

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**KESİRLİ BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA
DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

MEHMET YAVUZ

BALIKESİR, EKİM - 2016

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**KESİRLİ BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA
DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

MEHMET YAVUZ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR (Tez Danışmanı)

Doç. Dr. Yeliz Yolcu OKUR

Doç. Dr. Murat SARI

Yrd. Doç. Dr. Derya AVCI

Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN

BALIKESİR, EKİM - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

MEHMET YAVUZ tarafından hazırlanan “KESİRLİ BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03.10.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Danışman
Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

Üye
Doç. Dr. Yeliz Yolcu OKUR

Üye
Doç. Dr. Murat SARI

Üye
Yrd. Doç. Dr. Derya AVCI

Üye
Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN

İmza



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

**Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri
Birimi tarafından 2016/108 nolu proje ile desteklenmiştir.**

ÖZET

**KESİRLİ BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA
DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ
DOKTORA TEZİ
MEHMET YAVUZ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. NECATİ ÖZDEMİR)**

BALIKESİR, EKİM - 2016

Bu tezde zaman-kesirli mertebeden kısmi Black-Scholes opsiyon fiyatlama denklemlerinin yaklaşık analitik çözümleri ele alınmıştır. Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden olan Adomian Ayrıştırma Yöntemi (AAY), Kesirli Varyasyonel İterasyon Metodu (KVİM), Laplace Homotopi Pertürbasyon Metodu (LHPM), Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu (GDDM), Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY) ve Sonlu Fark Yaklaşımı (SFY) incelenmiştir. Çalışmanın asıl amacı, bu metotları kullanarak, finans literatüründe önemli opsiyon fiyatlama modellerinden Kesirli Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Denklemlerinin (KBSD) yaklaşık analitik çözümlerini elde etmektir. İlk olarak, Black-Scholes denklemi kesirli durumlar için de opsiyonun fiyatını hesaplayacak şekilde kesirli Black-Scholes denklemi olarak yeniden tanımlanmış, daha sonra bu denkleme AAY, KVİM, LHPM, GDDM ve ÇPY uygulanarak yaklaşık analitik çözümler elde edilmiştir. Daha sonra da SFY ile KBSD'nin nümerik çözümü bulunmuştur. Bulunan sonuçlar değerlendirildiğinde kesirli Black-Scholes denkleminin yaklaşık analitik ve nümerik çözümlerinin elde edilmesinde uygulanan yöntemlerin son derece etkili ve uyumlu olduğu görülmüştür. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Çalışmamızda kullanılan kesirli türevler için Caputo kesirli türevi temel alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: kesirli kısmi diferansiyel denklem, Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli, kesirli Black-Scholes denklemi, yaklaşık analitik metotlar, çok değişkenli Padé yaklaşımı, Caputo kesirli türevi.

ABSTRACT

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL BLACK-SCHOLES OPTION PRICING EQUATIONS

PH.D THESIS

MEHMET YAVUZ

**BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. NECATİ ÖZDEMİR)

BALIKESİR, OCTOBER 2016

In this thesis, approximate analytical solutions of time-fractional partial Black-Scholes option pricing equations are considered. Adomian Decomposition Method (ADM), Fractional Variational Iteration Method (FVIM), Laplace Homotopy Perturbation Method (LHPM), Generalized Differential Transform Method (GDTM), Multivariate Padé Approximation Method (MPAM) and Finite Difference Method (FDM), which are used for solving fractional partial differential equations, are studied. The main focus of this study is to obtain that the solution of time-fractional Black-Scholes option pricing equation (FBSE) with the initial condition for a European call option pricing problem using these methods. First of all, we redefine the Black-Scholes equation as Fractional Black-Scholes Equation (FBSE) that computes the option price for fractional values. Then we have applied the ADM, FVIM, LHPM, GDTM and MPAM to the FBSE in order to solve approximate analytically this equation. Also we have applied the FDM to the FBSE for obtaining numerical solution. The obtained results denote that the mentioned methods are very quick and accurate for FBSE. Also, the results have been presented in tables and figures. The fractional derivative is understood in the Caputo sense.

KEYWORDS: fractional partial differential equation, Black-Scholes option pricing model, fractional Black-Scholes equation, approximate analytical methods, multivariate Padé approximation, Caputo fractional derivative.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
TABLO LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	viii
ÖNSÖZ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
2.1 Kesirli Kalkülüsün Temel Fonksiyonları	4
2.2 Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller	6
2.2.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegral Operatörü.....	7
2.2.2 Riemann-Liouville Kesirli İntegral ve Türev Operatörü	9
2.2.3 Caputo Kesirli Türev Operatörü	10
2.2.4 Kesirli Diferansiyel Denklemler	15
3. KESİRLİ BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA MODELİ	19
3.1 Opsiyonun Tanımı ve Opsiyonla İlgili Temel Kavramlar.....	19
3.2 Opsiyon Fiyatlama Modelleri.....	23
3.2.1 Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli (BSOFM).....	23
3.2.2 Kesirli Black-Scholes Denklemi (KBSD)	28
4. KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK- NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE KESİRLİ BLACK-SCHOLES DENKLEMİNE UYGULANMASI.....	29
4.1 Adomian Ayrıştırma Yöntemi.....	29
4.2 Kesirli Black-Scholes Denklemi Adomian Ayrıştırma Metodu ile Çözümü	36
4.3 Genelleştirilmiş Kesirli Black-Scholes Denklemi Adomian Ayrıştırma Metodu ile Çözümü	39
4.4 Varyasyonel İterasyon Metodu.....	42
4.4.1 Varyasyonel İterasyon Metodunda Temel Enstrümanlar	42
4.4.2 Kesirli Varyasyonel İterasyon Metodu	56
4.5 Kesirli Black-Scholes Denklemi Kesirli Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözümü	57
4.6 Kesirli Laplace Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	59
4.7 Kesirli Black-Scholes Denklemi Laplace Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü	61
4.8 Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu.....	62
4.8.1 Diferansiyel Dönüşüm Metodu.....	63
4.8.2 Genelleştirilmiş Taylor Açılımı	66
4.8.3 Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	67
4.9 Kesirli Black-Scholes Denklemi Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü	76

4.10	Padé Yaklaşımı.....	81
4.10.1	Tek Değişkenli Padé Yaklaşımı.....	81
4.10.2	Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı	86
4.11	Kesirli Black-Scholes Denkleminin Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı ile Çözümü	90
4.12	Sonlu Fark Yaklaşımı (SFY).....	106
4.13	Kesirli Black-Scholes Denkleminin Sonlu Fark Yaklaşımı ile Çözümü	109
5.	SONUÇ VE ÖNERİLER.....	114
6.	KAYNAKLAR	116



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: Avrupa tipi alım opsiyonuna ait ödeme fonksiyonu.	22
Şekil 3.2: Avrupa tipi satım opsiyonuna ait ödeme fonksiyonu.....	22
Şekil 4.1: (3.19)-(3.20) denkleminin $x = 0.3$ için çözümü ($S = 100, E = 80, \sigma = 0.2, r = 0.04$).....	38
Şekil 4.2: (3.19)-(3.20) denkleminin $x = -0.3$ için çözümü ($S = 80, E = 100, \sigma = 0.2, r = 0.04$).....	39
Şekil 4.3: (3.21)-(3.22) denkleminin $x = 0.3$ için çözümü.	41
Şekil 4.4: (3.21)-(3.22) denkleminin $x = 1.0$ için çözümü.	41
Şekil 4.5: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 1.00$ için çözümü.	78
Şekil 4.6: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 0.75$ için çözümü.	79
Şekil 4.7: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 0.50$ için çözümü.	79
Şekil 4.8: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 0.25$ için çözümü.	80
Şekil 4.9: α nın dört farklı değeri için opsiyon fiyatları.	80
Şekil 4.10: $\alpha = 1$ için $S < E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.....	93
Şekil 4.11: $\alpha = 0.75$ için $S < E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.	95
Şekil 4.12: $\alpha = 0.5$ için $S < E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.	98
Şekil 4.13: $\alpha = 1$ için $S > E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.....	101
Şekil 4.14: $\alpha = 0.75$ için $S > E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.	103
Şekil 4.15: $\alpha = 0.5$ için $S > E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.	105
Şekil 4.16: Açık metodun molekülleri.....	111
Şekil 4.17: Tam çözüm ile SFY ile çözümün karşılaştırılması.	113
Şekil 4.18: Alım opsiyonu fiyatı için açık çözüm metodu	113

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1: Alım-Satım opsiyonlarında kâr, zarar ve başabaş durumları.....	21
Tablo 4.1: Bulunan formül ile Newton formülünün karşılaştırılması.....	46
Tablo 4.2: Bir-boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri	64
Tablo 4.3: İki-boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri	65
Tablo 4.4: Genelleştirilmiş iki-boyutlu DD yönteminin temel özellikleri.....	73
Tablo 4.5: Örnek 4.8.3.2.4 için $U_{\alpha,1}(k, h)$ 'in bazı değerleri	75
Tablo 4.6: Denklem (4.102) için $U_{\alpha,1}(p, h)$ 'in bazı değerleri.....	77
Tablo 4.7: $\alpha = 1$ için $S < E$ iken elde edilen nümerik değerler	93
Tablo 4.8: $\alpha = 0.75$ için $S < E$ iken elde edilen nümerik değerler.....	95
Tablo 4.9: $\alpha = 0.5$ için $S < E$ iken elde edilen nümerik değerler.....	98
Tablo 4.10: $\alpha = 1$ için $S > E$ iken elde edilen nümerik değerler	101
Tablo 4.11: $\alpha = 0.75$ için $S > E$ iken elde edilen nümerik değerler.....	103
Tablo 4.12: $\alpha = 0.5$ için $S > E$ iken elde edilen nümerik değerler.....	106

SEMBOL LİSTESİ

<u>Sembol</u>	<u>Açıklaması</u>
R_+	: Pozitif reel sayılar kümesi
N	: Doğal sayılar kümesi
Z^+	: Pozitif tam sayılar kümesi
$L_1(a, b)$: (a, b) üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\Gamma(g)$: Gamma fonksiyonu
$B(x, y)$: İki değişkenli beta fonksiyonu
$E_a(z)$: Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{a,\beta}(z)$: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}^{GL}D^\alpha$: Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörü
${}^{GL}D^{-\alpha}$: Grünwald-Letnikov kesirli integral operatörü
$J_{a^+}^\alpha$: Sağ Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$J_{a^-}^\alpha$: Sol Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_x D_b^\alpha$: Sağ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}_a D_x^\alpha$: Sol Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
D_{*t}^α	: Caputo kesirli türev operatörü
$L(\cdot)$: Lineer operatör
$N(\cdot)$: Nonlineer operatör
$[m, n]_{(x,y)}$: $f(x, y)$ fonksiyonunun (m, n) . dereceden Padé polinomu

KISALTMALAR LİSTESİ

KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
KKDD	: Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklem
BSOFM	: Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli
KBSD	: Kesirli Black-Scholes Denklemi
GKBSD	: Genelleştirilmiş Kesirli Black-Scholes Denklemi
AAV	: Adomian Ayrışım Yöntemi
VİM	: Varyasyonel İterasyon Metodu
KVİM	: Kesirli Varyasyonel İterasyon Metodu
HPM	: Homotopi Pertürbasyon Metodu
KLHPM	: Kesirli Laplace Homotopi Pertürbasyon Metodu
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
DDM	: Diferansiyel Dönüşüm Metodu
GDDM	: Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu
ÇPY	: Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı
SFY	: Sonlu Fark Yaklaşımı
KSFM	: Kapalı Sonlu Fark Metodu
MLPG	: Ağsız Yerel Petrov-Galerkin Metodu

ÖNSÖZ

Matematiksel çalışma disiplininin kazanılmasında lisansüstü eğitimin yeri oldukça önemlidir. Leonardo da Vinci'nin de ifade ettiği gibi "Matematiksel olarak gösterilemeyen hiçbir araştırma gerçek bilim sayılamaz." Dolayısıyla bilim yapabilmek için matematik dilini öğrenmek ve bu dili diğer disiplinlerle birleştirip farklı türdeki problemlere uygulayabilmek büyük önem arz eder. Bu sürecin kazanılmasında danışmanlar şüphesiz başrolleri oynar. Çünkü uzun soluklu matematik dünyasında ilerleyebilmenin anahtarları kendilerindedir. Bu bağlamda, kendisinden lisansüstü eğitimim boyunca farklı konularla tanışarak kazandığım disiplinli çalışma alışkanlığı, özveri ve sabırla mesafe kat etme, her an potansiyel motivasyonlu bulunma hali ve doğru bilgiye doğru zamanda yönlendirilme gibi özellikleri derinden yaşadığım değerli hocam ve danışmanım Sayın Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR'e sonsuz şükranlarımı arz ederim.

Doktora sürecimde kendisinden çok fazla destek aldığım, özellikle finans matematiği altyapısını kazanmamda üzerimde çok emeği olan, çok yoğun zamanlarında bile bana zaman ayırabilen ve duruşundan yüksek motivasyon kazandığım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Yeliz Yolcu OKUR'a içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez izleme komitemde bulunan ve özellikle kesirli kalkülüs alanında yoluma ışık tutan Sayın Yrd. Doç. Dr. Derya AVCI'ya da teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca yaşamımın her aşamasında varlıklarından büyük güven duyduğum, her zaman destek, ilgi ve sevgilerini hissettiğim başta annem olmak üzere tüm aileme minnetlerimi sunuyorum.

Son olarak, lisansüstü eğitimim boyunca kendilerine gereken ilgi ve alakayı gösteremediğimi düşündüğüm ve bana bu süreçte manevi destekleriyle sahip çıkan sevgili eşim ve tezimi kendisine armağan ettiğim biricik kızım Gülvera'ya anlayış, sabır ve dualarından dolayı çok minnettarım.

1. GİRİŞ

Bilimin değişik dallarında ortaya çıkan problemlere ait matematiksel modellerin oluşturulması uygulamalı matematikte karşılaşılan en önemli problemlerden biridir. Bu problemler adi diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklem, cebirsel-diferansiyel denklem ve son zamanlarda da kesirli mertebeden diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tip denklemlerin analitik çözümleri denklemin yapısına göre değişmektedir. Özellikle analitik olarak çözülemeyen denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda, bu alanda yapılan çalışmalar oldukça büyük bir hız kazanmıştır.

Kesirli kalkülüs terimi ilk olarak 30 Eylül 1695 yılında ünlü matematikçi L'Hospital'in, diferansiyel hesabın kurucusu olarak bilinen Leibnitz'e yazdığı mektupta $1/2$. mertebeden türevin ne anlama geldiğini sormasıyla ortaya çıkmıştır. Daha sonraları keyfi mertebeden türev ve integral olarak adlandırmanın doğru olacağı düşünülse de L'Hospital'den günümüze kadar kesirli hesaplar adıyla gelmiştir.

Analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleri; kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemleri, kesirli türevli adi diferansiyel denklemleri ve integral denklemlerini çözmek için önerilebilir. En yaygın olarak kullanılan çözüm yöntemleri varyasyonel iterasyon, homotopi pertürbasyon, Adomian ayrışım, diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Padé yaklaşımıdır. Bunlara ek olarak diğer klasik yaklaşık çözüm yöntemleri de vardır. Bu yöntemlerden bazıları, Laplace dönüşümü, kesirli Green fonksiyonu ve Mellin dönüşümü yöntemleridir [1].

Opsiyon fiyatlama modelleri finans literatüründe oldukça geniş bir alana yayıldığından dolayı bu alanda yapılan farklı türde çalışmalar mevcuttur. Kapalı sonlu fark metodu (KSFM), ağsız yerel Petrov-Galerkin metot (MLPG) [2], kuadratik spline sıralama metodu [3], B-Spline sıralama metodu [4] ve Crank-

Nicolson metodu [5] özellikle kesirli Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin nümerik çözümünü üzerine yapılan bazı çalışmalardır.

Bu çalışmada uygulamalı matematiğin temel konularından olan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinden Adomian Ayırışım Yöntemi (AAY), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM), Laplace Homotopi Pertürbasyon Metodu (LHPM), Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu (GDDM), Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı (ÇPY) ve Sonlu Fark Yaklaşımı (SFY) detaylı bir şekilde ele alınmış, sonrasında bu yöntemler kullanılarak kesirli Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin çözümleri elde edilmiştir.

Çalışma, giriş bölümüyle beraber 4 ana bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde nümerik ve analitik çözüm yöntemlerine kısaca değinilmiş ve çalışmanın içeriğiyle ilgili bilgi verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde, çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Özellikle kesirli türev ve kesirli integral tanımları üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, opsiyon fiyatlama modellerinden biri olan Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli hakkında bilgi verilmiş, klasik Black-Scholes denkleminin elde edilişi ve bu denklemden kesirli Black-Scholes denklemine geçiş aktarılmıştır. Ayrıca çalışmamızla doğrudan bağlantılı olması açısından genelleştirilmiş Black-Scholes denkleminin genel yapısı hakkında bilgiye yer verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü ve son bölümünde ise kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik ve nümerik çözümleri ele alınmıştır. Bu bağlamda, AAY, VİM, LHPM, GDDM, ÇPY ve SFY hakkında detaylı açıklama yapılmıştır. Yine bu bölümde ilgili metotlar kesirli Black-Scholes opsiyon fiyatlama modeli üzerinde uygulanmış ve her bir metotla kesirli Black-Scholes denkleminin çözümü elde edilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş kesirli Black-Scholes denkleminin AAY ile çözümüne de bu bölümde yer verilmiştir. Elde edilen sonuçlar şekil ve tablolarla sunulmuştur.

Bulunan sonuçlar değerlendirildiğinde AAY, VİM, LHPM, GDDM ve ÇPY'nin kesirli Black-Scholes denkleminin elde edilmesinde oldukça etkili ve hızlı bir çözüm ürettiği gözlenmiştir. Bununla birlikte, bulunan analitik çözümler ile SFY

kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümler karşılaştırıldığında SFY'nin tam çözüme çok yakın sonuçlar verdiği ortaya çıkmıştır. Bulunan sonuçların hassasiyetle yorumlanabilmesi açısından, karşılaştırmada kullanılan verilerin gerçek hayattan elde edilen vanilla tipi alım opsiyonu verileri olmasına dikkat edilmiştir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölüm, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremleri içermektedir. Burada yer verilen teoremlerin ispatları [1, 6-8] kaynaklarında ayrıntılı olarak verildiğinden dolayı ayrıca ispatları yapılmayacaktır.

2.1 Kesirli Kalkülüsün Temel Fonksiyonları

2.1.1 Tanım (Gamma Fonksiyonu)

$\Gamma(z)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integraliyle tanımlanır. Gamma fonksiyonunun en önemli özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

olmasıdır. Bu durum kısmi integrasyon yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilebilir [1]:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

2.1.2 Tanım (Beta Fonksiyonu)

Beta fonksiyonu

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0) \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımdan $B(z, w) = B(w, z)$ olduğu, yani Beta fonksiyonunun simetrik oluşu aşikardır. Çoğu zaman Beta fonksiyonu yerine Gamma fonksiyonunun kesin değerlerinin kombinasyonları kullanılır.

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir.

2.1.3 Tanım (Mittag-Leffler Fonksiyonu)

$\alpha > 0$ olmak üzere bir parametrelili $E_\alpha(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu tüm kompleks uzayda aşağıdaki seri açılımı ile tanımlanır [9]:

$$E_\alpha(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.5)$$

Mittag-Leffler tipi iki parametrelili fonksiyona genelleştirme hali ise

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.6)$$

seri açılımı ile verilir.

2.1.4 Tanım

\mathbb{R}^n , n – boyutlu reel Euclid uzayı, $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-1} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$F(D^m u(x), D^{m-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x \in U) \quad (2.7)$$

biçiminde ifade edilen denkleme, m . mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Bu denklemin çözümü, ∂U , U 'nun sınırı olmak üzere sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlardan (2.7) denklemini sağlayan tüm u 'ların bulunması işlemidir [10].

2.1.5 Tanım

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında tüm mertebeden türevlere sahip ise yani $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $f^{(k)}(c)$ mevcut ise bu durumda,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!} (x-c)^3 + \dots \quad (2.8)$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun $x=c$ dolayındaki *Taylor seri açılımı* denir. Eğer burada $c=0$ ise (2.8) ifadesine *Maclaurin seri açılımı* denir [11].

2.1.6 Tanım

$x > 0$ ve $f(x)$ reel fonksiyonu için $f_1(x) \in C[0, \infty)$ olmak üzere $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p > \mu, (\mu \in R)$ reel sayısı varsa $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ uzayındadır, denir. Eğer $n \in N$ ve $f^{(n)} \in C_\mu$ ise $f(x)$ reel fonksiyonuna C_μ^n uzayındadır, denir [12].

2.2 Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Son yıllarda kesirli kalkülüs, teorik matematikte olduğu kadar uygulamalı bilimlerde de önemli bir yere sahiptir. Kesirli kalkülüs yeni bir matematik teorisi değil, aksine klasik kalkülüs tarihi kadar eskiye dayanan bir geçmişi vardır. Burada “kesirli kalkülüs” ifadesiyle kastedilen anlam “keyfi mertebeden türev ve integral” ile ilgilenen bir dal olmasıdır. Kesirli kalkülüs ile ilgili literatürde pek çok kaynak bulunmaktadır [1, 13-14].

Leibnitz, çalışmalarında $y(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevini gösteriminde $d^n y/dx^n$ ifadesini kullanmıştır. Bu gösterimle ilgili olarak L'Hospital'in, Leibnitz'e n 'nin tamsayı olmaması ($n=1/2$) durumunda türevin nasıl tanımlanacağını sorması ve bu soruya bir mektupla cevap olarak Leibnitz'in $n=1/2$ için türevi tanımlamasıyla birlikte 1695 yılında kesirli türev kavramı literatüre girmiştir [14]. Leibnitz'in “*Bu durum şu anda bir paradoks gibi gözükse de bir gün çok kullanışlı sonuçları ortaya çıkacaktır*” şeklindeki cevabı, aslında kesirli kalkülüsün bugünkü durumuna işaret etmektedir. Kesirli türev kavramının ilk kez kullanıldığı bu mektuptan sonra pek çok matematikçi bu konuda çalışmalar yapmıştır [1, 14]. Bununla beraber, kesirli operatörlerin ilk kez fiziksel bir problemi çözmek için kullanımı da 1823 yılında Niels Henrik Abel tarafından yapılmıştır [15]. Abel'in

uygulamalı fizik problemlerinde kesirli operatörleri kullanmasından sonra Liouville kapsamlı bir çalışma yapmış ve konuyla ilgili pek çok makale yayınlamıştır [16]. Daha sonra 1847 yılında, çok sık kullanılan kesirli integral tipi Riemann-Liouville integralinin tanımı Riemann tarafından yapılmıştır [17]. Buna ilaveten Weyl, Fourier ve Cauchy'nin de kesirli kalkülüs üzerine çalışmaları bulunmaktadır [1].

Kesirli türevin birden fazla tanımının olması, problemin türüne göre en uygun tanımın kullanılması sonucu problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Bu bölümde, literatürde en sık kullanılan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo tipi kesirli türev ve integraller anlatılacaktır. Esasında bu üç tanımlama da bazı şartlar altında birbirine denktir. Bu tanımlar arasındaki temel fark, ilgilenilen fonksiyonların tanım kümeleri ve seçilen yardımcı parametrelerdir [1].

Son yıllarda, kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville türev operatörü yerine, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü daha çok tercih edilmektedir. Bunun sebebi, başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için Caputo türev tanımının daha kullanışlı olmasıdır [18]. Çalışmamızda da başlangıç koşullarını içeren kesirli Black-Scholes ve genelleştirilmiş kesirli Black-Scholes diferansiyel denklemi kullanıldığından dolayı, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü kullanılmıştır.

2.2.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türev ve İntegral Operatörü

Kesirli türev Grünwald tarafından 1867'de bir toplamın limiti olarak aşağıdaki gibi tanımlamıştır [19]:

2.2.1.1 Tanım

$\alpha \in R_+$ olsun.

$${}^{GL}D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha+1) f(x-rh)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha-r+1)} \quad (2.9)$$

ile tanımlanan ${}^{GL}D^\alpha$ operatörüne α . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi denir.

$$(-1)^r \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-r+1)} = \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \quad (2.10)$$

olduğundan (2.9) denklemi

$${}^{GL}D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)} f(x-rh) \quad (2.11)$$

haline dönüşür. Türevin derecesi α , bir m tamsayısına eşit olduğunda $\binom{m}{r}$ alışılmış binom katsayısı olmak üzere (2.9) ifadesi m . dereceden türeve indirgenmiş olur:

$$\begin{aligned} {}^{GL}D^m f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(m-r+1)} f(x-rh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{m!}{r!(m-r)!} f(x-rh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{m}{r} f(x-rh). \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12)'de bulunan sonuç ise $\Delta f(x-rh) = f(x-rh) - f(x-(r+1)h)$ olmak üzere klasik türev tanımını verir. Örneğin (2.12)'de $m=1$ ve $m=2$ için sırasıyla:

$$\begin{aligned} {}^{GL}Df(x) &= Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{h} \\ {}^{GL}D^2 f(x) &= D^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{h} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda α yerine $-\alpha$ yazılırsa, yani

$$\begin{aligned} {}^{GL}D^{-\alpha} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\Gamma(-\alpha+1) f(x-rh)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha-r+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)} f(x-rh) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ifadesine α . mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali denir.

2.2.2 Riemann-Liouville Kesirli İntegral ve Türev Operatörü

Bir $f \in C_\mu$, $\mu > -1$ fonksiyonu için $\alpha \geq 0$ mertebeli J_a^α Riemann-Liouville (RL) sol ve sağ integral operatörü,

$$J_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \geq a, \quad (2.14)$$

$$J_{a^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^a (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \leq a, \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak Riemann-Liouville integral operatöründe $\alpha = 0$ için

$$J_a^0 f(x) = f(x) \quad (2.16)$$

elde edilir.

2.2.2.1 Tanım

$f \in C_\mu$, $\mu > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörü için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$\mathbf{a)} \quad J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^\beta J_a^\alpha f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b)} \quad J_a^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x-a)^{\alpha+\gamma}, \quad \alpha > 0, \gamma > -1, x > 0. \quad (2.18)$$

Benzer şekilde bir $f(x)$ fonksiyonunun $\alpha \geq 0$ mertebeli ${}_a D_x^\alpha$ Riemann-Liouville (RL) türev operatörü, Riemann-Liouville integral operatörü yardımıyla hesaplanabilir. $m-1 \leq \alpha < m$, $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $x > x_0$ olmak üzere,

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) = D^m \left[{}_a D_x^{-(m-\alpha)} f(x) \right] = D^m \left[J_a^{(m-\alpha)} f(x) \right] = \frac{d^m}{dx^m} \left[J_a^{(m-\alpha)} f(x) \right] \quad (2.19)$$

eşitliğinde (2.14) ve (2.15) ile verilen Riemann-Liouville integral operatörünü kullanarak Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_x^\alpha f(x) &= D^m \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left(\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

2.2.3 Caputo Kesirli Türev Operatörü

En sık kullanılan kesirli türev tipi olan Caputo anlamında türevin tanımı ve detaylı özellikleri [13, 20] kaynaklarında mevcuttur. Bu yüzden, burada sadece çalışmamızda kullanacağımız özellikler verilecektir.

2.2.3.1 Tanım

$m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > 0$ ve $f \in C_{-1}^m$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun $D_{*a}^\alpha f(x)$ notasyonu yardımıyla gösterilecek olan α . mertebeden Caputo kesirli türevi,

$$D_{*a}^\alpha f(x) = J_a^{m-\alpha} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $f \in C_\alpha^m$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere, Caputo türevine ait

$$\mathbf{a)} \quad D_{*a}^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x), \tag{2.22}$$

$$\mathbf{b)} \quad J_a^\alpha D_{*a}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad a \geq 0 \tag{2.23}$$

özellikleri verilebilir.

2.2.3.2 Tanım

$m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, α . mertebeden Caputo zaman-kesirli türev operatörü

$$D_{*t}^{\alpha} u(x, t) = \frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial t^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \alpha = m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.24)$$

olarak tanımlanır [20].

2.2.3.3 Teorem

$\lambda > -1$ olmak üzere $f(x) = x^{\lambda} g(x)$ olduğunu ve $g(x)$ fonksiyonunun da $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $R > 0$ yakınsaklık yarıçapı ile $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^{n\alpha}$ genelleştirilmiş kuvvet seri açılımına sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda, aşağıdaki şartlardan birisi sağlandığı takdirde tüm $x \in (0, R)$ için

$$D_{*a}^{\gamma} D_{*a}^{\beta} f(x) = D_{*a}^{\gamma+\beta} f(x) \quad (2.25)$$

eşitliği sağlanır [21].

- a) $\beta < \lambda + 1$ ve γ keyfi
- b) $\beta \geq \lambda + 1$, γ keyfi ve $m-1 < \beta \leq m$ olmak üzere $k = 0, 1, \dots, m-1$ için $a_k = 0$.

Bu teoremin ispatı [12]'de verilmiştir.

Riemann-Liouville kesirli türev tanımıyla Caputo kesirli türev tanımı arasındaki ilişkiyi daha iyi ifade edebilmek için birkaç tane örnek verelim:

2.2.3.4 Örnek

Bazı $\lambda > 0$ için $f(x) = e^{\lambda x}$ olsun, öyle ki $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ dir. $0 < \alpha < 1$ için Caputo formunu kullanarak ve $u = \lambda y$ dönüşümü yaparak

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} [e^{\lambda x}] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda e^{\lambda(x-y)} y^{-\alpha} dy = \frac{\lambda e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda y} y^{-\alpha} dy \\
&= \frac{\lambda e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{-\alpha} \frac{du}{\lambda} = \frac{\lambda e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-u} u^{(1-\alpha)-1} du \quad (2.26) \\
&= \frac{\lambda e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

şeklinde klasik türev ile bulunan sonuç ile aynı sonuç elde edilir. Riemann-Liouville formu göz önüne alındığında Caputo tipi kesirli türev ile bulunan sonuçla aynı sonuç elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} [e^{\lambda x}] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \lambda e^{\lambda(x-y)} y^{-\alpha} dy \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda y} y^{-\alpha} dy \right] \quad (2.27) \\
&= \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \right] = \frac{d}{dx} [\lambda^{\alpha-1} e^{\lambda x}] = \lambda^\alpha e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

bulunur. Caputo kesirli türevinde $u = x - y$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x f'(u) (x-u)^{-\alpha} du \quad (2.28)$$

elde edilir. Aynı dönüşüm $0 < \alpha < 1$ için Riemann-Liouville türevi için bir alternatif oluşturur:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(u) (x-u)^{-\alpha} du. \quad (2.29)$$

2.2.3.5 Örnek

$f(x)$ fonksiyonunu $x > 0$ için $f(x) = x^p$ olarak ve $x < 0$ için $f(x) = 0$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $x > 0$ için $f'(x) = px^p$ ve $x < 0$ için $f'(x) = 0$ olduğunu biliyoruz. Beta fonksiyonunun özelliğinden $a > 0$ ve $b > 0$ için

$$\int_0^x y^{a-1} (x-y)^{b-1} dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} x^{a+b-1} \quad (2.30)$$

yazabiliriz. Bu durumda Caputo kesirli türevi

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} [x^p] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x p y^{p-1} (x-y)^{-\alpha} dy \\
&= \frac{p}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x y^{p-1} (x-y)^{(1-\alpha)-1} dy \\
&= \frac{p}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(p+1-\alpha)} x^{p+(1-\alpha)-1} \\
&= \frac{p\Gamma(p)}{\Gamma(p+1-\alpha)} x^{p-\alpha} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

olarak bulunur. Bu da klasik türevde bulunan sonuç ile aynıdır. Örneğin $p=2$ için,

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\Gamma(p-1) \quad \text{olduğundan} \quad \frac{d^2}{dx^2} [x^p] = p(p-1)x^{p-2} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-1)} x^{p-2}$$

bulunur. Şimdi de Riemann-Liouville kesirli türev formunu kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} [x^p] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x y^p (x-y)^{-\alpha} dy \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x y^{(p+1)-1} (x-y)^{(1-\alpha)-1} dy \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(p+2-\alpha)} x^{p+1-\alpha} \right] \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+2-\alpha)} (p+1-\alpha) x^{p-\alpha} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir. Bu ise Caputo kesirli türev formuyla elde edilen sonuçla aynıdır. Son olarak da Caputo ile Riemann-Liouville kesirli türev formlarıyla elde edilen sonuçların birbiriyle aynı olması gerekmediğine dair bir örnek verelim.

2.2.3.6 Örnek

$f(x)$ fonksiyonu $x \geq 0$ için $f(x)=1$ olarak ve $x < 0$ için $f(x)=0$ olarak tanımlansın. Bu durumda $x \neq 0$ iken $f'(x)=0$ olduğundan Caputo kesirli türev sıfırdır. Aslında, tamsayı mertebeden türevde olduğu gibi herhangi bir sabitin kesirli mertebeden Caputo türevi de sıfırdır. Fakat Riemann-Liouville kesirli türevde sıfır olmayabilir. $x > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, (2.29) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x 1(x-y)^{-\alpha} dy \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x u^{-\alpha} du \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ifadesini elde ederiz. $y > x > 0$ olmadığı sürece $f(x) = f(x-y)$ olduğundan üreteç formu

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) &= \int_0^\infty [f(x) - f(x-y)] \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha-1} dy \\
&= \int_x^\infty [1-0] \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha-1} dy \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{x^{-\alpha}}{\alpha} \right] = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

olarak bulunur. Bu ise Riemann-Liouville formuyla aynıdır. Üreteç formundan kısmi integrasyon yardımıyla Caputo formu da elde edilebildiğinden dolayı, (2.34)'de $u = f(x) - f(x-y)$ dönüşümüyle kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty [f(x) - f(x-y)] \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha-1} dy \\
&= \int_x^\infty [1-0] \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha-1} dy \\
&= \left[\frac{-y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} (f(x) - f(x-y)) \right]_x^\infty + \int_x^\infty f'(x-y) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha} dy \\
&= \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \int_x^\infty f'(x-y) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-\alpha} dy
\end{aligned} \tag{2.35}$$

sonucu bulunur. Burada Caputo formuyla Riemann-Liouville formunun farklılığı sınır terimlerinden kaynaklanmaktadır [18].

2.2.3.7 Tanım [22]

Bileşik fonksiyonun kesirli türevi

$$d^\alpha f \cong \Gamma(\alpha+1) df, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{2.36}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$$dy = f(x)(dx)^\alpha, \quad x \geq 0, \quad y(0) = 0 \quad (2.37)$$

denkleminin çözümü yani $(dx)^\alpha$ ya göre integral, aşağıdaki sonucu ortaya çıkarır.

2.2.3.8 Sonuç [23]

(2.37) denkleminde

$$y = \int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha = \alpha \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.38)$$

elde edilir. Kesirli türev ile kesirli integral arasındaki ilişki ise

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha = \Gamma(1+\alpha) f(x) = \alpha! f(x) \quad (2.39)$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \int_0^{u(x)} f(\xi)(d\xi)^\alpha = \alpha! f(u(x))(u'(x))^\alpha \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örneğin, $y^{(\alpha)}(x) = f(x)$, $y(a) = y_a$ kesirli diferansiyel denkleminin çözümü,

$$\int_a^x d^\alpha y = \alpha!(y(x) - y(a)) = \int_a^x f(\xi)(d\xi)^\alpha$$

olduğundan

$$y(x) = y_a + \Gamma^{-1}(\alpha) \int_a^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

şeklinde bulunur [23].

2.2.4 Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ve kesirli diferansiyel denklemler ile ilgili tanımlar verilecektir.

2.2.4.1 Tanım

Bir veya daha fazla bağımsız değişkenin kesirli türevlerini içeren herhangi bir bağıntıya *kesirli diferansiyel denklem* denir. Diğer bir ifadeyle kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir.

2.2.4.2 Örnek

Aşağıdaki gibi

$$xD^{2/3}y(x) - D^{1/2}y(x) - y(x) = \cos(x) \quad (2.41)$$

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) + x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 2t^{\alpha} + 2x^2 + 2, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.42)$$

şeklinde verilen (2.41) ve (2.42) denklemleri birer kesirli diferansiyel denklemdir [24]. Kesirli diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz:

a) Kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemler: Eğer kesirli mertebeden bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon yalnız bir bağımsız değişkene bağımlı ise bu kesirli diferansiyel denkleme *kesirli adi diferansiyel denklem* denir [25].
Örneğin,

$$D^{1/3}y(x) + 5y^2(x) - 3 = 0 \quad (2.43)$$

$$D^{1/2}y(t) + 2D^{1/2}y(t) = t \quad (2.44)$$

$$D^{3/2}y(x) + D^{1/2}y(x) - 2y(x) = 0 \quad (2.45)$$

denklemleri birer kesirli adi diferansiyel denklemdir [1].

b) Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler: Eğer kesirli mertebeden bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağımlı ise bu kesirli diferansiyel denkleme *kesirli kısmi diferansiyel denklem* denir [25].
Örneğin,

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.46)$$

denklemini zaman-kesirli (time-fractional) bir kısmi diferansiyel denklemdir [24].

$$\frac{\partial^{1.5}u(x,t)}{\partial t^{1.5}} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t), \quad x > 0 \quad (2.47)$$

denklemini uzay-kesirli (space-fractional) bir kısmi diferansiyel denklemdir [26].

$$\frac{\partial^{1.5}u(x,t)}{\partial t^{1.5}} = \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^{1.25}u(x,t)}{\partial x^{1.25}}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (2.48)$$

denklemini ise uzay-zaman-kesirli (space-time-fractional) bir kısmi diferansiyel denklemdir [26].

Burada (2.46) denkleminin başlangıç koşulu $u(x,0) = \sin x$ şeklinde, (2.47) denkleminin başlangıç koşulları $u(0,t) = \exp(-t)$, $u_x(0,t) = \exp(-t)$ olarak ve (2.48) kesirli kısmi diferansiyel denkleminin başlangıç koşulları ise $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ şeklindedir.

Diğer bir sınıflandırma şekli ise kesirli diferansiyel denklemlerin lineer olup olmamasına göredir. Bir kesirli diferansiyel denklem eğer;

$$a_n(x)D^{a_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{a_{n-1}}y(x) + \dots + a_1(x)D^{a_1}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (2.49)$$

biçiminde ise *kesirli lineer diferansiyel denklem* olarak adlandırılır. (2.49) denkleminde D^{a_i} , ($i = 1, 2, \dots, n$) kesirli diferansiyel operatördür ve lineerdir. Burada kesirli lineer diferansiyel denklemde bağımlı değişken y ve y 'nin kesirli türevleri birinci derecedendir. Buradan hareketle lineer olmayan bir kesirli diferansiyel denklem *kesirli nonlinear diferansiyel denklem* olarak adlandırılır. Bu tanımları dikkate alarak,

$$x^3 D^{3/2}y(x) + y(x) = e^x \quad (2.50)$$

ve

$$D^{2q}y(x) + D^qy(x) - y(x) = 0 \quad (2.51)$$

denklemleri lineer fakat

$$D^{2/3}y(x) = y^2(x) \quad (2.52)$$

ve

$$y(x)D^{3/2}y(x) + D^{3/5}y(x) = x^3 \quad (2.53)$$

denklemleri nonlineerdir.



3. KESİRLİ BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA MODELİ

Çalışmanın bu bölümünde opsiyonun tanımı, opsiyonla ilgili temel kavramlar ve en yaygın opsiyon fiyatlandırma modellerinden biri olan Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma modeli ele alınacaktır. Aynı zamanda Black-Scholes denklemi üzerinde bir takım dönüşümler yapılarak elde edilen kesirli Black-Scholes denklemi sunulacaktır. Bununla beraber genelleştirilmiş kesirli Black-Scholes denklemi de bu bölümde verilecektir.

3.1 Opsiyonun Tanımı ve Opsiyonla İlgili Temel Kavramlar

3.1.1 Tanım (Opsiyon)

Opsiyonlar, değeri başka bir varlığın değerine bağımlı olarak değişen türev ürünlerdir (financial derivatives). Opsiyonlar belli bir vadeye kadar veya belli bir vadede, opsiyona dayanak varlık (underlying asset) oluşturan belli miktardaki bir malı, finansal ürünü, sermaye piyasası aracını veya herhangi bir ekonomik göstereyi belli bir fiyattan alma (call) veya satma (put) hakkını, belli bir prim karşılığında opsiyonu satın alan kişiye veren sözleşmelerdir.

Opsiyonlar, konusunu oluşturan kıymetlere göre farklı türlere ayrılır. Hisse senedi opsiyonları, hisse senedi endeks opsiyonları, faiz oranı opsiyonları, altın opsiyonları ve döviz opsiyonları opsiyon türlerine örnek verilebilir [27].

3.1.2 Tanım (Opsiyon Vadesi)

Opsiyon alıcısının alma yada satma *hakkının*; satıcısının ise alma ya da satma *yükümlülüğünün* hangi tarihe kadar geçerli olduğunu gösterir. Alıcının talebi halinde, opsiyon satıcısının opsiyona konu olan dayanak varlığı ne kadardan alacağını yada ne kadardan satacağını belirleyen fiyat kullanım fiyatıdır (exercise/strike price) ve alıcı ile satıcı arasında belirlenir.

3.1.3 Tanım (Opsiyon Primi)

Opsiyon terminolojisinde opsiyonun fiyatını temsil eder. Opsiyonlar alınıp satılırken, alıcı sahip olacağı hak için satıcıya bir prim öder. Söz konusu prim alıcı için maliyet oluştururken satıcıya bir gelir teşkil eder. Opsiyonun alındıktan sonra kullanıldığı takdirde elde edilecek kârı gösteren gerçek değer ve bu değerın opsiyon priminden çıkarılmasıyla bulunan zaman değerinden oluşan opsiyon primi, opsiyonun alım opsiyonu mu yoksa satım opsiyonu mu olduğu, kullanım fiyatı ile opsiyona dayanak oluşturan varlığın fiyatı arasındaki fark, opsiyonun vadesine kalan gün sayısı ve dayanak varlığın veya göstergenin dalgalanması gibi pek çok durumdan etkilenmektedir. Prim fiyatı piyasadaki arz-talebe göre belirlenir ve hak kullanılsın ya da kullanılmasın prim bedeli geri alınmaz.

3.1.4 Tanım (Alım Opsiyonu)

Bir opsiyon, alıcısına, opsiyon konusu malı belli bir vade içinde (Amerikan tipi) veya vade sonunda (Avrupa tipi) belli bir kullanım fiyatından satın alma hakkı veriyor, satıcısına da satma yükümlülüğü üstlendiriyorsa bu tür opsiyonlara satın alma opsiyonu (call option) adı verilir. Alım opsiyonu alıcısının (satıcısının) beklentisi dayanak varlık fiyatının gelecekte yükselmesidir (düşmesidir).

3.1.5 Tanım (Satma Opsiyonu)

Alıcısına, belirli bir varlığı, bugünden belirlenen bir fiyat üzerinden, belirli bir vade içinde ya da vade sonunda satma hakkı veren opsiyonlara da satma opsiyonu (put option) denir. Satım opsiyonu alıcısının (satıcısının) beklentisi dayanak varlık fiyatının gelecekte düşmesidir (yükselmesidir).

Bir alım opsiyonunda dayanak varlığın spot piyasa fiyatı (S), kullanım fiyatından (E) yüksekse bu opsiyon kârdadır. Aynı opsiyonda spot fiyatı kullanım fiyatının altında ise opsiyon zarardadır. Eğer her iki fiyat birbirine eşitse opsiyon başabaşlıdır. Bir satım opsiyonunda dayanak varlığın spot piyasa fiyatı kullanım fiyatının altında ise, opsiyon kârdadır. Spot piyasa fiyatı kullanım fiyatının üzerinde ise opsiyon zarardadır. Her iki fiyat birbirine eşit olduğunda başabaş durumu söz konusudur. Aşağıdaki Tablo 3.1'de alım ve satım opsiyonlarında kâr, zarar ve başabaş durumları gösterilmiştir [28].

Tablo 3.1: Alım-Satım opsiyonlarında kâr, zarar ve başabaş durumları.

	Alım Opsiyonu	Satım Opsiyonu
$S > E$	Kârda	Zararda
$S = E$	Başabaş	Başabaş
$S < E$	Zararda	Kârda

3.1.6 Tanım (Ödeme Fonksiyonu-Payoff Function)

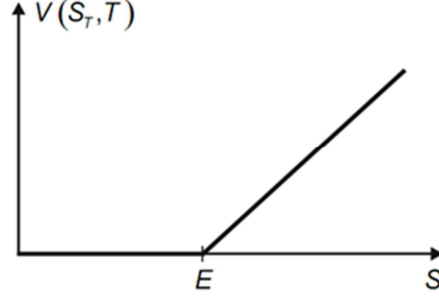
$t = T$ anında, Avrupa tipi satın alma opsiyonunun sahibi dayanak varlığın o andaki fiyatı olan $S = S_T$ değerini göz önüne alıp opsiyonu bozduracak ya da elinde tutacaktır. Eğer $S_T > E$ ise bozduracak ve opsiyonu S_T fiyattan satarak $(S_T - E)$ kadar kâr elde edecektir. Aksi halde opsiyon satışından zarar etmemek için opsiyonu devreye sokmayıp elinde tutacaktır. Bu durumda opsiyonun değeri sıfır olacaktır. Özetle, T vade zamanında satın alma opsiyonunun $V(S_T, T)$ değeri

$$V(S_T, T) = \begin{cases} 0, & S_T \leq E \\ S_T - E, & S_T > E \end{cases}$$

şeklinde olacaktır. Yani

$$V(S_T, T) = (S_T - E)^+ = \max\{S_T - E, 0\}$$

yazılabilir. $S_T > 0$ olan tüm durumlar göz önüne alındığında $\max\{S_T - E, 0\}$ ifadesi S_T nin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyona ödeme fonksiyonu (payoff function) denilmektedir. Avrupa tipi alım opsiyonunun ödeme fonksiyonuna ait grafik aşağıda verilmiştir [29].



Şekil 3.1: Avrupa tipi alım opsiyonuna ait ödeme fonksiyonu.

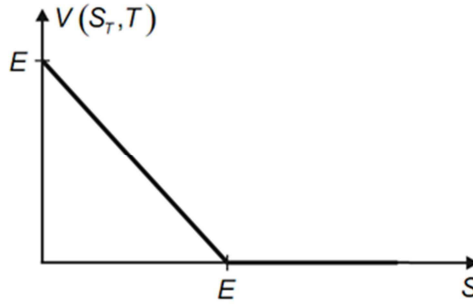
Avrupa tipi satım opsiyonunun sahibi ise opsiyonu $S_T < E$ olması durumunda bozduracak diğer durumlarda elinde tutacaktır. T vade zamanında satma opsiyonunun $V(S_T, T)$ değeri

$$V(S_T, T) = \begin{cases} E - S_T, & S_T < E \\ 0, & S_T \geq E \end{cases}$$

şeklinde olacaktır. Yani

$$V(S_T, T) = (E - S_T)^+ = maks\{E - S_T, 0\}$$

yazılabilir. Avrupa tipi satım opsiyonunun ödeme fonksiyonuna ait grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.2: Avrupa tipi satım opsiyonuna ait ödeme fonksiyonu.

Çalışmamızda standart opsiyonlar (vanilla opsiyonları) yani Avrupa tipi alım ve satım opsiyonları göz önüne alınacak olup Amerikan tipi opsiyonlara değinilmeyecektir.

3.2 Opsiyon Fiyatlama Modelleri

Modern opsiyon fiyatlama modeli, ilk olarak Massachusetts Institute of Technology'de öğretim üyesi olan Myron Scholes ve Boston'da finans danışmanı olan Fisher Black (1973) tarafından geliştirilmiştir. Modele, her iki araştırmacının soyadından oluşan "Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli" adı verilmiştir. Bu model uygulamada çok sık kullanılan ve 1997'de ekonomi dalında Nobel ödülü alan bir modeldir. [30, 31]. Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinden sonra, Cox, Ross ve Rubinstein (1979) opsiyon fiyatlamada "Binomial Modeli" geliştirmişlerdir [32]. Önceden formülün kullanım alanı sadece Avrupa tipi opsiyon sözleşmeleriyle sınırlı iken, binomial modelle kullanım alanı genişlemiştir. Daha sonra Derman ve Kani (1994) Black-Scholes formülünü geliştirerek katkıda bulunmuşlardır [33]. Yorumlanmış Ağaç Modeli (Implied Trees Model) adını verdikleri model "Derman-Kani Modeli" olarak da anılmaktadır. Son olarak da Derman-Kani Modeli, Chriss (1996) tarafından geliştirilmiş ve böylece hem Amerikan hem de Avrupa tipi opsiyonlara uygulanabilme özelliğine kavuşmuştur [34]. Biz bu çalışmada Avrupa tipi Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelini ele alacağız.

3.2.1 Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Modeli (BSOFM)

Black-Scholes opsiyon fiyatı hesaplama modeli, temettü ödemesi yapmayan Avrupa tipi opsiyonların primlerini hesaplamak üzere 1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından geliştirilmiştir. Modelin temel dayanağı, finansal ürünün nakit hesabında kısa pozisyon, alım opsiyonu hesabında ise uzun pozisyon tutarak risksiz faiz oranında getiri elde eden bir portföy kurma düşüncesidir [35].

Herhangi bir opsiyon değeri için Black-Scholes modelini elde etmek üzere bir portföy ele alalım. π , opsiyonda uzun pozisyonu (+), hisse senedinde Δ kadar açık pozisyonu (-) temsil eden bir portföy olsun. Portföy değerini

$$\pi = V(S, t) - \Delta S$$

ile ifade edelim. Hisse senedinin fiyat dinamiği/fiyat süreci ise

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

stokastik diferansiyel denklemi ile ifade edilmektedir. Denklem geometrik Brown sürecini göstermekte olup X bir Brown sürecini tanımlamaktadır. Portföy değerinin nasıl değiştiğini görebilmek amacıyla portföyün toplam diferansiyelini alırsak,

$$d\pi = dV(S, t) - \Delta dS$$

elde ederiz. $V(S, t)$ terimine Taylor açılımını uygulayarak,

$$dV(S, t) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2$$

yazabiliriz. Bu durumda portföydeki toplam değişim

$$d\pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 - \Delta dS$$

şeklinde olur. Şimdi dS ve dS^2 değerlerini bulup son denklemde yerine yazalım.

$$dS^2 = (\mu S)^2 dt^2 + (\sigma S)^2 dX^2 + 2S^2 \mu \sigma dX dt$$

ve limit durumu için Brown hareketinin özelliklerinden $dt \rightarrow 0$ ve $dX^2 \rightarrow dt$ olduğundan $dS^2 = (\mu S)^2 dt$ yazılabilir. Buradan hareketle

$$d\pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt - \Delta dS$$

yazabiliriz. Denklemden dikkat edilirse stokastik değişken olan X terimini içeren dS ifadesi mevcuttur. $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ olarak belirlediğimiz takdirde denklem tamamen deterministik bir yapıya dönüşecektir:

$$d\pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt. \quad (3.1)$$

Tesadüfi değişkenin ortadan kaldırılması riskin ortadan kaldırılması demek olduğundan, varlıklar arasındaki korelasyondan yararlanarak riski elimine eden bir portföy oluşturulmuş oldu. Ancak burada dikkat edilirse risksiz bir portföy oluşturmanın bir ön koşulu bulunmaktadır: $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. Bu ifadeye literatürde “delta koruması (delta hedging)” denilmektedir. Diğer taraftan risksiz portföydeki değişimi

$$d\pi = r\pi dt \quad (3.2)$$

olarak da yazabiliriz. Şimdi, (3.1), (3.2) denklemlerinden ve $\pi = V - \Delta S$ eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt$$

yazabiliriz. Bu son denklemde dt ifadeleri yok edilirse,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t) S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t) V = 0, \quad (S, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T) \quad (3.3)$$

lineer, parabolik, Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi elde edilir [36, 37]. Burada dayanak varlığın t anındaki fiyatı S olmak üzere, $V(S, t)$ Avrupa tipi opsiyonun fiyatını göstermektedir. T vade zamanını, $r(t)$ risksiz faiz oranını ve $\sigma(S, t)$ de dayanak varlığın standart sapmasını (volatilité) göstermektedir. (3.3) denkleminde,

$$V(0,t) = 0, \quad S \rightarrow \infty \text{ için } V(S,t) \sim S \quad (3.4)$$

ve

$$V(S,T) = \max(S - E, 0). \quad (3.5)$$

(3.3) denkleminde yapılacak ilk şey sırasıyla $\partial V / \partial S$ ve $\partial^2 V / \partial S^2$ terimleriyle çarpım durumunda olan S ve S^2 terimlerinden kurtulmaktır. Aynı zamanda (3.3) denklemini (3.4) sınır koşullarına bağlı olarak çözmek amacıyla,

$$S = Ee^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad V = Ev(x, \tau). \quad (3.6)$$

dönüşümlerini yapalım [38]. Bu durumda ilk terim,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = E \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial t} = E \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (3.7)$$

olarak bulunur. $\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}$ olduğundan (3.7) denklemi

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2} E \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial \tau} \sigma^2 \quad (3.8)$$

haline dönüşür. Ayrıca,

$$\frac{\partial V}{\partial S} = E \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial S} = E \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} \quad (3.9)$$

ve $\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{Ee^x} = \frac{1}{S}$ olduğundan (3.3) denkleminde 3. terim

$$rS \frac{\partial V}{\partial S} = rE \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x} \quad (3.10)$$

olarak bulunur. Yine (3.3) denkleminde,

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = E \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \right] \quad (3.11)$$

olduğundan,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 E \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(\frac{1}{S} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S^2} \right] = \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.12)$$

elde edilir. Tüm terimlerde ortak olan E değeri yok edilirse,

$$-rv - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + r \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

ve buradan

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v \quad (3.14)$$

elde edilir. $k = 2r / \sigma^2$ dönüşümü yapılırsa (3.3) denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad (3.15)$$

şeklini alır [37, 39]. Burada sınır koşul ise

$$v(x, 0) = (e^x - 1, 0)^+ = \max(e^x - 1, 0) \quad (3.16)$$

şeklindedir.

Avrupa tipi alım opsiyonu $V(S, t)$ için (3.3)-(3.4)'de verilen Black-Scholes kısmi diferansiyel denkleminin çözümü

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

ve $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ olmak üzere,

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (3.17)$$

şeklinde verilir [40].

3.2.2 Kesirli Black-Scholes Denklemi (KBSD)

Şimdi de Black-Scholes denkleminin kesirli halini göz önüne alalım. Kesirli mertebeden türev ve integral tanımlarını kullanarak Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemini kesirli hale getirmek için zaman-türevli terimi α . mertebeye genişletilebilir. Bu durumda zaman-kesirli Black-Scholes KDD aşağıdaki gibi olur [41, 42]:

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} = \left(rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.18)$$

Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ ve $k = 2r / \sigma^2$ olmak üzere, $V(S, t)$ Avrupa tipi opsiyon için zaman-kesirli Black-Scholes denklemi,

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0) \quad (3.19)$$

başlangıç koşulu ile

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial \tau^\alpha} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad (3.20)$$

şeklinde de yazılabilir [43-45].

(3.3) Black-Scholes denkleminde deneysel olarak bir takım dönüşümler yapılarak Genelleştirilmiş Kesirli Black-Scholes Denklemi (GKBSD) Cen ve Le (2011) tarafından

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial \tau^\alpha} + 0.08(2 + \sin x)^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 0.06x \frac{\partial v}{\partial x} - 0.06v = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.21)$$

olarak verilmiştir. Bu denklemde σ ve r değerleri özel olarak $\sigma = 0.4(2 + \sin x)$ ve $r = 0.06$ şeklinde seçilmiştir. Bu özel değerler kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümler tam çözüme oldukça yakın sonuçlar vermektedir. (3.21) denkleminde başlangıç koşulu

$$v(x, 0) = \max(x - 25e^{-0.06}, 0) \quad (3.22)$$

şeklindedir [46].

4. KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK-NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE KESİRLİ BLACK-SCHOLES DENKLEMİNE UYGULANMASI

Klasik tamsayı mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) genelleştirilmiş hali olan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler (KKDD), fiziksel ve matematiksel problemlerin çözümünde-modellenmesinde, biyolojik süreçlerde ve sistemlerde oldukça sık kullanılmaktadır [1, 14, 47-51]. Kesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri genel olarak mevcut olmadığından dolayı, yaygın olarak yaklaşık analitik veya nümerik metotlar kullanılmaktadır [52].

Bizim çalışmamızla alakalı olması açısından, literatürde finans üzerine de birçok güçlü nümerik ve analitik metotlar sunulmuştur. Bu metotlardan, Sumudu dönüşümü ve Laplace dönüşümü kullanılarak elde edilen homotopi pertürbasyon methodu (HPM), [44, 53, 54], homotopi analiz metodu (HAM) [55, 56], kesirli varyasyonel iterasyon metodu (KVİM) [57, 58], Sumudu dönüşümü ile varyasyonel iterasyon metodu, Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY) [59] ve sonlu fark yaklaşımı (SFY) [5, 45, 46, 60, 61] Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma modeli için analitik ve yaklaşık çözüm sağlayan nispeten yeni yaklaşımlardır.

Çalışmamızın bu bölümünde, kesirli kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili bahsi geçen metotlardan AAY, KVİM, KLHPM, GDDM, ÇPY ve SFY'den bahsedeceğiz. Çalışmamızda denklemlerin çözümleri ve grafikler Maple 14 paket programıyla hesaplanmıştır. Ayrıca tam çözümler için de Matlab R2008b programından yararlanılmıştır.

4.1 Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Adomian (1923-1996) tarafından 1980'lerde geliştirilen ve literatürde problemlerin seri çözümleri için en çok başvurulan yöntemlerden biri olarak kabul edilen Adomian ayrıştırma yöntemi [62], farklı türdeki lineer ve nonlineer diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri için kullanılmıştır. Ayrıca

Adomian, lineer ve nonlinear diferansiyel denklemleri tanımlayan ve farklı çözüm yöntemleri sunan stokastik sistemleri geliştirmiştir [63]. Bununla beraber Wazwaz ve El-Sayed Adomian ayrışım yöntemini daha da kullanışlı hale getirmişlerdir [64]. Daha sonra, yaygın olarak kullanılan difüzyon-konveksiyon-tepkime denklemlerinin açık ve seri çözümlerini elde etmede Adomian ayrışım metodunun nasıl kullanıldığı El-Wakil ve arkadaşları tarafından açıklanmıştır [65].

$$D_{*t}^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \text{ ifadesi } \alpha. \text{ mertebeden Caputo kesirli türevi gösterir. } m \in \mathbb{N}, f$$

nonlinear bir fonksiyon ve g de bilinen bir fonksiyonu göstermek üzere

$$D_{*t}^{\alpha} u(x, t) = f(u, u_x, u_{xx}) + g(x, t), \quad m-1 < \alpha < m \quad (4.1)$$

zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (4.1) denklemini lineer ve nonlinear olarak kısımlara ayırdığımızda

$$D_{*t}^{\alpha} u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad x > 0 \quad (4.2)$$

denklemini elde edilir. Burada L lineer, N nonlinear operatör olup, α 'dan daha küçük mertebeden türevleri içerebilirler. (4.2) denkleminin her iki tarafına D_{*t}^{α} operatörünün tersi olan J^{α} operatörünü uygularsak,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^{\alpha} g(x, t) - J^{\alpha} [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \quad (4.3)$$

elde edilir. Adomian ayrışım metodu ile ilgili olarak [64, 65]'te bulunan sonuçlara göre $u(x, t)$ 'nin sonsuz seri şeklinde ayrışımı

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (4.4)$$

olarak ve (4.3) denklemindeki nonlinear fonksiyonun ayrışımı

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (4.5)$$

ifadesiyle verilir. Burada A_n ler Adomian polinomları olarak isimlendirilir. (4.4) ve (4.5) ayrışimleri (4.3) denkleminin her iki tarafında yerine konulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t) - J^\alpha \left[L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (4.6)$$

bulunur. Son denklemden, aşağıdaki yineleme yoluyla iterasyonlar elde edilir:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t), \\ u_1(x, t) &= -J^\alpha (Lu_0 + A_0), \\ u_2(x, t) &= -J^\alpha (Lu_1 + A_1), \\ &\vdots \\ u_{n+1}(x, t) &= -J^\alpha (Lu_n + A_n). \end{aligned} \quad (4.7)$$

A_n Adomian polinomunun genel formu,

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k \right) \right]$$

şeklindedir. Bu durumda $u(x, t)$ yaklaşık çözümü kesik seri yardımıyla

$$\phi_N(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x, t)$$

ve

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(x, t) = u(x, t)$$

olarak bulunur [66]. Bununla beraber, çoğu zaman tam çözüm kapalı formda elde edilebilir. Ayrıca, ayrışım seri çözümleri genellikle çok hızlı yakınsar. Ayrışım serilerinin yakınsaklığı [67]'de detaylı olarak incelenmiştir.

4.1.1 Örnek

Adomian ayrışım metodu için

$$u(x, 0) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} \quad (4.8)$$

başlangıç koşuluna sahip (4.9) nonlinear zaman-kesirli Fisher denklemini [68] göz önüne alalım:

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) = u_{xx}(x,t) + 6u(x,t)(1-u(x,t)), \quad t > 0, x \in R, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.9)$$

(4.9) Fisher denklemini ve (4.8) başlangıç koşulunu (4.7) denkleminde yerine yazarsak, aşağıdaki rekürans bağıntısını elde ederiz:

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \frac{1}{(1+e^x)^2}, \quad (4.10)$$

$$u_{j+1}(x,t) = J^{\alpha} \left((u_j)_{xx} + 6u_j - 6A_j \right), \quad j \geq 0.$$

Burada A_j 'ler $N = u^2$ nonlineer fonksiyonunun Adomian polinomlarıdır. Şimdi (4.10) denklemini kullanarak ayrışım serisinin ilk birkaç terimini bulalım:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{(1+e^x)^2},$$

$$u_1(x,t) = \frac{10e^x}{(1+e^x)^3} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2(x,t) = \frac{50e^x(-1+2e^x)}{(1+e^x)^4} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

$$u_3(x,t) = \frac{50e^x(20e^{3x} - 15e^{2x} - 6e^x + 5)(\Gamma(\alpha+1))^2 - 12e^x\Gamma(2\alpha+1)}{(1+e^x)^6(\Gamma(\alpha+1))^2} \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)},$$

⋮

Böylece devam edilerek (4.10) ayrışım serisinin diğer terimleri de bulunur ve

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots$$

ile ifade edilen çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{(1+e^x)^2} + \frac{10e^x}{(1+e^x)^3} \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{50e^x(-1+2e^x)}{(1+e^x)^4} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots$$

şeklinde bulunur [66].

4.1.2 Örnek

Nonlinear zaman-kesirli

$$D_{*t}^{\alpha}u(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = x + xt^2, \quad t > 0, x \in R, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.11)$$

adveksiyon denklemi [66]

$$u(x,0) = 0 \quad (4.12)$$

başlangıç koşuluyla verilsin. Adomian ayrışım metodunu kullanarak, (4.11) kesirli diferansiyel denklemi ve (4.12) başlangıç koşulu (4.7)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= u(x,0) + J^{\alpha}(x + xt^2) = x \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right), \\ u_{j+1}(x,t) &= -J^{\alpha}(A_j), \quad j \geq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Burada A_j ler $N = uu_x$ nonlinear fonksiyonun Adomian polinomları olarak adlandırılır. (4.13) rekürans bağıntısı yardımıyla ayrışım serisinin ilk birkaç terimini bulalım:

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= x \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right), \\ u_1(x,t) &= -x \left(\frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(3\alpha+1)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+3)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2 \Gamma(3\alpha+5)} \right), \\ u_2(x,t) &= 2x \left(\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3 \Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} + \frac{8\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+7)} + \dots \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Böylece devam edilerek (4.13) ayrışım serisinin $u(x,t)$ çözümü

$$u(x,t) = x \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(3\alpha+1)} + \frac{4\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+3)} + \dots \right)$$

olarak bulunur [66].

4.1.3 Örnek

Bir boyutlu lineer homojen olmayan

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sin(x) + t \cos(x), \quad t > 0, x \in R, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.14)$$

zaman-kesirli dalga denklemi [69]

$$u(x, 0) = 0 \quad (4.15)$$

başlangıç koşuluyla verilsin. Adomian ayrışım metodunu kullanarak, (4.14) kesirli diferansiyel denklemi ve (4.15) başlangıç koşulu (4.7)'de yerine yazılırsa,

$$u_0(x, t) = u(x, 0) + J^\alpha \left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sin(x) + t \cos(x) \right) = t \sin(x) + \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \cos(x), \quad (4.16)$$
$$u_{j+1}(x, t) = -J^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} u_j(x, t) \right), \quad j \geq 0$$

rekürans bağıntısı elde edilir. (4.16) rekürans bağıntısı yardımıyla ayrışım serisinin ilk birkaç terimi:

$$u_0(x, t) = t \sin(x) + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \cos(x),$$

$$u_1(x, t) = -J^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right) = -\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \cos(x) + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \sin(x),$$

$$u_2(x, t) = -J^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} u_1(x, t) \right) = -\frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \sin(x) - \frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)} \cos(x),$$

⋮

Bu şekilde devam edilerek geriye kalan terimler de elde edilebilir. Bu durumda (4.14)-(4.15) kesirli diferansiyel denkleminin seri formundaki çözümü

$$u(x,t) = t \sin(x) + \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \cos(x) - \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \cos(x) + \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \sin(x) \\ - \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} \sin(x) - \frac{t^{3\alpha+1}}{\Gamma(3\alpha+2)} \cos(x) + \dots = t \sin(x)$$

ile verilir [69].

Örnek 4.1.1, Örnek 4.1.2 ve Örnek 4.1.3'te de görüldüğü gibi seri çözümüne ait terimlerin bulunması için Adomian ayrıştırma yöntemi uygulandığında, klasik diferansiyel denklem ve kesirli diferansiyel denklemde sadece kullanılan türev operatörleri ve ters türev operatörlerinin türü değişmektedir. Yani, farklı olarak, kesirli diferansiyel denklemler için kesirli türev ve ters kesirli türev operatörü uygulanırken, klasik diferansiyel denklemler için klasik türev ve ters türev operatörü uygulanmaktadır.

Adomian ayrışım metodu aynı zamanda lineer denklemlerin çözümünde de kullanılabilir. Bunu göstermek için, başlangıç koşulu

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad u(x,t) \rightarrow 0, \quad t > 0$$

şeklinde verilen lineer, zaman-kesirli

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + a_0(x)u + a_1(x)\frac{\partial u}{\partial t} + a_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots + a_n(x)\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = q(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

kısmi diferansiyel denklemini göze alalım. Ayrışım metodu (4.17) denkleminin

$$D_{*t}^\alpha u + a_0(x)u + a_1(x)L_{1x}u + a_2(x)L_{2x}u + \dots + a_n(x)L_{nx}u = q(x,t) \quad (4.18)$$

formunda yazılmasını gerektirir. Burada

$$L_{1x} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{2x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots, L_{nx} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

şeklindedir. (4.18) denkleminin her iki tarafına D_{*t}^α operatörünün tersi olan J^α operatörü uygulanırsa

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} - J^\alpha (a_0(x)u + a_1(x)L_{1x}u + a_2(x)L_{2x}u + \dots + a_n(x)L_{nx}u - q(x,t)) \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu durumda $u_n(x,t)$ 'ler rekürans bağıntısıyla elde edilmek üzere, $u(x,t)$ çözümü,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad (4.20)$$

seri çözümünü verir. (4.20) denklemini (4.19) denkleminin her iki tarafında yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} - J^\alpha \left(a_0(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right) + \dots + a_n(x)L_{nx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right) - q(x,t) \right)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir:

$$u_0(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha (q(x,t)), \quad (4.21)$$

$$u_{j+1}(x,t) = -J^\alpha (a_0(x)u_j(x,t) + a_1(x)L_{1x}u_j(x,t) + \dots + a_n(x)L_{nx}u_j(x,t)), \quad j \geq 0.$$

Bu durumda $u(x,t)$ yaklaşık çözümüne

$$\phi_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x,t), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(x,t) = u(x,t)$$

ile ulaşılır [24].

4.2 Kesirli Black-Scholes Denkleminin Adomian Ayrıştırma Metodu ile Çözümü

Kesirli Black-Scholes denklemini Adomian ayrıştırma metodu ile çözmek için (3.19) başlangıç koşuluyla birlikte (3.20) denklemini (4.21)'de yerine yazarsak,

$$v_0(x, \tau) = v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

$$v_{j+1}(x, \tau) = J^\alpha \left(L_{2x} v_j(x, \tau) + (k-1) L_{1x} v_j(x, \tau) - k v_j(x, \tau) \right)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı kullanarak bazı ayrışım serileri aşağıdaki gibi bulunur:

$$v_0(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0),$$

$$\begin{aligned} v_1(x, \tau) &= J^\alpha \left(L_{2x} v_0(x, \tau) + (k-1) L_{1x} v_0(x, \tau) - k v_0(x, \tau) \right) \\ &= J^\alpha \left(e^x + (k-1) e^x - k \max(e^x - 1, 0) \right) \\ &= J^\alpha \left(k e^x - k \max(e^x - 1, 0) \right) \\ &= e^x k \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \max(e^x - 1, 0) k \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(x, \tau) &= J^\alpha \left(L_{2x} v_1(x, \tau) + (k-1) L_{1x} v_1(x, \tau) - k v_1(x, \tau) \right) \\ &= J^\alpha \left(0 + (k-1) 0 - \left(k^2 e^x \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - k^2 \max(e^x - 1, 0) \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right) \\ &= J^\alpha \left(\max(e^x - 1, 0) \frac{k^2 \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - e^x \frac{k^2 \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ &= \frac{k^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) - \frac{k^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} e^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3(x, \tau) &= J^\alpha \left(L_{2x} v_2(x, \tau) + (k-1) L_{1x} v_2(x, \tau) - k v_2(x, \tau) \right) \\ &= J^\alpha \left(0 + (k-1) 0 - k \left(\max(e^x - 1, 0) \frac{k^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - e^x \frac{k^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right) \\ &= J^\alpha \left(\max(e^x - 1, 0) \frac{-k^3 \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + e^x \frac{k^3 \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ &= -\frac{k^3 \tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) + \frac{k^3 \tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} e^x, \end{aligned}$$

⋮

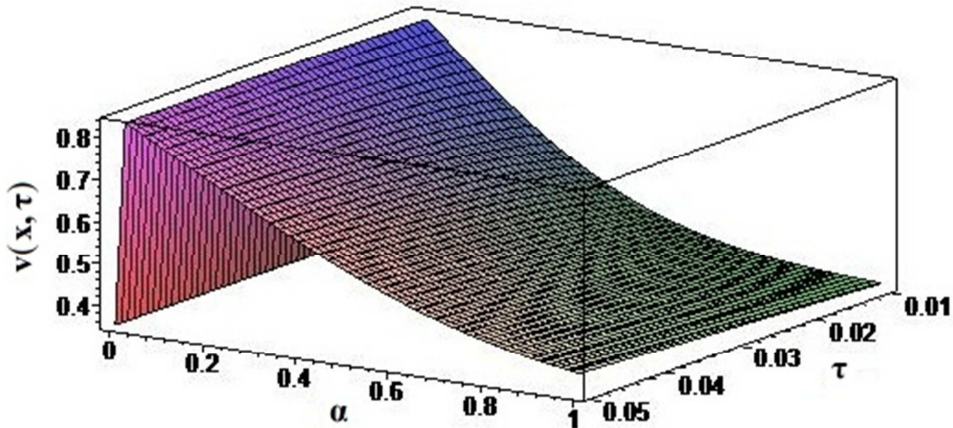
Bu şekilde devam edilerek ayrışım serisinin geriye kalan terimleri de hesaplanabilir. Böylece kesirli Black-Scholes denkleminin ayrışım metodu ile çözümü, seri formunda

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, \tau) \\
&= \max(e^x - 1, 0) + \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^x - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) \\
&\quad + \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) - \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} e^x \\
&\quad - \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) + \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} e^x \\
&= \max(e^x - 1, 0) \left(1 - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right) \\
&\quad + e^x \left(\frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \dots \right) \\
&= \max(e^x - 1, 0) E_\alpha(-k\tau^\alpha) + e^x (1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha))
\end{aligned} \tag{4.22}$$

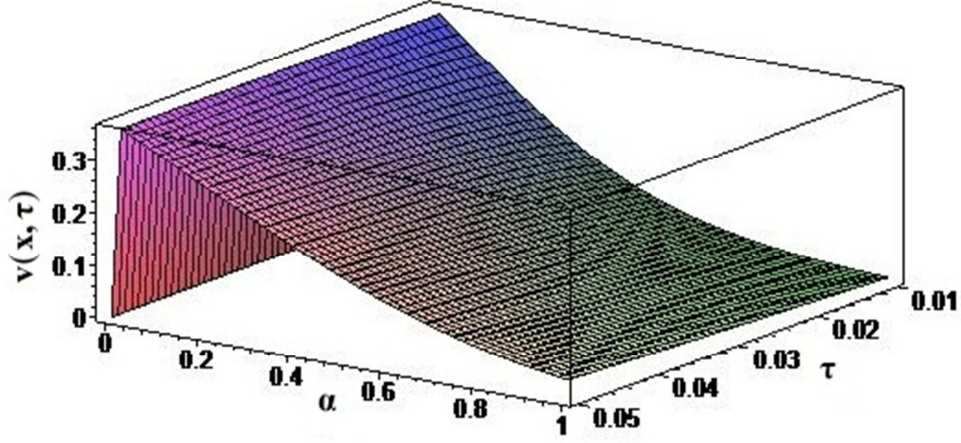
şeklinde bulunur. Burada $E_\alpha(z)$ bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu göstermektedir. $\alpha = 1$ için (4.22) çözümü

$$v(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) e^{-k\tau} + e^x (1 - e^{-k\tau})$$

şeklinde verilir. Bu ise klasik Black-Scholes denkleminin tam çözümüdür. (4.22) de elde edilen $v(x, \tau)$ çözümüne ait grafikler aşağıda Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de verilmiştir:



Şekil 4.1: (3.19)-(3.20) denkleminin $x = 0.3$ için çözümü ($S = 100$, $E = 80$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$).



Şekil 4.2: (3.19)-(3.20) denkleminin $x = -0.3$ için çözümü ($S = 80$, $E = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.04$).

4.3 Genelleştirilmiş Kesirli Black-Scholes Denkleminin Adomian Ayrışım Metodu ile Çözümü

Bu kısımda (3.21) genelleştirilmiş kesirli Black-Scholes denkleminin Adomian ayrışım metodu ile yaklaşık analitik çözümünü vereceğiz. Bunun için öncelikle (3.22) başlangıç koşuluyla birlikte (3.21) diferansiyel denklemini (4.21)'de yerine yazarsak,

$$v_0(x, \tau) = v(x, 0) = \max(x - 25e^{-0.06}, 0)$$

$$v_{j+1}(x, \tau) = J^\alpha \left(0.08(2 + \sin x)^2 x^2 L_{2x} v_j(x, \tau) + 0.06x L_{1x} v_j(x, \tau) - 0.06v_j(x, \tau) \right)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı kullanarak bazı ayrışım serileri aşağıdaki gibi bulunur:

$$v_0(x, \tau) = \max(x - 25e^{-0.06}, 0),$$

$$v_1(x, \tau) = J^\alpha \left(0.08(2 + \sin x)^2 x^2 L_{2x} v_0(x, \tau) + 0.06x L_{1x} v_0(x, \tau) - 0.06v_0(x, \tau) \right)$$

$$= J^\alpha \left(-0.06 \max(x - 25e^{-0.06}, 0) + 0.06x \right)$$

$$= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(-0.06 \max(x - 25e^{-0.06}, 0) + 0.06x \right)$$

$$= \frac{(-0.06) \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right),$$

$$\begin{aligned}
v_2(x, \tau) &= J^\alpha \left(0.08(2 + \sin x)^2 x^2 L_{2x} v_1(x, \tau) + 0.06x L_{1x} v_1(x, \tau) - 0.06v_1(x, \tau) \right) \\
&= J^\alpha \left(0.06 \left(\frac{(0.06) \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right) \right) \\
&= \frac{(-0.06)^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3(x, \tau) &= J^\alpha \left(0.08(2 + \sin x)^2 x^2 L_{2x} v_2(x, \tau) + 0.06x L_{1x} v_2(x, \tau) - 0.06v_2(x, \tau) \right) \\
&= J^\alpha \left(-0.06 \left(\frac{(0.06)^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right) \right) \\
&= \frac{(-0.06)^3 \tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right),
\end{aligned}$$

⋮

Bu şekilde devam edilerek ayrışım serisinin geriye kalan terimleri de hesaplanabilir. Böylece genelleştirilmiş kesirli Black-Scholes denkleminin Adomian ayrışım metodu ile çözümü, seri formunda

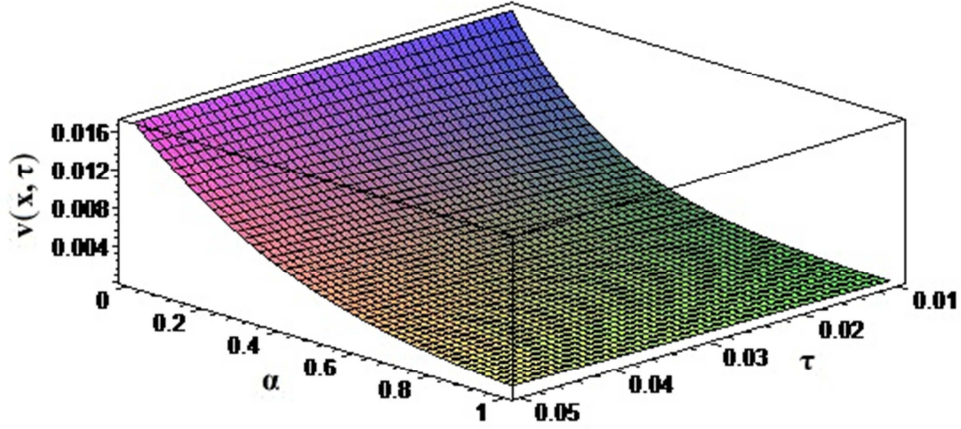
$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, \tau) \\
&= \max(x - 25e^{-0.06}, 0) - \frac{(0.06) \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right) \\
&\quad + \frac{(0.06)^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right) - \frac{(0.06)^3 \tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \left(\max(x - 25e^{-0.06}, 0) - x \right) \\
&= \max(x - 25e^{-0.06}, 0) \left[1 - \frac{(0.06) \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(0.06)^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(0.06)^3 \tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right] \\
&\quad + x \left[1 - \left(1 - \frac{(0.06) \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(0.06)^2 \tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(0.06)^3 \tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right) \right] \\
&= \max(x - 25e^{-0.06}, 0) E_\alpha(-0.06\tau^\alpha) + x(1 - E_\alpha(-0.06\tau^\alpha))
\end{aligned}$$

(4.23)

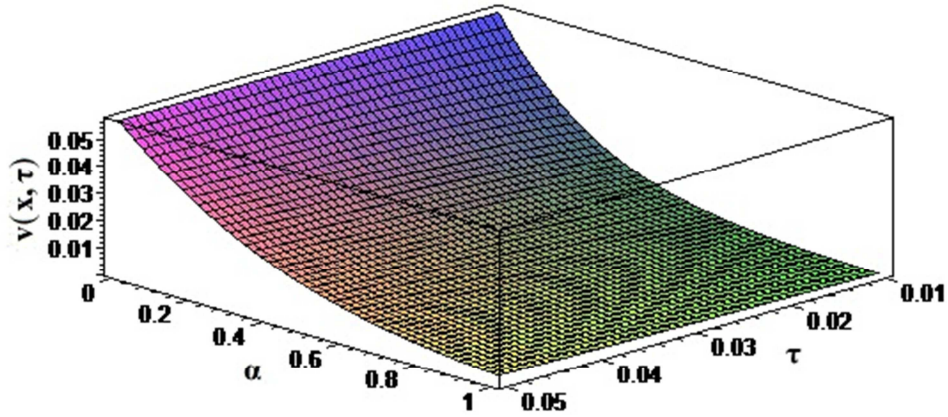
ile verilir. (4.23) denkleminin $\alpha = 1$ için tam çözümü ise

$$v(x, \tau) = \max(x - 25e^{-0.06\tau}, 0)e^{-0.06\tau} + x(1 - e^{-0.06\tau})$$

şeklinde elde edilir. (4.23) çözümüne ait grafikler aşağıda Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'de verilmiştir.



Şekil 4.3: (3.21)-(3.22) denkleminin $x = 0.3$ için çözümü.



Şekil 4.4: (3.21)-(3.22) denkleminin $x = 1.0$ için çözümü.

4.4 Varyasyonel İterasyon Metodu

1978 yılında geliştirilen genel Lagrange çarpanı yöntemi [70] ilk olarak kuantum mekaniğinde nonlinear problemlerin çözümü için kullanılmıştır. Daha sonra bu yöntem baz alınarak J.H. He tarafından varyasyonel iterasyon metodu (VİM) geliştirilmiştir [71]. Varyasyonel iterasyon metodu hızlı ve tam çözüme daha yakın seri yaklaşımlar sunduğu için çok fazla tercih edilen metotlar arasındadır. Kullanılan alanlar ve çeşitli diferansiyel denklemlere uygulanışı ile ilgili detaylı bilgiler [72-80]'de verilmiştir.

4.4.1 Varyasyonel İterasyon Metodunda Temel Enstrümanlar

Varyasyonel iterasyon metoduna geçmeden önce, bu yöntemin temel kavramları verilecektir. Genel Lagrange çarpanı, durağan (stationary) şartlar ve sınırlandırılmış (restricted) varyasyon şeklinde sıralanan bu kavramlar örneklerle açıklanacaktır.

4.4.1.1 Genel Lagrange Çarpanı

Bilindiği gibi Lagrange çarpanı, optimizasyon problemlerinde ve varyasyon hesabında sık kullanılan kavramlardan biridir. Bu kavramı daha iyi anlayabilmek için

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.24)$$

cebirsal denklemini ele alalım [81]. (4.24) denkleminin yaklaşık kökü x_n ise bu durumda

$$f(x_n) \neq 0$$

yazılabilir. Bunu daha net görebilmek için

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n)$$

şeklindeki düzeltme (correction) denklemini yazalım. Burada λ genel Lagrange çarpanıdır ve

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0 \quad (4.25)$$

ile optimal olarak belirlenebilir. Ayrıca (4.25) denklemini bizi çok iyi bilinen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklindeki Newton iterasyon formülüne götürür. Lagrange çarpanı yardımıyla düzeltme fonksiyonunu inşa etmenin birkaç yöntemi vardır. x_n için düzeltme fonksiyonu, $g(x)$ bir yardımcı fonksiyon olmak üzere,

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) f(x_n)$$

şeklinde yazılabilir. Çarpanın belirlenmesinden sonra genel bir iterasyon formülü

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) f(x_n)}{g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)} \quad (4.26)$$

olarak elde edilir. Kullanılan yardımcı fonksiyonun değeri, iterasyondaki tüm adımlar boyunca sıfır ya da küçük bir değer olmamalıdır. Yani $|g(x_n)| > 1$ olmalıdır.

$g(x_n) = e^{-\alpha x_n}$ olarak seçilirse (4.26) iterasyon denklemi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \alpha f(x_n)} \quad (4.27)$$

şekline dönüşür. $f'(x_n)$ küçük olduğunda (4.27) iterasyon formülü çok etkili olmaktadır [109]. Aynı zamanda genel Lagrange çarpanını kullanarak aşağıdaki iterasyon formülleri de elde edilebilir [81]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2(f'(x_n))^3} + \frac{[f'''(x_n)(f'(x_n))^3 - 3(f''(x_n))^2 (f'(x_n))^2] f^3(x_n)}{2(f'(x_n))^7}.$$

4.4.1.2 Durağan Koşullar

Varyasyon hesabının en basit problemi [82],

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x) y \Big|_{x=x_1} - g_2(x) y \Big|_{x=x_2} \quad (4.28)$$

fonksiyonelinin maksimum ya da minimum değeri için bir $y = f(x)$ fonksiyonu belirlemektir. (4.28) fonksiyonelinin ekstremum şartı (durağan şartı),

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int_{x_1}^{x_2} F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y \Big|_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta F(y, y'; x) dx + g_1(x) \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2(x) \delta y \Big|_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \delta y' \right\} dx + g_1 \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2 \delta y \Big|_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dy'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right\} dx + g_1 \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2 \delta y \Big|_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \delta y \right) \right\} dx + g_1 \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2 \delta y \Big|_{x=x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \delta y \right\} dx + \left[\frac{dF}{dy'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} + g_1 \delta y \Big|_{x=x_1} - g_2 \delta y \Big|_{x=x_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Yukarıdaki son bağıntıdan, keyfi δy değeri için,

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) = 0 \quad (4.29)$$

denklemini ve

$$\frac{dF}{dy'}(x_1) - g_1(x_1) = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{dF}{dy'}(x_2) - g_2(x_2) = 0 \quad (4.31)$$

sınır koşullarını elde ederiz. Burada (4.29) denkleminde *Euler-Lagrange diferansiyel denklemi* ya da *Euler denklemi* denir. (4.30)-(4.31) denklemleri ise *doğal sınır koşulları* olarak isimlendirilir [82].

4.4.1.3 Sınırlı Varyasyon

Varyasyonel iterasyon yönteminde sınırlı varyasyonun nasıl bir role sahip olduğunu göstermek için basit bir örnek verelim. Öncelikle,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (4.32)$$

cebirsal denklemini dikkate alalım. (4.32) denklemini, \tilde{x} sınırlı değişken olmak üzere,

$$x \cdot \tilde{x} - 3x + 2 = 0 \quad (4.33)$$

şeklinde tekrar yazalım. Başlangıçta \tilde{x} 'in değeri biliniyor kabul edilir, yani tahmini bir değer atanır. (4.33) denklemini x 'e göre çözümlerse,

$$x = \frac{2}{3 - \tilde{x}} \quad (4.34)$$

bulunur. Bu değer iterasyon formunda yazılırsa,

$$x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n} \quad (4.35)$$

denklemini elde edilir. Bulunan sonuç Newton iterasyon formülüyle kıyaslanırsa aşağıdaki Tablo 4.1'de görüldüğü gibi etkili bir sonuç ortaya çıkar.

Tablo 4.1: Bulunan formül ile Newton formülünün karşılaştırılması.

İterasyon	Denklem (4.35)	Newton İterasyon Formülü
0	0.500	0.500
1	0.800	0.875
2	0.909	0.987
3	0.956	0.999
4	0.978	1.000
5	0.989	1.000
6	0.994	1.000
7	0.997	1.000
8	0.998	1.000
9	0.999	1.000

Varyasyonel iterasyon yönteminin temel kavramlarını belirttikten sonra, bu yöntemin problemlerin çözümünde nasıl uygulandığını ve temel amacının ne olduğunu göstermek için,

$$L[u(x,t)] + N[u(x,t)] = g(x,t) \quad (4.36)$$

genel nonlinear diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. (4.36) nonlinear sisteminde L lineer bir operatör, N nonlinear bir operatör ve $g(x,t)$ de verilen sürekli bir fonksiyondur. Varyasyonel iterasyon metodunun temel karakteri, (4.36) ifadesi için,

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi) \{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\} d\xi, \quad n \geq 0 \quad (4.37)$$

formundaki düzeltme fonksiyoneli oluşturulmaktadır. (4.37) düzeltme fonksiyoneliinde, λ , kısmi integrasyon yardımıyla optimal olarak belirlenen Lagrange çarpanı, u_n , n . yaklaşık çözüm, \tilde{u}_n , sınırlı varyasyonu göstermektedir. Yani, $\delta\tilde{u}_n = 0$ [81].

4.4.1.3.1 Örnek

Bir boyutlu lineer ve $u(0) = 1$ başlangıç şartıyla verilen

$$u' - 2xu = 0 \quad (4.38)$$

diferansiyel denklemin varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım. (4.38) denkleminin ait (4.37) düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \{u'_n(\xi) - 2tu_n(\xi)\} d\xi, \quad n \geq 0 \quad (4.39)$$

olarak verilir. (4.39) denkleminin her iki tarafına varyasyon uygularsak,

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \left(\int_0^x \lambda \{u'_n(\xi) - 2tu_n(\xi)\} d\xi \right), \quad n \geq 0$$

elde edilir. Sınırlı varyasyondan dolayı $2t\delta u_n = 0$ olduğundan,

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \left(\int_0^x \lambda u'_n(\xi) d\xi \right) \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.40) denkleminde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1} &= \delta u_n + \delta \lambda u_n(x) - \delta \int_0^x \lambda u'_n(\xi) d\xi \\ &= \delta \left(1 + \lambda \Big|_{\xi=x} \right) u_n - \delta \int_0^x \lambda u'_n(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.41)$$

sonucu bulunur. u_{n+1} in ekstremum (stationary) koşulundan dolayı $\delta u_{n+1} = 0$ olacağından, (4.41) denkleminde $(1 + \lambda|_{\xi=x}) = 0$ ve buradan da $\lambda = -1$ bulunur [79]. Bu değer (4.39) denkleminde yerine yazılırsa, (4.38) diferansiyel denklemin için düzeltme fonksiyoneli,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \{u'_n(\xi) - 2tu_n(\xi)\} d\xi$$

şekline dönüşür. $u_0 = 1$ alınırsa aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x \{u'_0(\xi) - 2tu_0(\xi)\} d\xi = 1 + x^2, \\
u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x \{u'_1(\xi) - 2tu_1(\xi)\} d\xi = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!}, \\
u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x \{u'_2(\xi) - 2tu_2(\xi)\} d\xi = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}, \\
u_4(x) &= u_3(x) - \int_0^x \{u'_3(\xi) - 2tu_3(\xi)\} d\xi = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}, \\
&\vdots \\
u_n(x) &= u_{n-1}(x) - \int_0^x \{u'_{n-1}(\xi) - 2tu_{n-1}(\xi)\} d\xi \\
&= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}
\end{aligned}$$

Böylece $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ ifadesi ile

$$u(x) = e^{x^2}$$

tam çözümü elde edilir [84].

4.4.1.3.2 Örnek

İki boyutlu lineer ve

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= -1, \\
u(s(x), t) &= 0, \quad t \geq 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial s(x)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

başlangıç koşullarıyla beraber verilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq s(t), \quad t \geq 0 \tag{4.43}$$

Stefan diferansiyel denkleminde [83] varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayalım. Bu durumda (4.42)-(4.43) denkleminin düzeltme fonksiyoneli, $N\tilde{u}_n(\xi, t) = -\tilde{u}_n(\xi, t)$ olmak üzere,

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^x \lambda(\xi,t) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (u_n) + (N(\tilde{u}_n)) \right\} d\xi, \quad n \geq 0 \quad (4.44)$$

şeklinde verilir. $\delta N \tilde{u}_n(\xi,t) = 0$ olduğunu göz önüne alarak, (4.44) denkleminin her iki tarafının u_n bağımsız değişkenine göre varyasyonunu alırsak,

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x,t) &= \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^x \lambda(\xi,t) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (u_n) + (N(\tilde{u}_n)) \right\} d\xi \\ &= \delta u_n(x,t) + \lambda(\xi,t) \delta u_n \Big|_{\xi=x} - \lambda'(\xi,t) \delta u_n \Big|_{\xi=x} + \int_0^x \lambda''(\xi,t) \delta u_n d\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik bizi,

$$1 - \lambda'(\xi,t) \Big|_{\xi=x} = 0, \quad \lambda(\xi,t) \Big|_{\xi=x} = 0 \quad \lambda''(\xi,t) \Big|_{\xi=x} = 0$$

ekstremum (durağan) koşullarına götürür. Bu ise Lagrange çarpanının $\lambda(\xi,t) = \xi - x$ olduğu sonucunu verir. Bu sonucu (4.44) fonksiyoneline yerine yazarsak,

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^x (\xi - x) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (u_n) + (N(\tilde{u}_n)) \right\} d\xi \quad (4.45)$$

iterasyon formülünü elde ederiz. $u_0(x,t) = -x + e^{-t}$ başlangıç değerini (4.45) iterasyon formülünde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -x + e^{-t} + \frac{x^2}{2!} e^t, \\ u_2(x,t) &= -x + e^{-t} + \frac{x^2}{2!} e^t + \frac{x^4}{4!} e^t, \\ u_3(x,t) &= -x + e^{-t} + \frac{x^2}{2!} e^t + \frac{x^4}{4!} e^t + \frac{x^6}{6!} e^t, \\ &\vdots \\ u_n(x,t) &= -x + e^{-t} + \frac{x^2}{2!} e^t + \frac{x^4}{4!} e^t + \frac{x^6}{6!} e^t + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} e^t \end{aligned}$$

genel formülünü elde ederiz. Bu da

$$u(x, t) = -x + e^{-t} \cosh(x)$$

tam çözümünü verir [83].

Şimdi de kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon yöntemini ele alalım. $D_{*t}^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ ifadesi α . mertebeden Caputo kesirli türevi gösterebiliriz. $m \in \mathbb{N}$, $f(x), g(x)$ ve $q(x, t)$ sürekli fonksiyonlar ve $R[x]$ de x 'e göre diferansiyel operatör olmak üzere

$$D_{*t}^{\alpha} u(x, t) = R[x]u(x, t) + q(x, t), \quad m-1 < \alpha < m, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.46)$$

zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (4.46) denkleminin başlangıç ve sınır değer şartları

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, t) &\rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

ve

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= g(x), & 1 < \alpha \leq 2, \\ u(x, t) &\rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, & t > 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

şeklinde verilir. (4.46)-(4.48) denkleminin düzeltme fonksiyonelinin ve iterasyon formülünün nasıl elde edildiğini gösterelim [69]. (4.37)'de verilen yönteme göre (4.46) zaman-kesirli diferansiyel denklemi için düzeltme fonksiyoneli

$$\begin{aligned} u_{k+1}(x, t) &= u_k(x, t) + J_t^{\beta} \left[\lambda \left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} u_k(x, t) - R[x] \tilde{u}_k(x, t) - q(x, t) \right) \right] \\ &= u_k(x, t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} u_k(x, \xi) - R[x] \tilde{u}_k(x, \xi) - q(x, \xi) \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.49)$$

olarak verilir. J_t^{β} , β . mertebeden ($\beta = \alpha + 1 - m$), t 'ye göre Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ve λ genel Lagrange çarpanıdır. Böylece düzeltme fonksiyoneli yaklaşık olarak

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t \left[\lambda(\xi) \left(\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} u_k(x, \xi) - R[x] \tilde{u}_k(x, \xi) - q(x, \xi) \right) \right] d\xi \quad (4.50)$$

biçiminde ifade edilebilir. İterasyonun kısıtlı değişkenleri için $\delta \tilde{u}_k = 0$ olacağından (4.50) fonksiyoneli durağan hale getirirsek,

$$\delta u_{k+1}(x, t) = \delta u_k(x, t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} u_k(x, \xi) - q(x, \xi) \right) d\xi \quad (4.51)$$

olur. Burada Lagrange çarpanları,

$m = 1$ için ($0 < \alpha \leq 1$), $\lambda = -1$ ve

$m = 2$ için ($1 < \alpha \leq 2$), $\lambda = \xi - t$

olarak bulunur. Bu Lagrange çarpanları (4.49) düzeltme fonksiyoneli yerine yazılırsa $m = 1$ ve $m = 2$ için sırasıyla,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - J_t^\alpha \left[\lambda \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x, t) - R[x] u_k(x, t) - q(x, t) \right) \right] \quad (4.52)$$

ve

$$\begin{aligned} u_{k+1}(x, t) &= u_k(x, t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-2} (\xi-t) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - R[x] u_k(x, \xi) - q(x, \xi) \right) d\xi \\ &= u_k(x, t) - \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - R[x] u_k(x, \xi) - q(x, \xi) \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.53)$$

iterasyon formülleri bulunur. (4.52) ve (4.53) formüllerinden yararlanarak

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - (\alpha-1) J_t^\alpha \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k(x, t) - R[x] u_k(x, t) - q(x, t) \right) \quad (4.54)$$

formülü elde edilir. u_0 başlangıç iterasyonu ise başlangıç ve sınır koşullarına göre oluşturulabilir.

4.4.1.3.3 Örnek

Varyasyonel iterasyon metodu ile ilgili yukarıda verilen bilgiler ışığında (4.46) denkleminin formatına göre,

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (4.55)$$

başlangıç koşullarıyla verilen

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 6x^3 t + (x^3 - 6x)t^3, \quad t > 0, \quad x \in R, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.56)$$

homojen olmayan lineer Klein-Gordon zaman-kesirli diferansiyel denklemini [69] göz önüne alalım. (4.54) iterasyon formülüne göre, (4.55)-(4.56) kesirli diferansiyel denklemi için iterasyon formülü,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - (\alpha - 1) J_t^\alpha \left(\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) - 6x^3 t - (x^3 - 6x)t^3 \right) \quad (4.57)$$

biçiminde verilir. (4.55) başlangıç koşulları dikkate alınarak $u_0 = 0$ olduğu görülür.

Yeni elde edilen (4.57) iterasyon formülünü ve $u_0 = 0$ olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_0(x, t) - (\alpha - 1) \left(-6x^3 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - (x^3 - 6x) \frac{6t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)} \right) \\ &= (\alpha - 1) \left(6x^3 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + (x^3 - 6x) \frac{6t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= 6x^3 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + 6(x^3 - 6x) \frac{t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)} \\ &- (\alpha - 1)^2 \left(6(x^3 - 6x) \frac{t^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} + 6(x^3 - 12x) \frac{t^{2\alpha+3}}{\Gamma(2\alpha+4)} \right) + \dots \end{aligned}$$

⋮

Bu şekilde devam edilerek diğer yaklaşık çözümler de bulunabilir. Bu durumda (4.55)-(4.56) Klein-Gordon zaman-kesirli diferansiyel denkleminin $\alpha = 2$ için tam çözümü

$$u(x, t) = x^3 t^3$$

olarak verilir [69].

Şimdi de benzer şekilde $D_{*t}^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ ifadesi α . mertebeden Caputo kesirli türevini, f nonlineer bir fonksiyonu ve g de bilinen bir fonksiyonu göstermek üzere, başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h(x), & 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, t) &\rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

ve

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= k(x), & 1 < \alpha \leq 2, \\ u(x, t) &\rightarrow 0, & |x| &\rightarrow \infty, & t > 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

şeklinde verilen

$$D_{*t}^\alpha u(x, t) = f(u, u_x, u_{xx}) + g(x, t), \quad m-1 < \alpha < m, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.60)$$

formundaki nonlineer zaman-kesirli diferansiyel denkleminin düzeltme fonksiyonelinin ve iterasyon bağıntısının nasıl elde edildiğini gösterelim [66]. (4.37) 'de verilen yönteme göre (4.60) nonlineer zaman-kesirli diferansiyel denklemi için düzeltme fonksiyoneli,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} u_k(x, \xi) - f(\tilde{u}_k, (\tilde{u}_k)_x, (\tilde{u}_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ Lagrange çarpanı ve $\tilde{u}_k, (\tilde{u}_k)_x, (\tilde{u}_k)_{xx}$ sınırlandırılmış varyasyonlar yani, $\delta \tilde{u}_k = 0$. Buna göre fonksiyoneli durağan hale getirirsek

$$\delta u_{k+1}(x, t) = \delta u_k(x, t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} u_k(x, \xi) - g(x, \xi) \right) d\xi$$

olur. Lagrange çarpanları,

$m = 1$ için ($0 < \alpha \leq 1$), $\lambda = -1$ ve

$m = 2$ için ($1 < \alpha \leq 2$), $\lambda = \xi - t$

olarak bulunur. Dolayısıyla $m = 1$ için iterasyon bağıntısı,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - f(u_k, (u_k)_x, (u_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi \quad (4.61)$$

ve başlangıç koşulu

$$u_0(x, t) = h(x) \quad (4.62)$$

şeklindedir. $m = 2$ için ise iterasyon bağıntısı,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t (\xi - t) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - f(u_k, (u_k)_x, (u_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi \quad (4.63)$$

olarak bulunur. Bu durumda başlangıç şartı,

$$u_0(x, t) = h(x) + tk(x) \quad (4.64)$$

ile verilir. (4.61)-(4.64) iterasyon formüllerinden yararlanarak

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) \quad (4.65)$$

çözümü elde edilir. u_0 başlangıç iterasyonu ise başlangıç ve sınır koşullarına göre oluşturulabilir.

4.4.1.3.4 Örnek

(4.60) formatında verilen ve başlangıç koşulları

$$u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = -2x^2 \quad (4.66)$$

olan

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right), \quad t > 0, \quad x \in R, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.67)$$

nonlineer zaman-kesirli hiperbolik diferansiyel denklemini [85] göz önüne alalım. (4.63) iterasyon formülüne göre (4.67) diferansiyel denklemi için iterasyon formülü,

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \int_0^t (\xi - t) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x,\xi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u_k(x,\xi) \frac{\partial u_k(x,\xi)}{\partial x} \right) \right) d\xi \quad (4.68)$$

şeklinde verilir. Başlangıç koşullarından hareketle $u_0 = x^2 - 2tx^2$ başlangıç değeri bulunur. Bu değeri ve (4.68)'deki iterasyonu kullanarak aşağıdaki yaklaşık değerler de hesaplanabilir:

$$u_0(x,t) = x^2 - 2tx^2,$$

$$u_1(x,t) = x^2 (1 - 2t + 3t^2 - 4t^3 + 2t^4),$$

$$u_1(x,t) = x^2 \left(1 - 2t + 6t^2 - 8t^3 + 7t^4 - 6t^5 + \frac{174}{30}t^6 - \frac{192}{42}t^7 + \frac{168}{56}t^8 - \frac{96}{72}t^9 + \frac{24}{90}t^{10} \right) \\ + x^2 \left(\frac{-6}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha} + \frac{24}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha} - \frac{48}{\Gamma(7-\alpha)} t^{6-\alpha} \right),$$

⋮

Bu şekilde geriye kalan terimler de hesaplanırsa (4.66)-(4.67) kesirli diferansiyel denkleminin seri çözümü varyasyonel iterasyon metodu ile elde edilmiş olur. Varyasyonel iterasyon yönteminin çözümlerde etkinliği ve yakınsaklığı üzerine yapılan çeşitli çalışmalar ve analizler, yöntemin son derece başarılı ve istenen çözüme çok fazla işlem gerekmeden ulaşıldığı konusunda birbirini desteklemektedir [85-87].

4.4.2 Kesirli Varyasyonel İterasyon Metodu

Varyasyonel iterasyon metodunun kesirli hali için, (2.14) Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü (4.49) denklemine uygularsak, yeni düzeltme fonksiyoneli

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \left\{ \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^\alpha u_k(x,\xi)}{\partial \xi^\alpha} - R[x] \tilde{u}_k(x,\xi) - q(x,\xi) \right) \right\} (d\xi)^\alpha$$

olarak elde edilir. Son bulunan fonksiyonel durağan hale getirilirse,

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) + \frac{\delta}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \left\{ \lambda(\xi) \left(\frac{\partial^\alpha u_k(x,\xi)}{\partial \xi^\alpha} - R[x] \tilde{u}_k(x,\xi) - q(x,\xi) \right) \right\} (d\xi)^\alpha$$

denklemini elde edilir. Şimdi δu 'nun katsayılarını ayrı ayrı sıfıra eşitlersek,

$$1 + \lambda(\xi) = 0, \quad \frac{\partial^\alpha \lambda(\xi)}{\partial \xi^\alpha} = 0$$

bulunur ve böylece genelleştirilmiş Lagrange çarpanı $\lambda(\xi) = -1$ olarak bulunur. Bu durumda kesirli varyasyonel iterasyon metoduna göre iterasyon formülü, $0 < \alpha \leq 1$ ve $u_0(x,t)$ başlangıç koşulu olmak üzere,

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) - \frac{\delta}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \left\{ \left(\frac{\partial^\alpha u_k(x,\xi)}{\partial \xi^\alpha} - R[x] \tilde{u}_k(x,\xi) - q(x,\xi) \right) \right\} (d\xi)^\alpha$$

şeklinde elde edilir [58].

4.5 Kesirli Black-Scholes Denklemine Kesirli Varyasyonel İterasyon Metodu ile Çözümü

Bu kısımda kesirli Black-Scholes denklemini kesirli varyasyonel iterasyon metodu yardımıyla çözeceğiz. (3.19)-(3.20) kesirli Black-Scholes denkleminde kesirli varyasyonel iterasyon metodunu uygularsak,

$$v_{n+1}(x,\tau) = v_n(x,\tau) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial^\alpha v_n}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - (k-1) \frac{\partial v_n}{\partial x} + kv_n \right\} (d\xi)^\alpha$$

iterasyon formülünü elde ederiz. Böylece başlangıç yaklaşımı

$$v_0(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0)$$

ile verilir. Bu başlangıç değerini kullanarak iterasyon yardımıyla diğer değerler de aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} v_1(x, \tau) &= v_0(x, \tau) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial^\alpha v_0}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - (k-1) \frac{\partial v_0}{\partial x} + kv_0 \right\} (d\xi)^\alpha \\ &= \max(e^x - 1, 0) - e^x \frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \max(e^x - 1, 0) \frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \max(e^x - 1, 0) \left(1 - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) + e^x \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(x, \tau) &= v_1(x, \tau) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial^\alpha v_1}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - (k-1) \frac{\partial v_1}{\partial x} + kv_1 \right\} (d\xi)^\alpha \\ &= \max(e^x - 1, 0) - e^x \left(\frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \\ &\quad + \max(e^x - 1, 0) \left(\frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \\ &= \max(e^x - 1, 0) \left(1 - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \\ &\quad + e^x \left(\frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3(x, \tau) &= v_2(x, \tau) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\tau \left\{ \frac{\partial^\alpha v_2}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - (k-1) \frac{\partial v_2}{\partial x} + kv_2 \right\} (d\xi)^\alpha \\ &= \max(e^x - 1, 0) - e^x \left(\frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max(e^x - 1, 0) \left(\frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} \right) \\
& = \max(e^x - 1, 0) \left(1 + \frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(-k\tau^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} \right) \\
& + e^x \left(\frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(-k\tau^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} \right),
\end{aligned}$$

⋮

Bu şekilde devam edilerek, serinin geriye kalan terimleri de hesaplanabilir. Böylece kesirli Black-Scholes denkleminin kesirli varyasyonel iterasyon metodu ile çözümü, seri formunda

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, \tau) \\
&= \max(e^x - 1, 0) + \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^x - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) \\
&+ \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) - \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} e^x \\
&- \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \max(e^x - 1, 0) + \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} e^x \\
&= \max(e^x - 1, 0) \left(1 - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right) \\
&+ e^x \left(\frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \dots \right) \tag{4.69} \\
&= \max(e^x - 1, 0) E_\alpha(-k\tau^\alpha) + e^x (1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha))
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $E_\alpha(z)$ bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu göstermektedir. $\alpha = 1$ için (4.69) çözümü

$$v(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) e^{-k\tau} + e^x (1 - e^{-k\tau})$$

şeklinde verilir. Bu ise klasik Black-Scholes denkleminin tam çözümüdür.

4.6 Kesirli Laplace Homotopi Pertürbasyon Metodu

Özellikle fiziksel problemlerin çözümlerinde kullanılan ve tam çözümlere çok hızlı bir şekilde yakınsayan seri çözümlere sahip olan Kesirli Laplace homotopi pertürbasyon metodunun (KLHPM) çözüm yöntemini açıklayabilmek için

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x,t) + R[x]u(x,t) + N[x]u(x,t) &= q(x,t) \\ u(x,0) &= h(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (4.70)$$

nonlinear zaman-kesirli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemden $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$, $R[x]$ lineer operatör, $N[x]$ nonlinear operatör ve $q(x,t)$ de sürekli bir fonksiyondur. Şimdi (4.70) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygularsak,

$$L[D_t^\alpha u(x,t)] + L[R[x]u(x,t) + N[x]u(x,t)] = L[q(x,t)]$$

elde ederiz. Buradan da

$$\begin{aligned} s^\alpha L[u(x,t)] - s^{\alpha-1}u(x,0) + L[R[x]u(x,t) + N[x]u(x,t)] - L[q(x,t)] &= 0 \\ L[u(x,t)] &= s^{-1}h(x) + s^{-\alpha}L[q(x,t)] - s^{-\alpha}L[R[x]u(x,t) + N[x]u(x,t)] \end{aligned} \quad (4.71)$$

bulunur. (4.71) denkleminin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygularsak, $G(x,t)$ denklemin başlangıç koşulunu göstermek üzere

$$u(x,t) = G(x,t) - L^{-1}\left(s^{-\alpha}L[R[x]u(x,t) + N[x]u(x,t)]\right) \quad (4.72)$$

denklemini elde edilir. Şimdi klasik HPM tekniğini kullanarak, $p \in [0,1]$ homotopi parametresi olmak üzere (4.70) denkleminin çözümünün

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) \quad (4.73)$$

kuvvet serisi şeklinde ifade edilebileceğini kabul edelim. Nonlinear terim

$$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \quad (4.74)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Son denklemde H_n , u_0, u_1, \dots, u_n fonksiyonlarının He polinomu olarak ifade edilir ve bu polinomlar

$$H_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

denklemleri hesaplanabilir. (4.73) ve (4.74) denklemini (4.72) denkleminde yazarak HPM tekniğinin özelliklerini kullanırsak [88, 89]

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) = G(x,t) - p \left(L^{-1} \left[s^{-\alpha} L \left[R \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right] \right)$$

denklemini elde edilir. Denklemin her iki tarafında p nin aynı kuvvetlerinin derecelerini eşitlersek,

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x,t) &= G(x,t), \\ p^1 : u_1(x,t) &= L^{-1} \left(s^{-\alpha} L \left[R[x] u_0(x,t) + H_0(u) \right] \right), \\ p^2 : u_2(x,t) &= L^{-1} \left(s^{-\alpha} L \left[R[x] u_1(x,t) + H_1(u) \right] \right), \\ p^3 : u_3(x,t) &= L^{-1} \left(s^{-\alpha} L \left[R[x] u_2(x,t) + H_2(u) \right] \right), \\ p^4 : u_4(x,t) &= L^{-1} \left(s^{-\alpha} L \left[R[x] u_3(x,t) + H_3(u) \right] \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

yaklaşımlarını elde ederiz. Bu şekilde devam edilerek $u_n(x,t)$ nin diğer bileşenleri de bulunabilir ve böylece

$$u(x,t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n(x,t)$$

yaklaşık çözümü elde edilir.

4.7 Kesirli Black-Scholes Denklemine Laplace Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü

Bu bölümde (3.20) Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma denkleminin Laplace homotopi pertürbasyon çözümü ile nasıl elde edildiğini göstereceğiz. Şimdi (3.20) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulayalım. Bu durumda,

$$s^\alpha L[v(x, \tau)] - s^{\alpha-1}v(x, 0) = L[v_{xx} + (k-1)v_x - kv]$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} L[v(x, \tau)] &= s^{-1}v(x, 0) + s^{-\alpha}L[v_{xx} + (k-1)v_x - kv] \\ &= \frac{1}{s} \max(e^x - 1, 0) + \frac{1}{s^\alpha}L[v_{xx} + (k-1)v_x - kv] \end{aligned} \quad (4.75)$$

elde edilir. (4.75) denkleminde her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$v(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha}L[v_{xx} + (k-1)v_x - kv]\right)$$

denklemini elde ederiz. Şimdi de HPM uygulayarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) + p\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha}L\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(v)\right]\right)\right) \quad (4.76)$$

eşitliğini buluruz. Burada $H_n(v)$ He polinomlarıdır ve bu He polinomlarının bileşenleri

$$H_n(v) = v_{xx} + (k-1)v_x + kv_n, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde bulunur. (4.76) denkleminde p nin uygun kuvvetlerinin katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$\begin{aligned}
p^0 : v_0(x, \tau) &= \max(e^x - 1, 0), \\
p^1 : v_1(x, \tau) &= L^{-1}\left(s^{-\alpha} L[H_0(v)]\right) = -e^x \frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \max(e^x - 1, 0) \frac{-k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\
p^2 : v_2(x, \tau) &= L^{-1}\left(s^{-\alpha} L[H_1(v)]\right) = -e^x \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \max(e^x - 1, 0) \frac{(-k\tau^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)}, \\
p^3 : v_3(x, \tau) &= L^{-1}\left(s^{-\alpha} L[H_2(v)]\right) = -e^x \frac{(-k\tau^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \max(e^x - 1, 0) \frac{(-k\tau^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)}, \\
&\vdots \\
p^n : v_n(x, \tau) &= L^{-1}\left(s^{-\alpha} L[H_{n-1}(v)]\right) = -e^x \frac{(-k\tau^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} + \max(e^x - 1, 0) \frac{(-k\tau^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

elde edilir, öyle ki, (3.20) probleminin $v(x, \tau)$ çözümü, $E_\alpha(z)$ bir-parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere,

$$v(x, \tau) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n v_n(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) E_\alpha(-k\tau^\alpha) + e^x (1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha))$$

şeklinde bulunur [44].

4.8 Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu (GDDM); diferansiyel dönüşüm metodu (DDM), genelleştirilmiş Taylor formülü ve Caputo türev tanımı temel alınarak geliştirilmiştir. Bu bölümde diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) ve genelleştirilmiş Taylor formülü ile ilgili tanımlar ve teoremler verilecek; bu tanım ve teoremler yardımıyla da genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu ele alınacaktır.

4.8.1 Diferansiyel Dönüşüm Metodu

İlk olarak diferansiyel dönüşüm metodu Zhou tarafından elektrik devre analizinde uygulanan lineer ve nonlinear başlangıç değer probleminin çözümünde

kullanılmıştır [90]. Diferansiyel dönüşüm metodunu bir-boyutlu ve iki-boyutlu diferansiyel dönüşüm şeklinde ikiye ayırarak inceleyebiliriz.

4.8.1.1 Bir-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Bir-boyutlu $y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (4.78)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $y(x)$ asıl (orijinal) fonksiyon, $Y(k)$ da T -fonksiyonu olarak isimlendirilen dönüşüm fonksiyonudur [91]. $Y(k)$ 'nın diferansiyel ters dönüşümü ise

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (4.79)$$

biçiminde tanımlanır. (4.78) ve (4.79) denklemlerini birlikte düşünersek,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (4.80)$$

denklemi elde edilir. (4.80) denkleminde bakıldığında, diferansiyel dönüşümün Taylor seri açılımından türetildiği akla gelmektedir. Fakat bu metot simgesel olarak türevleri hesaplamamaktadır. Bununla beraber, nümerik yaklaşım için gerekli türevlerin hesaplamaları, aşağıdaki Tablo 4.2'de görüldüğü gibi, asıl fonksiyonların dönüşüm denklemleri olarak tanımlanan bir iteratif yöntemle hesaplanabilir [91]. Çalışma boyunca küçük harflerle asıl (orijinal) fonksiyonu, büyük harflerle de asıl fonksiyona ait dönüşüm (transform) fonksiyonunu göstereceğiz.

Tablo 4.2: Bir-boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri.

Asıl Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$
$y(x) = cw(x)$	$Y(k) = cW(k)$
$y(x) = dw/dx$	$Y(k) = (k+1)W(k+1)$
$y(x) = d^j w/dx^j$	$Y(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+j)W(k+j)$
$y(x) = u(x).v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$y(x) = x^j$	$Y(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

4.8.1.2 İki-Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

$w(x, y)$ asıl fonksiyon olmak üzere,

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x,y)=(0,0)} \quad (4.81)$$

şeklinde tanımlanan ve T -fonksiyonu olarak da tanımlanan $W(k, h)$ fonksiyonuna dönüşüm fonksiyonu denir. $W(k, h)$ 'nin ters diferansiyel dönüşümü de,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (4.82)$$

ile tanımlanır. (4.81) ve (4.82) denklemleri yardımıyla

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^k y^h}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x,y)=(0,0)} \quad (4.83)$$

denklemleri elde edilir [91, 92]. (4.83) denkleminde de anlaşılacağı gibi iki-boyutlu diferansiyel dönüşüm iki-boyutlu Taylor serisi açılımından üretilmiştir. İki-boyutlu diferansiyel dönüşümle alakalı temel işlemler aşağıdaki Tablo 4.3'te verilmiştir:

Tablo 4.3: İki-boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri.

Asıl Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$
$w(x, y) = cu(x, y)$	$W(k, h) = cU(k, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$	$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$
$w(x, y) = x^m y^n$	$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1, & k=m \text{ ve } h=n \\ 0, & k \neq m \text{ ve } h \neq n \end{cases}$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1)$

Tablo 4.3 (devam)

$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)\gamma(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Gamma(k-r-t, p)$
$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t+1, s)\Gamma(k-r-t+1, p)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 \gamma(x, y)}{\partial x^2}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t, s)\Gamma(k-r-t+2, p)$

Tablo 4.3'te verilen özelliklerin gösterimi ve daha geniş bilgi için [26, 91-95] kaynaklarına bakılabilir.

4.8.1.2.1 Teorem

$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ fonksiyonu için diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$ şeklindedir [94].

4.8.2 Genelleştirilmiş Taylor Açılımı

Verilen bir $y = f(x)$ fonksiyonuna ilişkin Taylor açılımı birkaç farklı şekilde tanımlanmıştır. Örneğin, Riemann tarafından

$$f(x+h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{h^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} (J_a^{m+r} f)(x)$$

şeklinde tanımlanmıştır [42]. Burada J_a^{m+r} , $(m+r)$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü göstermektedir. Diğer bir genelleştirme ise Watanabe tarafından yapılmıştır. Bu genelleştirme formülü $m < \alpha$, $x > x_0 > a$ ve

$$R_{n,m} = \left(J_a^{\alpha+n} \widehat{D}_a^{\alpha+k} \right) (x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha-m)} \int_0^{x_0} (x-t)^{-\alpha-m-1} \left(\widehat{D}_a^{\alpha-m-1} f \right) (t) dt$$

olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{m=-m}^{n-1} \frac{(x-x_0)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\widehat{D}_a^{\alpha+k} f \right) (x) + R_{n,m}$$

şeklindedir [96]. Burada $\widehat{D}_a^{\alpha+k}$ terimi, $(\alpha+k)$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev operatörüdür. Yani (2.20) denkleminde tanımlandığı şekliyle ${}^{RL}D_x^\alpha = \widehat{D}_a^\alpha$ eşitliği yazılabilir.

4.8.2.1 Teorem (Genelleştirilmiş Taylor Formülü):

$0 < \alpha \leq 1$ ve $D_a^{k\alpha} f(x) \in C(a, b]$ olsun. $k = 0, 1, \dots, n+1$ için,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \left(D_a^{i\alpha} f \right) (a) + \frac{\left(D_a^{(n+1)\alpha} f \right) (\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha} \quad (4.84)$$

olur. Burada $\forall x \in (a, b]$, $a \leq \xi \leq x$ ve $D_a^{n\alpha} = D_a^\alpha \cdot D_a^\alpha \cdots D_a^\alpha$ dir. Bu teoremin ispatı için [12]'den yararlanılabilir. $\alpha = 1$ için, (4.84) Caputo genelleştirilmiş Taylor formülü, klasik Taylor formülünü verir.

4.8.3 Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini (GDDY) iyi kavrayabilmek için diferansiyel dönüşüm yönteminde olduğu gibi bir-boyutlu GDDY ve iki-boyutlu GDDY olarak iki şekilde inceleyeceğiz.

4.8.3.1 Bir-Boyutlu Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bir-boyutlu (tek değişkenli) bir $y(x)$ fonksiyonunun k . mertebeden türevinin genelleştirilmiş diferansiyel dönüşümü, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$F_{\alpha}(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left[\left(D_{x_0}^{\alpha} \right)^k f(x) \right]_{x=x_0} \quad (4.85)$$

şeklinde tanımlanır. (4.85) denkleminde $D_a^{k\alpha} = D_a^{\alpha} \cdot D_a^{\alpha} \cdots D_a^{\alpha}$ (k -defa) olarak verilir [95]. $F_{\alpha}(k)$ 'nin diferansiyel ters dönüşümü ise,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{\alpha}(k) (x - x_0)^{\alpha k} \quad (4.86)$$

şeklinindedir. (4.85) denklemi (4.86)'de yerine yazılıp, (4.84) genelleştirilmiş Taylor formülü de kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{\alpha}(k) (x - x_0)^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left(\left(D_{x_0}^{\alpha} \right)^k f \right) (x_0) = f(x) \quad (4.87)$$

elde edilir. (4.87) ifadesi yardımıyla $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık değeri sınırlı seri formunda

$$f(x) = \sum_{k=0}^n F_{\alpha}(k) (x - x_0)^{\alpha k}$$

olarak yazılabilir. Görüldüğü üzere, genelleştirilmiş diferansiyel dönüşümü, klasik diferansiyel dönüşümünün keyfi mertebeden türevli halidir. Yani, GDDY'de $\alpha = 1$ alınırsa DDY elde edilir. (4.85) ve (4.86)'de verilen tanımlar göz önüne alınarak bir-boyutlu genelleştirilmiş diferansiyel dönüşümün temel özellikleri şöyle özetlenebilir:

4.8.3.1.1 Teorem

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \text{ ise, } F_{\alpha}(k) = G_{\alpha}(k) \pm H_{\alpha}(k) \text{ olur.}$$

4.8.3.1.2 Teorem

$$f(x) = cg(x) \text{ ise, } F_{\alpha}(k) = cG_{\alpha}(k) \text{ olur. } (c - \text{sabit})$$

4.8.3.1.3 Teorem

$$f(x) = g(x)h(x) \text{ ise, } F_{\alpha}(k) = \sum_{m=0}^k G_{\alpha}(m)H_{\alpha}(k-m) \text{ olur.}$$

4.8.3.1.4 Teorem

$$f(x) = D_{x_0}^\alpha g(x) \text{ ise, } F_\alpha(k) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} G_\alpha(k+1) \text{ dir.}$$

İspat

(4.85)'de verilen dönüşüm tanımında $f(x)$ 'in değeri yazılırsa,

$$\begin{aligned} F_\alpha(k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^k D_{x_0}^\alpha g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^{k+1} g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^{k+1} g(x) \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} G_\alpha(k+1) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem 4.8.3.1.4'ün ispatı tamamlanmış olur.

4.8.3.1.5 Teorem

$$f(x) = (x-x_0)^{n\alpha} \text{ ise, } \delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k=n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \text{ olmak üzere, } F_\alpha(k) = \delta(k-n)$$

dir.

4.8.4.1.6 Örnek

Bir nonlinear

$$D^\alpha y(x) = y^2(x) + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < x < 1 \quad (4.88)$$

kesirli diferansiyel denklemini

$$y(0) = 0 \quad (4.89)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alalım [97]. Teorem 4.8.3.1.4 ve Teorem 4.8.3.1.5'i kullanarak, (4.88) denkleminin her iki tarafına genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm uygularsak, (4.88) diferansiyel denklemi,

$$\frac{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} Y_\alpha(k+1) = \sum_{m=0}^k Y_\alpha(m) Y_\alpha(k-m) + \delta(k)$$

haline dönüşür. Buradan da

$$Y_\alpha(k+1) = \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \left\{ \sum_{m=0}^k Y_\alpha(m) Y_\alpha(k-m) + \delta(k) \right\} \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.89) başlangıç şartının genelleştirilmiş diferansiyel dönüşümü ise,

$$Y_\alpha(0) = 0 \quad (4.91)$$

olarak verilir. (4.90) rekürans bağıntısı ve (4.91) dönüştürülmüş başlangıç koşulu birlikte kullanıldığında, (4.88)-(4.89) diferansiyel denkleminin GDD çözümüne ait bazı terimler şu şekilde elde edilir:

$$Y_\alpha(0) = 0, \quad Y_\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

$$Y_\alpha(2) = 0, \quad Y_\alpha(3) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)},$$

$$Y_\alpha(4) = 0, \quad Y_\alpha(5) = \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)^3} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)},$$

$$Y_\alpha(6) = 0, \quad Y_\alpha(7) = \frac{\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)^4 \Gamma(7\alpha + 1)} \left[\frac{4\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)^2}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \right],$$

Böylece, (4.88) denkleminin $O(x^{7\alpha})$ hata mertebesine kadar çözümü

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} x^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} x^{3\alpha} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)^3} \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} x^{5\alpha} \\ + \frac{\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)^4 \Gamma(7\alpha + 1)} \left[\frac{4\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma(5\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)^2}{\Gamma(3\alpha + 1)^2} \right] x^{7\alpha}$$

olarak elde edilir [97].

4.8.3.2 İki-Boyutlu Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İki değişkenli $u(x, y)$ fonksiyonunun $u(x, y) = f(x)g(y)$ olacak şekilde, tek değişkenli iki fonksiyonun çarpımı olarak gösterilebileceğini varsayalım. İki-boyutlu diferansiyel dönüşümün Tablo 4.3'te verilen temel özelliklerinden yararlanarak, $u(x, y)$ fonksiyonu, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{\alpha}(k)(x-x_0)^{k\alpha} \sum_{h=0}^{\infty} G_{\beta}(h)(y-y_0)^{h\beta} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U_{\alpha, \beta}(k, h)(x-x_0)^{k\alpha} (y-y_0)^{h\beta} \end{aligned} \quad (4.92)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.92) denklemindeki $U_{\alpha, \beta}(k, h) = F_{\alpha}(k)G_{\beta}(h)$ ifadesi $u(x, y)$ 'nin *spektrumu* olarak isimlendirilir. $u(x, y)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş iki-boyutlu diferansiyel dönüşümü,

$$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(\beta h + 1)} \left[\left(D_{x_0}^{\alpha} \right)^k \left(D_{y_0}^{\beta} \right)^h u(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} \quad (4.93)$$

olarak verilir [97]. (4.93) denkleminde $\alpha = \beta = 1$ olması durumunda (4.92)-(4.93) tanımlarından, klasik iki-boyutlu diferansiyel dönüşümün elde edileceği aşikardır. Yine bu tanımları göz önüne alarak aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

4.8.3.2.1 Teorem

$U_{\alpha, \beta}(k, h)$, $V_{\alpha, \beta}(k, h)$, $W_{\alpha, \beta}(k, h)$ sırasıyla $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümleri olsun. Buna göre,

a) Eğer $u(x, y) = v(x, y) \pm w(x, y)$ ise, $U_{\alpha, \beta}(k, h) = V_{\alpha, \beta}(k, h) \pm W_{\alpha, \beta}(k, h)$ sağlanır.

b) Eğer $u(x, y) = kv(x, y)$, $k \in \mathbb{R}$ ise, $U_{\alpha, \beta}(k, h) = kV_{\alpha, \beta}(k, h)$ sağlanır.

c) Eğer $u(x, y) = v(x, y)w(x, y)$ ise, $U_{\alpha, \beta}(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V_{\alpha, \beta}(r, h-s)W_{\alpha, \beta}(k-r, s)$ sağlanır.

d) Eğer $u(x, y) = (x-x_0)^{n\alpha} (y-y_0)^{m\beta}$ ise, $U_{\alpha, \beta}(k, h) = \delta(k-n)\delta(h-m)$ sağlanır.

4.8.3.2.2 Teorem

Eğer $0 < \alpha \leq 1$ için $u(x, y) = D_{x_0}^\alpha v(x, y)$ ise

$$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha, \beta}(k+1, h)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

(4.92) tanımından yola çıkarak,

$$\begin{aligned} U_{\alpha, \beta}(k, h) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^k (D_{y_0}^\beta)^h D_{x_0}^\alpha v(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^{k+1} (D_{y_0}^\beta)^h v(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \left[(D_{x_0}^\alpha)^{k+1} (D_{y_0}^\beta)^h v(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha, \beta}(k+1, h) \end{aligned}$$

bulunur.

4.8.3.2.3 Teorem

Eğer $u(x, y) = f(x)g(y)$, $\lambda > -1$ için $f(x) = x^\lambda h(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonu da

$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{\alpha k}$ genelleştirilmiş Taylor serisine sahip ve

a) $\beta < \lambda + 1$ ve α keyfi değer,

b) $\beta \geq \lambda + 1$, α keyfi değer, $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ ve $m-1 < \beta < m$

koşullarından birisi sağlanıyor ise, (4.93) genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm ifadesi,

$$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} \left[D_{x_0}^{\alpha k} (D_{y_0}^\beta)^h u(x, y) \right]_{(x_0, y_0)} \quad (4.94)$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki Teorem 4.8.3.2.1, Teorem 4.8.3.2.2 ve Teorem 4.8.3.2.3'ten çıkan sonuçlar göz önüne alınarak, genelleştirilmiş iki-boyutlu diferansiyel dönüşüme ait temel işlemler Tablo 4.4'te verilmiştir [98].

Tablo 4.4: Genelleştirilmiş iki-boyutlu DD yönteminin temel özellikleri.

Asıl Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$u(x, y) = v(x, y) \pm w(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = V_{\alpha, \beta}(k, h) \pm W_{\alpha, \beta}(k, h)$
$u(x, y) = cv(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = cV_{\alpha, \beta}(k, h)$
$u(x, y) = D_{x_0}^\alpha v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} V_{\alpha, \beta}(k+1, h), 0 < \alpha \leq 1$
$u(x, y) = D_{y_0}^\beta v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\beta(h+1)+1)}{\Gamma(\beta h+1)} V_{\alpha, \beta}(k, h+1), 0 < \beta \leq 1$
$u(x, y) = D_{x_0}^\alpha D_{y_0}^\beta v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha(k+1)+1)\Gamma(\beta(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta h+1)} V_{\alpha, \beta}(k+1, h+1), 0 < \alpha, \beta \leq 1$
$u(x, y) = D_{x_0}^\gamma v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha k + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)} V_{\alpha, \beta}(k + \gamma / \alpha, h), m - 1 < \gamma \leq 1$
$u(x, y) = D_{x_0}^\gamma D_{y_0}^\mu v(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \frac{\Gamma(\alpha k + \gamma + 1)\Gamma(\beta h + \mu + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(\beta h + 1)} V_{\alpha, \beta}(k + \gamma / \alpha, h + \mu / \beta)$
$u(x, y) = (x - x_0)^{\alpha k} (y - y_0)^{\beta h}$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \delta(k - n) \delta(h - m)$
$u(x, y) = v(x, y) w(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h V_{\alpha, \beta}(r, h-s) W_{\alpha, \beta}(k-r, s)$
$u(x, y) = v(x, y) w(x, y) q(x, y)$	$U_{\alpha, \beta}(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} V_{\alpha, \beta}(r, h-s-p) W_{\alpha, \beta}(t, s) Q_{\alpha, \beta}(k-r-t, p)$

4.8.3.2.4 Örnek

Genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodunu daha iyi anlayabilmek için zaman-kesirli

$$D_{*t}^\alpha u = D_x^2 u + 6u(1-u), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.95)$$

Fisher denklemini

$$u(x, 0) = \frac{1}{(1 + e^x)^2} \quad (4.96)$$

başlangıç koşulu ile beraber göz önüne alalım. (4.95) denklemi sadece zaman-kesirli olduğundan (uzay-kesirli olmadığından) $\beta = 1$ alıp, Tablo 4.4'teki ilgili özellikleri de kullanarak (4.95) denkleminin her iki tarafına genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulayalım. Bu durumda (4.95) denklemi,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} U_{\alpha,1}(k, h+1) \\ &= (k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2, h) + 6U_{\alpha,1}(k, h) - 6 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U_{\alpha,1}(r, h-s) U_{\alpha,1}(k-r, s) \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Yani,

$$\begin{aligned} U_{\alpha,1}(k, h+1) &= \frac{\Gamma(\alpha h+1)}{\Gamma(\alpha(h+1)+1)} \\ & \left[(k+1)(k+2)U_{\alpha,1}(k+2, h) + 6U_{\alpha,1}(k, h) - 6 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U_{\alpha,1}(r, h-s) U_{\alpha,1}(k-r, s) \right] \end{aligned} \quad (4.97)$$

bulunur. (4.96) ve (4.92) denklemlerinin seri formlarını birbirine eşitlersek, $U_{\alpha,1}(k, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ başlangıç dönüşüm sabitleri,

$$U_{\alpha,1}(0, 0) = \frac{1}{4}, \quad U_{\alpha,1}(1, 0) = -\frac{1}{4}, \quad U_{\alpha,1}(2, 0) = \frac{1}{16}, \quad U_{\alpha,1}(3, 0) = \frac{1}{48}, \quad U_{\alpha,1}(4, 0) = -\frac{1}{96} \quad (4.98)$$

olarak bulunur. (4.98) denklemini (4.97)'de uygulayarak $U_{\alpha,1}(k, h)$ 'ın aşağıdaki Tablo 4.5'de verilen bazı değerlerini buluruz.

Tablo 4.5: Örnek 4.8.3.2.4 için $U_{\alpha,1}(k, h)$ 'in bazı değerleri.

k	h		
	0	1	2
0	$1/4$	$\frac{5}{4\Gamma(\alpha+1)}$	$\frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)}$
1	$-1/4$	$\frac{-5}{8\Gamma(\alpha+1)}$	$\frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)}$
2	$1/16$	$\frac{-5}{16\Gamma(\alpha+1)}$	$\frac{-25}{8\Gamma(2\alpha+1)}$
3	$1/48$	$\frac{5}{24\Gamma(\alpha+1)}$	$\frac{-25}{24\Gamma(2\alpha+1)}$
4	$-1/96$	$\frac{5}{96\Gamma(\alpha+1)}$	$\frac{425}{384\Gamma(2\alpha+1)}$

Elde edilen bu değerleri (4.92)'te yerine yazıp bazı sadeleştirmeler de yapıldıktan sonra, (4.95)-(4.96) denkleminin seri formu

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{8\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x \\
 & + \left(\frac{1}{16} - \frac{5}{16\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha - \frac{25}{8\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^2 + \left(\frac{1}{48} - \frac{5}{24\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha - \frac{25}{24\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^3 \\
 & + \left(-\frac{1}{96} + \frac{5}{96\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha + \frac{425}{384\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \dots \right) x^4
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Diğer bir gösterimle,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{96}x^4 + \dots \right) \\
 & + \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{8}x - \frac{5}{16}x^2 - \frac{5}{24}x^3 + \frac{5}{96}x^4 + \dots \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
 & + \left(\frac{25}{8} + \frac{25}{8}x - \frac{25}{8}x^2 - \frac{25}{24}x^3 + \frac{425}{384}x^4 + \dots \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Kapalı formda ise,

$$u(x,t) = \frac{1}{(1+e^x)^2} + \frac{10e^x}{(1+e^x)^3} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{50e^x(2e^x-1)}{(1+e^x)^4} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots \quad (4.99)$$

olarak yazılabilir. $\alpha \rightarrow 1$ için, (4.99) denklemi

$$u(x,t) = \frac{1}{(1+e^x)^2} + \frac{10e^x}{(1+e^x)^3} t + \frac{25e^x(2e^x-1)}{(1+e^x)^4} t^2 + \dots$$

ve buradan da

$$u(x,t) = \frac{1}{(1+e^{x-5t})^2} \quad (4.100)$$

kapalı çözüm elde edilir. (4.100) çözümü (4.95)-(4.96) Fisher denkleminin standart formunun tam çözümüdür [98].

4.9 Kesirli Black-Scholes Denklemine Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü

(3.20) Black-Scholes kesirli diferansiyel denkleminin $v(x, \tau)$ çözümünün tek değişkenli iki fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilebileceğini varsayalım. Denklem sadece zaman-kesirli olduğundan dolayı $\beta = 1$ alalım ve denklemin her iki tarafına genelleştirilmiş iki-boyutlu diferansiyel dönüşüm uygulayalım. Bu durumda lineer zaman-kesirli (3.20) denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha(h+1)+1)}{\Gamma(\alpha h+1)} U_{\alpha,1}(p, h+1) &= (p+1)(p+2)U_{\alpha,1}(p+2, h) \\ &+ (k-1)(p+1)U_{\alpha,1}(p+1, h) - kU_{\alpha,1}(p, h) \end{aligned} \quad (4.101)$$

halini alır. Diğer bir gösterimle

$$\begin{aligned} U_{\alpha,1}(p, h+1) &= \frac{\Gamma(\alpha h+1)}{\Gamma(\alpha(h+1)+1)} [(p+1)(p+2)U_{\alpha,1}(p+2, h) \\ &+ (k-1)(p+1)U_{\alpha,1}(p+1, h) - kU_{\alpha,1}(p, h)] \end{aligned} \quad (4.102)$$

yazılabilir. Denklem (3.19) ile (4.92)'ün seri formlarını birbirine eşitleyerek başlangıç dönüşüm katsayılarını yani, (3.19) başlangıç koşulunun iki-boyutlu diferansiyel dönüşümü olan $U_{\alpha,1}(p,0)$, $p=0,1,2,\dots$ değerleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_{\alpha,1}(0,0)=0, \quad U_{\alpha,1}(1,0)=1, \quad U_{\alpha,1}(2,0)=\frac{1}{2}, \quad U_{\alpha,1}(3,0)=\frac{1}{6}, \quad U_{\alpha,1}(4,0)=\frac{1}{24} \quad (4.103)$$

(4.103) denklemini (4.102)'de uygulayarak aşağıdaki Tablo 4.6'da verildiği gibi $U_{\alpha,1}(p,h)$ 'ın bazı değerleri elde edilebilir.

Tablo 4.6: Denklem (4.102) için $U_{\alpha,1}(p,h)$ 'in bazı değerleri.

p	h			
	0	1	2	3
0	0	$k / \Gamma(\alpha+1)$	$-k^2 / \Gamma(2\alpha+1)$	$k^3 / \Gamma(3\alpha+1)$
1	1	0	0	0
2	1/2	0	0	0
3	1/6	0	0	0
4	1/24	0	0	0

Tablodaki değerleri (4.92)'te yerine yazarsak, (3.19)-(3.20) denkleminin seri formu şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} v(x, \tau) = & \left(0 + k \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - k^2 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + k^3 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \pm \dots \right) \\ & + \left(1 + 0 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 0 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + 0 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \pm \dots \right) x \\ & + \left(\frac{1}{2} + 0 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 0 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + 0 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \pm \dots \right) x^2 \\ & + \left(\frac{1}{6} + 0 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 0 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + 0 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \pm \dots \right) x^3 \\ & + \left(\frac{1}{24} + 0 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 0 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + 0 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \pm \dots \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

Böylece $x \geq 0$ için $v(x, \tau)$ ifadesini

$$v(x, \tau) = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \right) + (k) \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (-k^2) \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + (k^3) \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

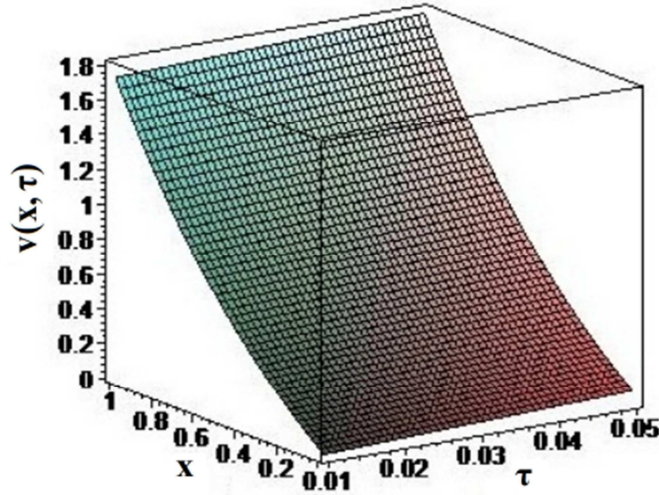
formunda yazabiliriz. Kapalı formda gösterimi, $E_\alpha(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonunu göstermek üzere,

$$v(x, \tau) = (e^x - 1) - \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k\tau^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \right] = e^x - \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k\tau^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \right] = e^x - E_\alpha(-k\tau^\alpha) \quad (4.104)$$

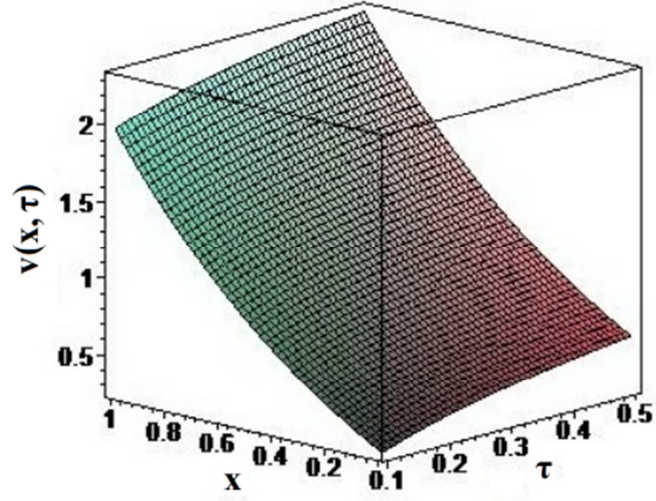
şeklinde verilir. $x \geq 0$ olmak üzere $\alpha = 1$ için tam çözüm ise

$$v(x, \tau) = e^x - e^{-k\tau}$$

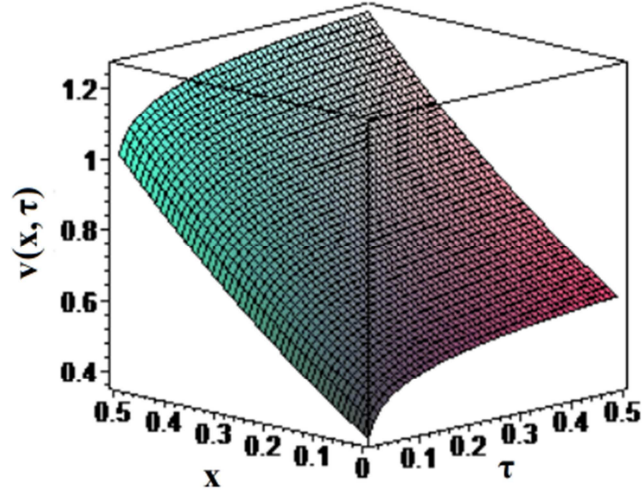
olarak elde edilir [99]. (4.104) çözümünün $\alpha = 1.00$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 0.50$ ve $\alpha = 0.25$ değerleri için grafikleri aşağıda sırayla verilmiştir:



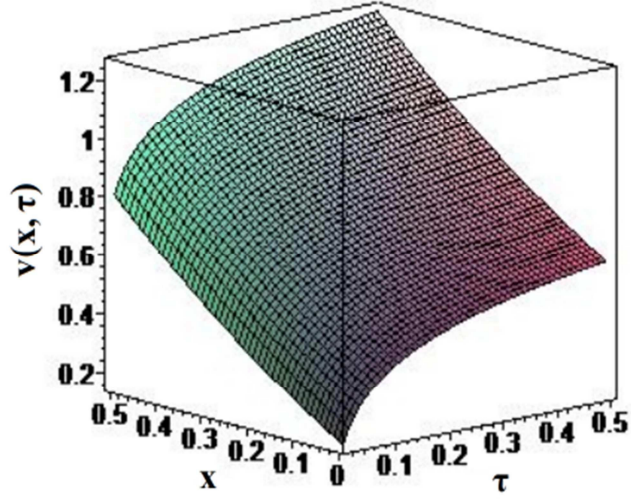
Şekil 4.5: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 1.00$ için çözümü.



Şekil 4.6: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 0.75$ için çözümü.

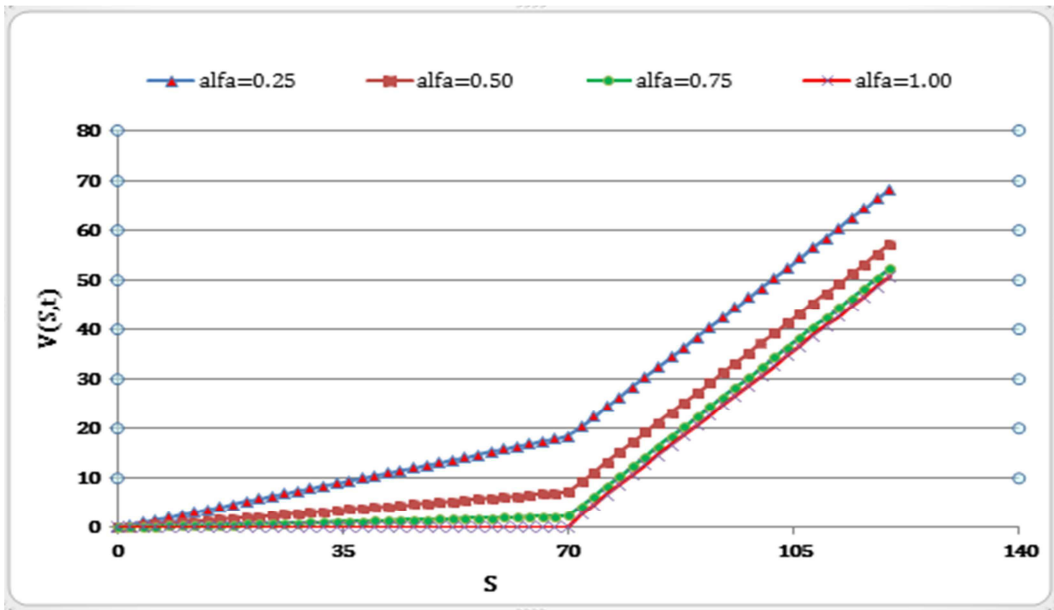


Şekil 4.7: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 0.50$ için çözümü.



Şekil 4.8: (3.19)-(3.20) denkleminin $\alpha = 0.25$ için çözümü.

$x < 0$ için başlangıç koşulu $v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0) = 0$ olduğundan dolayı genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu $x < 0$ için bu probleme uygulanmaz. Aşağıda verilen Şekil 4.9, $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.50$, $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 1.00$ değerleri için (3.20) denkleminde verilen $E = 70$ uygulama fiyatlı opsiyonun fiyatındaki değişimi göstermektedir.



Şekil 4.9: α nın dört farklı değeri için opsiyon fiyatları.

Şekil 4.9'a göre $\alpha=1$ iken opsiyon uygulama anında ($\tau=T$) en düşük fiyata sahiptir. α değerleri azaldıkça, opsiyonun pirimi artmaktadır. $\alpha=0.25$ olması durumu ise opsiyona gereğinden fazla fiyat biçilmesi (overpriced) durumu olarak değerlendirilebilir.

4.10 Padé Yaklaşımı

Fransız matematikçi Henri Eugéne Padé'nin doktora çalışmasıyla literatüre giren ve Cuyt [100] tarafından teorisi ve kavramları daha da sistemli hale getirilen Padé yaklaşımının hem tek değişkenlisi hem de çok değişkenlisi için bir takım çalışmalar mevcuttur. Tek değişkenli Padé yaklaşımı için literatürde farklı tür çalışmalar [12, 101] olmasına rağmen çok değişkenli Padé yaklaşımı üzerine yapılan çalışmaların azlığı dikkat çekmektedir. Özellikle kesirli mertebeden diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalar yok denecek kadar azdır [79]. Bu çalışmada çok (iki) değişkenli Padé yaklaşımının kesirli diferansiyel denklemlere uygulanışı ele alınacaktır. Çok değişkenli Padé yaklaşımına geçmeden önce tek değişkenli Padé yaklaşımının temel tanım ve teoremleri verilecektir.

4.10.1 Tek Değişkenli Padé Yaklaşımı

Kuvvet serisi ile gösterilen

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (c_0 \neq 0) \quad (4.105)$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda kuvvet serisinin Padé yaklaşımı,

$$[m/n] = \frac{a_0 + a_1x + c_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} \quad (4.106)$$

şeklinde iki polinomun oranı olarak tanımlanır. (4.106)'te m payın derecesini, n ise paydanın derecesini gösterir. Pay ve payda sırasıyla $m+1$ ve $n+1$ tane katsayıya sahiptir. (4.106) denkleminin tanımsız olmaması için $b_0=1$ alınmalıdır. Bu kabulle tüm yaklaşımda $m+n+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $[m/n]$ ifadesi (4.105)

kuvvet serisinin ilk $m+n+1$ terimine karşılık gelir [102]. (4.105)'deki $m+n$ dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımını

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + c_2 x^2 + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n} + O(x^{m+n+1}) \quad (4.107)$$

şeklinde yazabiliriz. Son denklem kullanılarak,

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = (a_0 + a_1 x + c_2 x^2 + \dots + a_m x^m) + O(x^{m+n+1}) \quad (4.108)$$

elde edilir. (4.108) denkleminde $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ katsayılarının eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} b_n c_{m-n+1} + b_{n-1} c_{m-n+2} + \dots + b_0 c_{m+1} &= 0 \\ b_n c_{m-n+2} + b_{n-1} c_{m-n+3} + \dots + b_0 c_{m+2} &= 0 \\ \vdots & \\ b_n c_m + b_{n-1} c_{m+1} + \dots + b_0 c_{m+n} &= 0 \end{aligned} \quad (4.109)$$

systemi elde edilir. $b_0 = 1$ olduğundan, (4.107) denkleminde paydadaki n - tane bilinmeyen katsayı için (4.109) denklemi n - tane lineer denklemden oluşur. Diğer bir gösterimle,

$$\begin{bmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & \cdots & c_m \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & \cdots & c_{m+1} \\ c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & c_{m-n+5} & \cdots & c_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ c_{m+3} \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{bmatrix}$$

matris formu yazılabilir. Bu eşitlikten b_i katsayıları bulunabilir. Ayrıca a_0, a_1, \dots, a_m katsayıları (4.108) denkleminde $1, x, x^2, \dots, x^m$ terimlerinin katsayılarıyla eşitlenerek,

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
&\vdots \\
a_m &= c_m + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} b_i c_{m-i}
\end{aligned} \tag{4.110}$$

olarak bulunur. Böylece (4.109) ve (4.110) denklemlerindeki a ve b katsayıları, (4.106) denklemindeki Padé yaklaşımının tüm terimlerinin katsayıları olarak tanımlanır. Böylece, bu terimlerden elde edilen denklemlere de *Padé denklemleri* denir. Padé denklemleri yardımıyla $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisine karşılık gelen (x^{m+n}) . dereceden $[m/n]$ Padé yaklaşımı oluşturulur. Bundan sonraki gösterimlerde bir p polinomunun kesin polinom derecesi ∂p ile ve bir q kuvvet serisinin derecesi de ωq ile gösterilecektir. Bu durumda, verilen bir $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisini göz önüne alalım. Bu $f(x)$ fonksiyonu için (m, n) . mertebeden Padé yaklaşım problemi, pay ve payda polinomları olan

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

polinomlarını bulmayı ifade eder. Yani, tek değişkenli f fonksiyonunun (m, n) . mertebeden Padé yaklaşımı,

$$[m/n]_f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} \tag{4.111}$$

şeklinde verilir. (4.109) ve (4.110) denklemleri yardımıyla $[m/n]_f(x)$ elde edilirken

$$\begin{aligned}
\partial p &\leq m \\
\partial q &\leq n \\
\omega(fq - p) &\geq m + n + 1
\end{aligned} \tag{4.112}$$

durumları mevcuttur. Padé polinomları ile ilgili özellikleri daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki teoremleri verelim [102].

4.10.1.1 Teorem

Eğer p_1, q_1 ve p_2, q_2 polinomları (4.112) şartlarını sağlıyorsa, bu durumda $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ ifadesi sağlanır.

İspat

$\omega(fq_1 - p_1) \geq m + n + 1$ ve $\omega(fq_2 - p_2) \geq m + n + 1$ olduğundan, $p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$ ifadesi $(fq_2 - p_2)q_1 - (fq_1 - p_1)q_2$ şeklinde de yazılabilir. Buradan $\omega(p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1) \geq m + n + 1$ elde edilir. Fakat $(p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1)(x)$ polinomunun derecesi en fazla $(m + n)$ olacağından $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ olur.

Teorem 4.10.1.1'in bir sonucu olarak p_1 / q_1 ve p_2 / q_2 rasyonel ifadeleri birbirine denktir.

4.10.1.2 Teorem

Bir f fonksiyonu için (m, n) dereceli Padé yaklaşımı $[m, n]_{(x)}$ olmak üzere, her $m, n \geq 0$ sayısı için f fonksiyonuna ait bir tek (m, n) dereceli $[m, n]_{(x)}$ yaklaşımı vardır.

4.10.1.3 Teorem (Padé Yaklaşımının Hesabı)

Bir f fonksiyonuna ait (m, n) dereceli Padé yaklaşımı,

$[m, n]_{(x)} = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}$ şeklinde veriliyor ve

$$D_{m,n} = \begin{pmatrix} c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{pmatrix}, \quad (D = \det D_{m,n} \neq 0) \text{ ise, } \left. \begin{array}{l} F_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i, \quad m \geq 0 \\ F_m(x) = 0, \quad m < 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere,

$$p_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} F_m(x) & xF_{m-1}(x) & \cdots & x^n F_{m-n}(x) \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & D_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix}, \quad q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & D_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix}$$

olur.

İspat

$|D_{m,n}| \neq 0$ olduğundan, $b_0 = 1$ için (4.109) denklem sisteminin tek çözümü olduğu belirtilmişti. Benzer şekilde aşağıdaki homojen denklem sistemi de aşıkâr olmayan (nontrivial) çözüme sahiptir.

$$\begin{aligned} (1 - q_0(x))b_0 + xb_1 + x^2b_2 + \dots + x^nb_n &= 0 \\ c_{m+1}b_0 + c_m b_1 + \dots + c_{m+1-n}b_n &= 0 \\ \vdots & \\ c_{m+n}b_0 + c_{m+n-1}b_1 + \dots + c_m b_n &= 0. \end{aligned}$$

Böylece katsayılar matrisinin determinanı sıfır olur. Diğer bir ifadeyle,

$$\begin{vmatrix} 1 - q_0(x) & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} = 0$$

yazılabilir. Son denklemde $f(x)q_0(x)$ ifadesini dikkate alırsak;

$$f(x)q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f(x) & xf(x) & \cdots & x^n f(x) \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \quad (4.113)$$

elde edilir. $p_0(x)$ polinomu $f(x)q_0(x)$ serilerindeki m 'den küçük ya da m 'ye eşit dereceye sahip tüm terimleri içerdiğinden dolayı, (4.113) ifadesinde $p_0(x)$ 'in determinant formatı elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar [79].

4.10.2 Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı

İki değişkenli fonksiyonlar, ikiden fazla değişkene sahip fonksiyonlara genişletilebileceğinden dolayı çalışmamız iki değişkenli fonksiyonlarla sınırlanacaktır.

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \quad (4.114)$$

Taylor seri açılımıyla temsil edilen çift değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunu ele alalım.

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ fonksiyonu için Padé yaklaşımının

$$p(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \dots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \dots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \dots & c_m \end{vmatrix}}{q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \dots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \dots & c_m \end{vmatrix}} \quad (4.115)$$

polinomlarıyla verildiğini biliyoruz. (4.115) denkleminde $p(x)$ ve $q(x)$ determinantlarındaki j . satırı x^{j+m-1} ($j = 2, \dots, n+1$) ile çarpıp, j . sütunu x^{j-1} ($j = 2, \dots, n+1$)'e bölelim. Bu da pay ve paydanın x^m ile çarpıldığı anlamına gelir. Böylece, $D = \det D_{m,n} \neq 0$ ise,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \dots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \dots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \dots & c_m x^m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^n \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \dots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \dots & c_m x^m \end{vmatrix}} \quad (4.116)$$

elde ederiz. (4.116) determinantı doğrudan iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonu için de yazılabilir. $\sum_{i=0}^k c_i x^i$ toplamı yerine $f(x, y)$ fonksiyonunun k . mertebeden Taylor seri açılımının kısmi toplamlar dizisi ve $c_k x^k$ terimi yerine $f(x, y)$ fonksiyonundaki k .

dereceden tüm terimleri içeren bir ifade yazılabilir. Burada iki-değişkenli $c_{ij}x^i y^j$ teriminin derecesi $(i + j)$ 'dir. Tek değişkenli Padé polinomlarında olduğu gibi burada da, Padé polinomlarını

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} \sum_{i+j=0}^m c_{ij}x^i y^j & \sum_{i+j=0}^{m-1} c_{ij}x^i y^j & \dots & \sum_{i+j=0}^{m-n} c_{ij}x^i y^j \\ \sum_{i+j=m+1} c_{ij}x^i y^j & \sum_{i+j=m} c_{ij}x^i y^j & \dots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij}x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n} c_{ij}x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1} c_{ij}x^i y^j & \dots & \sum_{i+j=m} c_{ij}x^i y^j \end{vmatrix} \quad (4.117)$$

ve

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sum_{i+j=m+1} c_{ij}x^i y^j & \sum_{i+j=m} c_{ij}x^i y^j & \dots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij}x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n} c_{ij}x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1} c_{ij}x^i y^j & \dots & \sum_{i+j=m} c_{ij}x^i y^j \end{vmatrix} \quad (4.118)$$

şeklinde tanımlarsak, $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ polinomlarını

$$p(x, y) = \sum_{i+j=mn}^{mn+m} a_{ij}x^i y^j, \quad q(x, y) = \sum_{i+j=mn}^{mn+n} b_{ij}x^i y^j \quad (4.119)$$

formatında da yazabiliriz [103]. (4.119) denklemleri için

$$\left. \begin{aligned} \omega(p) &\geq mn, & \partial(p) &\leq mn + m \\ \omega(q) &\geq mn, & \partial(q) &\leq mn + n \\ \omega[(fq - p)(x, y)] &\geq mn + m + n + 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.120)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

4.10.2.1 Teorem

Eğer $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ polinomları (4.117) ve (4.118) ile verilirse,

$$(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij}x^i y^j \text{ olur.}$$

İspat

$$\text{Eğer, } A_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} a_{ij} x^i y^j \quad (k=0, \dots, m),$$

$$B_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} b_{ij} x^i y^j \quad (k=0, \dots, n)$$

ve

$$C_k(x, y) = B_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} c_{ij} x^i y^j \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

olarak tanımlanırsa $(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij} x^i y^j$ ifadesi için aşağıdaki denklem sistemleri yazılabilir [100]:

$$\begin{cases} C_0(x, y) B_0(x, y) = A_0(x, y) \\ C_1(x, y) B_0(x, y) + C_0(x, y) B_1(x, y) = A_1(x, y) \\ \vdots \\ C_m(x, y) B_0(x, y) + C_{m-n}(x, y) B_n(x, y) = A_m(x, y) \end{cases} \quad (4.121)$$

$$\begin{cases} C_{m+1}(x, y) B_0(x, y) + C_{m+1-n}(x, y) B_n(x, y) = 0 \\ \vdots \\ C_{m+n}(x, y) B_0(x, y) + \dots + C_m(x, y) B_n(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4.122)$$

Burada $k < 0$ için $C_k = 0$ 'dır. Bu ifadeler göz önüne alındığında,

$p(x, y) = \sum_{k=0}^m A_k(x, y)$ ve $q(x, y) = \sum_{k=0}^n B_k(x, y)$ olarak da ifade edilebilir.

$$B_0(x, y) = \begin{vmatrix} C_m(x, y) & \cdots & C_{m+1-n}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}(x, y) & \cdots & C_m(x, y) \end{vmatrix} \quad (4.123)$$

olarak seçip, Cramer kuralını uygulayarak $B_k(x, y)$ için (4.122) homojen denklem sistemini çözdükten sonra, (4.121)'deki $A_k(x, y)$ 'de yerine yazarsak, (4.117) ve (4.118) Padé denklemlerini elde ederiz. Bu denklemler (4.120) için bir çözüm

oluşturur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Burada $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ denklemlerine *Padé denklemleri* denir.

$$[m, n]_{(x, y)} = \frac{p(x, y)}{q(x, y)} \quad (4.124)$$

ifadesine de $f(x, y)$ fonksiyonunun (m, n) . dereceden *indirgenemez Padé yaklaşımı* adı verilir.

4.10.2.2 Teorem

Her m ve n sayısı için $f(x, y)$ fonksiyonunun bir tek (m, n) dereceli iki-değişkenli Padé yaklaşımı vardır [103].

4.10.2.3 Örnek

Birinci-mertebeden kuasi-lineer homojen

$$u_t + (1+t)u_x = 0 \quad (4.125)$$

kısmi diferansiyel denklemini

$$u(x, 0) = \frac{x-1}{2} \quad (4.126)$$

başlangıç koşuluyla birlikte ele alalım. Bu denklemin seri formundaki çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{t}{4} - \frac{xt}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{xt^2}{8} - \frac{t^3}{16} - \frac{xt^3}{16} + \frac{t^4}{32} + \frac{xt^4}{32} - \frac{t^5}{64} - \frac{xt^5}{64} + \dots \end{aligned} \quad (4.127)$$

ve analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{x-t-1}{t+2}$$

şeklinde verilir [104]. Bu durumda (4.127) denkleminin yaklaşık çözümünü $m = 3$ ve $n = 1$ için çok değişkenli Padé yaklaşımı ile çözelim. (4.127) denkleminin Padé polinomlarının elde etmek için (4.117) ve (4.118) denklemlerini kullanırsak,

$$p(x,t) = \left| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{t}{4} - \frac{xt}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{xt^2}{8} - \frac{t^3}{16} & -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{t}{4} - \frac{xt}{4} + \frac{t^2}{8} & -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{t}{4} \\ -\frac{xt^3}{16} + \frac{t^4}{32} & \frac{xt^2}{8} - \frac{t^3}{16} & -\frac{xt}{4} + \frac{t^2}{8} \\ \frac{xt^4}{32} - \frac{t^5}{64} & -\frac{xt^3}{16} + \frac{t^4}{32} & \frac{xt^2}{8} - \frac{t^3}{16} \end{array} \right|$$

$$= \frac{xt^5(t+1-x)(t-2x)}{256}$$

ve

$$q(x,t) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{xt^3}{16} + \frac{t^4}{32} & \frac{xt^2}{8} - \frac{t^3}{16} & -\frac{xt}{4} + \frac{t^2}{8} \\ \frac{xt^4}{32} - \frac{t^5}{64} & -\frac{xt^3}{16} + \frac{t^4}{32} & \frac{xt^2}{8} - \frac{t^3}{16} \end{array} \right| = \frac{xt^5(t+2)(2x-t)}{256}$$

polinomlarını elde ederiz. Böylece (4.125) denkleminin (3,1). mertebeden Padé yaklaşımı ile çözümü

$$[3,1]_{(x,t)} = \frac{x-t-1}{t+2}$$

şeklinde elde edilir [105].

4.11 Kesirli Black-Scholes Denkleminin Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı ile Çözümü

Bu bölümde Black-Scholes opsiyon fiyatlama denkleminin analitik çözümü ile çok değişkenli Padé yaklaşık çözümü arasında doğrudan bir ilişki olduğunu göstereceğiz. (3.20) denkleminin çözümü $E_\alpha(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu olmak üzere Bölüm 4.2'de

$$v(x,\tau) = \max(e^x - 1, 0) E_\alpha(-k\tau^\alpha) + e^x (1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha)) \quad (4.128)$$

şeklinde verilmişti. $\alpha = 1$ için tam çözümü ise

$$v(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0)e^{-k\tau} + e^x(1 - e^{-k\tau})$$

olarak elde edilmişti. Şimdi (4.128) denklemini,

$$v(x, \tau) = \begin{cases} e^x(1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha)), & S < E \quad (x < 0) \\ (e^x - 1)E_\alpha(-k\tau^\alpha) + e^x(1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha)), & S > E \quad (x > 0) \end{cases} \quad (4.129)$$

olarak parçalı fonksiyon şeklinde ele alıp ayrı ayrı inceleyelim [106].

1. Durum: İlk olarak hisse senedi fiyatının uygulama fiyatından küçük olduğu durumu ($S < E$) göz önüne alalım. Böylece,

$$\begin{aligned} v(x, \tau) &= e^x(1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha)) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k\tau^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \right] \\ &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] \left[1 - \left(1 - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (4.130)$$

elde edilir. (4.130) denkleminde $\alpha = 1$ için seri açılımı

$$\begin{aligned} v(x, \tau) &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] \left[1 - \left(1 - \frac{k\tau}{1!} + \frac{k^2\tau^2}{(2)!} - \frac{k^3\tau^3}{(3)!} + \dots \right) \right] \\ &= k\tau + kx\tau - \frac{k^2\tau^2}{2} + \frac{k^3\tau^3}{6} - \frac{k^2x\tau^2}{2} + \frac{kx^2\tau}{2} \\ &\quad + \frac{k^3x\tau^3}{6} - \frac{k^2x^2\tau^2}{4} + \frac{kx^3\tau}{6} + \frac{k^3x^2\tau^3}{12} - \frac{k^2x^3\tau^2}{12} + \frac{k^3x^3\tau^3}{36} + \dots \end{aligned} \quad (4.131)$$

şeklinde olur. Şimdi (4.131) denkleminin $m = 3$ ve $n = 2$ için çok değişkenli Padé yaklaşımı ile yaklaşık çözümünü bulalım. $m = 3$ ve $n = 2$ için Padé denklemlerini elde etmek için (4.117) ve (4.118) denklemlerini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
p(x, \tau) &= \left| \begin{array}{ccc}
k\tau + kx\tau - \frac{k^2\tau^2}{2} + \frac{k^3\tau^3}{6} - \frac{k^2x\tau^2}{2} + \frac{kx^2\tau}{2} & k\tau + kx\tau - \frac{k^2\tau^2}{2} & k\tau \\
\frac{k^3x\tau^3}{6} - \frac{k^2x^2\tau^2}{4} + \frac{kx^3\tau}{6} & \frac{k^3\tau^3}{6} - \frac{k^2x\tau^2}{2} + \frac{kx^2\tau}{2} & kx\tau - \frac{k^2\tau^2}{2} \\
\frac{k^3x^2\tau^3}{12} - \frac{k^2x^3\tau^2}{12} & \frac{k^3x\tau^3}{6} - \frac{k^2x^2\tau^2}{4} + \frac{kx^3\tau}{6} & \frac{k^3\tau^3}{6} - \frac{k^2x\tau^2}{2} + \frac{kx^2\tau}{2}
\end{array} \right| \\
&= \frac{1}{36}k^7\tau^7 - \frac{1}{72}k^8\tau^8 + \frac{1}{216}k^9\tau^9 + \frac{1}{8}k^5x^2\tau^5 - \frac{1}{12}k^6x\tau^6 - \frac{1}{6}k^4x^3\tau^4 + \frac{1}{12}k^3x^4\tau^3 + \frac{1}{24}k^7x\tau^7 \\
&\quad - \frac{1}{16}k^6x^2\tau^6 + \frac{7}{72}k^5x^3\tau^5 - \frac{1}{12}k^4x^4\tau^4 - \frac{1}{72}k^8x\tau^8 + \frac{1}{48}k^7x^2\tau^7 - \frac{1}{48}k^6x^3\tau^6 + \frac{1}{48}k^5x^4\tau^5 - \frac{1}{72}k^3x^6\tau^3
\end{aligned} \tag{4.132}$$

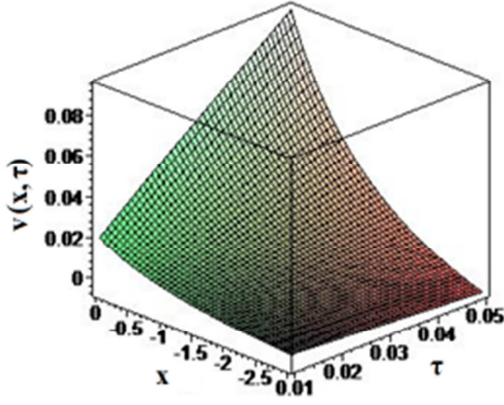
ve

$$\begin{aligned}
q(x, \tau) &= \left| \begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
\frac{k^3x\tau^3}{6} - \frac{k^2x^2\tau^2}{4} + \frac{kx^3\tau}{6} & \frac{k^3\tau^3}{6} - \frac{k^2x\tau^2}{2} + \frac{kx^2\tau}{2} & kx\tau - \frac{k^2\tau^2}{2} \\
\frac{k^3x^2\tau^3}{12} - \frac{k^2x^3\tau^2}{12} & \frac{k^3x\tau^3}{6} - \frac{k^2x^2\tau^2}{4} + \frac{kx^3\tau}{6} & \frac{k^3\tau^3}{6} - \frac{k^2x\tau^2}{2} + \frac{kx^2\tau}{2}
\end{array} \right| \\
&= \frac{1}{24}k^3x^5\tau^7 - \frac{1}{6}k^3x^3\tau^3 + \frac{1}{12}k^2x^4\tau^2 + \frac{1}{8}k^4x^2\tau^4 - \frac{1}{12}k^5x\tau^5 + \frac{1}{72}k^6x^2\tau^6 - \frac{1}{36}k^6x\tau^6 \\
&\quad + \frac{1}{8}k^3x^4\tau^3 + \frac{5}{144}k^4x^4\tau^4 - \frac{1}{36}k^5x^3\tau^5 - \frac{1}{9}k^4x^3\tau^4 + \frac{1}{12}k^5x^2\tau^5 + \frac{1}{36}k^6\tau^6 - \frac{1}{12}k^2x^5\tau^2 + \frac{1}{36}k^2x^6\tau^2
\end{aligned} \tag{4.133}$$

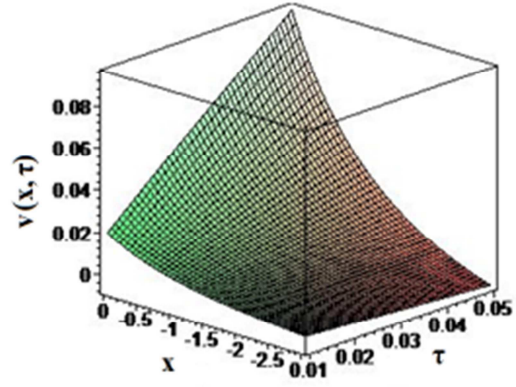
polinomlarını elde ederiz. (4.132) ve (4.133) denklemlerinde $k = 2$ alırsak [61] yani, $r = 0.04$ ve $\sigma = 0.2$ için Avrupa tipi satın alma opsiyonunu göz önüne alırsak, bu durumda $v(x, \tau)$ için (3,2). mertebeden Padé yaklaşımı

$$\begin{aligned}
[3,2]_{(x,\tau)} &= \frac{p(x, \tau)}{q(x, \tau)} = \tau [32x\tau^4 - 32x\tau^5 + \frac{64}{3}x\tau^6 + 36x^2\tau^2 - 48x\tau^3 - 24x^3\tau + 6x^4 + 48x\tau^4 \\
&\quad - 36x^2\tau^3 + 28x^3\tau^2 - 12x^4\tau - 32x\tau^5 + 24x^2\tau^4 - 12x^3\tau^3 + 6x^4\tau^2 - x^6] / [16\tau^4 + x^6 - 3x^5 + 3x^4 \\
&\quad + 24x^2\tau^3 - 16x\tau^4 - 16x^3\tau^2 + 9x^4\tau + 8x^2\tau^4 - 8x^3\tau^3 + 5x^4\tau^2 - 3x^5\tau - 24x\tau^3 - 12x^3\tau + 18x^2\tau^2]
\end{aligned} \tag{4.134}$$

şeklinde elde edilir. (4.134) Padé yaklaşımı için elde edilen değerlerin tam çözüm ile karşılaştırıldığı değerler aşağıdaki Şekil 4.10'da ve Tablo 4.7'de gösterilmiştir.



(a) Tam çözüm



(b) ÇPY ile çözüm

Şekil 4.10: $\alpha=1$ için $S < E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.

Tablo 4.7: $\alpha=1$ için $S < E$ iken elde edilen nümerik değerler.

x	τ	V_{tam}	$V_{ÇPY}$	Mutlak Hata
-0.030459207	0.01	0.0192072869	0.0192072927	0.0000000057
-0.051293294	0.02	0.0372500327	0.0372501228	0.0000000901
-0.072570693	0.03	0.0541589841	0.0541594194	0.0000004353
-0.105360516	0.04	0.0691952885	0.0691964599	0.0000011714
-0.139262067	0.05	0.0827914463	0.0827937732	0.0000023269
-0.162518929	0.06	0.0961176291	0.0961221845	0.0000045554
-0.198450939	0.07	0.1071262470	0.1071326101	0.0000063631
-0.223143551	0.08	0.1182849688	0.1182949423	0.0000099735
-0.261364764	0.09	0.1268419372	0.1268521246	0.0000101874
-0.287682072	0.10	0.1359519352	0.1359652354	0.0000133002

(4.130) denkleminde $\alpha = 0.75$ için seri açılımı:

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] \left[1 - \left(1 - \frac{k\tau^{3/4}}{\Gamma(7/4)} + \frac{k^2\tau^{3/2}}{\Gamma(5/2)} - \frac{k^3\tau^{9/4}}{\Gamma(13/4)} + \dots \right) \right] \\
&= 1.088065253k\tau^{0.75} + 0.7522527782k^2\tau^{1.5} + 0.3922711649k^3\tau^{2.25} \\
&+ 1.088065253kx\tau^{0.5} + 0.752252777k^2x\tau^{1.5} + 0.3922711649k^3x\tau^{2.25} \\
&+ 0.5440326265kx^2\tau^{0.5} - 0.3761263891k^2x^2\tau^{1.5} + 0.1961355824k^3x^2\tau^{2.25} \\
&+ 0.1813442088kx^3\tau^{0.75} - 0.1253754630k^2x^3\tau^{1.5} + 0.06537852748k^3x^3\tau^{2.25} + \dots
\end{aligned} \tag{4.135}$$

Basitlik için $\tau^{0.75} = a$ alalım, bu durumda yeni değişkene göre fonksiyonumuz,

$$\begin{aligned}
v(x, a) &= 1.088065253ka + 0.7522527782k^2a^2 + 0.3922711649k^3a^3 \\
&+ 1.088065253kxa - 0.7522527782k^2xa^2 + 0.3922711649k^3xa^3 \\
&+ 0.5440326265kx^2a - 0.3761263891k^2x^2a^2 + 0.1961355824k^3x^2a^3 \\
&+ 0.1813442088kx^3a - 0.1253754630k^2x^3a^2 + 0.06537852748k^3x^3a^3
\end{aligned} \tag{4.136}$$

haline gelir. Padé polinomlarını elde etmek için matris formunda kolaylık için

$$\begin{aligned}
A &= 1.088065253ka + 0.7522527782k^2a^2 + 0.3922711649k^3a^3 \\
&+ 1.088065253kxa - 0.7522527782k^2xa^2 + 0.3922711649k^3xa^3 \\
&+ 0.5440326265kx^2a - 0.3761263891k^2x^2a^2 + 0.1813442088kx^3a \\
B &= 1.088065253ka + 0.7522527782k^2a^2 + 0.3922711649k^3a^3 \\
&+ 1.088065253kxa - 0.7522527782k^2xa^2 + 0.5440326265kx^2a \\
C &= 1.088065253ka + 0.7522527782k^2a^2 + 1.088065253kxa \\
D &= 0.1961355824k^3x^2a^3 - 0.1253754630k^2x^3a^2 \\
E &= 0.3922711649k^3xa^3 - 0.3761263891k^2x^2a^2 + 0.1813442088kx^3a \\
F &= 0.3922711649k^3a^3 - 0.7522527782k^2xa^2 + 0.5440326265kx^2a \\
G &= 0.06537852748k^3x^3a^3
\end{aligned}$$

dönüşümlerini yaparak, (4.136) için Padé denklemlerini elde etmek amacıyla (4.117) ve (4.118) denklemlerini kullanalım. Böylece,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & D & E \end{vmatrix}$$

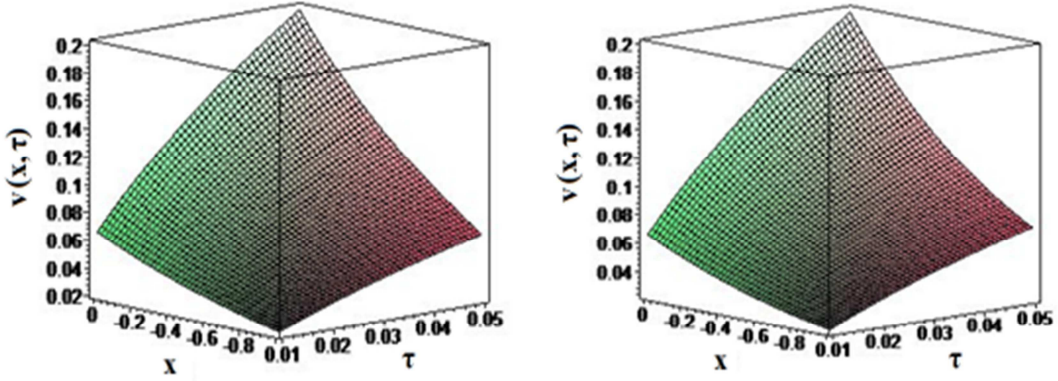
ve

$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ D & E & F \\ G & D & E \end{vmatrix}$$

matris formlarını elde ederiz. Tekrar $\tau^{0.75} = a$ dönüşümü yapıp, $k = 2$ alırsak, (4.135) denklemi için (4,2). mertebeden Padé yaklaşımını,

$$\begin{aligned}
[4,2]_{(x,\tau)} = & 0.01302683\tau^{0.75}[651471.6x^5\tau^{1.5} + 1954414.67x^4\tau^{1.5} - 1810348.51x^4\tau^{2.25} \\
& - 4647704.26x^3\tau^{2.25} + 8850142.55x^2\tau^3 - 7728726.01x^2\tau^{2.25} + 3908829.34x^3\tau^{1.5} \\
& + 3908829.34x^2\tau^{1.5} + 17700285.11x\tau^3 - 9295408.52x\tau^{2.25} + 6990085.71x\tau^{4.5} \\
& + 2423600.71x^3\tau^3 - 3351196.74x^2\tau^{3.75} - 20107180.44x\tau^{3.75} - 1611450.82x^3\tau^{0.75} \\
& - 268575.14x^6\tau^{0.75} - 805725.41x^5\tau^{0.75} - 1611450.82x^4\tau^{0.75} + 20970257.12\tau^{4.5} \\
& + 14541604.23\tau^3 - 20107180.44\tau^{3.75} + 194234.76x^6 + 64744.92x^7 + 388469.52x^5 \\
& + 388469.52x^4] / [87049.5\tau^3 + 23399.18x^2\tau^{1.5} - 13338.59x^3\tau^{1.5} + 1092.67x^4\tau^{1.5} \\
& - 13911.13x^3\tau^{2.25} + 41733.39x^2\tau^{2.25} - 55644.52x\tau^{2.25} + 14508.25x^2\tau^3 - 58033x\tau^3 \\
& + 3215.51x^4\tau^{0.75} - 9646.53x^3\tau^{0.75} + 2325.47x^4]
\end{aligned} \quad (4.137)$$

şeklinde elde ederiz. (4.137) Padé yaklaşımı için elde edilen değerlerin tam çözüm ile karşılaştırıldığı değerler aşağıdaki Şekil 4.11’de ve Tablo 4.8’de gösterilmiştir.



(a) Tam çözüm

(b) ÇPY ile çözüm

Şekil 4.11: $\alpha = 0.75$ için $S < E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.

Tablo 4.8: $\alpha = 0.75$ için $S < E$ iken elde edilen nümerik değerler.

x	τ	V_{tam}	$V_{ÇPY}$	Mutlak Hata
-0.094310679	0.01	0.0599716467	0.0599738058	0.0000021591

Tablo 4.8 (devam)

-0.150822890	0.02	0.0925994741	0.0926148852	0.0000154112
-0.210721031	0.03	0.1152927131	0.1153369079	0.0000441948
-0.261364764	0.04	0.1329422039	0.1330336847	0.0000914808
-0.287682072	0.05	0.1498923340	0.1500704963	0.0001781623
-0.328504067	0.06	0.1617503859	0.1620290845	0.0002786986
-0.385662481	0.07	0.1682984694	0.1686524698	0.0003540004
-0.462035460	0.08	0.1692860416	0.1695946085	0.0003085669
-0.510825624	0.09	0.1731115123	0.1734115420	0.0003000297
-0.544727175	0.10	0.1781249964	0.1784796455	0.0003546491

(4.130) denkleminde $\alpha = 0.5$ için seri açılımı:

$$v(x, \tau) = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right] \left[1 - \left(1 - \frac{k\tau^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{k^2\tau}{\Gamma(2)} - \frac{k^3\tau^{3/2}}{\Gamma(5/2)} + \dots \right) \right]$$

$$v(x, \tau) = 1.12837916k\tau^{0.5} - k^2\tau + 0.75225277k^3\tau^{1.5} + 1.12837916kx\tau^{0.5} - k^2x\tau$$

$$+ 0.75225277k^3x\tau^{1.5} + 0.56418958kx^2\tau^{0.5} - 0.5k^2x^2\tau + 0.376126381k^3x^2\tau^{1.5}$$

$$+ 0.18806319kx^3\tau^{0.5} - 0.1667k^2x^3\tau + 0.12537546k^3x^3\tau^{1.5} + 0.047015798kx^4\tau^{0.5}$$

$$- 0.0416667k^2x^4\tau + 0.03134386k^3x^4\tau^{1.5} + \dots$$

(4.138)

Basitlik için $\tau^{0.5} = a$ alırsak, bu durumda yeni değişkene göre fonksiyonumuz,

$$v(x, a) = 1.12837916ka - k^2a^2 + 0.75225277k^3a^3 + 1.12837916kxa - k^2xa^2$$

$$+ 0.75225277k^3xa^3 + 0.56418958kx^2a - 0.5k^2x^2a^2 + 0.376126381k^3x^2a^3$$

$$+ 0.18806319kx^3a - 0.1667k^2x^3a^2 + 0.12537546k^3x^3a^3 + 0.047015798kx^4a$$

$$- 0.0416667k^2x^4a^2 + 0.03134386k^3x^4a^3 + \dots$$

(4.139)

olur. Padé polinomlarını elde etmek için matris formunda kolaylık için

$$\begin{aligned}
A &= 1.1283791ka - k^2a^2 + 0.7522527k^3a^3 + 1.1283791kxa - k^2xa^2 \\
&+ 0.7522527k^3xa^3 + 0.5641895kx^2a - 0.5k^2x^2a^2 + 0.376126381k^3x^2a^3 \\
&+ 0.18806319kx^3a - 0.1667k^2x^3a^2 + 0.047015798kx^4a \\
B &= 1.12837916ka - k^2a^2 + 0.75225277k^3a^3 + 1.12837916kxa - k^2xa^2 \\
&+ 0.75225277k^3xa^3 + 0.56418958kx^2a - 0.5k^2x^2a^2 + 0.18806319kx^3a \\
C &= 1.12837916ka - k^2a^2 + 0.75225277k^3a^3 + 1.12837916kxa - k^2xa^2 + 0.56418958kx^2a \\
D &= 0.12537546k^3x^3a^3 - 0.0416667k^2x^4a^2 \\
E &= 0.376126381k^3x^2a^3 - 0.1667k^2x^3a^2 + 0.047015798kx^4a \\
F &= 0.75225277k^3xa^3 - 0.5k^2x^2a^2 + 0.18806319kx^3a \\
G &= 0.03134386k^3x^4a^3
\end{aligned}$$

dönüşümlerini yaparak, (4.139) için Padé denklemlerini elde etmek amacıyla (4.117) ve (4.118) denklemlerini kullanalım. Böylece,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & D & E \end{vmatrix}$$

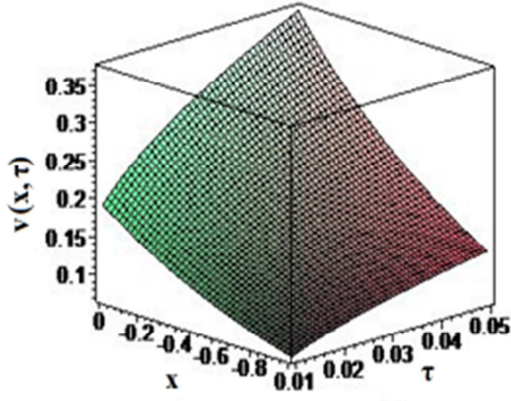
ve

$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ D & E & F \\ G & D & E \end{vmatrix}$$

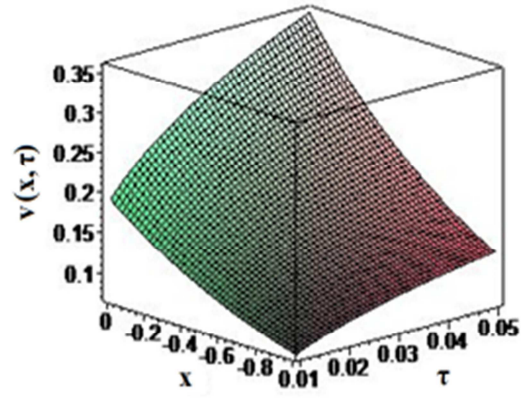
matris formlarını elde ederiz. Tekrar $\tau^{0.5} = a$ dönüşümü yapıp, $k = 2$ alırsak, (4.138) denklemini için (5,2). mertebeden Padé yaklaşımını;

$$\begin{aligned}
[5, 2]_{(x, \tau)} &= -0.3761263890\tau^{0.5} (226.8740929\tau^{1.5}x^2 - 512\tau^2x + 10.63472311\tau^{1.5}x \\
&- 53.69911185x^3\tau - 1024\tau^2 + 680.6222788\tau^{1.5} + 8.50777848\tau^{0.5}x^4 \\
&- 214.7964474x^2\tau + 53.17361553\tau^{0.5}x^3 - 418.1946711x\tau + 127.6166773x^2\tau^{0.5} \\
&- x^5 + 127.6166773x\tau^{0.5} - 384\tau - 6x^4 - 18x^3 - 24x^2) \\
&/ [7.089815404x^2\tau^{0.5} - 32x\tau - 21.26944621x\tau^{0.5} + 64\tau - x^3 + 4x^2]
\end{aligned} \tag{4.140}$$

şeklinde elde ederiz. (4.140) Padé yaklaşımı için elde edilen değerlerin tam çözüm ile karşılaştırıldığı değerler aşağıdaki Şekil 4.12’de ve Tablo 4.9’de gösterilmiştir.



(a) Tam çözüm



(b) ÇPY ile çözüm

Şekil 4.12: $\alpha=0.5$ için $S < E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.

Tablo 4.9: $\alpha=0.5$ için $S < E$ iken elde edilen nümerik değerler.

x	τ	V_{tam}	$V_{ÇPY}$	Mutlak Hata
-0.182321557	0.005	0.1179336530	0.1180861820	0.0001525294
-0.382321557	0.006	0.1046210933	0.1047878395	0.0001667462
-0.885423230	0.007	0.0676492994	0.0675087033	0.0001405961
-0.536893450	0.008	0.1015353165	0.1017493667	0.0002140502
-0.235675801	0.009	0.1443018610	0.1447560420	0.0004541815
-0.051293294	0.010	0.1546941890	0.1552679373	0.0005737483
-0.709253762	0.011	0.0977995954	0.0980183133	0.0002187179
-0.650946216	0.015	0.1178105405	0.1184099336	0.0005993931
-0.981471074	0.018	0.1110073193	0.1114611149	0.0004537956
-1.050946216	0.020	0.0886063225	0.0881330686	0.0004732539

2. **Durum:** İkinci olarak hisse senedi fiyatının uygulama fiyatından büyük olduğu durumu ($S > E$) göz önüne alalım. Böylece

$$\begin{aligned}
v(x, \tau) &= (e^x - 1)E_\alpha(-k\tau^\alpha) + e^x(1 - E_\alpha(-k\tau^\alpha)) = e^x - E_\alpha(-k\tau^\alpha) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k\tau^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots\right) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{k\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{k^2\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{k^3\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots
\end{aligned} \tag{4.141}$$

seri açılımı elde edilir. (4.141) denkleminde $\alpha = 1$ için seri açılımı:

$$v(x, \tau) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + k\tau - \frac{k^2\tau^2}{2} + \frac{k^3\tau^3}{6} - \frac{k^4\tau^4}{24} + \dots \tag{4.142}$$

şeklinde bulunur. Şimdi de (4.142) denkleminin $m = n = 2$ için çok değişkenli Padé yaklaşımı ile yaklaşık çözümünü bulalım. $m = n = 2$ için Padé denklemlerini elde etmek amacıyla (4.117) ve (4.118) denklemlerini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
p(x, \tau) &= \begin{vmatrix} x + k\tau + \frac{x^2}{2} - \frac{k^2\tau^2}{2} & x + k\tau & 0 \\ \frac{x^3}{6} + \frac{k^3\tau^3}{6} & \frac{x^2}{2} - \frac{k^2\tau^2}{2} & x + k\tau \\ \frac{x^4}{24} - \frac{k^4\tau^4}{24} & \frac{x^3}{6} + \frac{k^3\tau^3}{6} & \frac{x^2}{2} - \frac{k^2\tau^2}{2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{x^5}{12} - \frac{k\tau x^4}{12} - \frac{xk^4\tau^4}{12} + \frac{k^5\tau^5}{12} + \frac{k^5\tau^5 x}{12} - \frac{x^5 k\tau}{12} - \frac{2k^2\tau^2 x^3}{3} \\
&\quad - \frac{2k^3\tau^3 x^2}{3} + \frac{k^4\tau^4 x^2}{6} - \frac{k^2\tau^2 x^4}{6}
\end{aligned} \tag{4.143}$$

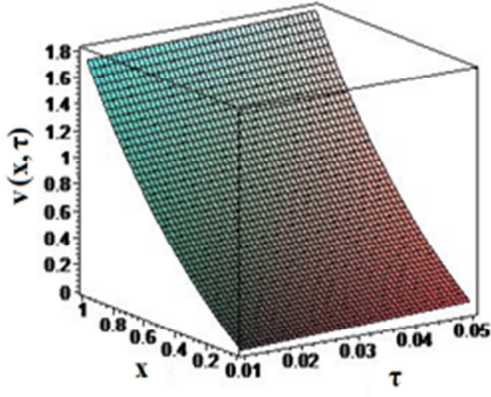
ve

$$\begin{aligned}
q(x, \tau) &= \left| \begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
\frac{k^3 x \tau^3}{6} - \frac{k^2 x^2 \tau^2}{4} + \frac{kx^3 \tau}{6} & \frac{k^3 \tau^3}{6} - \frac{k^2 x \tau^2}{2} + \frac{kx^2 \tau}{2} & kx\tau - \frac{k^2 \tau^2}{2} \\
\frac{k^3 x^2 \tau^3}{12} - \frac{k^2 x^3 \tau^2}{12} & \frac{k^3 x \tau^3}{6} - \frac{k^2 x^2 \tau^2}{4} + \frac{kx^3 \tau}{6} & \frac{k^3 \tau^3}{6} - \frac{k^2 x \tau^2}{2} + \frac{kx^2 \tau}{2}
\end{array} \right| \\
&= \frac{k^4 \tau^4}{12} - \frac{k^2 \tau^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{k\tau x^3}{6} - \frac{k^3 \tau^3 x}{6} + \frac{k^2 \tau^2 x^3}{12} - \frac{x^5}{24} + \frac{x^6}{144} + \frac{k^3 \tau^3 x^3}{18} + \frac{k^5 \tau^5}{24} \\
&\quad - \frac{k^3 \tau^3 x^2}{12} + \frac{k^6 \tau^6}{144} + \frac{k\tau x^4}{24} + \frac{k^2 \tau^2 x^4}{48} - \frac{xk^4 \tau^4}{24} + \frac{k^4 \tau^4 x^2}{48} \quad (4.144)
\end{aligned}$$

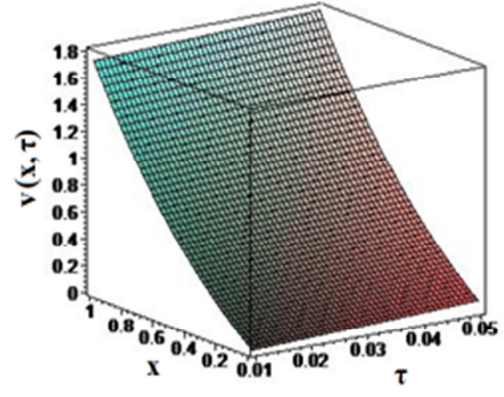
polinomlarını elde ederiz. (4.143) ve (4.144) denklemlerinde $k = 1.6$ alırsak yani, $r = 0.2$ ve $\sigma = 0.5$ için Avrupa tipi satın alma opsiyonunu göz önüne alırsak, bu durumda (4.142) için (2, 2). mertebeden Padé yaklaşımı,

$$\begin{aligned}
[2, 2]_{(x, \tau)} &= [-0.546133x\tau^4 - 1.706667\tau^2 x^3 + 0.0833333x^5 - 0.133333\tau x^4 \\
&\quad - 2.730667\tau^3 x^2 + 0.873813\tau^5 + 1.092267\tau^4 x^2 - 0.4266667\tau^2 x^4 \\
&\quad + 0.873813\tau^5 x - 0.1333333x^5 \tau] / [0.546133\tau^4 - 1.28000\tau^2 x^2 \\
&\quad + 0.0833333x^4 - 0.2666667\tau x^3 - 0.6826667\tau^3 x + 0.21333\tau^2 x^3 \\
&\quad - 0.04166667x^5 + 0.0069444x^6 + 0.2275556\tau^3 x^3 + 0.4369067\tau^5 \\
&\quad - 0.341333\tau^3 x^2 + 0.1165084\tau^6 + 0.0666667\tau x^4 + 0.0533333\tau^2 x^4 \\
&\quad - 0.2730667x\tau^4 + 0.1365333\tau^4 x^2] \quad (4.145)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. (4.145) Padé yaklaşımı için elde edilen değerlerin tam çözüm ile karşılaştırıldığı değerler aşağıdaki Şekil 4.13’de ve Tablo 4.10’da gösterilmiştir.



(a) Tam çözüm



(b) ÇPY ile çözüm

Şekil 4.13: $\alpha = 1$ için $S > E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.

Tablo 4.10: $\alpha = 1$ için $S > E$ iken elde edilen nümerik değerler.

x	τ	v_{tam}	$v_{ÇPY}$	Mutlak Hata
0.061875404	0.01	0.0797024666	0.0797022906	0.0000001761
0.116533816	0.02	0.1550889226	0.1550910424	0.0000021198
0.287682072	0.03	0.3801995456	0.3801802601	0.0000192855
0.717235435	0.04	1.1107564410	1.1106526810	0.0001037600
0.510825624	0.05	0.7435503209	0.7431672251	0.0003830958
0.421033434	0.06	0.6150711989	0.6141430591	0.0009281398
0.245839283	0.07	0.3846497928	0.3846644396	0.0000146468
0.601324223	0.08	0.9446799111	0.9444559516	0.0002239595
0.216533816	0.09	0.3758773283	0.3758865244	0.0000091961
0.001455645	0.10	0.1493129160	0.1493127856	0.0000001304

(4.141) denkleminde $\alpha = 0.75$ için seri açılımı yapılırsa,

$$v(x, \tau) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{k\tau^{0.75}}{\Gamma(7/4)} - \frac{k^2\tau^{1.5}}{\Gamma(5/2)} + \frac{k^3\tau^{2.25}}{\Gamma(13/4)} - \frac{k^4\tau^3}{\Gamma(4)}$$

$$= x + 0.5x^2 + 0.166667x^3 + 0.0416667x^4 + 1.0880653k\tau^{0.75} - 0.7522527k^2\tau^{1.5} - 0.39227117k^3\tau^{2.25} - 0.166667k^4\tau^3 \quad (4.146)$$

elde edilir. İşlemden kolaylık için $\tau^{0.75} = a$ dönüşümü yapılırsa,

$$v(x, a) = x + 0.5x^2 + 0.166667x^3 + 0.0416667x^4 + 1.0880653ka - 0.7522527k^2a^2 + 0.39227117k^3a^3 - 0.166667k^4a^4 \quad (4.147)$$

elde edilir. Ayrıca

$$A = x + 0.5x^2 + 0.166667x^3 + 1.0880653ka - 0.7522527k^2a^2 + 0.39227117k^3a^3$$

$$B = x + 0.5x^2 + 1.0880653ka - 0.7522527k^2a^2$$

dönüşümlerini yaparak, (4.147) için Padé denklemlerini elde etmek amacıyla (4.117) ve (4.118) denklemlerini kullanırsak,

$$p(x, a) = \begin{vmatrix} A & B & x + 1.0880653ka \\ \frac{x^4}{24} - \frac{k^4a^3}{6} & 0.166667x^3 + 0.39227117k^3a^3 & 0.5x^2 - 0.7522527k^2a^2 \\ 0 & \frac{x^4}{24} - \frac{k^4a^3}{6} & 0.166667x^3 + 0.39227117k^3a^3 \end{vmatrix}$$

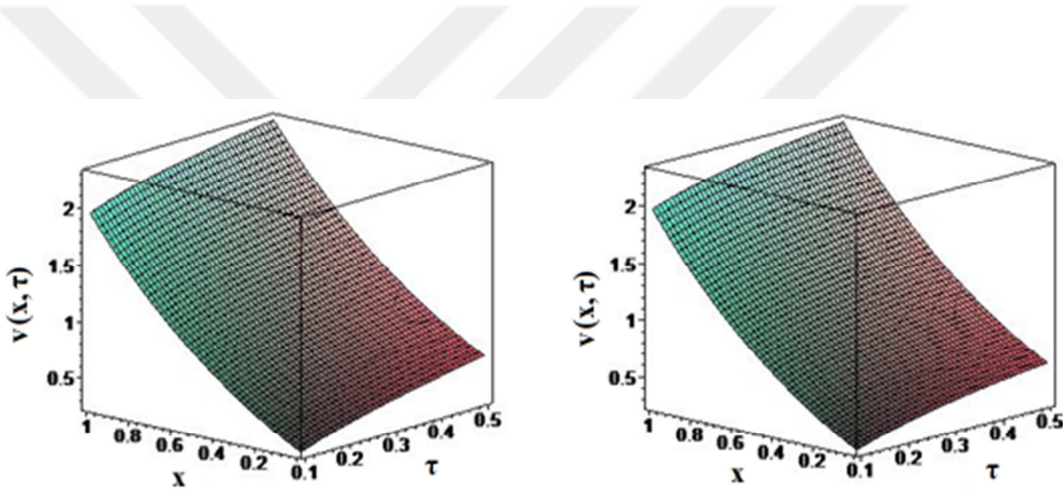
ve

$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{x^4}{24} - \frac{k^4a^3}{6} & 0.166667x^3 + 0.39227117k^3a^3 & 0.5x^2 - 0.7522527k^2a^2 \\ 0 & \frac{x^4}{24} - \frac{k^4a^3}{6} & 0.166667x^3 + 0.39227117k^3a^3 \end{vmatrix}$$

matris formlarını elde ederiz. Tekrar $\tau^{0.75} = a$ dönüşümü yapıp, $k = 1.6$ alırsak, (4.146) denklemini için (3, 2). mertebeden Padé yaklaşımını;

$$\begin{aligned}
[3,2]_{(x,\tau)} = & -0.0032567[-3532394.64\tau^{6.75} - 1422580.95\tau^{5.25}x^2 - 144557.23\tau^{3.75}x^4 \\
& - 1342406.47\tau^{4.5}x^3 - 65646.08\tau^{2.25}x^6 - 1276390.64\tau^{4.5}x^2 - 3721542.84\tau^{4.5}x - 50575.58\tau^3x^5 \\
& - 14552.69\tau^3x^4 - 1296960.42\tau^3x^3 - 17308.83\tau^{1.5}x^7 + 922910.65\tau^{3.75}x^3 - 22203.35\tau^{1.5}x^6 \\
& - 214006.63\tau^{2.25}x^5 - 59268.26\tau^{1.5}x^5 - 673864.73\tau^{2.25}x^4 - 662904.3\tau^6x - 1870018.5\tau^{5.25}x \\
& - 1679.37\tau^{0.75}x^8 + 6717.47\tau^{0.75}x^7 - 528283.54\tau^{3.75}x^2 - 6717.47\tau^{0.75}x^6 + 3911301.37\tau^6 \\
& - 6478850.32\tau^{5.25} + 1929.30x^8 - 3858.61x^7 + 321.55x^9]/[2158.88\tau^6 + 6090.11\tau^{5.25} \\
& + 12119.98\tau^{4.5} - 164.71\tau^3x^4 + 329.42\tau^3x^3 + 988.26\tau^3x^2 - 232.32\tau^{2.25}x^4 + 193.02\tau^{1.5}x^4 \\
& + 3.1416x^8 + 1858.55\tau^{2.25}x^3 - 12.57x^7 + 12.57x^6]
\end{aligned}
\tag{4.148}$$

şeklinde elde ederiz. (4.148) Padé yaklaşımı için elde edilen değerlerin tam çözüm ile karşılaştırıldığı değerler aşağıdaki Şekil 4.14'de ve Tablo 4.11'de gösterilmiştir.



(a) Tam çözüm

(b) ÇPY ile çözüm

Şekil 4.14: $\alpha = 0.75$ için $S > E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.

Tablo 4.11: $\alpha = 0.75$ için $S > E$ iken elde edilen nümerik değerler.

x	τ	v_{tam}	$v_{ÇPY}$	Mutlak Hata
0.440456873	0.01	0.6065929722	0.6062753604	0.0003176118
0.702604958	0.02	1.1063780590	1.1019599440	0.0044181150
0.523915259	0.03	0.8046850214	0.8037610335	0.0009239879
0.398920573	0.04	0.6316035856	0.6313161406	0.0002874450
0.604120542	0.05	0.9939607544	0.9920649699	0.0018957845

Tablo 4.11 (devam)

0.161268148	0.06	0.3603910115	0.3604642362	0.0000732247
0.371563556	0.07	0.6549550900	0.6547571279	0.0001979621
0.009478744	0.08	0.2327775533	0.2330508522	0.0002732989
0.154150680	0.09	0.4071327343	0.4074492640	0.0003165297
0.223143551	0.10	0.5067295016	0.5070631779	0.0003336763

(4.141) denkleminde $\alpha = 0.5$ için seri açılımı yapılırsa,

$$v(x, \tau) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{k\tau^{0.5}}{\Gamma(3/2)} - \frac{k^2\tau}{\Gamma(2)} + \frac{k^3\tau^{1.5}}{\Gamma(5/2)} - \frac{k^4\tau^2}{\Gamma(3)}$$

$$= x + 0.5x^2 + 0.166667x^3 + 0.0416667x^4 + 1.1283792k\tau^{0.5} - k^2\tau + 0.7522528k^3\tau^{1.5} - 0.5k^4\tau^2 \quad (4.149)$$

elde edilir. Kolaylık için $\tau^{0.5} = a$ dönüşümü yapılırsa,

$$v(x, a) = x + 1.1283792ka + 0.5x^2 - k^2a^2 + 0.166667x^3 + 0.7522528k^3a^3 + 0.0416667x^4 - 0.5k^4a^4 \quad (4.150)$$

bulunur. Aynı zamanda

$$A = x + 1.1283792ka + 0.5x^2 - k^2a^2 + 0.166667x^3 + 0.7522528k^3a^3$$

$$B = x + 1.1283792ka + 0.5x^2 - k^2a^2$$

dönüşümlerini yaparak, (4.150) için Padé denklemlerini elde etmek amacıyla (4.117) ve (4.118) denklemlerini kullanırsak,

$$p(x, a) = \left| \begin{array}{ccc} A & B & x + 1.1283792ka \\ \frac{x^4}{24} - \frac{k^4a^4}{2} & 0.166667x^3 + 0.7522528k^3a^3 & 0.5x^2 - k^2a^2 \\ 0 & \frac{x^4}{24} - \frac{k^4a^4}{2} & 0.166667x^3 + 0.7522528k^3a^3 \end{array} \right|$$

ve

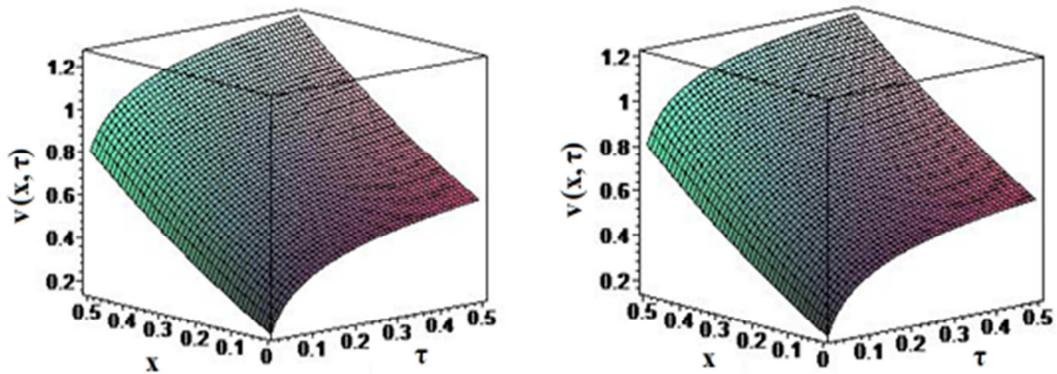
$$q(x, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{x^4}{24} - \frac{k^4 a^4}{2} & 0.166667x^3 + 0.7522528k^3 a^3 & 0.5x^2 - k^2 a^2 \\ 0 & \frac{x^4}{24} - \frac{k^4 a^4}{2} & 0.166667x^3 + 0.7522528k^3 a^3 \end{vmatrix}$$

polinomlarını elde ederiz. Tekrar $\tau^{0.5} = a$ dönüşümü yapıp, $k = 1.6$ alırsak, (4.149) denklemini için (3,2). mertebeden Padé yaklaşımını;

$$[3,2]_{(x,\tau)} = 0.1880632[-3504\tau^3 x^2 + 30.16\tau^{0.5} x^8 + 10635.8\tau^3 x + 97149.87\tau^{3.5} x^2 + 1026.4\tau x^5 + 103316.2\tau^4 x + 28461.88\tau^{2.5} x^2 - 120.64\tau^{0.5} x^7 + 8279.6\tau^2 x^4 + 11735.6\tau^{1.5} x^4 + 97149.9\tau^{3.5} x + 18770.53\tau^3 x^3 + 33606.91\tau^2 x^3 + 3705.97\tau^{1.5} x^5 + 2627.47\tau^2 x^5 + 120.6\tau^{0.5} x^6 - 15812.2\tau^{2.5} x^3 + 342.12\tau x^7 + 342.12\tau x^6 + 1235.32\tau^{1.5} x^6 + 1581.22\tau^{2.5} x^4 + 148167.39\tau^4 - 29404.6\tau^{4.5} + 19201.94\tau^{3.5} + 66.82x^7 - 5.57x^9 - 33.41x^8] / [19429.97\tau^4 + 18270.3\tau^{3.5} + 2000.2\tau^3 - 494.13\tau^2 x^4 + 988.26\tau^2 x^3 + 2964.78\tau^2 x^2 - 232.32\tau^{1.5} x^4 + 193\tau x^4 + 3.14x^8 + 1858.55\tau^{1.5} x^3 - 12.57x^7 + 12.57x^6]$$

(4.151)

olarak buluruz. (4.151) Padé yaklaşımı için elde edilen değerlerin tam çözüm ile karşılaştırıldığı değerler aşağıdaki Şekil 4.15'de ve Tablo 4.12'de gösterilmiştir.



(a) Tam çözüm

(b) ÇPY ile çözüm

Şekil 4.15: $\alpha = 0.5$ için $S > E$ iken tam çözüm ve ÇPY ile çözüm.

Tablo 4.12: $\alpha=0.5$ için $S > E$ iken elde edilen nümerik değerler.

x	τ	V_{tam}	$V_{ÇPY}$	Mutlak Hata
0.154150680	0.01	0.3243898510	0.3243627730	0.0000270776
0.503455345	0.02	0.8661138562	0.8656581289	0.0004557273
0.467769214	0.03	0.8458217946	0.8451944819	0.0006273127
0.366629924	0.04	0.7218083708	0.7209764316	0.0008319392
0.240139484	0.05	0.5748540320	0.5739498130	0.0009042194
0.083381609	0.06	0.4113579346	0.4107805646	0.0005773700
0.139761942	0.07	0.4927793411	0.4918048113	0.0009745298
0.632434897	0.08	1.2413361680	1.2420474390	0.0007112710
0.223143551	0.09	0.6239103446	0.6229615523	0.0009487923
0.011428696	0.10	0.3988490665	0.3982299526	0.0006191139

Yukarıdaki Şekil 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 ve Tablo 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 göz önüne alındığında $\alpha = 1$, $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için çok değişkenli Padé yaklaşımı ile elde edilen sayısal değerlerin analitik çözüm ile bulunan değerlere çok yakın olduğu gözlenmektedir. Bu sonuçlar Padé yaklaşımının kesirli Black-Scholes denkleminin çözümünün nümerik olarak elde edilmesinde oldukça etkili bir yöntem olduğunu ortaya koymaktadır.

4.12 Sonlu Fark Yaklaşımı (SFY)

Sonlu fark metotları diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmada kullanılır. Euler (1768) tarafından ilk kullanıldığında tek boyutlu problemlerin çözümlerinde uygulanmıştır. Daha sonraları bilgisayarla hesaplamaların gelişmesiyle birlikte karmaşık problemlerin çözümlerini elde etmek için sonlu fark metotları geliştirilmiştir. Bu bölümde en yaygın sonlu fark yaklaşımı olan açık yöntem (explicit method) verilecektir. Diferansiyel operatör yaklaşımları Taylor seri

açılımlarına dayanır. Şimdi f fonksiyonunun x in komşuluğunda ikinci mertebeden sürekli bir fonksiyon olduğunu göz önüne alalım. $h > 0$ için Taylor seri açılımı

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + O(h^3) \quad (4.152)$$

şeklindedir. (4.152) denklemini ileri fark şeklinde

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^2)$$

olarak yazabiliriz. Dolayısıyla ileri fark yaklaşımı

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

şeklinde yazılabilir. $h > 0$ için sonlu fark yaklaşımı aynı zamanda

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - O(h^3) \quad (4.153)$$

olarak da yazılabilir. Böylece (4.153) denklemini aşağıdaki gibi geri fark olarak ifade edilebilir:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h^2).$$

Böylece geri fark yaklaşımı da şöyledir:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Ayrıca, geri fark ve ileri fark yaklaşımlarını birleştirerek merkezi fark formülü

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda merkezi fark yaklaşımı

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

(4.152) ve (4.153) denklemlerinde bazı düzenlemeler yapılırsa, ikinci mertebeden merkezi fark yaklaşımı

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

denklemlerle ifade edilir. Buna ilaveten, $f(x, y)$ gibi iki değişkenli fonksiyonlar için $h = \Delta x$ olmak üzere $f_x(x, y)$ kısmi türevinin ileri fark ve geri fark yaklaşımları sırasıyla

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

ve

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x, y) - f(x-h, y)}{h}$$

olarak verilir. Bu durumda $f_x(x, y)$ kısmi türevinin merkezi fark yaklaşımı

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}.$$

İkinci mertebeden $f_{xx}(x, y)$ kısmi türevinin merkezi fark yaklaşımı

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

ve son olarak, $h = \Delta x$ ve $k = \Delta y$ olmak üzere ikinci mertebeden $f_{xy}(x, y)$ kısmi türevinin merkezi fark yaklaşımı

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \approx \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x+h, y) - f(x, y)}{hk}$$

şeklinde [107].

4.13 Kesirli Black-Scholes Denklemine Sonlu Fark Yaklaşımı ile Çözümü

Şimdi Black-Scholes denkleminin sonlu fark yaklaşımı ile çözümünü elde etmek için açık metodu kullanalım. Açık metodun türetilmesi için geri fark ve merkezi fark yaklaşımı kullanılır [40]. (3.20) kesirli Black-Scholes denkleminde $\alpha = 1$ alınarak elde edilen (3.3) klasik Black-Scholes denklemini göz önüne alalım. E opsiyonun uygulama fiyatı, S_{\min} ve S_{\max} sırasıyla opsiyonun minimum ve maksimum değerlerini göstermek üzere, Avrupa tipi satın alma opsiyonu için sınır koşulları

$$C(S, T) = \max(S - E, 0),$$

$$C(S_{\min}, t) = 0,$$

$$C(S_{\max}, t) = S_{\max} - Ee^{-r(T-t)}$$

şeklinde ifade edilebilir [41]. Açık metodun elde edilmesi için S nin bölgesi ve t diskritize edilecektir. $[t_0, T]$ ve $[S_{\min}, S_{\max}]$ aralıkları sırasıyla M ve N parçaya bölünerek,

$$\Delta t = \frac{T - t_0}{M}, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\Delta S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{N}, \quad S_{\min} \leq S \leq S_{\max}$$

elde edilir. Daha sonra S ve t nin genel notasyonları üzerinde bazı düzenlemeler yapılarak

$$t_i = t_0 + i\Delta t, \quad (i = 0, 1, \dots, M),$$

$$S_k = S_{\min} + k\Delta S \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

yazılabilir. Gösterimin kolay olması açısından bundan sonra (S_k, t_i) noktaları için opsiyon fiyatının yaklaşık değerini

$$V(S_k, t_i) \approx w_{k,i}$$

olarak göstereceğiz. Bu durumda Avrupa tipi satın alma opsiyonunun başlangıç ve sınır koşulları M, N ve $w_{k,i}$ cinsinden şu şekilde olur:

$$\begin{aligned}
w_{k,M} &\approx \max(S_k - E, 0), \\
w_{0,i} &\approx 0, \\
w_{N,i} &\approx S_N - Ee^{-r(t_M - t_i)}.
\end{aligned}$$

Buradan, Black-Scholes denklemindeki $\frac{\partial V(S_k, t_i)}{\partial t_i}$, $\frac{\partial V(S_k, t_i)}{\partial S_k}$ ve $\frac{\partial^2 V(S_k, t_i)}{\partial S_k^2}$ kısmi türevlerinin $\Delta t, \Delta S$ ve $w_{k,i}$ cinsinden geri ve merkezi fark yaklaşımları

$$\frac{\partial V(S_k, t_i)}{\partial t_i} \approx \frac{w_{k,i} - w_{k,i-1}}{\Delta t}, \quad (4.154)$$

$$\frac{\partial V(S_k, t_i)}{\partial S_k} \approx \frac{w_{k+1,i} - w_{k-1,i}}{2\Delta S}, \quad (4.155)$$

$$\frac{\partial^2 V(S_k, t_i)}{\partial S_k^2} \approx \frac{w_{k+1,i} - 2w_{k,i} + w_{k-1,i}}{(\Delta S)^2} \quad (4.156)$$

olarak bulunur. (4.154), (4.155) ve (4.156) denklemlerini (3.3) Black-Scholes denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{w_{k,i} - w_{k,i-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2} S_k^2 \frac{w_{k+1,i} - 2w_{k,i} + w_{k-1,i}}{(\Delta S)^2} + r S_k \frac{w_{k+1,i} - w_{k-1,i}}{2\Delta S} - r w_{k,i} = 0$$

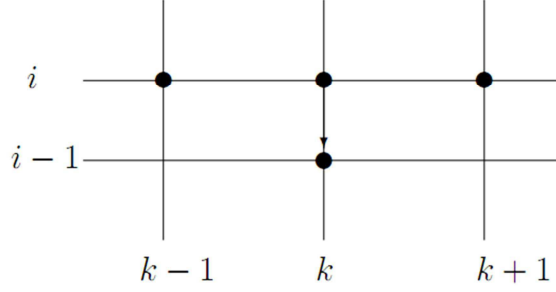
elde ederiz. Bu son denklemi daha basit ifade edebilmek için

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{2} \Delta t \left\{ \sigma^2 \left(\frac{S_k}{\Delta S} \right)^2 - r \frac{S_k}{\Delta S} \right\}, \\
\beta_k &= 1 - \Delta t \left\{ \sigma^2 \left(\frac{S_k}{\Delta S} \right)^2 + r \right\}, \\
\gamma_k &= \frac{1}{2} \Delta t \left\{ \sigma^2 \left(\frac{S_k}{\Delta S} \right)^2 + r \frac{S_k}{\Delta S} \right\},
\end{aligned}$$

notasyonlarını kullanalım. Bu durumda $i = M, M-1, \dots, 1$ ve $k = 1, 2, \dots, N-1$ olmak üzere

$$w_{k,i-1} = \alpha_k w_{k-1,i} + \beta_k w_{k,i} + \gamma_k w_{k+1,i} \quad (4.157)$$

denklemini elde edilir.



Şekil 4.16: Açık metodun molekülleri.

Yukarıdaki Şekil 4.16, açık metodun temel prensibini ifade etmekte olup (4.157) denklemini açıklamaktadır. i ifadesi zamanı, k ifadesi de hisse senedi fiyatını göstermektedir. Açık metod üzerinde α_k, β_k ve γ_k katsayıları ile birlikte i . satırdaki siyah noktaların değerlerinin toplamı, $(i-1)$. satır ve k . sütundaki siyah noktaların değerine eşittir [41].

Diğer taraftan, vektör formunda ifade etmek gerekirse;

$$w^{(i)} = \begin{pmatrix} w_{1,i} \\ \vdots \\ w_{N-1,i} \end{pmatrix}_{N-1 \times 1} \quad (4.158)$$

(4.157) denklemini her bir $i = M, M-1, \dots, 1$ ve $k = 1, 2, \dots, N-1$ için yazılırsa $M \times N$ tane denklem oluşur. Bu denklemler her bir i için (4.158) denklemindeki gibi matris formunda

$$w^{(i-1)} = Aw^{(i)} + y^{(i)}$$

olarak yazılabilir. Burada A matrisi $(N-1 \times N-1)$ boyutunda

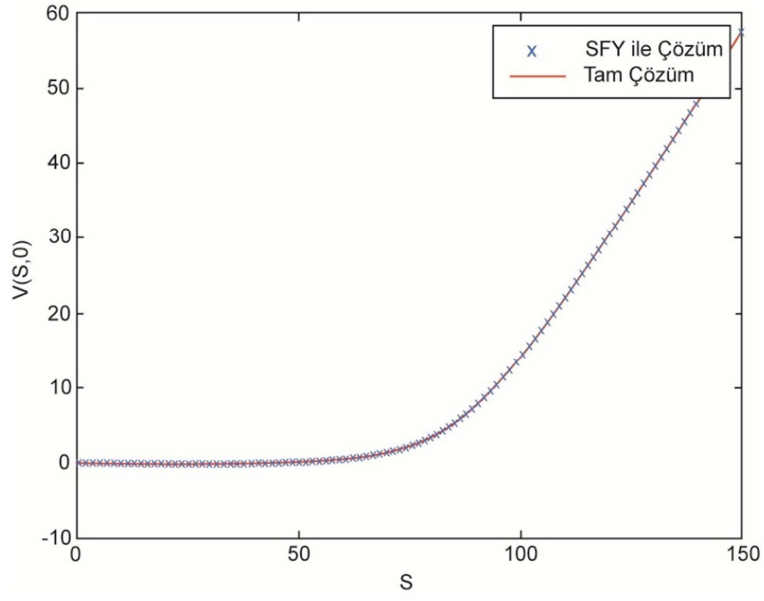
$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{N-2} & \gamma_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} \end{pmatrix}_{N-1 \times N-1}$$

ve $y^{(i)}$ matrisi

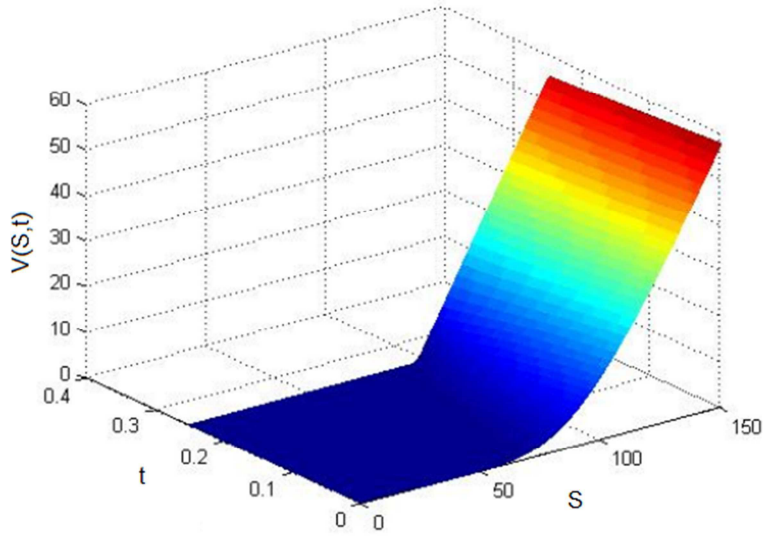
$$y^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 w_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{N-1} w_{N,i} \end{pmatrix}_{N-1 \times 1} .$$

4.13.1 Örnek

Uygulama fiyatı 95\$, hisse senedi fiyatı 100\$ olan, volatilitesi %50, risksiz faiz oranı %10 ve $T = 0.25$ olan Avrupa tipi alım opsiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda opsiyonun alım fiyatı 13.6953\$ olarak hesaplanır. Opsiyonun alım fiyatını açık metotla hesaplamak için uygun $S_{\min} = 0$, $S_{\max} = 150$, $dS = 2$, $dt = 1/1200$ parametrelerini seçersek [40], bu durumda açık metot kullanılarak hesaplanan alım opsiyonu fiyatı 13.6982\$ şeklinde olacaktır.



Şekil 4.17: Tam çözüm ile SFY ile çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.18: Alım opsiyonu fiyatı için açık çözüm metodu.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve öneriler şu şekilde sıralanabilir:

- Adomian ayrışım metodu, varyasyonel iterasyon metodu, Laplace homotopi pertürbasyon metodu, genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu, çok değişkenli Padé yaklaşımı ve sonlu fark metodu, finans literatüründe önemli bir yere sahip olan kesirli Black-Scholes opsiyon fiyatlama probleminin çözümünün bulunması üzerinde başarıyla uygulandı.
- Bu problemin ilgili metotlar yardımıyla yaklaşık analitik çözümleri ve $\alpha = 1$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 0.50$, $\alpha = 0.25$ durumları için opsiyonun fiyatının ayrı ayrı grafiklerle yorumları verildi.
- Bununla birlikte çalışmada Adomian ayrışım metodu kullanılarak genelleştirilmiş kesirli Black-Scholes denkleminin yaklaşık analitik çözümü elde edildi ve çözüm fonksiyonunun grafikleri yorumlandı.
- Elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde AAY, KVİM, LHPM, GDDM ve SFY'nin kesirli Black-Scholes denkleminin çözümünün bulunmasında oldukça etkili ve hızlı bir seri çözüm ürettiği görüldü.
- ÇPY'nin literatürdeki nadir uygulamalarından biri olan bu çalışmada ÇPY'nin tam çözüme çok yakın sonuçlar verdiği gözlemlendi.
- Bulunan sonuçların karşılaştırılmasında kullanılan verilerin gerçek hayattan elde edilen Avrupa tipi vanilla alım opsiyonu verileri olmasıyla, elde edilen çözümler hassasiyetle yorumlandı.
- Çalışmada elde edilen yaklaşık analitik çözümler $\alpha = 1$, $\alpha = 0.75$, $\alpha = 0.50$ ve $\alpha = 0.25$ durumları için göz önüne alındığında opsiyonun kullanım zamanında (T anında) α değerleri azaldıkça opsiyon için ödenen pirimin (payoff) arttığı gözlemlendi. Yani $\alpha = 1$ için opsiyon en düşük fiyata sahip iken $\alpha = 0.25$ olması halinde opsiyona gereğinden fazla fiyat biçilmesi (overpriced) durumunun ortaya çıktığı görüldü.

- Bu çalışmada Black-Scholes denkleminde temettü ödemesi (dividend payment) yapılmadığı varsayımı göz önüne alınmıştır. Bu alanda bundan sonra yapılacak çalışmalarda, Black-Scholes denkleminde temettü parametresi de ilave edilerek çözüm yapılabilir ve kesirli mertebeden türevlere göre sonuçlar yorumlanabilir.
- Bununla beraber ilgili seri yaklaşımlar Avrupa tipi satım opsiyonunu (put option) veren problem için de uygulanabilir.
- Ayrıca kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan metotlar farklı tip opsiyonların (Amerikan tipi opsiyon, bariyer opsiyonu, hisse senedi endeks opsiyonları, döviz opsiyonları, vadeli işlem sözleşmeleri üzerine opsiyonlar vb.) fiyatlandırılmasında kullanılabileceği gibi diğer finansal problemlere de uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] Podlubny, I., *Fractional differential equations*, New York: Academic Press, (1999).
- [2] Phaochoo, P., Luadsong, A. and Ascharyaphotha, N., "The meshless local Petrov–Galerkin based on moving kriging interpolation for solving fractional Black–Scholes model", *Journal of King Saud University-Science*, 28(1), 111-117, (2016).
- [3] Christara, C. C., Chen, T. and Dang, D. M., "Quadratic spline collocation for one-dimensional linear parabolic partial differential equations", *Numerical Algorithms*, 53(4), 511-553, (2010).
- [4] Holtz, M. and Kunoth, A., "B-spline-based monotone multigrid methods", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3), 1175-1199, (2007).
- [5] Ankudinova, J. and Ehrhardt, M., "On the numerical solution of nonlinear Black–Scholes equations", *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3), 799-812, (2008).
- [6] Ortigueira, M. D., *Fractional calculus for scientists and engineers*: Springer Science & Business Media, (2011).
- [7] Petráš, I., "Fractional derivatives, fractional integrals, and fractional differential equations in Matlab", *Engineering Education and Research Using MATLAB*, 10, 239-264, (2011).
- [8] Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., *Fractional integrals and derivatives, Theory and Applications*, London-New York: Gordon and Breach Sci. Publishers, (1993).
- [9] Mittag-Leffler, G., "Sopra la funzione $Ea(x)$ ", *Rend. R. Acc. Lincei, (Ser. 5)*, 13, 3-5, (1904).
- [10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*: Providence, RI: American Mathematical Society, (1998).

- [11] Adams, R. A., *A complete course calculus*: Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1999).
- [12] Odibat, Z. M. and Shawagfeh, N. T., "Generalized Taylor's formula", *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 286-293, (2007).
- [13] Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., *Theory and applications of fractional differential equations*: Elsevier Science Limited, (2006).
- [14] Miller, K. S. and Ross, B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*: Wiley-Interscience, (1993).
- [15] Abel, N., "Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies", *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, 1, 11-18, (1823).
- [16] Liouville, J., "Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires", *Journal de l'École Polytechnique*, 13(25), 58-84, (1837).
- [17] Demirci, E., "Kesirli basamaktan bir diferensiyel denklem üzerine", Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, (2011).
- [18] Meerschaert, M. M. and Sikorskii, A., *Stochastic models for fractional calculus*: Walter de Gruyter, (2011).
- [19] Debnath, L. and Bhatta, D., *Integral transforms and their applications*: Chapman & Hall, CRC, (2007).
- [20] Caputo, M., "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II", *Geophysical Journal International*, 13(5), 529-539, (1967).
- [21] Momani, S. and Odibat, Z., "A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220(1), 85-95, (2008).

- [22] Jumarie, G., "Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann–Liouville derivative", *Applied Mathematics Letters*, 22(11), 1659-1664, (2009).
- [23] Jumarie, G., "Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann–Liouville derivative for non-differentiable functions", *Applied Mathematics Letters*, 22(3), 378-385, (2009).
- [24] Momani, S. and Odibat, Z., "Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics", *Physics Letters A*, 355(4), 271-279, (2006).
- [25] Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S., *Adi diferensiyel denklemler*, Bursa: Dora Yayıncılık, (2013).
- [26] Odibat, Z. and Momani, S., "A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order", *Applied Mathematics Letters*, 21(2), 194-199, (2008).
- [27] Yalçın, K., Tanrıöven, C., Bal, H., Aksoy, E. E. and Kurt, Ç., *Finansal teknikler ve türev araçlar: Detay Yayıncılık*, (2011).
- [28] Borsa İstanbul. "Opsiyon Sözleşmeleri [online]", (19 Ağustos 2015), <http://www.borsaistanbul.com/urunler-ve-piyasalar/urunler/opsiyon-sozlesmeleri>, (2015).
- [29] Seydel, R. U., *Tools for computational finance*: Springer, (2006).
- [30] Black, F. and Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities", *The Journal of Political Economy*, 637-654, (1973).
- [31] Korkmaz, T. ve Ceylan, A., *Sermaye piyasası ve menkul değer analizi*, Bursa: Ekin kitabevi, (2006).
- [32] Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M., "Option pricing: A simplified approach", *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263, (1979).
- [33] Derman, E., Kani, I. and Chriss, N., "Implied trinomial tree of the volatility smile", *The Journal of Derivatives*, 3(4), 7-22, (1996).

- [34] Chriss, N. A., *The Black-Scholes and beyond interactive toolkit: a step-by-step guide to in-depth option pricing models*: McGraw-Hill, (1997).
- [35] Keleş, İ., "Microsoft güvenlik risk yönetimi kararlarının gerçek opsiyon yaklaşımıyla değerlemesi", *Journal of Yaşar University*, 1(4), 417–425, (2006).
- [36] Ahmed, E. and Abdusalam, H., "On modified Black–Scholes equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(3), 583-587, (2004).
- [37] Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J., *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*: Cambridge University Press, (1995).
- [38] Wilmott, P., Dewynne, J. and Howison, S., *Option pricing: mathematical models and computation*: Oxford financial press, (1993).
- [39] Beyazıt, M. F., *Stokastik finans*, Ankara: Seçkin Yayınları, (2011).
- [40] Uğur, Ö., *An Introduction to Computational Finance*: Imperial College Press, (2009).
- [41] Hergüner, E., "Investigation of fractional Black Scholes option pricing approaches and their implementations", M.Sc. Thesis, *Middle East Technical University Institute of Applied Mathematics*, Department of Financial Mathematics, Ankara, (2015).
- [42] Jumarie, G., "Derivation and solutions of some fractional Black–Scholes equations in coarse-grained space and time. Application to Merton’s optimal portfolio", *Computers & mathematics with applications*, 59(3), 1142-1164, (2010).
- [43] Gülkaç, V., "The homotopy perturbation method for the Black–Scholes equation", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(12), 1349-1354, (2010).
- [44] Kumar, S., Yildirim, A., Khan, Y., Jafari, H., Sayevand, K. and Wei, L., "Analytical solution of fractional Black-Scholes European option pricing equation by using Laplace transform", *Journal of fractional calculus and Applications*, 2(8), 1-9, (2012).

- [45] Gülkaç, V., "Comparative Study Analytic and Numerical Methods for Solving Non-Linear Black-Scholes Equation with European Call Option", *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR)*, 3(2), 66-78, (2015).
- [46] Cen, Z. and Le, A., "A robust and accurate finite difference method for a generalized Black-Scholes equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(13), 3728-3733, (2011).
- [47] Caputo, M., "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent", *Annals of Geophysics*, 19(4), 383-393, (1966).
- [48] Carpinteri, A. and Mainardi, F., "Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics", *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, 291-348, (1997).
- [49] He, J.-H., "Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations", *Bull. Sci. Technol.*, 15(2), 86-90, (1999).
- [50] Luchko, Y. and Gorenflo, R., "The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivatives", (1998).
- [51] Podlubny, I., "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation", *ArXiv preprint math/0110241*, (2001).
- [52] Turut, V. and Güzel, N., "On solving Partial Differential Equations of Fractional Order by Using the Variational Iteration Method and Multivariate Padé Approximations", *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(2), 147-171, (2013).
- [53] Elbeleze, A. A., Kılıçman, A. and Taib, B. M., "Homotopy perturbation method for fractional Black-Scholes European option pricing equations using Sumudu transform", *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, (2013).
- [54] Ghandehari, M. A. M. and Ranjbar, M., "European option pricing of fractional Black-Scholes model with new Lagrange multipliers", *Computational Methods for Differential Equations*, 2(1), 1-10, (2014).

- [55] Kumar, S., Kumar, D. and Singh, J., "Numerical computation of fractional Black–Scholes equation arising in financial market", *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1(3), 177-183, (2014).
- [56] Park, S.-H. and Kim, J.-H., "Homotopy analysis method for option pricing under stochastic volatility", *Applied Mathematics Letters*, 24(10), 1740-1744, (2011).
- [57] Ahmad, J., Shakeel, M., Hassan, Q. M. U. and Mohyud-Din, S., "Analytical solution of Black-Scholes model using fractional variational iteration method", *Int. J. Mod. Math. Sci*, 5, 133-142, (2013).
- [58] Elbeleze, A. A., Kılıçman, A. and Taib, B. M., "Fractional variational iteration method and its application to fractional partial differential equation", *Mathematical Problems in Engineering*, (2013).
- [59] Bohner, M., Marín, F. and Rodríguez, S., "European Call Option pricing using the Adomian decomposition Method", *Advances in Dynamical System and Applications*, 7(2), 25-38, (2012).
- [60] Chen, W. and Wang, S., "A finite difference method for pricing European and American options under a geometric Lévy process", *Management*, 11(1), 241-264, (2015).
- [61] Song, L. and Wang, W., "Solution of the fractional Black-Scholes option pricing model by finite difference method", *Abstract and Applied Analysis: Hindawi Publishing Corporation*, (2013).
- [62] Adomian, G., "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations", *Mathematical and Computer Modelling*, 13(7), 17-43, (1990).
- [63] Adomian, G., *Stochastic systems*, London: Academic Press, (1983).
- [64] Wazwaz, A.-M. and El-Sayed, S. M., "A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators", *Applied Mathematics and Computation*, 122(3), 393-405, (2001).

- [65] El-Wakil, S., Abdou, M. and Elhanbaly, A., "Adomian decomposition method for solving the diffusion–convection–reaction equations", *Applied Mathematics and Computation*, 177(2), 729-736, (2006).
- [66] Odibat, Z. and Momani, S., "Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order", *Applied Mathematical Modelling*, 32(1), 28-39, (2008).
- [67] Cherruault, Y. and Adomian, G., "Decomposition methods: a new proof of convergence", *Mathematical and Computer Modelling*, 18(12), 103-106, (1993).
- [68] Momani, S. and Odibat, Z., "Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order", *Physics Letters A*, 365(5), 345-350, (2007).
- [69] Odibat, Z. and Momani, S., "The variational iteration method: an efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics", *Computers & Mathematics with Applications*, 58(11), 2199-2208, (2009).
- [70] Inokuti, M., Sekine, H. and Mura, T., "General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics", *Variational method in the mechanics of solids*, 33(5), 156-162, (2013).
- [71] He, J.-H., "A new approach to nonlinear partial differential equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2(4), 230-235, (1997).
- [72] He, J.-H., "Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems", *Applied Mathematics and Computation*, 114(2), 115-123, (2000).
- [73] He, J.-H., "Variational principles for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients", *Chaos, Solitons & Fractals*, 19(4), 847-851, (2004).

- [74] He, J.-H., "Variational theory for linear magneto-electro-elasticity", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2(4), 309-316, (2001).
- [75] He, J.-H. and Wu, X.-H., "Variational iteration method: new development and applications", *Computers & Mathematics with Applications*, 54(7), 881-894, (2007).
- [76] Liu, H.-M., "Generalized variational principles for ion acoustic plasma waves by He's semi-inverse method", *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(2), 573-576, (2005).
- [77] Odibat, Z. and Momani, S., "Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(1), 27-34, (2006).
- [78] Olayiwola, M., "The Variational Iteration Method for Analytic Treatment of Homogeneous and Inhomogeneous Partial Differential Equations", *Global Journal of Science Frontier Research*, 15(5), (2015).
- [79] Turut, V., "Kesirli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri", Doktora Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, İstanbul, (2010).
- [80] Wang, S.-Q. and He, J.-H., "Variational iteration method for solving integro-differential equations", *Physics Letters A*, 367(3), 188-191, (2007).
- [81] He, J.-H., "Variational iteration method: some recent results and new interpretations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1), 3-17, (2007).
- [82] He, J.-H., "Generalized variational principles in fluids", *Science & Culture Publishing House of China, Hong Kong*, (2003).
- [83] Salehpoor, E. and Jafari, H., "Variational iteration method: A tools for solving partial differential equations", *The journal of Mathematics and Computer Science*, 2(2), 388-393, (2011).

- [84] Wazwaz, A.-M., "The variational iteration method for analytic treatment for linear and nonlinear ODEs", *Applied Mathematics and Computation*, 212(1), 120-134, (2009).
- [85] Kıymaz, O. and Cetinkaya, A., "Variational iteration method for a class of nonlinear differential equations", *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5(37), 1819-1826, (2010).
- [86] Odibat, Z. M., "A study on the convergence of variational iteration method", *Mathematical and Computer Modelling*, 51(9), 1181-1192, (2010).
- [87] Tatari, M. and Dehghan, M., "On the convergence of He's variational iteration method", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1), 121-128, (2007).
- [88] He, J.-H., "Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations", *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(3), 695-700, (2005).
- [89] He, J.-H., "A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 35(1), 37-43, (2000).
- [90] Zhou, J. K., *Differential transformation and its applications for electrical circuits*, Wuhan, China: Huazhong University Press, (1986).
- [91] Ayaz, F., "Applications of differential transform method to differential-algebraic equations", *Applied Mathematics and Computation*, 152(3), 649-657, (2004).
- [92] Jang, M.-J., Chen, C.-L. and Liu, Y.-C., "Two-dimensional differential transform for partial differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, 121(2), 261-270, (2001).
- [93] Arikoglu, A. and Ozkol, I., "Solution of fractional differential equations by using differential transform method", *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(5), 1473-1481, (2007).

- [94] Chen, C. o. K. and Ho, S. H., "Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method", *Applied Mathematics and Computation*, 106(2), 171-179, (1999).
- [95] Ertürk, V. S. and Momani, S., "Solving systems of fractional differential equations using differential transform method", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(1), 142-151, (2008).
- [96] Watanabe, Y., "Notes on the generalized derivative of Riemann–Liouville and its application to Leibniz’s formula. I and II", *Tôhoku Math. J.*, 34, 8-41, (1931).
- [97] Odibat, Z., Momani, S. and Erturk, V. S., "Generalized differential transform method: application to differential equations of fractional order", *Applied Mathematics and Computation*, 197(2), 467-477, (2008).
- [98] Rida, S., El-Sayed, A. and Arafa, A., "On the solutions of time-fractional reaction–diffusion equations", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(12), 3847-3854, (2010).
- [99] Yavuz, M., Özdemir, N. and Okur, Y. Y., “Generalized differential transform method for fractional partial differential equation from finance”, *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA)*, 2, Novi Sad, Serbia, 778-785, (2016).
- [100] Cuyt, A. A., "A review of multivariate Padé approximation theory", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12, 221-232, (1985).
- [101] Momani, S. and Qaralleh, R., "Numerical approximations and Padé approximants for a fractional population growth model", *Applied Mathematical Modelling*, 31(9), 1907-1914, (2007).
- [102] Baker, G. A. and Graves-Morris, P. R., *Padé approximants*: Cambridge University Press, (1996).
- [103] Cuyt, A. and Wuytack, L., *Nonlinear methods in numerical analysis*: Elsevier, (1987).

- [104] Bildik, N. and Konuralp, A., "Two-dimensional differential transform method, Adomian's decomposition method, and variational iteration method for partial differential equations", *International Journal of Computer Mathematics*, 83(12), 973-987, (2006).
- [105] Turut, V., "Application of multivariate Pade approximation for partial differential equations (PDE)", *Batman University Journal of Life Sciences*, 2(1), 17-28, (2012).
- [106] Yavuz, M. and Özdemir, N., "Numerical solution of fractional Black-Scholes equation by using the multivariate Padé approximation", *3rd International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering*, Antalya, Turkey, (2016).
- [107] Aydoğan, B., "Computational methods for pricing American options", M.Sc. Thesis, Atılım University, Ankara, (2014).