**	**(Tez Danışmanı)**
	Prof. Dr. Mourad E. H. ISMAIL	**(Eş Danışman)**
	Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	
	Prof. Dr. İlkay KARACA	
	Prof. Dr. Ramazan AKGÜN	
	Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	
	Yrd. Doç. Dr. Fulya ŞAHİN	

BALIKESİR, ARALIK - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Hatice ASLAN tarafından hazırlanan "**LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM** " adlı tez çalışmasının savunma sınavı 20.12.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Eş Danışman Prof. Dr. Mourad E. H. İSMAİL	....
Üye Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Prof. Dr. İlkay KARACA	....
Üye Prof. Dr. Ramazan AKGÜN	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Fulya ŞAHİN	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması Türkiye Bilimsel Ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2214-A Yurtdışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı ile desteklenmiştir.

ÖZET

LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM
DOKTORA TEZİ
HATİCE ASLAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ GÜVEN)
(EŞ DANIŞMAN: PROF. DR. MOURAD E. H. ISMAIL)
BALIKESİR, ARALIK - 2016

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, Fourier serileri ve lineer operatörler ile yaklaşım teorisi ve bu teorilerin gelişimi ile ilgili bir kronolojik bilgi içermektedir.

İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler ile gerekli eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde önce lineer olmayan Fourier tabanlı seriler tanıtılmıştır. Sonra bu serilerin kısmi toplamlarının ve Cesàro ortalamalarının yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca lineer olmayan Fourier tabanlı serilerin kısmi toplamlarının, genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalamalarının ve Cesàro ortalamalarının düzgün norm ve Hölder normunda yaklaşım problemleri çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde yeni bir $\{T_\lambda(f,.)\}$ pozitif lineer operatörler ailesi tanımlanmış, bu operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri incelenmiş ve Voronovskaya tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Ayrıca derecesi N'yi aşmayan polinomlar uzayında sınırlandırılmış $T_\lambda(f,x)$ operatörünün ve kuadratik değişkenli genelleştirilmiş üstel operatörlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir.

Son bölüm bu tezde elde edilen sonuçların özeti, açık problemler ve önerilerden oluşmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein tipi operatör, genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması, Hölder sınıfı, Lineer olmayan Fourier tabanlı seriler, özdeğer, üstel operatör.

ABSTRACT

APPROXIMATION BY NONLINEAR FOURIER BASIS
PH. D. THESIS
HATİCE ASLAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN)
(CO-SUPERVISOR: PROF. DR. MOURAD E. H. ISMAIL)
BALIKESİR, DECEMBER 2016

This thesis consists of five chapters.

The first chapter includes some chronological information about approximation theory and linear operator theory and their progress.

In second chapter some basic definitions, theorems and inequalities which are used are given.

In third chapter, firstly we define Fourier series by nonlinear basis. Later we give convergence of partial sums and Cesàro means of Fourier series by nonlinear basis. Furthermore approximation problems for Cesàro means, generalized de la Vallée Poussin means and for partial sums of nonlinear Fourier series are investigated in uniform and Hölder norms.

In fourth chapter a new positive linear operator family $\{T_\lambda(f,x)\}$ is introduced and some approximation properties, Voronovskaya-type theorem is given for this family. Additionally eigenvalues and eigenfunctions of the restriction of $T_\lambda(f,x)$operators and general exponential operators with quadratic variance to the space of polynomials of degree at most N are investigated.

Last chapter provides the summary of all results obtained in this thesis and suggests open problems for next studies.

KEYWORDS: Bernstein type operator, generalized de la Vallée Poussin mean, Hölder class, series with nonlinear basis, Eigenvalue, Exponential operator.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Tanımı
$\boldsymbol{E_n(f)_X}$	X uzayında en iyi yaklaşım
$\boldsymbol{\tau^n}$	Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların sınıfı
$\boldsymbol{E_n^a(f)_X}$	X uzayında τ_a^n'nın elemanları ile en iyi yaklaşım
$\boldsymbol{\tau_n^a}$	Derecesi n'yi aşmayan lineer olmayan trigonometrik polinomların sınıfı
$\mathbb{Z}, \mathbb{N}$	Tam sayılar, Pozitif tam sayılar
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	Reel sayılar kümesi, Pozitif reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{\Pi}$	Birim çember veya $[0,2\pi]$
$\boldsymbol{C(\Pi)}$	$\mathbb{R}$ üzerinde 2π -periyotlu sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{L_p(\Pi)}$	Π üzerinde p. dereceden integrallenebilen fonksiyonlar
$\boldsymbol{\omega_k(f,.)_p}$	$L_p(\Pi)$ uzayında k. derece düzgünlük modülü
$\Delta_h^r \boldsymbol{f}$	f fonksiyonunun h adımlı r. farkı
$\boldsymbol{H_P^\alpha}$	L_p uzayında Hölder sınıfı
$\boldsymbol{H^\alpha}$	Sürekli fonksiyonların Hölder uzayı
$\boldsymbol{K_r(f,.)_p}$	$L_p \in [a,b]$ için r. derece Peetré K-fonksiyoneli
$\boldsymbol{C^r[a,b]}$	$[a,b]$ aralığında r. dereceden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon uzayı
$\boldsymbol{D_n}$	Dirichlet çekirdeği
$\boldsymbol{K_n}$	Fejér çekirdeği
$\boldsymbol{\Gamma}$	Gamma fonksiyonu
B	Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{R_\lambda(T)}$	T operatörünün resolvent operatörü
$\boldsymbol{s_{k,j}}$	1. Stirling sayısı
$\boldsymbol{S_{k,j}}$	2. Stirling sayısı
$\boldsymbol{(x)_k}$	Pochammer sembolü
$\boldsymbol{\pi_N}$	Derecesi en fazla N olan cebirsel polinomların uzayı
$\boldsymbol{AC(\Pi)}$	Mutlak sürekli fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{W_p^r(\Pi)}$	Sobolev uzayı

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli danışmanlarım Prof. Dr. Mourad E. H. ISMAIL ve Prof. Dr. Ali GÜVEN'e, ayrıca her zaman ilgi gösteren çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE'ye en içten teşekkürlerimi sunarım. Bu tez çalışmasında "2214-A Yurtdışı Doktora Sırası Araştırma Bursu Programı" kapsamında verdiği destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkür ederim. Son olarak, hayatım boyunca gösterdikleri destek ve anlayıştan dolayı annem, babam ve biricik kardeşime teşekkürü bir borç bilirim.

Balıkesir, 2016 **Hatice ASLAN**

1. GİRİŞ

1.1 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Yaklaşım

Yaklaşım teorisi; nitelikleri daha az bilinen (çalışılması zor olan) bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen (çalışılması kolay olan, örneğin polinomlar gibi) ve daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi ve bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir sorularına cevap arayan çalışmaları kapsamaktadır.

Yaklaşım teorisinde Fourier serileri oldukça önemlidir. Matematikte, Fourier serileri bir periyodik fonksiyonu basit dalgalı fonksiyonların (sinüs ve kosinüs) toplamına çevirir, bir başka deyişle kompleks üstel fonksiyona, e^{ikx}'li forma çevirir. Fourier serileri Fourier analizinin bir koludur.

Fourier serileri 1768-1830'da Joseph Fourier tarafından bir metal çubuk veya levhadaki ısı denklemlerinin çözümü için kullanılmıştır. Bir ısı denklemi, parçalı bir diferansiyel denklemdir. Fourier'in bu çalışmasından önce, bu tür ısı denklemlerine genel bir çözüm yoktu. Her ne kadar parçalı yaklaşımlar olsa da yeterli değildir. Çünkü bu yaklaşımlar ısı dağılımının basit denklemlere göre dağıldığını varsayaraktan probleme yaklaşıyordu. (Örneğin: Eğer ısı kaynağı bir sinüs veya kosinüs denklemiyse...). Fourier'in düşüncesi basit denklemleri (sin ve cos) katsayılarla üst üste ekleyerek karmaşık ısı kaynağı kombinasyonları oluşturmaktı. Bu yüzden denklemlerin belli katsayılarla toplamı Fourier Serisi diye adlandırılır.

Her ne kadar başlarda bu yöntem ısı problemlerinin çözümü için uygulanmışsa da daha sonraları görülmektedir ki çok geniş bir perspektifteki fonksiyonlara aynı yöntem uygulanabilmektedir. Basit örneklerin anlaşılması teorinin modern halinin kullanılmasıyla epey basitleşmiştir.

Fourier serileri elektrik mühendisliğinde, titreşim analizinde, akustiklerde, sinyal işlemesinde, resim işlemesinde, kuantum mekaniğinde ve ekonomi hesaplamaları gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Fourier tabanları sabit sinyal işlenmesinde kullanılan çok güçlü bir araçtır. Son yıllarda lineer olmayan ve sabit olmayan sinyal işlemesi çok gelişmiştir. Lineer olmayan Fourier tabanı ailesi klasik Fourier tabanının genişletilmiş bir ailesi olarak düşünüldüğünde sinyal işleme ve oluşturmada kendine geniş bir uygulama sahası bulmuştur.

Bu tezin üçüncü kısmında, yaklaşım teorisinde çokça çalışılan Cesàro ve genelletirilmiş de la Vallée Poussin gibi toplanabilme metotları ele alınacak ve bunlar lineer olmayan tabana genişletilecektir. Elde edilen tüm sonuçlar çeşitli fonksiyon uzaylarına taşınacak ve böylece daha genel tabanlı yaklaşıma geçilerek bazı fonksiyon uzaylarının elemanlarının özellikleri incelenecektir.

Bunun için öncelikle toplanabilme teorisi hakkında kısa bir bilgi hatırlatalım. Augustin Louis Cauchy 1821 yılında yayınladığı Analyse Algébrique adlı çalısmasında, yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da yakınsak ve dizi ile aynı limite sahip olduğunu ispatlayarak toplanabilme teorisinin temelini atan ilk matematikçilerden biri olmuştur. Ancak daha önce Leibniz, Newton ve çağdaşları sonsuz dizi ve serilerle ilgilenmişlerdir. Özellikle sonsuz serileri için yapılan hesapların doğal bir sonucu gibi görmüşlerdir. Bu görüşün sonucu olarak, James Bernoulli 1696 yılında

$$1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$$

bağıntısını kullanmıştır. Daha sonra 18. yüzyılın ortalarında Leonhard Euler, bu eşitlikte $x = -1$ alarak, bir paradoks olduğunu kabul ettiği şu esitliği yazmıştır:

$$1 - 1 + 1 + ... = \frac{1}{2}$$

Buna yönelik titiz bir açıklama çok sonraları yapılabilmiştir. Ernesto Cesàro, 1890'dan itibaren Euler'in girişimlerine yeni yorumlar getirecek şekilde, ıraksak serilere bir toplam karşılık getirmek için yöntemler araştırmışlardır. Yakınsaklık kavramının aydınlatılmasından çok önce sezgisel olarak bulunan bu sonuçlar yakınsaklık tanımından ve Cauchy'nin yukarıdaki teoreminden sonra anlam kazanmış ve böylece toplanabilme teorisinin temelleri atılmıştır. 1890 yılında E. Cesàro $\mathcal{C}_1$ yakınsaklık kavramını vermiştir. Buna göre bir serinin kısmi toplam dizisi olan (S_n) dizisinin aritmetik ortalaması, bir L değerine yakınsak ise (S_n) dizisi L değerine $\mathcal{C}_1$ yakınsaktır veya serinin kendisi, L değerine Cesàro toplanabilirdir denir. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olan $(S_n) = \left(\frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\right)$ dizisi, yakınsak olmadığı halde aritmetik ortalaması $1/2$ değerine yakınsaktır. Bu sonucun Euler tarafından verilen sonuç ile aynı olduğu görülmüş ve ıraksak seriler ile ilgili çalışmalar devam etmiştir. Buradan da anlaşılacağı gibi toplanabilme, ıraksak serilerin incelenmesinde ıraksak seriye toplam karşılık getirme fikridir. Temel amaç, yakınsak olmayan bir diziye bir limit karşılık getirmektir.

1.2 Lineer Pozitif Operatörler

Uygulamalı matematik ve fonksiyonel analizin arakesitinde yer alan araştırma alanlarından biri de lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusudur ve matematiğin birçok dalıyla ilişkilidir.

f, $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun *n. Bernstein operatörü* $B_n(f)$

$$p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ 0 \leq k \leq n$$

olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right),\ x \in [0,1],$$

biçiminde tanımlanır.

Alman matematikçi Weierstrass sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır [1]. 1912'de S. N. Bernstein, Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatını verirken Bernstein polinomlarını tanıtmıştır [2].

Bernstein, Bernstein tipi polinomlar ve analizin çeşitli dallarında, örneğin konveks ve nümerik analiz, genel pozitiflik ve monoton operatör teorisinde yoğun olarak ele almıştır. Bernstein polinomlarının temel kavramları ve bunların genelleştirmeleri [3], [4], [5], [6], [7], [8] kaynaklarında bulunabilir.

Tezin dördüncü bölümünde, Bernstein tipi yeni bir operatör tanımlanmış ve bu operatörün 1. ve 2. süreklilik modülü ve Peetre K-fonksiyoneli ile yaklaşımın derecesi incelenip, ek olarak Voronovskaya tipi teorem verilmiştir. Ayrıca yeni operatörümüzün $\mathcal{C}$ üzerindeki N-dereceli polinomların $(N+1)$-boyutlu özdeğer ve özfonksiyonları belirlenmiştir. Ayrıca, T_λ operatörünün özdeğerleri ve spektral tekilliği incelenmiştir. Bunların dışında, Bernstein operatörünün özyapısı da incelenmiştir.

Ayrıca üstel operatörler de çalışılmıştır. Önceleri May [9] makalesinde p polinomunun en çok 2. dereceden polinom olduğu durumu ele almış ve Szász, Baskakov, Gauss-Weierstrass, Bernstein (polinomları) operatörlerinin sırasıyla $p(t) = t,\ t(1+t),\ t(1-t),\ 1,\ t^2$ durumları olduğunu göstermiştir. $p(t) = 1 + t^2$ durumundaki genelleştirilmiş operatör daha sonraları May ve İsmail tarafından [10] makalesinde incelenmiştir. Üstel operatörler 1978'de [10] makalesinde tanımlanmışlardır. Daha sonra Morris [11]'de, kuadratik değişkenli doğal üstel dağılımın ailesini tanıtmıştır. Bunlar C. P. May'in makalesi olan [9]'daki W ile aynıdırlar. Bunun için $p(t) = 1 + t^2$ ile değişmeli olan IM operatörü tanımlanır.

Son olarak da, sabit bir N için derecesi en fazla N olan kuadratik değişkenli genelleştirilmiş üstel bir operatörün özdeğerlerini inceleyecek ve özdeğerlerinin sadece $p(t)$ polinomundaki t^2'nin katsayısına bağlı olduğunu göreceğiz. Bu şaşırtıcıdır. Çünkü bu Baskakov, Post-Widder ve Ismail-May operatörlerinin özdeğerlerinin aynı olduğunu gösterir. Benzer olarak Szász ve Gauss-Weierstrass operatörlerinin özdeğerleri de aynı olur.

2. ÖNBİLGİLER

2.1 Bazı Fonksiyon Sınıfları ve Yardımcı Tanımlar

$\mathbb{R}$ tüm reel sayılar ve $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesini göstermek üzere $\Pi := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{N}$ tüm pozitif sayıların kümesi ve $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. $\mathcal{C}(\Pi)$, Π üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi olmak üzere, $\mathcal{C}(\Pi)$ üzerindeki norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in \Pi} \mid f(t) \mid$$

şeklinde tanımlıdır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\Pi)$, Π üzerinde p. dereceden Lebesgue integrallenebilen fonksiyonları göstersin ve $L^p(\Pi)$ üzerindeki norm

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_\Pi \mid f(t) \mid^p dt \right)^{1/p}$$

şeklindedir. Gösterimde kolaylık adına iki kümeyi aşağıdaki biçimde gösterilsin:

$$X^p(\Pi) := \begin{cases} L^p(\Pi), & 1 \leq p < \infty; \\ \mathcal{C}(\Pi), & p = \infty. \end{cases}$$

Bir $f \in X^p(\Pi)$ fonksiyonuna $X^p(\Pi)$'nin bir alt uzayının fonksiyonları ile yapılan yaklaşımın hatasını tahmin etme bir klasik bir yaklaşım problemidir. Tipik bir yaklaşım uzayı derecesi n'yi aşmayan az trigonometrik polinomların uzayıdır. Bu uzay $\mathcal{T}_n := span\{e^{ikt} :\mid k \mid \leq n\}$ biçiminde gösterilir. Bu durumda $\{e^{ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesine *Fourier tabanı* denir.

$f \in X^p(\Pi)$ fonksiyonuna $\mathcal{T}_n$ alt uzayının elemanlarıyla ile yapılan *en iyi yaklaşım*

$$E_n(f)_p := \inf_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_p$$

biçiminde tanımlanır.

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, bir $f \in X^p(\Pi)$ yaklaşımlarının derecelerini belirtmek için kullanılan önemli diğer bir kavram düzgünlük modülüdür.

2.1.1 Tanım: $f \in X^p[a,b]$ için $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere f fonksiyonunun *süreklilik modülü*

$$\omega(f,t)_p := \sup_{0 \leq h \leq t} \| f(.+h) - f(.) \|_p$$

şeklinde tanımlıdır.

Süreklilik modülü birçok özelliğe sahip olmakla birlikte bu tezde özellikle $\delta > 0$ ve $\mu > 0$ olmak üzere, $[a,b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon için iyi bilinen bir özellik olan

$$\omega(f,\mu\delta) \leq (1+\mu)\omega(f,\delta) \tag{2.1}$$

özelliği kullanılacaktır [12].

2.1.2 Tanım: $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\Delta_h^r f(x) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \left(\begin{array}{c} r \\ k \end{array} \right) f(x+kh)$$

ifadesine *f fonksiyonunun h adımlı r. farkı* denir. Bu durumda

$$\Delta_h^1 f(x) := f(x+kh) - f(x) \quad \Delta_h^r f(x) := \Delta_h^1 \left(\Delta_h^{r-1} f \right)(x), \quad r \geq 2 \tag{2.2}$$

gerçeklenir [12].

2.1.3 Tanım: $f \in X^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere f fonksiyonunun *r. derece düzgünlük modülü*,

$$\omega_r(f,t)_p := \sup_{0\le h\le t} \parallel \Delta_h^r f \parallel_p$$

şeklinde tanımlıdır [12].

$f \in X^p[a,b]$ olmak üzere, $\omega_1(f,t)_p = \omega(f,t)_p$ olduğu açıktır. Yani, 1. derece düzgünlük modülü süreklilik modülüdür.

İkinci derece düzgünlük modülü ise $f \in C[a,b]$ için $r \in \mathbb{N}$ ve r. dereceden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini $C^r[a,b]$ olmak üzere $f \in C^r[a,b]$ için assağıdaki biçimde tanımlanır ve *Zygmund modülü* olarak bilinir.

$$\omega_2(f,\delta) := \sup_{0\le h\le \delta} \sup_{0\le x\le 1-2h} \left\{ \mid f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \mid \right\} \tag{2.3}$$

Süreklilik ve düzgünlük modülü kavramları $X^p(\Pi)$ uzayı içinde aynı şekilde tanımlanır.

$X_p(\Pi)$ uzayı gibi bu tez çalışması için önemli olan diğer bir Banach uzayı 1975 yılında Prösdorff tarafından 2π-periyotlu sürekli fonksiyonların bir alt uzayı olarak ele alınmıştır. Bu uzay Hölder uzayıdır ve aşağıda tanımı verilmiştir.

2.1.4 Tanım: $1 \le p \le \infty$ ve $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere *Hölder sınıfı*

$$H_p^\alpha := \left\{ f \in X^p : \sup_{t>0}\{t^\alpha \omega(f,t)_p\} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır [12].

$p = \infty$ durumunda H_∞^α yerine sadece H^α yazılır. Buradan $f \in \mathcal{C}(\Pi)$ fonksiyonunun H^α Hölder sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\mid f(x) - f(y) \mid \le K \mid x - y \mid^\alpha \tag{2.4}$$

olacak biçimde bir $K > 0$ sayısının bulunması olur.

H^α uzayı $x \neq y$ için,

$$\Delta^\alpha f(x,y) = \frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |^\alpha}, \Delta^0 f(x,y) = 0$$

ve $\| f \|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} | f(x) |$ olmak üzere

$$\| f \|_\alpha = \| f \|_\infty + \sup_{x\neq y} \Delta^\alpha f(x,y) \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlı $\| \, . \, \|_\alpha$ normu ile bir Banach uzayıdır [16].

Yaklaşım teorisinde yaklaşım oranını tahmin etmek için, aşağıda tanımlayacağımız *Peetre K-fonksiyonelinden* yararlanılır.

2.1.5 Tanım: $f \in X^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $t \geq 0$, $r \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$ için r. *derece Peetre K-fonksiyoneli*

$$K_r(f,t)_p := \inf\{\| f - g \|_p + t \| g \|_p \colon g \in \mathcal{W}_p^{(r)}[a,b])\}$$

biçiminde tanımlanır [13].

$r = 2$ durumunda $C^2[a,b]$ nin elemanları $f'' \in C[a,b]$ biçimindeki fonksiyonlar olacaktır. Bu durumda $C^2[a,b]$ uzayı üzerindeki norm

$$\| f \|_{C^2[a,b]} = \| f \|_{C[a,b]} + \| f' \|_{C[a,b]} + \| f'' \|_{C[a,b]}$$

ve Peetre K-fonksiyoneli [14, 15]

$$K_2(f,\delta) = \inf_{g\in C^2[a,b]} \{\| f - g \|_{C[a,b]} + \delta \| g \|_{C^2[a,b]}\} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanır.

2.1.1 Teorem: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere her $f \in L^p[a,b]$ için

$$C_1\omega_r(f,t)_p \leq K_r(f,t^r)_p \leq C_2\omega_r(f,t)_p, \quad t > 0$$

olacak şekilde sadece r'ye bağlı $C_1, C_2 > 0$ sabitleri vardır [14].

2.1.2 Teorem: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere her $f \in L^p[a,b]$ ve $t > 0$ için

$$C^{-1}\left(\min(1,t^r) \parallel f \parallel_p + \omega_r(f,t)_p\right) \leq K_r(f,t^r)_p$$
$$\leq C\left(\min(1,t^r) \parallel f \parallel_p + \omega_r(f,t)_p\right)$$

olacak şekilde sadece r'ye bağlı C_1, $C_2 > 0$ sabitleri vardır [14].

2.2 Lineer ve Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Seriler

Bir $f \in L^1(\Pi)$ için,

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(kt)dt, \quad k = 0, 1, ...,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(kt)dt, \quad k = 1, 2, ...$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(kx) + b_k sin(kx)]$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun *Fourier serisi* denir.

2.2.1 Tanım: $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun.

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

biçiminde tanımlanan D_n fonksiyonuna *n-mertebeli Dirichlet çekirdeği* denir ve D_n fonksiyonu

$$D_n(t) := 1 + 2\sum_{k=1}^{n} cos(kt)$$

biçiminde yazılabilir. Her $n = 0, 1, 2, ...$ için D_n fonksiyonu reel değerli, 2π-periyotlu çift bir fonksiyondur. $n = 0, 1, 2, ...$ değerleri için D_n hem pozitif hem de negatif değerler alabilir [12].

2.2.1 Teorem: Dirichlet çekirdeğinin özellikleri aşağıdaki gibidir [12, 17].

i) $n = 0, 1, ...$ için,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1,$$

ii) $n = 0, 1, ...$ için,

$$\mid D_n(t) \mid \leq 2n + 1,$$

iii) $t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ için,

$$D_n(t) = \frac{sin((2n+1)\frac{t}{2})}{sin(\frac{t}{2})} \quad ve \quad D_n(2k\pi) = 2n + 1,$$

iv) $0 <\mid t \mid< \pi$ için,

$$\mid D_n(t) \mid \leq \frac{\pi}{\mid t \mid}, \quad n = 0, 1, ...$$

2.2.2 Tanım: $D_n(t)$, n-mertebeli Dirichlet çekirdeği olmak üzere,

$$\Lambda_n := \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \mid D_n(t) \mid dt$$

ifadesine *Lebesgue sabiti* denir [18].

2.2.2 Teorem: $n \in \mathbb{N}$ ve $\mid r_n \mid \leq 3$ olsun. Bu durumda

$$\Lambda_n := \frac{4}{\pi^2}\log n + r_n$$

eşitliği sağlanır [18].

2.2.3 Tanım:

$$K_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t), n = 0, 1, ...$$

biçiminde tanımlı K_n fonksiyonuna *n-mertebeli Fejér çekirdeği* denir ve

$$K_n(t) = 1 + 2\sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{| k |}{n+1}\right)e^{ikt}, t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

biçiminde yazılabilir. Her $n = 0, 1, 2, ...$ için K_n fonksiyonu reel değerli, 2π-periyotlu ve pozitif çift bir fonksiyondur [12, 17].

2.2.3 Teorem: Fejér çekirdeğinin özellikleri aşağıdaki gibidir [12, 17].

(i) $n = 0, 1, ...$ için,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1,$$

(ii) $n = 0, 1, ...$ için,

$$| K_n(t) | \leq n + 1,$$

(iii) $t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ için,

$$K_n(t) = \frac{2}{n+1}\left[\frac{sin((n+\frac{1}{2})t)}{2sin(\frac{t}{2})}\right]^2, \quad K_n(2k\pi) = n + 1,$$

(iv) $0 < \delta < \pi$ için,

$$\sup_{\delta < |t| < \pi} | K_n(t) | \leq \frac{1}{(n+1)sin^2(\frac{\delta}{2})},$$

(v) $n = 0, 1, ...$ için,

$$| K_n(t) | \leq \frac{1}{n+1} \frac{\pi^2}{t^2}$$

olur.

Lineer olmayan Fourier tabanlarının ailesi Fourier tabanlarının bir genişlemesidir ve bu genişleme için aşağıda tanımını vereceğimiz durum fonksiyonu kullanılır.

2.2.4 Tanım: Keyfi $a = |a| e^{it_a}$, $|a| < 1$ kompleks sayısı için

$$\tau_a = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

Mobiüs dönüşümünün radyal sınır değerleri yardımıyla

$$e^{i\theta_a(t)} := \tau_a(e^{it}) = \frac{e^{it}-a}{1-\overline{a}e^{it}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *lineer olmayan durum fonksiyonu* denir ve "$\theta_a(t)$" ile gösterilir.

Kolayca gösterilebilir ki durum fonksiyonu

$$\theta_a(t+2\pi) = \theta_a(t) + 2\pi \tag{2.7}$$

özelliğini sağlar. Durum fonksiyonunun türevi

$$\theta'_a(t) = \frac{1-|a|^2}{1-2|a|\cos(t-t_a)+|a|^2}$$

Poisson çekirdeği $p_a(t)$'dir. Buradan $\theta_a(t)$ kesin monoton artan fonksiyon olur ki bu $\cos\theta_a(t)$'yı özel tek bileşenli bir sinyal yapar. Üstelik bu türev

$$0 < \frac{1-|a|}{1+|a|} \leq \theta'_a(t) \leq \frac{1+|a|}{1-|a|} \tag{2.8}$$

özelliğine sahiptir.

Keyfi sonlu terimleri sıfır olmayan bir $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dizisi için

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mid c_k \mid^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Pi}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\Pi}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta_a(x)}\right|^2 \theta_a'(t)dt$$

olur. Bu özellik (2.8) ile birlikte düşünüldüğünde $\left\{e^{in\theta_a(t)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ lineer olmayan Fourier tabanı $L^2(\Pi)$ için $\sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}$ üst ve $\sqrt{\frac{1-|a|}{1+|a|}}$ alt sınırı ile bir Riesz tabanı oluşturur. Burada $a=0$ olduğunda $\left\{e^{in\theta_a(t)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ Fourier tabanıdır [19].

τ_a^n, *derecesi n'e eşit* veya *n'den küçük lineer olmayan trigonometrik polinomların uzayı* aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tau_a^n := span\{e^{in\theta_a(t)} : |k| \leq n\}$$

$f \in L^p(\Pi)$ için $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere lineer olmayan Fourier tabanları $\left\{e^{in\theta_a(t)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *ile en iyi yaklaşım*

$$E_n^a(f)_p := \inf_{T\in\tau_n^a} \|f-T\|_{L^p(\Pi)}$$

biçiminde gösterilir [19].

Bundan sonraki kısımda $X^p(\Pi)$ uzayındaki fonksiyonlara τ_a^n polinomları ile yaklaşım ile ilgili bazı düz ve ters teoremler verilecektir. Bunun için aşağıdaki lemmalar önemlidir.

2.2.1 Lemma: $f \in C(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_\infty = E_n(f\circ\theta_a^{-1})_\infty$$

olur [19].

2.2.2 Lemma: $f \in C(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{1-\mid a\mid}{2}\right)\omega(f,t)_\infty \leq \omega(f\circ\theta_a^{-1},t)_\infty \leq \left(\frac{2}{1-\mid a\mid}\right)\omega(f,t)_\infty$$

olur [19].

2.2.4 Teorem: $f \in C(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_\infty \leq \left(\frac{24}{1-\mid a\mid}\right)\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\infty$$

dir. Sonuç olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f \in H^\alpha$ ise

$$E_n^a(f)_\infty \lesssim n^{-\alpha}$$

olur [19].

2.2.5 Teorem: $r \in \mathbb{N}$ için Π üzerinde tanımlı r. dereceden sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini $C^r(\Pi)$ ile gösterelim. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f \in C^r(\Pi)$, $r \in \mathbb{N}$ için $f^{(r)} \in H^\alpha$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_\infty \lesssim n^{-r-\alpha}$$

olur [19].

2.2.6 Lemma: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_p \asymp E_n(f\circ\theta_a^{-1})_p$$

olur [19].

Lemma 2.2.2'de keyfi bir $f \in C(\Pi)$ için $w(f\circ\theta_a^{-1},t)_\infty$ ve $w(f,t)_\infty$'nin denk olduğunu göstermiştik. Fakat $1 \leq p < \infty$ olmak üzere keyfi bir $f \in L^p(\Pi)$ için

$w(f \circ \theta_a^{-1}, t)_p$ ve $w(f,t)_p$ arasında böyle bir denkliği direkt olarak çıkarmak neredeyse imkansızdır. Yine de klasik bir yaklaşım sonucunu olan aşağıda vereceğimiz sonucu kullanarak $f \in H_p^\alpha$ olması için gerek ve yeter koşulun $f \circ \theta_a^{-1} \in H_p^\alpha$ olması gerektiği ispatlanabilir.

$D := t_0 < t_1 < ... < t_N = t_0 + 2\pi$, Π'yi $I_k := [t_{k-1}, t_k)$, $1 \le k \le N$ sonlu ayrık aralıklarına ayıran bir parçalanış olsun. χI_k karakteristik fonksiyon ve $\delta_D := \max\limits_{1\le k\le N} |t_k - t_{k-1}|$ olmak üzere $S(D) := span\{\chi I_k : 1 \le k \le N\}$ bu parçalanışa göre tüm parçalı sabit fonksiyonların uzayı olsun ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(\Pi)$ için

$$s(f,D)_p := \inf_{s\in S(D)} \|f - S\|_p$$

biçiminde gösterilsin.

2.2.1 Sonuç: $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $f \in H_p^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart keyfi bir D parçalanışı için $s(f,D)_p = O(\delta_D^\alpha)$ olmasıdır [12, 20].

Bu sonuç aşağıdaki Lemma 2.2.4'ü verir.

2.2.4 Lemma: $1 \le p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(\Pi)$ olsun. Bu durumda $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $f \in H_p^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $f \circ \theta_a^{-1} \in f \in H_p^\alpha$ olmasıdır [19].

2.2.6 Teorem: $0 < \alpha \le 1$ ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere$f \in H_p^\alpha$ olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_p \lesssim n^{-\alpha}$$

olur [19].

2.2.7 Teorem: $1 \le p < \infty$ olmak üzere $f \in W^r L^p(\Pi)$, $r \in \mathbb{N}$ ve $0 < \alpha < 1$ için $f^{(r)} \in H_p^\alpha$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$E_n^a(f)_p \lesssim n^{-r-\alpha}$$

olur [19].

2.2.8 Teorem: $f \in C(\Pi)$ fonksiyonu $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $r \in \mathbb{Z}_+$ için $E_n^a(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)})$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $f \in C^r(\Pi)$ dir. Üstelik $0 < \alpha < 1$ için $f^{(r)} \in H^\alpha$ ve $\alpha = 1$ için $\omega(f^{(r)}, t)_\infty = \mathcal{O}(t \mid lnt \mid)$ olur [19].

2.2.9 Teorem: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(\Pi)$ olsun. Bu durumda $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $r \in \mathbb{Z}_+$ için $E_n^a(f)_p = O(n^{-(r+\alpha)})$ ise $f \in W^r L^p(\Pi)$ ve $f^{(r)} \in H_p^\alpha$ olur [19].

2.3 Lineer Pozitif Operatörler

2.3.1 Tanım: X ve Y reel değerli fonksiyonların iki lineer uzayı olsun. $\forall f,\ g \in X$ ve $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

koşulunu gerçekleyen $L : X \to Y$ operatörüne *lineer operatör* adı verilir [21].

Eğer X uzayından alınan her $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ koşulu gerçekleniyorsa bu durumda L operatörüne *pozitif operatör* denir [21].

2.3.1 Uyarı: $\mathcal{L}(X, Y) := \{L| \quad L : X \to Y$ lineer operatör reel vektör uzaydır. $L : X \to Y$ pozitif lineer operatör olmak üzere aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $f, g \in X$ olmak üzere $f \leq g$ ise $L(f) \leq L(g)$,

(ii) $f \in X$ için $f \leq g$ ise $L(f) \leq L(\mid f \mid)$.

2.3.2 Tanım: X ve Y lineer vektör uzayları ve $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. L *operatörünün normu* $\parallel L \parallel$ ile gösterilir ve

$$\| L \| = \sup_{f \in X, \|f\|=1} \| Lf \|$$

olarak tanımlanır [21].

2.3.3 Tanım:

$$\phi_{n,s}(x) = L_n((t-x)^s; x)), s = 0, 1, 2, ...$$

ile tanımlanan ifadelere (L_n) operatör dizisinin *s. merkezi momentleri* denir [4].

2.3.1 Teorem: $t \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, ...$ olsun ve t^i test fonksiyonları $e_i(t) = t^i$ biçiminde gösterilsin. Bu durumda L_n lineer operatör dizisi ve $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$, $\gamma_n(x)$, $[a, b]$ aralığında düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için

$$L_n(e_0; x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$L_n(e_1; x) = x + \beta_n(x)$$

$$L_n(e_2; x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa $L_n(f; x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$'e düzgün olarak yakınsar. Burada f, $[a, b]$ aralığında sürekli a'da sağdan b'de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$'de sınırlı bir fonksiyondur [21].

2.3.2 Teorem(Lusin Teoremi):$1 \leq p < \infty$ olmak üzere her $f \in L^p[a, b]$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\| f - \varphi \|_p < \varepsilon$$

olacak biçimde bir φ sürekli fonksiyonu vardır [22].

2.3.4 Tanım: $X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne *T'nin resolvent operatörü* denir [23].

2.3.5 Tanım: $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, sınırlı ve tanım kümesi X uzayında yoğun ise, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T *operatörünün regüler değeri* denir. T operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise *T'nin resolvent cümlesi* denir [23].

2.3.6 Tanım: $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının cümlesine T operatörünün *diskret spektrumu ya da nokta spektrumu* adı verilir [23].

2.3.7 Tanım: $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının kümesine T operatörünün *sürekli spektrumu* denir [23].

2.3.8 Tanım: X bir kompleks vektör uzay ve $T : X \to X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Tx = \lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x \in X$ çözümü varsa λ sayısına T *operatörünün özdeğeri* denir. Bu x çözümüne ise, T operatörünün özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyonu* denir [23].

2.3.9 Tanım: Bir T operatörünün resolvent çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve T operatörünün özdeğeri olmayan noktalara T operatörünün *spektral tekillikleri* adı verilir [24].

2.3.10 Tanım: $0 < x < \infty$ olsun. Bu durumda x değerleri için

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}$$

biçiminde tanımlanan integrale *2. tür Euler integrali* diğer adıyla *Gamma fonksiyonu* denir. $x > 0$ için Gamma fonksiyonu iyi tanımlıdır [25].

2.3.11 Tanım: $x > 0$ ve $y > 0$ olsun. Bu durumda x ve y değerleri için

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan integrale *1. tür Euler integrali* veya *Beta fonksiyonu* denir [25].

2.3.12 Tanım:

$x \in \mathbb{C}$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x)_n := x(x+1)...(x+n-1), \quad (x)_0 := 1$$

şeklinde tanımlanan $(x)_n$ sembolüne Pochhammer sembolü denir [25].

Ayrıca Pochhammer sembolü $x, v \in \mathbb{C}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu kullanılarak

$$(x)_v = \frac{\Gamma(x+v)}{\Gamma(x)}$$

şeklinde de yazılabilir [25].

2.3.13 Tanım: $k,\ j \in I$ olmak üzere

$$(x)_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} s(k,j) x^j$$

biçiminde tanımlanan $s(k,j)$ sayısına *1.tür Stirling sayısı* ve

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} S(k,j)(x)_j,$$

biçiminde tanımlanan $S(k,j)$ sayısına ise *2.tür Stirling sayısı* denir [25].

2.3.14 Tanım: $W(\lambda, t, u)$ operatörün çekirdeği olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\lambda, t, u) = \frac{\lambda}{p(t)} W(\lambda, t, u)[u-t],$$

genelleştirilmiş diferensiyel denklemini ve

$$\int_{\mathbb{R}} W(\lambda, t, u) du = 1$$

sınır koşulunu sağlayan

$$S_\lambda(f;t) = \int_{\mathbb{R}} W(\lambda, t, u) f(u) du,$$

biçiminde tanımlanan integral operatörüne S_λ *üstel operatörü* denir [11].

3. LİNEER OLMAYAN FOURIER TABANLI YAKLAŞIM

3.1 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Seriler

3.1.1 Tanım: $f \in L^1(\Pi)$ ve $\theta_a(t)$ durum fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(k\theta_a(t))p_a(t)dt, \quad k = 0, 1, ...$$

ve

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(k\theta_a(t))p_a(t)dt, \quad k = 1, 2, ...$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(k\theta_a(x)) + b_k sin(k\theta_a(x))]$$

biçiminde tanımlanan trigonometrik seriye f fonksiyonunun *lineer olmayan Fourier tabanlı serisi* denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(k\theta_a(x)) + b_k sin(k\theta_a(x))]$$

biçiminde yazılır. $f \in L^1(\Pi)$ fonksiyonunun *lineer olmayan Fourier tabanlı serisinin kompleks biçimi,*

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik\theta_a(t)}p_a(t)dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}$$

şeklindedir.

3.1.1 Teorem: $f, g \in L^1(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}, \quad g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\theta_a(x)}$$

ise

$$(f+g)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k + d_k) e^{ik\theta_a(x)}$$

ve

$$(\alpha f)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha c_k) e^{ik\theta_a(x)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

olur.

İspat: Tanımdan istenen sonuç kolayca elde edilir. □

3.1.2 Teorem: $f, g \in L^1(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}, \quad g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\theta_a(x)}$$

ise $(f * g)(x) \in L^1(\Pi)$ ve

$$(f * g)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid} \right) (c_k d_k) e^{ik\theta_a(x)}$$

olur.

İspat: İspat durum fonksiyonunun (2.8) özelliğinden faydalanılarak tamamlanır.

Sobolev uzayı

$$W_r^p(\Pi) = \left\{ f \in X^p(\Pi) : f, ..., f^{(r-1)} \in \mathcal{AC}(\Pi), f^{(r)} \in X^p(\Pi) \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.1.3 Teorem: $f \in W_1^p(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)},$$

ise

$$f'(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid} \right) (ikc_k) e^{ik\theta_a(x)}$$

olur.

İspat: Durum fonksiyonunun (2.8) özelliğinden direkt hesaplama ile elde edilir.

3.2 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Noktasal Yakınsaklığı

$f \in L^1(\Pi)$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ik\theta_a(t)} p_a(t) dt,$$

olmak üzere

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta_a(x)}$$

olsun. Bu lineer olmayan Fourier tabanlı serisinin *kısmi toplamlar dizisi* $S_n^a(f)$ ile gösterilir. Bu durumda $F = f \circ \theta_a^{-1}$ olmak üzere

$$S_n^a(f)(x) = S_n(F)(\theta_a(x))$$

olur. Böylece kısmi toplamlar dizisi $k \in \mathbb{Z}$ için

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik\theta_a(t)}p_a(t)dt,$$

olmak üzere

$$S_n^a(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta_a(x)}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} S_n^a(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ik\theta_a(t)}p_a(t)dt\right\}e^{ik\theta_a(x)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(\theta_a(x)-\theta_a(t))}\right\}p_a(t)dt \end{aligned}$$

olur. Buradan Dirichlet çekirdeğinin tanımı göz önüne alınacak olursa

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(\theta_a(x)-\theta_a(t))p_a(t)dt$$

olur. D_n çift fonksiyon olduğundan,

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(\theta_a(t)-\theta_a(x))p_a(t)dt, \tag{3.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_a(-\pi)}^{\theta_a(\pi)} F(u)D_n(u-\theta_a(x))du,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_a(-\pi)-\theta_a(x)}^{\theta_a(\pi)-\theta_a(x)} F(y+\theta_a(x))D_n(y)dy,$$

olur. Şimdi $\theta_a(x)$ durum fonksiyonunun periyodik olmasından da yararlanarak (2.7) eşitliğinden

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_a(-\pi)-\theta_a(x)}^{\theta_a(-\pi)-\theta_a(x)+2\pi} F(y+\theta_a(x))D_n(y)dy,$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y+\theta_a(x))D_n(y)dy, \tag{3.2}$$

olur. Buradan

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F(t+\theta_a(x))D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F(t+\theta_a(x))D_n(t)dt,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F(\theta_a(x)-t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F(\theta_a(x)+t)D_n(t)dt,$$

elde edilir. Böylece

$$S_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left\{F(\theta_a(x)-t)+F(\theta_a(x)+t)\right\} D_n(t)dt \tag{3.3}$$

eşitliği ile ifade edilebilir.

3.2.1 Lemma: $F := f \circ \theta_a^{-1}$ olsun. Bu durumda

(**i**) $f \in \mathcal{C}(\Pi)$ ise $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$,

(**ii**) $f \in L^p(\Pi)$ ise $\|F\|_p \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p} \|f\|_p$,

olur.

İspat: (**i**) $f \in \mathcal{C}(\Pi)$ ve $F := f \circ \theta_a^{-1}$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_\infty := sup_{x\in\Pi} \mid f(x) \mid = sup_{\theta_a(x)\in\Pi} \mid F(\theta_a(x)) \mid = \|F\|_\infty$$

dır.

(**ii**) $f \in L^p(\Pi)$ ve $F := f \circ \theta_a^{-1}$ olsun. Bu durumda

$$\| f \|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Pi} \mid f(t) \mid^p dt\right)^{1/p}$$

dır. Böylece basit bir hesapla

$$\| f \|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} | F(\theta_a(t)) |^p \frac{p_a(t)}{p_a(t)} dt \right)^{1/p}$$

olur. $\theta_a(t) = u$ denilirse ve durum fonksiyonunun (2.8) özelliğinden

$$\| f \|_p \geq \left(\frac{1-|a|}{1+|a|} \right)^{1/p} \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} | F(u) |^p \, du = \left(\frac{1-|a|}{1+|a|} \right)^{1/p} \|F\|_p$$

bulunur. Böylece istenen

$$\|F\|_p \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{1/p} \|f\|_p$$

eşitsizliği elde edilir. □

3.2.1 Teorem: $S_n^a : C(\Pi) \to C(\Pi)$, $n = 0, 1, ...$ lineer operatörlerinin dizisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\| S_n^a(f) \|_\infty \leq \Lambda_n \| f \|_\infty$$

olur.

İspat: $S_n^a : C(\Pi) \to C(\Pi)$, $n = 0, 1, ...$ lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$| S_n^a(f)(x) | = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x) + t) D_n(t) dt \right|$$

(3.2) eşitliği ve Lemma 3.2.1'den

$$\begin{aligned} | S_n^a(f)(x) | &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x) + t) || D_n(t) | \, dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| F \|_\infty | D_n(t) | \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| f \|_\infty | D_n(t) | \, dt \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Tanım 2.2.1'de verilen Dirichlet çekirdeği tanımından

$$\| S_n^a(f) \|_\infty \leq \Lambda_n \| f \|_\infty$$

elde edilir. □

3.2.1 Sonuç: Her $f \in C(\Pi)$ için

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \lesssim \log n E_n^a(f)$$

olur.

İspat: Kabul edelim ki $f \in C(\Pi)$ için en iyi yaklaşım

$$E_n^a(f) = \| f - t_n^a \|_\infty$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \| f - S_n^a(f) \|_\infty &= \| f - t_n^a + t_n^a - S_n^a(f) \|_\infty \\ &= \| f - t_n^a + S_n^a(f)(t_n^a - f) \|_\infty \\ &\leq \| f - t_n^a \|_\infty + \| S_n^a(f)(t_n^a - f) \|_\infty \\ &= E_n^a(f) + \| S_n^a(f) \|_\infty \| f - t_n^a \|_\infty \end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.2.1'den,

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n^a(f)$$

olur ve Teorem 2.2.2'den (Lebesgue Teoreminden)

$$\| f - S_n^a(f) \|_\infty \lesssim \log n E_n^a(f)$$

elde edilir. □

3.2.2 Sonuç: $f \in C(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$\log n E_n^a(f) \to 0, \quad n \to \infty$$

ise lineer olmayan tabandaki Fourier serisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

3.2.2 Teorem: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $S_n^a : L^p(\Pi) \to L^p(\Pi)$, $n = 0, 1, ...$ lineer operatörlerinin dizisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\| S_n^a(f) \|_p \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{2/p} \lambda_n \| f \|_p$$

olur.

İspat: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $S_n^a : L^p(\Pi) \to L^p(\Pi), n = 0, 1, ...$ lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\| S_n^a(f) \|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | S_n^a(f)(x) |^p \, dx\right)^{1/p}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x)-t)D_n(t)dt\right|^p dx\right)^{1/p}$$

olur. Böylece Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğinden ve (2.7)'den

$$\| S_n^a(f) \|_p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x)-t) |^p \, p_a(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} | D_n(t) | \left(\frac{1}{p_a(x)}\right)^{1/p} dt$$
$$\leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x)-t) |^p \, p_a(x)dx)^{\frac{1}{p}} \, | D_n(t) | \, dt$$
$$\leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \| F \|_p | D_n(t) | \, dt$$

olur. Son olarak Lemma 3.2.1 uygulanır ve Tanım 2.2.1'de verilen Dirichlet çekirdeği tanımı göz önünde bulundurulursa,

$$\| S_n^a(f) \|_p \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{2/p} \lambda_n \| f \|_p$$

elde edilir. □

3.2.3 Teorem: Her $f \in L^1(\Pi)$ için

$$\lim_{n\to\infty} c_n^a(f) = \lim_{n\to-\infty} c_n^a(f) = 0$$

olur.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda en azından bir tane $t \in \tau_n^a$ vardır öyleki

$$\| f - t \| < \varepsilon.2\pi$$

olur. Burada t'nin derecesi N olsun. Bu durumda

$$t(x) = \sum_{m=-N}^{m=N} d_m e^{im\theta_a(x)}$$

yazılabilir. Öyleyse $| k | > N$ için,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ik\theta_a(x)}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ik\theta_a(x)}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)e^{-ik\theta_a(x)}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - t(x)]e^{-ik\theta_a(x)}dx$$

olur. Böylece

$$| c_k(f) | \leq \frac{1}{2\pi} \| f(x) - t(x) \|_1 < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenen sonuç olur. □

3.2.3 Sonuç : $f \in L^1(\Pi)$ olsun. Bu durumda her f için

$$\lim_{n\to\infty} a_n^a(f) = \lim_{n\to-\infty} b_n^a(f) = 0$$

olur.

İspat: $a_n^a(f) = c_n^a(f) + c_{-n}^a(f)$ ve $b_n^a(f) = \frac{c_n^a(f)+c_{-n}^a(f)}{i}$

olduğu Teorem 3.2.3'te göz önünde bulundurulursa, ispat tamamlanır. □

3.2.4 Teorem: $f \in L^1(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^\pi \left| \frac{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

ise $n \to \infty$ için $S_n^a(f)(x) \to f(x)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki $f \in L^1(\Pi)$ olsun. (3.3) eşitliğinden

$$S_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)\}\, D_n(t)dt$$

yazabiliriz. Buradan Teorem 2.2.1'den

$$S_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left\{ \frac{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\}$$

$$\times \sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)t\right) dt$$

buluruz. Şimdi

$$\phi_x^a(t) = F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)$$

diyelim. Bu durumda son eşitlik

$$S_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t \right\} dt$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca hipotezden $\phi_x^a(t) \in L^1(\Pi)$'dir. Dolayısıyla

$$\int_0^\pi \left| \frac{\phi_x^a(t)}{t} \right| dt < \infty$$

olur ve Jordan eşitsizliğinden

$$\int_0^\pi \left| \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt < \infty$$

bulunur. Böylece

$$S_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

olur. Burada

$$g_x^a(t) = \left\{ \frac{\phi_x^a(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

denilirse $g_x^a(t) \in L^1(\Pi)$ olur. Bu durumda

$$b_n\left(g_x^a(t)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_x^a(t) \sin(nt) dt$$

$$a_n\left(\phi_x^a(t)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_x^a(t) \cos(nt) dt$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$S_n^a(f) - f(x) = \frac{1}{4}\left(b_n\left(g_x^a(t)\right)\right) + a_n\left(\phi_x^a(t)\right)$$

olur. Böylece Sonuç 3.2.3 ve Riemann-Lebesgue Lemma'dan $\mid n \mid \to \infty$ için

$$b_n\left(g_x^a(t)\right) \to 0 \quad ve \quad a_n\left(\phi_x^a(t)\right) \to 0$$

olduğundan $n \to \infty$ için $S_n^a(f)(x) \to f(x)$ elde edilir. $\square$

3.2.4 Sonuç: $f \in L^1(\Pi)$ olsun. Bu durumda $\mid F(x) - F(y) \mid \leq M \mid x - y \mid^\alpha$ ise

$$S_n^a(f)(x) \to f(x), \quad n \to \infty$$

olur.

İspat: Kabul edelim ki $f \in L^1(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\theta_a(x)+t) + F(\theta_a(x)-t) - 2f(x)}{t} \right| \\ \leq & \frac{\mid F(\theta_a(x)+t) - f(x) \mid + \mid F(\theta_a(x)-t) - f(x) \mid}{t} \\ & \leq \frac{2Mt^\alpha}{t} = 2Mt^{\alpha-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan $\int_0^\pi t^{\alpha-1}dt = \frac{\pi^\alpha}{\alpha}$ olduğu gz nne alnrsa, karşılaştırma testinden

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left| \frac{F(\theta_a(x)+t) + F(\theta_a(x)-t) - 2f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.4'den $S_n^a(f)(x) \to f(x), \quad n \to \infty$ elde edilir. $\square$

3.2.5 Sonuç: $f \in L^1(\Pi)$ fonksiyonu bir $x \in \Pi$ için türevlenebiliyorsa

$$S_n^a(f)(x) \to f(x), \quad n \to \infty$$

olur.

İspat:$f \in L^1(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$F'(\theta_a(x)) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\theta_a(x)+t) - F(\theta_a(x))}{t}$$

dir. $\exists \delta > 0 \ni 0 <\mid t \mid< \delta$ için

$$\left|\frac{F(\theta_a(x)+t)-F(\theta_a(x))}{t}-F'(\theta_a(x))\right|<1$$

olur. Buradan

$$\frac{|F(\theta_a(x)+t)-F(\theta_a(x))|}{\mid t\mid}<\mid F'(\theta_a(x))\mid$$

elde edilir. Böylece $\mid t \mid > \delta$ için

$$\frac{\mid F(\theta_a(x)+t)-F(\theta_a(x))\mid}{\mid t\mid}<\frac{\mid F(\theta_a(x)+t)-F(\theta_a(x))\mid}{\mid \delta\mid}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left|\frac{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)}{t}\right|dt\\
&=\int_{0<t<\delta}\left|\frac{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)}{t}\right|dt\\
&+\int_{\delta\le t\le\pi}\left|\frac{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)}{t}\right|dt\\
\le&\int_{0<t<\delta}\left|\frac{F(\theta_a(x)+t)-f(x)}{t}\right|dt+\int_{0<t<\delta}\left|\frac{F(\theta_a(x)-t)-f(x)}{t}\right|dt\\
&+\int_{\delta\le t\le\pi}\left|\frac{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)}{t}\right|dt\\
&\le\int_{0<t<\delta}\mid t\mid F'(\theta_a(x))dt+\int_{0<t<\delta}\mid t\mid F'(\theta_a(x))dt\\
&+\int_{\delta\le t\le\pi}\left|\frac{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)}{\delta}\right|dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.2.4'den

$$S_n^a(f)(x)\to f(x),\quad n\to\infty$$

elde edilir. □

Şimdi lineer olmayan Fourier tabanlı serilerin Kısmi Toplamlar ile yaklaşımını $L^p(\Pi)$ uzayında inceleyelim.

3.2.5 Teorem: $1 \leq p < \infty$ olsun. Her $f \in L^p(\Pi)$ için

$$\| f - S_n^a(f)(x) \|_p \to 0, \quad n \to \infty$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$\| S_n^a(f)(x) \|_p \leq M \| f \|_p$$

olacak biçimde sadece p'ye bağlı bir $M > 0$ sabitinin bulunmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$:) Her $f \in L^p(\Pi)$ için $\| f - S_n^a(f)(x) \|_p \to 0, \quad n \to \infty$ olsun. Bu durumda her $f \in L^p(\Pi)$ için $(S_n^a(f))$ dizisi $L^p(\Pi)$ normlu uzayında yakınsak olduğundan sınırlıdır. Yani $\forall f \in L^p(\Pi)$ için $\exists M_f > 0$ vardır, öyleki $\| S_n^a(f) \|_p < M_f$ olur. Buradan düzgün sınırlılık prensibi gereğince

$$\sup\{\| S_n^a \| : n = 0, 1, 2, ...\} < \infty$$

dır. Burada $M = \sup\{\| S_n^a \| : n = 0, 1, 2, ...\} < \infty$ seçersek her $f \in L^p(\Pi)$ için

$$\| S_n^a(f)(x) \|_p \leq M \| f \|_p$$

elde ederiz.

($\Leftarrow$:) $\| S_n^a(f)(x) \|_p \leq M \| f \|_p$ olsun. Bu durumda $f \in L^p(\Pi)$ ve $n = 0, 1, 2, ...$ için

$$E_n^a(f)_p = \| f - t_n^a \|_p$$

olsun. Böylece

$$\| f - S_n^a(f)(x) \|_p = \| f - t_n^a + t_n^a + S_n^a(f)(x) \|_p$$

$$\leq \| f - t_n^a \|_p + \| S_n^a(f - t_n^a) \|_p \leq (M+1)E_n^a(f)_p$$

dir. Buradan

$$E_n^a(f)_p \to 0, \quad n \to \infty$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

3.3 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Cesàro Toplanabilirliği

$f \in L^1(\Pi)$ ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(k\theta_a(x)) + b_k sin(k\theta_a(x))]$$

olsun. Bu lineer olmayan tabanlı Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisini $S_n^a(f)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\sigma_n^a(f)(x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k^a(f)(x)$$

ifadesine f fonksiyonunun lineer olmayan Fourier tabanındaki n*. Fejer (Cesàro) ortalaması* denir. Böylece eğer

$$S_n^a(f)(x) \to f(x) \quad ise \quad \sigma_n^a(f)(x) \to f(x)$$

olur. Şimdi tanımdan yola çıkarak lineer olmayan Fourier tabanındaki Cesàro ortalaması için yeni ifadeler bulalım.

$$\sigma_n^a(f)(x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k^a(f)(x)$$

olduğundan (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\sigma_n^a(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(\theta_a(t)-\theta_a(x))p_a(t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} D_n(\theta_a(t)-\theta_a(x))\right\}p_a(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(\theta_a(t)-\theta_a(x))p_a(t)dt,$$

eşitliği elde edilir. Burada da durum fonksiyonunun periyodik olmasından faydalanılırsa

$$\sigma_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_a(-\pi)-\theta_a(x)}^{\theta_a(-\pi)-\theta_a(x)+2\pi} F(y+\theta_a(x))K_n(y)dy,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y+\theta_a(x))K_n(y)dy,$$

olur. Yani ifademiz

$$\sigma_n^a(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x)+t)K_n(t)dt, \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabilir. Buaradan K_n çift olduğundan

$$\sigma_n^a(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x)-t)K_n(t)dt, \tag{3.5}$$

olur. Şimdi integrali ikiye ayıralım.

$$\sigma_n^a(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F(\theta_a(x)-t)K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F(\theta_a(x)-t)K_n(t)dt,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F(\theta_a(x)+t)K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F(\theta_a(x)-t)K_n(t)dt,$$

olur. Buradan ise kullanışlı bir eşitlik olan

$$\sigma_n^a(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)\}K_n(t)dt, \qquad (3.6)$$

elde edilir. Bu (3.6) eşitliğinden ve Teorem 2.2.3'te verilen Fejer çekirdeği için $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)dt$ olmasından yararlanıp

$$\sigma_n^a(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{F(\theta_a(x)+t)+F(\theta_a(x)-t)-2f(x)\}K_n(t)dt, \quad (3.7)$$

yazılabilir.

Şimdi $\sigma_n^a(f)$ operatörünün $C(\Pi)$ ve $L^p(\Pi)$ uzaylarındaki sınırlılığını inceleyelim.

3.3.1 Teorem: $\sigma_n^a : C(\Pi) \to C(\Pi), n = 0, 1, ...$ lineer operatörler dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $f \in C(\Pi)$ için

$$\| \sigma_n^a(f) \|_\infty \leq \| f \|_\infty$$

olur.

İspat: $\sigma_n^a : C(\Pi) \to C(\Pi), n = 0, 1, ...$ lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda (3.5) eşitliğinden

$$\begin{aligned} | \sigma_n^a(f)(x) | &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta_a(x)-t)K_n(t)dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x)-t) || K_n(t) | dt \end{aligned}$$

Fejér çekirdeği daima pozitif olduğundan,

$$| \sigma_n^a(f)(x) | \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \| F \|_\infty K_n(t)dt$$

ve son eşitlikte Lemma 3.2.1 (i) göz önünde bulundurulursa,

$$| \sigma_n^a(f)(x) |= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| f \|_\infty K_n(t)dt$$

olur. Son olarak Teorem 2.2.3'te verilen Fejer çekirdeğinin 1. özelliğinden,

$$\| \sigma_n^a(f) \|_\infty \leq \| f \|_\infty$$

sonucu elde edilir. □

3.3.2 Teorem: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\sigma_n^a : L^p(\Pi) \to L^p(\Pi)$, $n = 0, 1, ...$ lineer operatörler dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $f \in L^p(\Pi)$ için

$$\| \sigma_n^a(f) \|_p \leq \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^{1/p} \| f \|_p$$

olur.

İspat: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\sigma_n^a : L^p(\Pi) \to L^p(\Pi)$, $n = 0, 1, ...$ lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\| \sigma_n^a(f) \|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | \sigma_n^a(f)(x) |^p \, dx \right)^{1/p}$$

Bu durumda (3.5) eşitliğinden

$$\| \sigma_n^a(f) \|_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x) - t) K_n(t)dt |^p \, dx \right)^{1/p}$$

olur. Böylece Minkowski integral eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \| \sigma_n^a(f) \|_p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | F(\theta_a(x) - t) |^p \, dx \right)^{1/p} K_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| F \|_p \, K_n(t)dt \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da Lemma 3.2.1 (ii) kullanılırsa

$$\| \sigma_n^a(f) \|_p \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{1/p} \| f \|_p$$

elde edilir. □

Böylece Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2'den $\sigma_n^a(f)$ operatörü $C(\Pi)$ ve $L^p(\Pi)$ uzaylarında sınırlıdır.

3.3.3 Teorem: $f \in C(\Pi)$ olsun. Bu durumda

$$\| f - \sigma_n^a(f) \|_\infty \to 0, \quad n \to \infty$$

olur.

İspat: $\sigma_n^a : C(\Pi) \to C(\Pi)$, $n = 0, 1, ...$ lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda (3.5) eşitliğinden

$$|f(x) - \sigma_n^a(f)(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(\theta_a(x) - t)] K_n(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} | f(x) - F(\theta_a(x) - t) | K_n(t) dt$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} | f(x) - F(\theta_a(x) - t) | K_n(t) dt$$

elde ederiz. Bu durumda $f \in C(\Pi)$ olduğundan

$$|f(x) - \sigma_n^a(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} | f(x) - F(\theta_a(x) - t) | K_n(t) dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{|t|<\delta} K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} | f(x) | + | F(\theta_a(x) - t) | K_n(t) dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} [\| f \|_\infty + \| F \|_\infty] K_n(t) dt$$

yazılır. Lemma 3.2.1 ve Fejer çekirdeğinin özelliğini kullanacak olursak

$$|f(x)-\sigma_n^a(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}+\frac{1}{2\pi}2 \parallel f \parallel_\infty \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_n(t)dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}+\frac{1}{\pi}\parallel f \parallel_\infty \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{1}{n+1}\frac{1}{sin^2\frac{\delta}{2}}dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\parallel f \parallel_\infty}{\pi(n+1)sin^2\frac{\delta}{2}} \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2\parallel f \parallel_\infty}{\pi(n+1)sin^2\frac{\delta}{2}}$$

elde ederiz. Böylece $n \to \infty$ için

$$\frac{2\parallel f \parallel_\infty}{\pi(n+1)sin^2\frac{\delta}{2}} \to 0$$

olduğundan $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N$ için

$$\frac{2\parallel f \parallel_\infty}{\pi(n+1)sin^2\frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Buradan $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N$ ve $\forall x \in \Pi$ için

$$| f(x)-\sigma_n^a(f)(x) |< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

dir. Dolayısıyla $n \to \infty$ için $\sigma_n^a(f) \to f$ (Düzgün) olur. $\square$

3.3.4 Teorem: $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda her $f \in L^p(\Pi)$ için

$$\parallel f-\sigma_n^a(f) \parallel_p \to 0, \quad n \to \infty$$

olur.

İspat: $\sigma_n^a : L_p(\Pi) \to L_p(\Pi), n = 0, 1, ...$ lineer dönüşüm ve $f \in L_p(\Pi)$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durumda $\exists g \in C(\Pi)$ öyleki

$$\| f - g \|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Ayrıca Teorem 3.3.3'den $g \in C(\Pi)$ olmak üzere $n \to \infty$ için $\sigma_n^a(g) \to g$ düzgün yakınsar. Buradan Teorem 2.3.2 (Lusin teoremi)'den $\exists n \geq N$ için $\| \sigma_n^a(g) - g \|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\| f - \sigma_n^a(f) \|_p &= \| f - g + g - \sigma_n^a(g) + \sigma_n^a(g) - \sigma_n^a(f) \|_p \\ &\leq \| f - g \|_p + \| g - \sigma_n^a(g) \|_p + \| \sigma_n^a(f - g) \|_p\end{aligned}$$

operatörün sınırlılığını veren Teorem 3.3.2'den

$$\begin{aligned}\| f - \sigma_n^a(f) \|_p &\leq \| f - g \|_p + \| g - \sigma_n^a(g) \|_p + \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|}\right)^{1/p} \| f - g \|_p \\ &\leq \left(\left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|}\right)^{1/p} + 1\right) \| f - g \|_p + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

bulnur ki bu teoremin ispatını tamamlar.$\square$

3.4 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Genelleştirilmiş De La Vallée Poussin Ortalaması ile Yaklaşım

$\sum c_n$ sonsuz seri ve S_n^a bu serinin kısmi toplamını göstersin. $\lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqq 1$ olmak üzere tamsayıların bir dizisi olsun. S_n^a dizisinin $\{\lambda_n\}$ dizisi ile üretilen *lineer olmayan Fourier tabanında n. genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması* $V_n^a(\lambda; x) = V_n^a(f, \lambda; x)$

$$V_n^a(\lambda) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} S_k^a \quad (n \geqq 1)$$

biçiminde tanımlanır.

$V_n^a(\lambda)$ serisi yakınsak ise $\sum c_n$ sonsuz serisi (V^a, λ)-toplanabilir ve eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid V_{n+1}^a(\lambda) - V_n^a(\lambda) \mid$$

yakınsak ise $\mid V^a, \lambda \mid$-*mutlak toplanabilirdir* denir.

Bu bölümdeki amacımız lineer olmayan Fourier tabanındaki serilerinin kısmi toplamlar ve Cesàro ortalaması için verilen bazı Lipchitz sınıflarında klasik yaklaşım teoremlerini (V, λ)-toplanabilirliği için incelemektir. Üstelik görmek kolaydır ki genelleştirilmiş de la Vallée Poussin ortalaması $\lambda = \lambda_n$ uygun seçimler yapıldığında örneğin $\lambda_n \equiv 1$, için $V_{n+1}^a(\lambda) = S_n^a$ kısmi toplamlar dizisini ve $\lambda_n \equiv n$ için ise $V_{n+1}^a(\lambda) = \sigma_n^a$ Cesàro ortalamasını verir.

3.4.1 Lemma: $f \in H^\alpha$, $g(t) = \{F(\theta(a) + t) - F(\theta(a) - t)\}$ ve $g(t) \in L\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olsun. Bu durumda $\delta \leqq \frac{\pi}{2}$ için $(0, \delta)$ aralığında $f \in H^\alpha$ ise $J(g, \delta)$, λ_n'den bağımsız ve $J(g, \frac{\pi}{2}) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I(g, \lambda_n) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \frac{\mid \sin \lambda_n t \sin(2n - \lambda_n)t \mid}{\lambda_n \sin^2 t} dt \\ &\leqq M \left(\frac{1 + \mid a \mid}{1 - \mid a \mid} \right)^\alpha \left(3 + \log \left(\frac{2n - \lambda_n}{\lambda_n} \right) \right) + \frac{1}{\lambda_n} J(g, \delta) \end{aligned}$$

olur.

İspat: Kabul edelim ki $\alpha_1 = \alpha_1(n) = \min\left(\frac{2}{\pi(2n - \lambda_n)}, \delta\right)$ ve $\alpha_2 = \alpha_2(n) = \min\left(\frac{2}{\pi \lambda_n}, \delta\right)$ olsun. Aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$I(g, \lambda_n) = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\delta} + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Buradan her I_i terimi için $\mid \sin nt \mid \leqq n \mid \sin t \mid$ ve $\mid \sin t \mid \geqq \frac{2}{\pi} t$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$I_1 \leqq \frac{1}{\lambda_n}(2n-\lambda_n)\int_0^{\alpha_1} dt \leqq \frac{2}{\pi}M,$$

$$I_2 \leqq \frac{1}{\lambda_n}\frac{\pi}{2}\lambda_n\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{1}{t}dt \leqq \frac{\pi}{2}M\log\left(\frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}\right),$$

$$I_3 \leqq \frac{1}{\lambda_n}\frac{\pi^2}{4}\lambda_n M\int_{\alpha_2}^{\delta}\frac{1}{t^2}dt \leqq \frac{\pi^3}{8}M,$$

$$I_4 \leqq \frac{1}{\lambda_n}\frac{\pi^2}{4}\lambda_n\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{g(t)}{t^2}dt \leqq \frac{1}{\lambda_n}J(g,\delta),$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikleri toplayarak istenen sonuç elde edilir. □

3.4.1 Teorem: $f \in H^\alpha$ olsun. Bu durumda $V_n^a(\lambda, f)$ genelleştirilmiş de la Vallée Poussin Ortalaması,

$$\| V_n^a(\lambda, f) \|_\infty \lesssim \left(\frac{1+\mid a \mid}{1-\mid a \mid}\right)^\alpha \left(3+\log\frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}\right)$$

eşitsizliğini sağlar.

Eğer $\lambda_n = 1$ ve $\lambda_n = n$ alınırsa bu teorem sırasıyla lineer olmayan Fourier tabanında Lebesgue ve Fejer sonuçlarına yani sırasıyla Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.3.1'e indirgenebilir.

İspat: Kabul edelim ki $f \in H^\alpha$ olsun. Aşağıdaki gibi standart bir hesaplama ile

$$V_n^a(\lambda, f)(x) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} S_k^a(f)(x)$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{F(\theta_a(x)+t)-F(\theta_a(x)-t)\}\, D_k(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi\lambda_n}\int_{-\pi}^{\pi}\{F(\theta_a(x)+t)-F(\theta_a(x)-t)\}\left(\sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} D_k(t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi\lambda_n}\int_{-\pi}^{\pi}\{F(\theta_a(x)+t)-F(\theta_a(x)-t)\}\,\frac{\sin\lambda_n t\sin(2n-\lambda_n)t}{\sin^2 t}dt$$

Buradan da

$$V_n^a(\lambda, f)(x) = \frac{1}{\pi\lambda_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{F(\theta_a(x)+2t) - F(\theta_a(x)-2t)\} \frac{\sin\lambda_n t \sin(2n-\lambda_n)t}{\sin^2 t} dt$$

elde edilir. Burada $g(t) = F(\theta_a(x)+2t) - F(\theta_a(x)-2t)$ denilirse, $g(t)$ fonksiyonuna Lemma 3.4.1'i $\delta = \frac{\pi}{2}$ alınıp uygulanırsa istenen eşitsizlik elde edilmiş olur. □

3.4.2 Teorem: $f \in H^\alpha$ olsun. Bu durumda her x için

$$\| V_n^a(\lambda, f) - f \|_\infty \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \frac{1}{\lambda_n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) \frac{1+\log\lambda_n}{\lambda_n}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

olur.

İspat: $f \in H^\alpha$ olsun. Kabul edelim ki burada

$$\phi_x^a(2t) = F(\theta_a(x)+2t) - F(\theta_a(x)-2t) - 2f(x)$$

denilirse, $f \in H^\alpha$ olduğundan

$$| \phi_x^a(t) | \leq M \left(\frac{1+ | a |}{1- | a |}\right)^\alpha t^\alpha \tag{3.8}$$

olur. Şimdi yakınsaklığı inceleyelim.

$$| V_n^a(\lambda, f)(x) - f(x) | = \frac{1}{\pi\lambda_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} | \phi_x^a(t) | \frac{\sin\lambda_n t \sin(2n-\lambda_n)t}{\sin^2 t} dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi\lambda_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} | \phi_x^a(t) | \frac{| \sin\lambda_n t \sin(2n-\lambda_n)t |}{\sin^2 t} dt$$

olduğundan (3.8) eşitsizliği ve $| \sin t | \geqq \frac{2}{\pi} t$ kullanıldığında

$$| V_n^a(\lambda, f)(x) - f(x) | \lesssim \left(\frac{1+ | a |}{1- | a |}\right)^\alpha \frac{1}{\pi\lambda_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \frac{| \sin\lambda_n t \sin(2n-\lambda_n)t |}{\sin^2 t} dt$$

elde edilir. Şimdi integrali üç parçaya ayrılırsa,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2n-\lambda_n}} + \int_{\frac{1}{2n-\lambda_n}}^{\frac{1}{\lambda_n}} + \int_{\frac{1}{\lambda_n}}^{\frac{\pi}{2}} \equiv I_1 + I_2 + I_3$$

yazılabilir. Burada I_1 ve I_2 keyfi bir $\alpha \leqq 1$ için aşağıdaki gibi kolayca hesaplanabilir.

$$\frac{1}{\lambda_n} I_1 \leqq \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\frac{1}{2n-\lambda_n}} t^{\alpha} \lambda_n (2n - \lambda_n) dt \leqq \frac{1}{(2n-\lambda_n)^{\alpha}} \leqq \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}},$$

$$\frac{1}{\lambda_n} I_2 \leqq \frac{1}{\lambda_n} \int_{\frac{1}{2n-\lambda_n}}^{\frac{1}{\lambda_n}} t^{\alpha-1} \lambda_n dt \leqq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}}$$

Fakat I_3'ün $\alpha < 1$ ve $\alpha = 1$ için yaklaşık değerleri farklıdır:

$$\frac{1}{\lambda_n} I_3 \leqq \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}}, & \alpha < 1; \\ \frac{1+\log \lambda_n}{\lambda_n}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Böylece sonuçlar toplanarak teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

3.4.1 Sonuç: $f \in H^{\alpha}$ olmak üzere her x için

$$\| \sigma_n^a(f) - f \|_{\infty} \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{\alpha} \frac{1}{n^{\alpha}}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) \frac{1+\log n}{n}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: Kabul edelim ki $f \in H^{\alpha}$ olsun. Bu durumda Teorem 3.4.1'de $\lambda_n \equiv n$ olursa, istenen sonuç elde edilir.$\square$

ϕ, $(0, \infty)$ aralığında pozitif artan bir fonksiyon olmak üzere ϕ-*normu*

$$\| f \|_{\phi} = \| f \|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{| f(x) - f(y) |}{\phi(| x - y |)} = \| f \|_{\infty} + \sup_{\delta > 0} \frac{\| f(.) - f(. + \delta) \|_{\infty}}{\phi(\delta)}$$

biçiminde tanımlanır [26].

$\{A_n\}$, $\mathcal{C}(\Pi)$'den $\mathcal{C}(\Pi)$ içine, lineer konvolüsyon operatörlerinin bir dizisi ve $\| A_n \|$ operatör normu olsun. Bu durumda

$$\| A_n(f) - f \|_\phi \leqq \| A_n(f) - f \|_\infty \left(1 + 2/\phi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$+ \sup_{0<\delta\leqq 1/n} \frac{2\omega(f,\delta)}{\phi(\delta)}(1 + \| A_n(f) \|) \tag{3.9}$$

olur. Bu son eşitsizlikten yararlanılarak aşagıdaki teoremlerin ispatları kolayca verilebilir [26].

3.4.3 Teorem: $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta < \alpha$ olsun. Bu durumda her $f \in H^\alpha$ için,

$$\| V_n^a(\lambda, f) - f \|_\beta \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \frac{n^\beta}{\lambda_n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) n^{\beta-1} \log\left(\frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}\right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

olur.

İspat: Kabul edelim ki $0 \leqq \beta < \alpha \leqq 1$ olmak üzere $f \in H^\alpha$ olsun. (3.9) eşitliğinde $A_n = V_n^a$ ve $\phi(\delta) = \delta^\beta$ alınırsa $\| f \|_\phi = \| f \|_\beta$ olur. Buradan (3.9) eşitsizliği

$$\| V_n^a(f) - f \|_\beta \leq \| V_n^a(f) - f \|_\infty \left(1 + \frac{2}{1/n^\beta}\right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\frac{\omega(f,\delta)}{\delta^\beta}\left(1 + \|V_n^a\|_\infty\right)$$

eşitliğini verir. $\alpha < 1$ için Teorem 3.4.1 ve Teorem 3.4.2'den

$$\| V_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid}\right)^\alpha \frac{1}{\lambda_n^\alpha}\left(1 + 2n^\beta\right)$$

$$+ \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\frac{\delta^\alpha}{\delta^\beta}\left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid}\right)^\alpha \left(3 + \log\left(\frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}\right)\right)\|f\|_\infty$$

elde edilir. $\alpha = 1$ için ise

$$\| V_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid}\right)\left(\frac{1 + \log\lambda_n}{\lambda_n}\right)\left(1 + 2n^\beta\right)$$
$$+ \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta}\left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid}\right)\left(3 + \log\left(\frac{2n-\lambda_n}{\lambda_n}\right)\right)\|f\|_\infty$$

elde edilir ve buradan da sonuç olarak

$$\| V_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha \frac{n^{\beta-\alpha}}{\lambda_n^\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) \frac{n^{\beta-1}}{\lambda_n} \log(2n - \lambda_n), & \alpha = 1. \end{cases}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

3.4.2 Sonuç: $0 < \alpha \leq 1$ and $0 \leq \beta < \alpha$ olsun. Bu durumda her $f \in H^\alpha$ için,

$$\| \sigma_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha n^{\beta-\alpha}, & 0 < \alpha \leq 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) n^{\beta-1} \log n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

olur.

İspat: $\phi(\delta) = \delta^\alpha$, $\| f \|_\phi = \| f \|_\beta$ durumunda, $f \in H^\alpha$, $0 \leqq \beta < \alpha \leqq 1$, $A_n = \sigma_n^a$ alınırsa (3.9) eşitsizliği,

$$\| \sigma_n^a(f) - f \|_\beta \leq \| \sigma_n^a(f) - f \|_\infty \left(1 + \frac{2}{1/n^\beta}\right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\frac{\omega(f,\delta)}{\delta^\beta}(1 + \|\sigma_n^a\|_\infty)$$

eşitsizliğini verir. Sonuç 3.4.1 ve Teorem 3.3.1'den $\alpha < 1$ için

$$\| \sigma_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid}\right)^\alpha \left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \left(1 + 2n^\beta\right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\frac{\delta^\alpha}{\delta^\beta}\|f\|_\infty$$

olur. $\alpha = 1$ için ise

$$\| \sigma_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \left(\frac{1+ \mid a \mid}{1- \mid a \mid}\right) \left(\frac{1 + \log n}{n}\right) \left(1 + 2n^\beta\right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\delta^{1-\beta}\|f\|_\infty$$

elde edilir ve buradan da sonuç olarak

$$\| \sigma_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \begin{cases} \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^\alpha n^{\beta-\alpha}, & \alpha < 1; \\ \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right) n^{\beta-1} \log n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

3.5 Lineer Olmayan Fourier Tabanlı Serilerin Kısmi Toplamları ile Yaklaşım

3.5.1 Teorem: $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta < \alpha$ olsun. Bu durumda her $f \in H^{\alpha}$ için

$$\| f - S_n^a(f) \|_{\infty} \lesssim \left(\frac{24}{1- \mid a \mid} \right) \frac{\log n}{n^{\alpha}}$$

olur.

İspat: $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta < \alpha$ olsun. Bu durumda Sonuç 3.2.1'den her $f \in C(\Pi)$ için

$$\| f - S_n^a(f) \|_{\infty} \lesssim \log n E_n^a(f)$$

olur. Bu durumda [19] makalesindeki Teorem 2.3'ten ve $f \in H^{\alpha}$ olduğundan

$$\| f - S_n^a(f) \|_{\infty} \lesssim \left(\frac{24}{1- \mid a \mid} \right) \frac{\log n}{n^{\alpha}}$$

elde edilir. □

3.5.2 Teorem: $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta < \alpha$ olsun. Bu durumda her $f \in H^{\alpha}$ için

$$\| S_n^a(f) - f \|_{\beta} \lesssim \left(\frac{48}{1- \mid a \mid} \right) n^{\beta - \alpha} \log n$$

dır. Böylece $n \to \infty$ için

$$\| S_n^a(f) - f \|_{\beta} \to 0,$$

olur.

İspat: $0 \leqq \beta < \alpha \leqq 1$ olmak üzere $f \in H^{\alpha}$ olsun. (3.9) eşitliğinde $A_n = S_n^a$ ve $\phi(\delta) = \delta^{\beta}$ alınırsa $\| f \|_{\phi} = \| f \|_{\beta}$ olur. Buradan (3.9) eşitsizliği

$$\| S_n^a(f) - f \|_{\beta} \leq \| S_n^a(f) - f \|_{\infty} \left(1 + \frac{2}{1/n^{\beta}} \right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2 \frac{\omega(f,\delta)}{\delta^{\beta}} (1 + \|S_n^a\|_{\infty})$$

eşitsizliğini verir. Böylece Teorem 3.5.1'den

$$\| S_n^a(f) - f \|_\beta \leq c\left(\frac{24}{1-\mid a \mid}\right)\frac{\log n}{n^\alpha}\left(1+2n^\beta\right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\frac{\delta^\alpha}{\delta^\beta}\left(1+\Lambda_n\|f\|_\infty\right)$$

$$\leq c\log n\left(\frac{24}{1-\mid a \mid}\right)\frac{1}{n^\alpha}\left(1+2n^\beta\right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta}\left(1+\Lambda_n\|f\|_\infty\right)$$

eşitliği elde edilir. $f \in H^\alpha$ olduğundan son eşitsizlik

$$\| S_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim \log n\left(\frac{24}{1-\mid a \mid}\right)\frac{1}{n^\alpha}\left(1+2n^\beta\right) + \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta}\left(1+\Lambda_n\|f\|_\infty\right)$$

biçiminde yazabilir. Buradan da Teorem 2.2.3'ü (Lebesgue sabiti Teoremi) kullanılırsa $\mid r_n \mid \leq 3$ için

$$\begin{aligned}\| S_n^a(f) - f \|_\beta &\lesssim \log n\left(\frac{24}{1-\mid a \mid}\right)\frac{1}{n^\alpha}\left(1+2n^\beta\right)\\ &+ \sup_{0<\delta\leq\frac{1}{n}} 2\delta^{\alpha-\beta}\left(1+\left(\frac{4}{\pi^2}\log n + r_n\right)\|f\|_\infty\right)\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\| S_n^a(f) - f \|_\beta \lesssim n^{\beta-\alpha}\left(\frac{48}{1-\mid a \mid}\right)\log n$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. $\square$

4. BERNSTEIN TİPİ OPERATÖR

4.1 T_λ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

$\lambda > 0$ olsun. $x \in (0,1)$ olmak üzere L^1'deki sınırlı fonksiyonlar için $T_\lambda(f,x)$, Bernstein tipli operatörünü

$$T_\lambda(f,x) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}f(t)dt \qquad (4.1)$$

biçiminde sınır noktalarındaki limiti ise

$$\lim_{x\to 0} T_\lambda(f,x) = f(0), \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 1} T_\lambda(f,x) = f(1)$$

olarak tanımlayalım. Böyle bir tanım için f fonksiyonunun, $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli olmasına ihtiyaç vardır.

Ayrıca $T_\lambda(x^n,x) = \frac{(\lambda x)_n}{(\lambda)_n}$ dır. Dolayısıyla $T_\lambda(f,x)$ polinomları polinomlara resmeder. Şimdi T_λ operatörleri için bazı klasik yaklaşım özellikleri ve T_λ pozitif operatör dizisinin sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini verilecektir. Basit hesaplamalarla aşağıdaki lemmayı verilebilir.

4.1.1 Lemma: $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda her $x \in (0,1)$ ve $k = 0,1,2,...$ için T_λ operatörleri

$$T_\lambda\left(x^k,x\right) = \frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k}$$

eşitliğini sağlar.

İspat: Kabul edelim ki $x \in (0,1)$ ve $k = 0,1,2,...$ olsun. T_λ operatörün tanımı olan (4.1) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
T_\lambda\left(x^k, x\right) &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}t^k dt \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 t^{\lambda x+k-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}dt.
\end{aligned}
$$

dir. Buradan Beta fonksiyonu tanımını düşünülürse

$$
T_\lambda\left(x^k, x\right) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}B(\lambda x+k, \lambda(1-x))
$$

olur. Beta fonksiyonunun Gama fonksiyonu olan $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ bağıntısı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
T_\lambda\left(x^k, x\right) &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\frac{\Gamma(\lambda x+k)\Gamma(\lambda(1-x))}{\Gamma(\lambda+k)} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+k)}\frac{\Gamma(\lambda x+k)}{\Gamma(\lambda x)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
T_\lambda\left(x^k, x\right) = \frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k}
$$

genel formülüne ulaşılmış olur. □

4.1.1 Sonuç: $x \in (0,1)$ olsun. Bu durumda T_λ operatörleri her $x \in (0,1)$ için

$$
\begin{aligned}
T_\lambda(e_0, x) = 1, &\quad T_\lambda(e_1, x) = x, \\
T_\lambda(e_2, x) &= \frac{\lambda x^2 + x}{\lambda+1}, \\
T_\lambda(e_3, x) &= \frac{3\lambda^2 x^3 + 3\lambda x^2 + 2x}{\lambda^2+3\lambda+2} \\
T_\lambda(e_4, x) &= \frac{\lambda^3 x^4 + 6\lambda^2 x^3 + 11\lambda x^2 + 6x}{\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6} \\
T_\lambda(e_5, x) &= \frac{\lambda^4 x^5 + 10\lambda^3 x^4 + 35\lambda^2 x^3 + 50\lambda x^2 + 24x}{\lambda^4+10\lambda^3+35\lambda^2+50\lambda+24}
\end{aligned}
$$

eşitliklerini sağlar.

İspat: İleriki ispatlarda kullanılacak bu eşitlikleri ispatlamak için Lemma 4.1.1'de $k = 1, 2, 3, 4$ almak yeterli olacaktır. □

4.1.2 Lemma: $x \in (0,1)$ olsun. Bu durumda T_λ operatörleri her $x \in (0,1)$ için

(i) $T_\lambda\left((e_1 - x), x\right) = 0$,

(ii) $T_\lambda\left((e_1 - x)^2, x\right) = \frac{x(1-x)}{\lambda+1}$,

(iii) $T_\lambda\left((e_1 - x)^3, x\right) = \frac{4x^3-6x^2+2x}{\lambda^2+3\lambda+2}$,

(iv) $T_\lambda\left((e_1 - x)^4, x\right) = \frac{(3\lambda-18)x^4+(-6\lambda+36)x^3+(3\lambda-24)x^2+6x}{\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6}$,

(v) $T_\lambda\left((e_1 - x)^5, x\right) = \frac{(-40\lambda+96)x^5+(100\lambda-240)x^4+(-80\lambda+240)x^3+(20\lambda-120)x^2+24x}{\lambda^4+10\lambda^3+35\lambda^2+50\lambda+24}$

eşitliklerini sağlar.

İspat: T_λ lineer olduğundan istenen sonuç Lemma 4.1.1 ve binom açlımından elde edilir. □

4.1.3 Lemma: Her $\lambda > 0$ için, $\lim_{\lambda\to\infty} c_\lambda(x) = 4$ olmak üzere

$$T_\lambda\left((e_1 - x)^4, x\right) \leq \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} c_\lambda(x),\ x \in (0,1),$$

olur.

İspat: $x \in (0,1)$ olsun. Lemma 4.1.2'den,

$$\begin{aligned} T_\lambda\left((e_1 - x)^4, x\right) &\leq \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} \\ &\times \left[\left(1 - \frac{6}{\lambda}\right)x^4 + \left(2 + \frac{12}{\lambda}\right)x^3 + \left(1 - \frac{8}{\lambda}\right)x^2 + \frac{2}{\lambda}x\right], \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla buradan

$$T_\lambda\left((e_1 - x)^4, x\right) \leq \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} c_\lambda(x)$$

elde edilir. □

4.1.1 Önerme: $\lambda > 0$ ve $r = 0, 1, 2, ...$ olsun.

$$K_\lambda(x,t) := \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} t^{\lambda x - 1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}$$

T_λ operatörlerinin çekirdeği olmak üzere

$$S_{\lambda,r}(x) := T_\lambda((t-x)^r, x) = \int_0^1 (t-x)^r K_\lambda(x,t)dt,$$
$$M_{\lambda,r}(x) := (\lambda)_r S_{\lambda,r}(x),$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda sabit bir $r > 0$ için

$$M_{\lambda,0}(x) = 0,$$
$$M_{\lambda,1}(x) = \lambda \frac{x(1-x)}{\lambda+1},$$
$$M_{\lambda,2}(x) = (\lambda)_2 \frac{(4x^3 - 6x^2 + 2x)}{\lambda^2 + 3\lambda + 2},$$
$$M_{\lambda,3}(x) = (\lambda)_3 \frac{(3\lambda - 18)x^4 + (-6\lambda + 36)x^3 + (3\lambda - 24)x^2 + 6x}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6},$$
$$M_{\lambda,4}(x) = (\lambda)_4 \frac{(-40\lambda + 96)x^5 + (100\lambda - 240)x^4 + (-80\lambda + 240)x^3}{\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24} + \frac{(20\lambda - 120)x^2 + 24x}{\lambda^4 + 10\lambda^3 + 35\lambda^2 + 50\lambda + 24}$$

olur.

$M_{\lambda,r}(x)$ ile ilgili daha fazla bilgi aşağıdaki teorem ile verilebilir.

4.1.1 Teorem: r bir sabit sayı, $M_{\lambda,r}(x)$, x ve λ değişkenli bir polinom olsun. Bu durumda $\phi_{r,r-i}(x)$, r. dereceden x'e bağlı ve λ'dan bağımsız bir polinom olmak üzere

$$M_{\lambda,r}(x) = \phi_{r,r}(x)\lambda^r + \phi_{r,r-1}(x)\lambda^{r-1} + \phi_{r,r-2}(x)\lambda^{r-2} + ... + \phi_{r,1}(x)\lambda$$

olur.

İspat: r bir sabit sayı, $M_{\lambda,r}(x)$, x ve λ değişkenli bir polinom olsun. Açıktır ki

$$S_{\lambda,r}(x) = \int_0^1 (t-x)^r K_\lambda(x,t)dt$$

eşitliğinde Binom açılımını kullanılacak olursa

$$S_{\lambda,r}(x) = \int_0^1 K_\lambda(x,t)\left[\sum_{k=0}^{r}\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} t^k(-x)^{r-k}\right]dt$$

Lemma 4.1.1'den ve Stirling sayısının tanımı kullanıldığında

$$S_{\lambda,r}(x) = \sum_{k=0}^{r}\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}(-x)^{r-k}\frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{r}\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}(-1)^{r-k}\frac{x^{r-k}}{(\lambda)_k}\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}s(k,j)\lambda^j x^j\right]$$

olur. Buradan

$$S_{\lambda,r}(x) = \sum_{k,j=0}^{r}\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}(-1)^{r-j}x^{r+j-k}s(k,j)\frac{\lambda^j}{(\lambda)_k}$$

elde edlir. Dolayısıyla son eşitilikten

$$M_{\lambda,r}(x) = \sum_{k,j=0}^{r}\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix}(-1)^{r-j}x^{r+j-k}s(k,j)\frac{\lambda^j(\lambda)_r}{(\lambda)_k}$$

sonucununa varılır. □

4.1.2 Teorem: $0 \leq x \leq 1$ olsun. Bu durumda her $r > 0$ sabiti sayısı için

$$0 \leq M_{\lambda,2r}(x) \leq A_r\lambda^{-r}$$

olacak biçimde sadece r'ye bağlı bir A_r sabiti vardır.

İspat: Theorem 4.1.1'den, her r için $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$M_{\lambda,r}(x) = \sum_{k,j=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} (-1)^{r-j} x^{r+j-k} s(k,j) \frac{\lambda^j (\lambda)_r}{(\lambda)_k}$$

olacak biçimde sadece r'ye bağlı bir A_r sabiti vardır. $k = k + j$ alınırsa

$$\begin{aligned} M_{\lambda,r}(x) &= \sum_{k,j=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ k+j \end{pmatrix} (-1)^{r-j} x^{r-k} s(k+j,j) \lambda^j \frac{(\lambda)_r}{(\lambda)_{k+j}} \\ &= \sum_{k,j=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ k+j \end{pmatrix} (-1)^{r-j} x^{r-k} s(k+j,j) \lambda^j \frac{\Gamma(\lambda+r)}{\Gamma(\lambda+k+j)} \end{aligned}$$

elde edilir. [28] kitabındaki Teorem 3 kullanılacak olursa $0 \leq \frac{1}{2}(r+k)$ için

$$g(\lambda; k', r, 0) = \lambda^j \frac{\Gamma(\lambda+r)}{\Gamma(\lambda+k')}$$

fonksiyonunun $\alpha := \max(-k-1, 0)$ olmak üzere (α, ∞) aralığı üzerinde tamamen monoton olduğunu söylenebilir. Böylece $x \in (0,1)$ için

$$\| M_{\lambda,r}(x) \| = \sum_{k,j=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ k+j \end{pmatrix} \| s(k+j,j) \| C\lambda^r$$

yazılır. $A_r := \begin{pmatrix} r \\ k+j \end{pmatrix} \| s(k+j,j) \|$ denilirse

$$0 \leq M_{\lambda,2r}(x) \leq A_r \lambda^{-r}$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. □

4.1.2 Sonuç: $\delta = \lambda^{-\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ve r yeterince büyük olsun. Bu durumda her $k > 0$ için

$$\int_{|t-x|>\lambda^{-\alpha}} K_\lambda(x,t)dt \leq C\lambda^{-k}$$

olur.

İspat: Teorem 4.1.2'den, $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere her r için,

$$0 \leq M_{\lambda,2r}(x) \leq A_r \lambda^{-r}$$

olacak biçimde sadece r'ye bağlı bir A_r sabiti vardır. Buradan herbir $\delta > 0$ için

$$\int_{|t-x|>\delta} K_\lambda(x,t)dt \leq \delta^{-2r} \int_{|t-x|>\delta} (\lambda)_{2r}(t-x)^{2r} K_\lambda(x,t)dt$$

$$\leq \delta^{-2r} M_{\lambda,2r}(x) \leq \delta^{-2r} A_r \lambda^{-r}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte özel olarak $\delta = \lambda^{-\alpha}$ seçilirse, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ve r yeterince büyük olmak üzere herbir $k > 0$ için

$$\int_{|t-x|>\lambda^{-\alpha}} K_\lambda(x,t)dt \leq C\lambda^{-k}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte C sabiti sadece α ve k'ya bağlıdır. □

4.1.3 Teorem: $f \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda $T_\lambda(f,x)$ operatörleri f fonksiyonuna $(0,1)$ aralığında düzgün yakınsar.

İspat: $f \in C[0,1]$ olsun. Sonuç 4.1.1'de verilenler Teorem 2.3.1 (Korovkin Teoremi)'e uygulanırsa istenilen sonuca ulaşılır. □

Aşağıdaki teorem $T_\lambda(f,x)$ operatörlerinin noktasal yakınsaklığını verir.

4.1.4 Teorem: $f \in L^1(0,1)$ olmak üzere f fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli ve $[0,1]$ üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda $\lambda \to \infty$ için $T_\lambda(f,x)$ operatörleri $f(x)$ fonksiyonuna noktasal olarak yakınsar.

İspat: Kabul edelim ki $f \in L^1(0,1)$ olmak üzere f fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli ve $[0,1]$ üzerinde sınırlı olsun. Açıkça görülür ki

$$|T_\lambda(f,x) - f(x)| = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))} \left| \int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}[f(t)-f(x)]dt \right|$$

$$\leq \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}|f(t)-f(x)|dt$$

dir. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $|x-t| < \delta$ olduğunda $|f(x)-f(t)| < \varepsilon/2$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır. Şimdi $[0,1]$ üzerindeki integrali $|t-x| < \delta$ ve $|t-x| \geq \delta$ toplamı üzerinden alalım. İlk integral için $|f(x)-f(t)| < \varepsilon$ ve ikinci integral içinde $u \in [0,1]$ için $|f(u)| \leq M$ olması kullanılır. Daha sonra integrali $(x-t)^2/\delta^2 \geq 1$ ile çarpılır. Böylece

$$|T_\lambda(f,x)-f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{\delta^2}T_\lambda((e_1-x)^2,x)$$

olur ve Sonuç 4.1.1'den

$$|T_\lambda(f,x)-f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{\lambda+1}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

4.2 T_λ Operatörünün Yaklaşım Hızı

Bu bölümde, T_λ operatör dizilerinin f fonksiyonuna yakınsama hızı, 1. ve 2. süreklilik modülleri ve Peetré K-fonksiyonelinden yararlanarak hesaplanılacaktır.

4.2.1 Teorem: f, $(0,1)$ üzerinde sınırlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $T_\lambda(f,x)$ operatörleri $\delta_\lambda := \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ olmak üzere her $x \in (0,1)$ için,

$$| T_\lambda(f,x)-f(x) | \leq \frac{3}{2}\omega(f,\delta_\lambda)$$

eşitsizliğini sağlarlar. Böylece $f \in C[0,1]$ ise $\lambda \to \infty$ için $E_\lambda(f) \to 0$ olur.

İspat: f, $(0,1)$ üzerinde sınırlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $T_\lambda(f,x)$ operatörlerinin lineerliği ve monotonluğundan, $\lambda > 0$ ve $x \in (0,1)$ için,

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq T_\lambda \left(| f(t) - f(x) |, x\right) \tag{4.2}$$

olur. Burada (2.1) eşitsizliği (4.2) eşitsizliğinde $\mu = \sqrt{\lambda} \mid t - x \mid$ ve $\delta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ alarak kullanılacak olursa

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq \omega(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \left[1 + \sqrt{\lambda} T_\lambda \left(| e_1 - x |, x\right)\right] \tag{4.3}$$

elde edilir. Böylece pozitif operatörler için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği ile (4.3)'den

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{T_\lambda\left((e_1 - x)^2, x\right)}\right) \omega(f,\delta).$$

olur. Son eşitsizliğe Lemma 4.1.2 uygulanırsa

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq \omega(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \left[1 + \sqrt{\lambda}\sqrt{\frac{x(1-x)}{\lambda+1}}\right]$$

elde edilir. Böylece $[0,1]$ üzerinde $x(1-x) < \frac{1}{4}$ olduğundan istenen sonuca ulaşılır. $\square$

4.2.2 Teorem: $f \in L^1[0,1]$ ve $[0,1]$ üzerinde sınırlı fonksiyon olmak üzere (4.1) ile tanımlanan $T_\lambda(f,x)$ operatörleri her $x \in (0,1)$ ve $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ için

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq \frac{3}{4}\delta_\lambda \omega(f', \delta_\lambda)$$

eşitsizliğini sağlarlar.

İspat: $f \in L^1[0,1]$ ve $[0,1]$ üzerinde sınırlı fonksiyon olsun. Ortalama değer teoreminden

$$f(t) - f(x) = (t - x) f'(\xi)$$

olacak biçimde $\xi \in (t, x)$ vardır. T_λ operatörleri pozitif olduğundan Lemma 4.1.2 ile $\xi_{t,x} \in (\min\{t, x\}, \max\{t, x\})$ olduğunda

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| = |T_\lambda\left((e_1 - x)\, f'(\xi), x\right)|$$

$$= |T_\lambda\left((e_1 - x)(f'(\xi_{t,x}) - f'(x)), x\right)| + |f'(x) T_\lambda((e_1 - x), x)|$$

dır. Süreklilik modülünün özelliği kullanılarak

$$\mid f'(\xi_x) - f'(x) \mid \leq \omega(f', \delta)\left(1 + \frac{1}{\delta} \mid \xi_x - x \mid\right) \leq \omega(f', \delta)\left(1 + \frac{1}{\delta} \mid t - x \mid\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mid T_\lambda(f, x) - f(x) \mid &\leq |f'(x) T_\lambda((e_1 - x), x)| \\ &+ \omega(f', \delta) T_\lambda\left(|e_1 - x)|\left(1 + \frac{1}{\delta} \mid e_1 - x \mid\right), x\right) \\ &= \omega(f', \delta) T_\lambda\left(\mid e_1 - x \mid + \frac{1}{\delta}(e_1 - x)^2, x\right) \\ &= \omega(f', \delta)\Big\{T_\lambda\left(\mid e_1 - x \mid, x\right) + \frac{1}{\delta} T_\lambda\left((e_1 - x)^2, x\right)\Big\} \end{aligned}$$

olur. Buradan son eşitsizliğe Cauchy-Schwartz eşitsizliği ve Lemma 4.1.2'i uygulanacak olursa

$$\begin{aligned} \mid T_\lambda(f, x) - f(x) \mid &\leq \omega(f', \delta)\Big\{\sqrt{T_\lambda\left((e_1 - x)^2, x\right)} + \frac{1}{\delta} T_\lambda\left((e_1 - x)^2, x\right)\Big\} \\ &\leq \omega(f', \delta)\sqrt{\frac{x(1 - x)}{\lambda + 1}}\left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x(1 - x)}{\lambda + 1}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ seçilirse

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq \frac{3}{4}\delta_\lambda \omega\left(f', \delta_\lambda\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. □

4.2.3 Teorem: $f \in H^\alpha$ olsun. Bu durumda $T_\lambda(f,x)$ operatörleri $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ olmak üzere her $x \in (0,1)$ için,

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq M\delta_\lambda^\alpha$$

eşitsizliğini sağlarlar.

İspat:$f \in H^\alpha$ olsun. T_λ operatörüne (2.4) eşitsizliği uygulanırsa

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq T_\lambda\left(| f(t) - f(x) |, x\right) \leq MT_\lambda\left(| t-x |^\alpha, x\right)$$

elde edilir. Buradan

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq MT_\lambda(| t-x |^\alpha, x) \tag{4.4}$$

olur. (4.4)'e $p = \frac{2}{\alpha}$, $q = \frac{2}{2-\alpha}$ için Hölder eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{aligned}
&| T_\lambda(f,x) - f(x) | \\
&\leq M\left[\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 \left| \left(t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} | t-x |^\alpha \right|^{\frac{2}{\alpha}} dt\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 \left| \left(t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right|^{\frac{2}{2-\alpha}} dt\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right] \\
&\leq M\left[\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1}(t-x)^2 dt\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda x)\Gamma(\lambda(1-x))}\int_0^1 t^{\lambda x-1}(1-t)^{\lambda(1-x)-1} dt\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $T_\lambda(e_0,x) = 1$ olduğu düşünülürse

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq M \left[T_\lambda \left((e_1 - x)^2, x \right) \right]^{\frac{\alpha}{2}} = M\delta_\lambda^\alpha$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanmış olur. □

4.2.4 Teorem: $f \in C^2[0,1]$ olsun. Bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq \frac{\| f'' \|}{8\lambda}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f \in C^2[0,1]$ ve $\lambda > 0$ olsun. Taylor formülü

$$R_{f,x}(t) = \int_x^t (t-v) f''(v) dv$$

olmak üzere

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + R_{f,x}(t) \tag{4.5}$$

dir. Buradan ortalama değer teoreminden

$$R_{f,x}(t) = \frac{f''(\xi_{t,x})}{2}(t-x)^2$$

eşitliği sağlayan bir $\xi_{t,x} \in (\min\{x,t\}, \max\{x,t\})$ vardır. Böylece (4.5) eşitliği

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(\xi_{t,x})}{2}(t-x)^2 \tag{4.6}$$

biçiminde yazılabilir. T_λ operatörlerini (4.6) eşitliğine uygulanırsa Lemma 4.1.2'den

$$| T_\lambda(f,x) - f(x) | \leq T_\lambda \left(\left| \frac{f''(\xi_{t,x})}{2} \right| (e_1 - x)^2, x \right)$$

$$\leq \frac{\| f'' \|}{2} T_\lambda \left((e_1 - x)^2, x\right)$$

$$= \frac{\| f'' \|}{2} \frac{x(1-x)}{\lambda + 1}$$

elde ederiz. Böylece her $\lambda > 0$ için

$$|T_\lambda(f, x) - f(x)| \leq \frac{\| f'' \|}{8\lambda}$$

elde edilir. □

4.2.5 Teorem: $f \in C^2[0,1]$ olsun. Bu durumda her $\lambda > 0$ için

$$| T_\lambda(f, x) - f(x) | \leq \frac{9}{4} \omega_2 (f, \delta_\lambda)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f \in C^2[0,1]$ olmak üzere $0 < h \leq \frac{1}{2} \min\{x, 1-x\}$ için

$$g_h(x) = \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Big\{ 2f(x + t_1 + t_2) - f(x + 2t_1 + 2t_2) \Big\} dt_1 dt_2$$

biçiminde tanınsın. Buradan

$$| g_h''(x) | = \left| \Big\{ 2f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) \Big\} + \Big\{ f(x - 2h) - 2f(x - h) + f(x) \Big\} \right|$$

elde edilir. Böylece

$$| g_h''(x) | \leq \frac{2}{\delta^2} \omega_2(f, \delta)$$

ve

$$\left|\int_{-\alpha}^{\alpha} h(t)dt\right| \leq 2\alpha \sup_{u\in[-\alpha,\alpha]} \mid h(u) \mid$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mid f(x) - g_h(x) \mid = \left| \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Big\{ f(x+t_1+t_2) - 2f(x+2t_1+2t_2) + f(x) \Big\} dt_1 dt_2 \right|$$

$$\leq \frac{1}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |f(x+t_1+t_2) - 2f(x+2t_1+2t_2) + f(x)| \, dt_1 dt_2 \leq \omega_2(f,\delta)$$

olur. Son eşitsizlik ve Teorem 4.2.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\| T_\lambda(f) - f \| &\leq \| T_\lambda(f-g_h) \| + \| T_\lambda(g_h) - g_h \| + \| f - g_h \| \\
&\leq \| T_\lambda \| \, \| f - g_h \| + \| T_\lambda(g_h) - g_h \| + \| f - g_h \| \\
&= 2 \| f - g_h \| + \| T_\lambda(g_h) - g_h \| \leq 2\omega_2(f,\delta) + \frac{\| g_h'' \|}{8\lambda} \\
&\leq 2\omega_2(f,\delta) + \frac{1}{8\lambda}\frac{2}{\delta^2}\omega_2(f,\delta) = \omega_2(f,\delta)\left(2 + \frac{1}{4\lambda\delta^2}\right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\delta_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ seçerek istenilen sonuca ulaşılır. $\square$

4.2.6 Teorem: $K(f,\delta_\lambda)$, (2.6) ile tanımlanan Peetre K-fonksiyoneli ve $\delta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ olsun. Bu durumda her $f \in C[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ sabit değeri için

$$\| T_\lambda(f) - f \|_{C[0,1]} \leq 2K(f,\delta_\lambda)$$

olur.

İspat: $K(f,\delta_\lambda)$, (2.6) ile tanımlanan Peetre K-fonksiyoneli ve $\delta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ olsun. Bir $g \in C^2[0,1]$ için $u_{t,x} \in (\min\{x,t\}, \max\{x,t\})$ olmak üzere

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \frac{g''(u)}{2!}(t-x)^2$$

olur. Bu durumda $t \in [0,1]$ için T_λ operatörünü bu eşitliğin iki tarafına uygulanıcak olursa

$$\begin{aligned} | T_\lambda(g,x) - g(x) | &\leq | g'(x) || T_\lambda\left((e_1 - x), x\right) | \\ &+\frac{1}{2} | g''(x) || T_\lambda\left((e_1 - x)^2, x\right) | \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Buradan Lemma 4.1.2 göz önüne alırsa (4.7) eşitsizliği

$$| T_\lambda(g,x) - g(x) | \leq \frac{1}{2} | g''(x) | \frac{x(1-x)}{\lambda+1}.$$

biçiminde yazılabilir. Böylece

$$\| T_\lambda(g) - g \|_{C[0,1]} \leq \| g'' \|_{C[0,1]} \frac{1}{2\lambda} \leq \| g \|_{C^2[0,1]} \frac{1}{2\lambda} \tag{4.8}$$

olur. Diğer taraftan T_λ operatörleri lineer operatörler olduğundan

$$| T_\lambda(g,x) - g(x) | \leq | T_\lambda(f-g,x) | + | f(x) - g(x) | + | T_\lambda(g,x) - g(x) |$$

bulunur. Buradan da

$$\| T_\lambda(f) - f \|_{C[0,1]} \leq 2 \| f - g \|_{C[0,1]} + \| T_\lambda(g) - g \|_{C[0,1]} \tag{4.9}$$

olur. (4.9), (4.8) ile göz önüne alındığında ise, son eşitsizlik

$$\| T_\lambda(g) - g \|_{C[0,1]} \leq 2\Big\{ \| f - g \|_{C[0,1]} + \| g(x) \|_{C[0,1]} \frac{1}{2\lambda}\Big\} \tag{4.10}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Eğer (4.10) eşitsizliğinin iki tarafının $g \in C^2[0,1]$ olmak üzere $\delta_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ için infimumunu alınacak olursa ispat tamamlanır. Burada dikkat edilmelidir ki $\lambda \to \infty$ olduğunda $\delta_\lambda \to 0$ olur. $\square$

Sıradaki teorem T_λ operatör dizisinin f fonksiyonuna Zygmund modülü ile yaklaşım hızını verir.

4.2.7 Teorem: $f \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda her $0 \leq \delta \leq 1$ ve $t \in [0,1]$ sabit değeri için

$$\| T_\lambda(f) - f \|_{C[0,1]} \leq C_f \max\left\{\omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \frac{1}{\lambda}\right\} \tag{4.11}$$

olur.

İspat: $f \in C[0,1]$ olmak üzere her $0 \leq \delta \leq 1$ ve $t \in [0,1]$ sabit olsun. Teorem 2.1.6'daki eşitsizlik, Teorem 4.2.6'ye uygulanırsa

$$K(f,\delta) \leq C\left[\omega_2\left(f, \sqrt{\delta}\right) + \min\{1,\delta\} \| f \|_{C[0,1]}\right],$$

ve buradan da $\delta = \frac{1}{\lambda}$ seçilirse,

$$\| T_\lambda(f,x) - f(x) \|_{C[0,1]} \leq 2C\left[\omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{1}{\lambda} \| f \|_{C[0,1]}\right] \tag{4.12}$$

elde edilir. Böylece $\frac{1}{\lambda} < \omega_2(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ ise (4.12) eşitsizliği,

$$\| T_\lambda(f,x) - f(x) \|_{C[0,1]} \leq 2C\left(1 + \| f \|_{C[0,1]}\right)\omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \tag{4.13}$$

verir. Aksi taktirde $\omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) < \frac{1}{\lambda}$ ise, (4.12) eşitsizliği,

$$\| T_\lambda(f,x) - f(x) \|_{C[0,1]} \leq 2C\left(1 + \| f \|_{C[0,1]}\right)\frac{1}{\lambda} \tag{4.14}$$

olur. Böylece (4.13) ve (4.14)'de $2C\left(1 + \| f \|_{C[0,1]}\right) = C_f$ seçilirse (4.11) elde edilir. $\square$

4.3 Voronovskaya Tipi Teorem

Önemli asimptotik formüllerden biri [4, 21] kaynaklarında Bernstein operatörleri için Voronovskaya teoremini ispat eden Voronovskaya tarafından verilmiştir. Pozitif operatör dizileri için benzer tip teoremler [29, 30] kaynaklarında bulunabilir. Bu bölümde yeni tanımlanan T_λ operatör dizisi için Voronovskaya-tipi bir teorem verilmiştir.

4.3.1 Teorem: $f \in C^2[0,1]$ olsun. Bu durumda her $x \in (0,1)$ sabiti için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\left[T_\lambda(f,x) - f(x)\right] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

olur.

İspat: $f \in C^2[0,1]$ olsun. Bir $x \in (0,1)$ sabit noktası için Taylor formülünü kullanırsak her $t \in (0,1)$ için, $g(t,x)$ kalıntısının Peano formu ve $g(t,x) \in C^2[0,1]$ için $\lim_{t\to x} g(t,x) = 0$ olmak üzere

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + g(t,x)(t-x)^2$$

dir. Sonuç 4.1.1'de verilen $T_\lambda(e_0,x) = 1$ eşitliğinden

$$T_\lambda(f,x) - f(x) = f'(x)T_\lambda\left((e_1-x),x\right) + \frac{1}{2}f''(x)T_\lambda((e_1-x)^2,x)$$
$$+T_\lambda\left(g(t,x)(e_1-x)^2,x\right)$$

olur. Buradan Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile

$$T_\lambda\left(g(t,x)(t-x)^2,x\right) \leq \left[T_\lambda\left((e_1-x)^4,x\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[T_\lambda\left(g^2(t,x),x\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. $\varphi(t,x) = g^2(t,x)$ fonksiyonu $t \in [0,1]$ için Teorem 4.1.3'in koşullarını sağladığından

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda\left(g^2(t,x),x\right) = 0$$

dir. Üstelik Lemma 4.1.3 göz önüne alırsa,

$$\lambda T_\lambda \left(g(.,x)(e_1 - x)^2, x\right)$$

ve buradanda

$$\leq \left[\lambda^2 \frac{3\lambda}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6}\, c_\lambda(x)\right]^{\frac{1}{2}} \left[T_\lambda(g^2(.,x),x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ise

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda T_\lambda \left(g(.,x)(e_1 - x)^2, x\right) = 0$$

sonucunu verir. Böylece yukarıdaki sonuçlar ve Lemma 4.1.2'den

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left[T_\lambda(f,x) - f(x)\right] = \frac{1}{2} x(1-x) f''(x)$$

elde edilir. □

4.4 Bernstein Operatörünün Özyapısı

$n = 1, 2, ...$ için klasik $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ Bernstein operatörleri olsun. $\lambda_k^{(n)}$ Bernstein operatörlerinin özdeğerleri olmak üzere

$$\lambda_k^{(n)} := \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

olur [31]. Özfonksiyon eşitliği π_n dereceden n'yi aşmayan polinomların kümesi ve b_j'nin derecesi j olmak üzere $\{b_0, b_1, ..., b_n\}$ tabanına göre,

$$B_n p_k^{(n)} = \lambda_k^n p_k^{(n)}$$

biçiminde yazılırsa $B_n(f)$ operatörünün taşıdığı polinomun derecesini azalttığı görülür. Bu ise bize bir üst üçgen matris sistemini verir. b_j'ler e_j monomileri olduğunda aşağıdaki köşegenleştirme teoremi Cooper [31] makalesinde vermiştir. Bu notun amacı operatörün özyapısına dair ek bilgi vermektir.

$B_n(f)(x)$, $\sum_{j=0}^{N} b_j x^j$ biçiminde bir polinom olmak üzere

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} & . & . & . & \frac{1}{n^{N-1}} \\ 0 & 0 & \frac{(n-1)}{n} & . & . & . & \frac{S(N,2)(n-1)}{n^N} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{n!}{n^N(n-N)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

olsun. Diğer bir deyişle $\overrightarrow{b} = P\overrightarrow{a}$, $P = (t_{jk}) = S(k,j)\frac{n!}{n^k(n-j)!}$ olsun. Bu üst üçgen matris B_n nin π_N'ye kısıtlamasının bir matris gösterimidir. Açıktır ki özdeğerler bu matrisin köşegeni üzerindeki elemanlarıdır. Buradan $B_n f = \lambda f$ olması için gerek ve yeter koşul $n = 1, 2, ...$ olmasıdır. $\lambda = 1$ özdeğer uzayı iki boyutludur fakat geri kalan özdeğerlerin uzaylar çok boyutlu değildir.

Ayrıca bu matrisin $P^{-1} = (l_{ik}) = (-1)^{k-i}s(k,i)\frac{n^k(n-j)!}{n!}$ biçiminde bir tersi vardır.

$$PP^{-1} = \sum_{k=0}^{N} t_{jk} l_{ki}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \left(S(k,j)\frac{n!}{n^k(n-j)!} \right) \left((-1)^{k-i} s(k,i) \frac{(n^k(n-j)!}{n!} \right) = \delta_{ij}$$

olduğu için ters matris

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{2}{(n-1)(n-2)} & . & . & . & (-1)^{N-1}n^{N-1} \\ 0 & 0 & \frac{n}{n-1} & \frac{3n}{(n-1)(n-2)} & . & . & . & \frac{(-1)^{N-2}s(N,2)}{n^{N-1}} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{-s(N,N-1)n^N(n-N+1)!}{n!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{n^N(n-N)!}{n!} \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi $\lambda = 1$'in geometrik yapısını inceleyelim. $B_n - I$ matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & . & . & . & \frac{1}{n^{N-1}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{n} & . & . & . & \frac{S(N,2)(n-1)}{n^N} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{n!}{n^N(n-N)!} - 1 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu matrisi eşolonlaştırırsak B_n'nin rankının $N-1$ olduğunu görülür. $\lambda = 1$'nin özuzayı iki boyutlu ve diğer bütün özdeğerlerin özuzayları ise bir boyutludur.

4.5 T_λ Operatörünün Özyapısı

T_λ operatörünün $L_2[0,1]$ Hilbert uzayına operatör olarak etki ettiğini düşünmek ne kadar doğal görünse de operatörümüz açıkça bu uzayda sınırsızdır. Ancak T_λ operatörü $C[0,1]$ Banach uzayına sınırlandırılır ise operatör sınırlı ve $\|T_\lambda\| = 1$ olacaktır. Bazı $c > 0$'ler için $(1+c)$- çaplı kapalı diski içeren bir bölgedeki analitik fonksiyonların uzayı üzerine kısıtlanan T_λ'nin kısıtlaması ile hesaplamaya başlayalım. f orjin etrafında Taylor serisine açılabileceğinden $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ yazılabilir böylece aşağıdaki gibi bir hesaplama ile

$$T_\lambda(f,x) = \int_0^1 K_\lambda(x,t)\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k dt,$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \int_0^1 K_\lambda(x,t)t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{(\lambda x)_k}{(\lambda)_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{(\lambda)_k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} s(k,j)\lambda^j x^j$$

elde edilir. Buradan

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{(\lambda)_k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} s(k,j)\lambda^j x^j \tag{4.16}$$

olur. Cauchy formünden yararlanılacak olursa M, $\sup\{|f(z)| : |z| \leq 1+c\}$ olmak üzere

$$|f_k| = \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right| \leq M(1+c)^{-k},$$

bulunur. Böylece $f \in \ell^2$ ve (4.16) eşitliği T_λ'nın ℓ^2 üzerindeki matris gösteriminin etkisini ifade eder. Matris gösterimi üst üçgenseldir buradan operatörün özdeğerleri bu matrisin köşegeni üstündeki elemanlarıdır. Yani $k = 0, 1, \cdots$ için

$$\Lambda_k = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k}, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

olur. Buradan 0, $\Lambda_k \to 0$ olduğundan bu operatörün spektrumu içindedir.

π_N, $(N+1)$-boyutlu derecesi N'i aşmayan polinomların kompleks uzayını göstersin. Şimdi π_N üzerinde T_λ operatörünün spektrumunu inceleyelim. Bunun için $f \in \pi_N$ olsun.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} f_k z^k$$

(4.16)'dan ve Tanım 2.3.13'ten $T_\lambda(f,x)$,

$$T_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{N} f_k\frac{1}{(\lambda)_k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}s(k,j)\lambda^j x^j$$

$$=\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=j}^{N}\frac{(-1)^{k-j}\lambda^j}{(\lambda)_k}s(k,j)a_k x^j$$

biçiminde gösterilebilir. Dolayısıyla $T_\lambda(f,x)$, $\sum_{j=0}^{N} b_j x^j$ polinomudur ve

$$\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ .\\ .\\ .\\ b_{n-1}\\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda+1} & . & . & . & \frac{(N-1)!\lambda}{(\lambda)_N}\\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{(\lambda)_2} & . & . & . & \frac{(-1)^{N-2}s(N,2)\lambda^2}{(\lambda)_N}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{-s(N,N-1)\lambda^{N-1}}{(\lambda)_N}\\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{\lambda^N}{(\lambda)_N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ .\\ .\\ .\\ a_{n-1}\\ a_n \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterilir.

Diğer bir deyişle $\overrightarrow{b}=A\overrightarrow{a}$, $A=(t_{jk})=(-1)^{k-j}s(k,j)\frac{\lambda^j}{(\lambda)_k}$ olur. A üst üçgensel matrisi T_λ'nın π_N kısıtlamasının bir matris gösterimini verir. Açıktır ki özdeğerler köşegen elemanlarıdır. Buradan $T_\lambda f=\Lambda f$ olması için gerek ve yeter koşul $\Lambda=1,2,...$ olmasıdır. Bu ise gösterir ki $\Lambda=1$ özdeğeri iki boyutlu uzaya sahip iken geri kalan tek boyutludur. Ayrıca

$$AA^{-1}=\sum_{k=0}^{N} t_{jk}h_{ki}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\left((-1)^{k-i}s(k,i)\frac{\lambda^i}{(\lambda)_k}\right)\times\left((-1)^{j-k}S(j,k)\frac{(\lambda)_k}{\lambda^j}\right)=\delta_{ij}$$

olduğundan matrisin inversi $A^{-1}=(h_{ik})=(-1)^{k-i}S(k,i)\frac{(\lambda)_i}{\lambda^k}$ olur. Bu durumda

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} & . & . & . & \frac{(-1)^{N-1}}{\lambda^{N-1}} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & . & . & . & \frac{(-1)^{N-2}(2^{N-1}-1)(\lambda)_2}{\lambda^N} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{-S(N,N-1)(\lambda)_{N-1}}{\lambda^N} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{(\lambda)_N}{\lambda^N} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi $\Lambda = 1$'in geometrik yapısını inceleyelim. $A - I$ matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+1} & . & . & . & \frac{(-1)^{N-1}\lambda}{(\lambda)_{N-1}} & \frac{(-1)^{N-1}\lambda}{(\lambda)_N} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda)_2} - 1 & . & . & . & \frac{(-1)^{N-2}s(N-1,2)\lambda^2}{(\lambda)_{N-1}} & \frac{(-1)^{N-2}s(N,2)\lambda^2}{(\lambda)_N} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \frac{\lambda^N}{(\lambda)_N} - 1 & \frac{-s(N,N-1)\lambda^{N-1}}{(\lambda)_N} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \frac{\lambda^N}{(\lambda)_N} - 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu matrisi eşolonlaştırırsak $T-\Lambda$'nın rankının $N-1$ olduğu görülür. Buradan $\Lambda = 1$'in özuzayı iki boyutlu ve diğeri ise bir boyutludur.

$T - \Lambda$'nın özdeğerleri,

$$\Lambda_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} \qquad k = 0, 1, 2, ..., n.$$

biçiminde ifade edilir.

$p_k^{(n)}$, k. dereceden monik özfonksiyonları göstersin ve

$$p_0^n := 1, \quad p_1^n := x - 1/2 \tag{4.17}$$

alalım. Elde edilen bu sonuçlar aşağıda bir teorem şeklinde ifade edilmiştir.

4.5.1 Teorem: T_λ operatörü her $f \in C[0,1]$ için $\Lambda_k^{(\lambda)}$ ve $p_k^{(\lambda)}$ sırasıyla özdeğerleri ve özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$T_\lambda(f) = \Lambda_k^{(\lambda)} f \quad \forall f \in C[0,1],$$

diagonal formda ifade edilebilir. Burada özdeğerler

$$\Lambda_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} \qquad k = 0,1,2,... \tag{4.18}$$

biçiminde verilir ve

$$1 = \Lambda_0^{(\lambda)} = \Lambda_1^{(\lambda)} > \Lambda_2^{(\lambda)} > \Lambda_3^{(\lambda)} > ... > \Lambda_k^{(\lambda)} > 0$$

'i sağlarlar. Bu durumda $\Lambda_k^{(\lambda)}$'nın bir özfonksiyonu k. dereceden

$$p_k^{(\lambda)}(x) = \sum_{j=0}^{k} c(j,k,\lambda) x^j = x^k - \frac{k}{2} x^{k-1} + ... \tag{4.19}$$

polinomudur. Bu polinomun katsayıları ise $j = 2,3,....,k$ için

$$c(k,k,\lambda) := 1, \quad c(k-1,k,\lambda) = \frac{k}{2} \tag{4.20}$$

ve

$$c(k-j,k,\lambda) = \frac{\lambda^{2k-j}}{(\lambda)_{k-j}} \left(\frac{1}{\lambda^{k-1}} - \frac{1}{\lambda^j} \right) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(-1)^{j-i}}{(\lambda)_{k-i}} s(k-i,k-j) c(k-i,k,\lambda),$$

formülleriyle hesaplanabilir.

İspat: $p_k^{(\lambda)} = \sum_{s=0}^{k} a_s x^s$ olsun. Bu durumda p_k'nın özdeğerleri $\Lambda_k = \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k}$ olur. $p_k^{(\lambda)}$'nın özdeğeri için $T_\lambda p_k - \Lambda_k p_k = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlikten

$$
\begin{pmatrix}
1-\frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} & . & . & 0 & 0 & . \\
0 & . & . & \frac{(-1)^{k-1}s(k,1)\lambda}{(\lambda)_k} & \frac{(-1)^{k-1}s(k+1,1)\lambda}{(\lambda)_{k+1}} & . \\
0 & . & . & \frac{(-1)^{k-2}s(k,2)\lambda^2}{(\lambda)_k} & \frac{(-1)^{k-2}s(k+1,2)\lambda^2}{(\lambda)_{k+1}} & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & \frac{-s(k,k-1)\lambda^{k-1}}{(\lambda)_k} & \frac{s(k+1,k-1)\lambda^{k-1}}{(\lambda)_{k+1}} & . \\
0 & . & . & 0 & \frac{-s(k+1,k)\lambda^k}{(\lambda)_{k+1}} & . \\
0 & . & . & 0 & \frac{\lambda^{k+1}}{(\lambda)_{k+1}}-\frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{k-1} \\ a_k \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}
$$

olur. Bu lineer sistem ise çözülebilirdir. Dolayısıyla sadece matris eşitliği ile $a_k \neq 0$ olduğu görülür. □

4.5.1 Not: Özfonksiyonların bir listesi aşağıda verilmiştir. İlk dört özfonksiyon λ'dan bağımsızdır.

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x,$$
$$p_2(x) = x(x - \frac{1}{2}), \qquad p_3(x) = x(x-1)(x - \frac{1}{2}),$$

Dördüncü özfonksiyon ise λ'ya bağlıdır. Aşağıda beşinci özfonksiyon çarpanlarına ayrılarak verilmiştir.

$$p_4(x) = x(x-1)\left\{\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{5(5\lambda+6)}\right\}$$

(4.20) kullanılırsa (4.19) için ilk katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$c(k,k,\lambda) = 1, \qquad 0 \leq k \leq \lambda,$$
$$c(k-1,k,\lambda) = \frac{k}{2}, \qquad 1 \leq k \leq \lambda,$$

$$c(k-2,k,\lambda) = -\left\{\frac{s(k,k-2)+\frac{k}{2}s(k-1,k-2)(\lambda+k-1)}{(2k-3)\lambda+(k-1)(k-2)}\right\}, \quad 2 \leq k \leq \lambda.$$

4.6 Üstel Operatörlerin Özyapısı

Bu bölümde S_λ üstel operatörünün özel halinin özyapısı incelenmiştir. Bunun için Tanım 2.3.12'de $p(t)$,

$$p(t) = at^2 + bt + c,$$

olsun. π_N derecesi en fazla N olan polinomların uzayı olmak üzere S_λ operatörünün π_N üzerindeki etkisini düşünelim. Bu uzay $\mathcal{C}^{N+1}$'de $\sum a_j t^j \rightarrow (a_0, a_1, \cdots, a_N)^T$ olarak tanınsın. Bu bölümün ana teoremi aşağıda verilmiştir.

4.6.1 Teorem: S_λ'nin π_N'ye kısıtlamasının özdeğerleri 1 ve $\prod_{j=1}^{n}[1 + ja/\lambda)$, $n = 1, 2, \cdots, (N-1)$'dir. $\Lambda = 1$'in özuzayı 1 ve t tarafından üretilir. $\Lambda = \prod_{j=1}^{n}[1 + ja/\lambda)$'nin özuzayı ise $(n+1)$. dereceden bir polinomla üretilir.

İspat: Açıktır ki $n > 1$ için $\int_{\mathbb{R}} W_\lambda(\lambda, t, u)u^n du$ n. dereceden bir polinomdur. Fakat bunun esas teriminin $\prod_{j=1}^{n}[1 + ja/\lambda)$ olduğu iddia edilirse tümevarımla

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} W_\lambda(\lambda, t, u)u^n du = \frac{\lambda}{p(t)}\int_{\mathbb{R}} W_\lambda(\lambda, t, u)u^n (u-t) du$$

elde edilir. Bu ise S_λ'nın π_N'ye kısıtlamasının köşegen elemanları $1, 1, \prod_{j=1}^{n}[1 + ja/\lambda), n = 1, 2, \cdots, N-1$ olan bir üst üçgensel matris olduğunu gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. □

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen yeni sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümlerde yer almaktadır.

Bu tez çalışmasının üçüncü kısmında Fourier tabanlı yaklaşımda uygulanan Kısmi, Cesáro ve genelleştirilmiş de la Vallée toplanabilme metodları lineer olmayan Fourier tabanına genişletilmiştir. Ayrıca S. Prösdorff tarafından ele alınan Hölder metriğinde trigonometrik polinomlar ile yaklaşım hızının değerlendirilmesi de lineer olmayan Fourier tabanlı seriler için incelenmiştir. Ayrıca genelleştirmeleri dikkate alarak, Hölder metriğinde, Cesàro, genelleştirilmiş de La Vallée toplanabilme metodları kullanılarak H_p^α, $L^p(\Pi)$ ve $C(\Pi)$ uzayında periyodik fonksiyonlara yaklaşımın hızı ile ilgili ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir.

Yaklaşımlar teorisinde çeşitli operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modulleri ve K-fonksiyonelleri yardımıyla verilmektedir. Süreklilik modülü ve K-fonksiyoneli arasında da tezde verdiğimiz eşitsizlikler geçerlidir. 1-boyutlu uzaylarda bu tür yakınsama hızları bir çok calışmada incelenmiştir. Biz de bu tezde yeni tanımladığımız T_λ operatörü için benzer sonucları inceledik ve tanımlanabilecek yeni operatörler için benzer calışmalara bir kaynak oluşturmaya çalıştık.

Bu sonuçlar ile ilgili değerlendirmeler ve açık kalan problemler ile ilgili öneriler aşağıda verilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan uzaylarda farklı toplanabilme metodları ile lineer olmayan Fourier tabanında yukardaki problemler yeniden incelenebilir. Ayrıca farklı fonksiyon sınıfları ve bu sınıflar üzerinde ele alınan normlara göre yaklaşımın derecesinin belirlenmesi ile ilgili problemler ele alınabilir.

Yaklaşım teorisinin bazı düz ve ters teoremleri lineer olmayan Fourier tabanına genişletilip ispatlanabilir ve bu teoremlerin iyileştirmeleri elde edilebilir.

Ayrıca T_λ operatörünün lineer kombinasyonları ile daha iyi yaklaşım sonuçları elde edilebilir.

6. Kaynaklar

[1] Weierstrass, K., *Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkrlcher Functionen Einer Reellen Veränderlichen*, Sitzungsberichte der Akademiezu Berlin, 633-639, (1885).

[2] Bernstein, S. N., "Demonstration du theoreme de Weierstrass Fondee sur le Calcul de Probabilites", *Communications of the Kharkov Mathematical Society*, 13,(2), 12, (1912).

[3] Aral, A., Gupta, V. and Agarwal, R. P., *Applications of q-Calculus in Operator Theory*. Berlin: Springer, (2013).

[4] Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials*. United Kingdom: BookSurge LLC, Deganwy, (1997).

[5] Nowak G. and Gupta V., "The rate of pointwise approximation of positive linear operators based on q-Integer", *Ukrainian Mathematical Journal*, 63(3), 350-360, (2011).

[6] Phillips, G. M., "Bernstein polynomials based on the q-integers", *Annals of numerical Mathematics*, 4, 1-4, (1997).

[7] Ostrovska S., "On the limit q-Bernstein operators", *Mathematica Balkanica*, 18(1-2), 165-172, (2004).

[8] Stancu, D. D., "Approximation of functions by a new class of linear polynomial operator", *Revue Roumaine de Mathmatiques Pures et Appliques*, 13(8) 1173-1194, (1968).

[9] May C. P. "Saturation and inverse theorems for combinations of a class of exponential-type operators", *Canad. J. Math.*, 28, 1224-1250, (1976).

[10] Ismail, M. E. H. and May, C. P., "On a family of approximation operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 63, 446-462, (1978).

[11] Morris C., "Natural exponential families with quadratic variance functions", *Ann. Stat.*, 10, 65-80, (1982).

[12] DeVore, R. A., Lorentz G G., *Constructive Approximation*, New York: Springer-Verlag, (1993).

[13] Peetre K., *A Theory of interpolation of Normed Spaces*. Brazilia: Lecture Notes, (1963).

[14] Bleimann, G., Butzer, P. L., Hann, L., "A Bernstein Type Operator approximating continuous functions on semi-axis", *Nederl. Akad. Wetensch Indag. Math.*, 42(3), 255-262, (1980).

[15] Doğru, O., Özarslan, M. A., Taşdelen G., F., "On Positive Operators involving a certain class of generating functions", *Stud. Sci. Math. Hung.*, 41(4), 415-429, (2004).

[16] Prössdorf, S., "Zur Konvergenz der Fourier reihen Hölder stetiger Funktionen", *Math.Nachr.*, 69, (1975).

[17] Zygmund A., *Trigonometric series, 2nd ed.*, London and New York: Cambridge Univ. Press.,(1959).

[18] Giuseppe M. and Gradimir V. M. *Interpolation Process Basic Theory and Applications*, Berlin: Springer, (2008).

[19] Huang, C., Yang, L H., "Approximation by the nonlinear Fourier basis", *Sci China Math*, 54(6), 12071214, (2011).

[20] DeVore, R. A., "Nonlinear approximation", *Acta Numerica*, 7, 51150, (1998).

[21] Korovkin P. P. *Linear Operators and Approximation Theory.* Delhi:Hindustan Publishing Corporation, (1960).

[22] Royden, H. L., *Real Analysis, second edition*, The Macmillan Co., New York; London:Collier-Macmillan Ltd, (1968).

[23] Lusternik, L. A. and Sobolev, V. I., *Elements of Functional Analysis.* New York: Hindustan Publishing Corporation, (1974).

[24] Naimark, M.A., "Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order ona semi-axis", *AMS Translations.*, 2 (16), 103-193, (1960).

[25] Andrews, G. E., Askey, R. A. and Roy, R. *Special Functions.* Cambridge: Cambridge University Press, (1999).

[26] Leindler L., Meir A. and Totik V., "On approximation of Continuous functions in Lipchitz norms", *Acta Math. Hung.* (45), 441-443,(1985).

[27] Stypinski Z., "On a generalization of the theorem of Prössdorf", *Funct. Approx. Comment. Math.*, 7, 101-104, (1979).

[28] Brualdi, R. A., *Introductory Combinatorics, Fourth edition.* Upper Saddle River, N.J.,:Peason Prentice Hall, (2004).

[29] Ciupa, A., "A Voronovkaya-type theorem for a positive linear operators", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*: ID :42368, 1-7, (2006).

[30] Rempulska, l. and Skorupka M., " The Voronovskaya Theorem for some operators of the Szasz-Mirakyan Type", *Le Matematiche*, L(9), 251-261, (1995).

[31] Cooper, S., Waldron S., "The eigenstructure of the Bernstein Operator", *Journal of Approximation Theory*, 105, 133-165, (2000).