DEĞME MANİFOLDLARI

A.Funda SAĞLAMER

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Bölümü

Kasım 1995

45030

DEĞME MANİFOLDLARI

A. Funda Sağlamer

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Mazlum ABAK

1995

A. Funda SAĞLAMER'in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "Değme Manifoldları" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

22/12/1995

İmza

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mazlum ABAK

Üye: Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu

Üye: Yrd. Doç. Dr. Rıdvan Ezentaş

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04.01.1996 gün ve 01 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Yrd.Doç.Dr. İlyas Nuhoğlu

ÖZET

Değme Monifoldları
A. Funda SAĞLAMER
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Danışman: Yrd.Doç.Dr. Mazlum ABAK
Kasım - 1995

Bu tezde, değme manifoldları ve hemen hemen değme manifoldları incelenmiştir. Birinci bölümde bazı temel kavramlar, tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümü hemen hemen değme manifoldu, hemen hemen değme metrik manifold ve değme manifoldlarını çalışmaya ayırdık. Yine bu bölümde değme manifoldu ve değme metrik manifoldu örnekleri verdik. Üçüncü bölümde bir hemen hemen değme manifoldunun torsion tensör alanını tanımlayıp manifold üzerinde normal yapıyı kurduk. Üstelik bir K-değme manifoldu tanımlayıp manifoldun K-değme olması için bazı şartlar verdik.

Dördüncü bölümde hemen hemen değme manifoldlarının yarı-invaryant altmanifoldları incelenmiştir. Burada trans-Sasakian manifoldun tanımı yapılıp, bir trans-Sasakian manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu üzerindeki D, $D^{\perp}$, $D \oplus \{\xi\}$ ve $D \oplus D^{\perp}$ distribüsyonlarının integrallenebilirliği çalışıldı. Yine bu bölümde karışık total geodezik yarı-invaryant altmanifoldlar ve total umbilik yarı-invaryant altmanifoldlar incelendi. Son olarak bir örnek verildi.

Anahtar Kelimeler: hemen hemen değme yapı, tanjant demeti, hemen hemen kompleks yapı, normal yapı, K-değme manifoldu, Killing vektör alanı, distribüsyon.

SUMMARY

In this thesis. contact manifolds and almost contact manifolds were studied. In first part, some basic concepts, definitions and theorems were given. We set apart the second part to study the almost contact manifolds, almost contact metric manifolds and contact manifolds. Again in this part we gave examples of contact manifolds and contact metric manifolds. In the part, we defined the torsion tensor field of almost contact manifold and then we found the normal structure on manifold. Also we defined a K-contact manifold and we laid down some conditions, the manifolds to be K-contact.

In the fourth part, semi-invariant submanifolds of almost contact manifolds were studied. Here trans-Sasakian manifolds were studied. Here trans-Sasakian manifold was defined and integralability of distributions on D, $D^{\perp}$, $D \oplus \{\xi\}$ and $D \oplus D^{\perp}$ and this trans-Sasakian manifold on half invariant submanifolds were studied. Again in this part mixed totaly geodesic semi-invariant submanifolds and totally umbilical semi-invariant submanifolds were examined. And lastly an examples was given.

Key Words: almost contact structure, tangent bundle, almost complex structure, normal structure, K- contact manifold, Killing vector field, distribution.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarını yürüten ve çalışma boyunca hertürlü yardımı ve hoşgörüyü esirgemeyen Dumlupınar Üniversitesi Fen-Ed. Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın hocam Yrd.Doç.Dr. Mazlum ABAK'a, öneri ve fikirlerinden yararlandığım hocam Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Sayın Prof.Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR'a en içten teşekkürü bir borç bilirim.

A. Funda SAĞLAMER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
SUMMARY v
TEŞEKKÜR vi

1. BÖLÜM

1. TEMEL KAVRAMLAR 1

2. BÖLÜM

2. DEĞME MANİFOLDLARI 19
   2.1. Hemen hemen değme manifoldları 19
   2.2. Hemen hemen değme metrik manifoldları 23
   2.3. Değme Manifoldları 29

3. BÖLÜM

3. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARININ TORSİON TENSÖRÜ ... 55

4. BÖLÜM

4. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARININ YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI 76
   4.1. Distribüsyonların integrallenebilmesi 84
   4.2. Karışık total geodezik yarı-invaryant altmanifoldlar 94
   4.3. total umbilik yarı-invaryant altmanifoldlar 102
   4.4. Örnek 106

KAYNAKLAR DİZİNİ 112

I. BÖLÜM

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.: E^n de bir açık altcümle U olmak üzere

$f: U \rightarrow IR$

fonksiyonunun k. mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli ise, f fonksiyonuna **C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir** denir. Özel olarak f sadece sürekli ise **C^0 sınıfındandır** denir [4].

$C^k(U, IR) = \{f \mid f: U \rightarrow IR$ ve f fonksiyonu C^k sınıfından$\}$

$C^\infty(U, IR) = \{f \mid f \in C^k(U, IR), k \in IN\}$

gösterimleri kullanılır.

Tanım 1.2.: E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun.
Bir

$\psi : U \rightarrow V$

fonksiyonu

i) $\psi \in C^k(U, V)$

ii) $\psi^{-1}: V \rightarrow U$ var ve $\psi^{-1} \in C^k(V, U)$

önermelerini sağlıyor ise ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V ye de **k. dereceden diffeomorfiktir**ler denir [4].

Tanım 1.3.: M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye **C^k sınıfından diferansiyellenebilir manifold** denir [4].

Tanım 1.4.: M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $P \in V$ noktasındaki **tanjant uzay** $T_V(P)$ olsun. V nin bütün P noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P \in V} T_V(P)$ ile gösterilsin.

Bir

$$\Pi : \bigcup_{P \in V} T_V(P) \longrightarrow V$$

dönüşümü $\forall\, t_p \in T_V(P)$ tanjant vektörü için

$$\Pi(t_p) = P$$

biçiminde tanımlansın. O zaman V komşuluğu üzerindeki bir **vektör alanı** operatörü

$$X : V \longrightarrow \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\Pi o X = I : V \longrightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur [4].

Tanım 1.5.: $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayının cebirsel duali $T^*_{E^n}(P)$ ile gösterilir ve E^n in $P \in E^n$ noktasındaki **kotanjant uzayı** adını alır. $T^*_{E^n}(P)$ ın herbir elemanına, $P \in E^n$ noktasındaki **kotanjant vektör** adı verilir. Şu halde

$$T^*_{E^n}(P) = \{ \alpha^* \mid \alpha^* : T_{E^n}(P) \xrightarrow{\text{lineer}} IR \}$$

dır [4].

Tanım 1.6.: E^n in $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{E^n}(P)$ olsun. Buna göre, bir

$$w: E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P)$$

fonksiyonu için,

$$\Pi o w : E^n \xrightarrow{\text{özdeşlik}} E^n$$

olacak şekilde bir

$$\Pi: \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P) \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu mevcut ise w ye E^n üstünde bir **1-form** denir. (Diğer bölümlerde w yerine η alınmıştır.)[4].

Tanım 1.7.: Reel sayılar cismi üzerinde, r-tane vektör uzayı $V_1, V_2, ..., V_r$ olsun.

$$f: V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \longrightarrow IR$$

fonksiyonu $\forall\, u_i, v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq r$, ve $\forall\, a, b \in IR$ için

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_{i-1}, au_i + bv_i, v_{i+1}, \dots, v_r) = {} & a \,.\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \\ & + b \,.\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı ise f ye **r-lineer fonksiyon** denir. Buna göre, f r-lineer ise herbir V_i ye göre lineerdir. Özel olarak, r= 2 ise f ye bir **bilineer (2-lineer) fonksiyon** denir [4].

Tanım 1.8.: $V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ den IR ye bütün r-lineer fonksiyonların cümlesini,

$\pounds\,(V_1, V_2, \dots, V_r; IR)$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalar ile çarpma işlemleri, sıra ile,

$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_r) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_r$ ve
$\forall f_1, f_2 \in \pounds (V_1, V_2, \ldots, V_r; IR)$ için
$(f_1 + f_2)(u_1, u_2, \ldots, u_r) = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_r) + f_2(u_1, u_2, \ldots, u_r)$

ve $\forall \lambda \in IR$, $\forall f \in \pounds (V_1, V_2, \ldots, V_r; IR)$ için

$$(\lambda f)(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \lambda f(u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

biçiminde tanımlanırsa, bu cümle bu iki işleme göre, **IR üstünde bir vektör uzayı** olur. Bu vektör uzayına, $V_1^*, V_2^*, \ldots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının **tensör çarpımı** denir ve

$$\pounds(V_1, V_2, \ldots, V_r; IR) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \ldots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \ldots \otimes V_r^*$ tensör uzayının herbir elemanına **r. dereceden tensör** denir. O halde, r. dereceden bir tensör, bir r-lineer fonksiyondur. Özel olarak

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_r$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ uzayına bir **kovaryant tensör uzayı** ve bu uzayın herbir elemanına da r. dereceden bir **kovaryant tensör** veya **kovaryant r-tensör** denir.

$V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ uzayı kısaca $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir [4].

Tanım 1.9.: V vektör uzayının dual uzayı V* olsun. V* üzerinde s-lineer fonksiyonların vektör uzayı **kontravaryant tensör uzayı** olarak adlandırılır.

$$\pounds(V^*, V^*, \ldots, V^*; IR) = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{\text{s - tane}} = \otimes^s V = T_s(V^*)$$

ile gösterilir. Bu uzayın elemanlarına s. dereceden **kontravaryant tensörler** denir [4].

Tanım 1.10.: Reel sayılar cismi üzerinde tanımlı, n-boyutlu bir vektör uzayı V ve bunun duali V* olsun.

$$\pounds(V^r, V^{*s}; IR) = \{f \mid f: V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{-lineer}} IR\}$$

cümlesi yukarıda verilen toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. **Buna r. dereceden kovaryant ve s. dereceden kontravaryant tensör uzayı** veya (r, s) tipinde **karışık tensör uzayı** denir. Bu uzayın elemanlarına da (r, s)-tipinde tensör veya (r, s) tipinde **karışık tensör** adı verilir. Bu uzay;

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V)$$

veya

$$T_s{}^r(V)$$

biçiminde gösterilir[4].

Literatürde bazen $T_s{}^r(V)$ yerine $V_s{}^r$ de kullanılır. Bu uzayın elemanlarına $({}^r{}_s)$ tipinde tensörler (karışık tensörler) de denir.

$T_0{}^r(V) = V_0{}^r$ yerine $T^r(V) = V^r$, $T_s{}^0(V) = V_s{}^0$ yerine $T_s(V) = V_s$ de yazılır. Buna göre

$$V = T^1(V) = V^1 \text{ ve } V^* = T_1(V) = V_1$$

de alınabilir. Özel olarak $T_0{}^0(V) = V_0{}^0 = IR$ alınır. Şu halde skalarlar da birer tensördür, sıfırıncı mertebeden tensörler [4].

Tanım 1.11.: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \to V$$

dönüşümü de;

i) 2- lineer

ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = - [Y, X]$)

iii) $\forall X, Y, Z \in V$ için

$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, (Jacobi özdeşliği) olarak verilsin, [,] dönüşümüne, V üstünde bir **Lie operatörü** denir. (Bu taktirde V vektör uzayına bir **Lie Cebiri** denir) [4].

Tanım 1.12.: M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ (ileriki bölümlerde $\chi(M)$ yerine TM de alabileceğiz) ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere,

$$<,> : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, IR)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir **Riemann manifoldu** denir. Burada, $<,>$ fonksiyonuna M üzerinde bir **iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği** veya **diferansiyellenebilir metrik** denir[4].

M bir Riemann manifoldu olmak üzere, $\chi(M)$ de tanımlı $<,>$ iç çarpım fonksiyonu, M nin herbir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger. Şöyle ki X, Y $\in \chi(M)$ olmak üzere, $P \in M$ için $X_p, Y_p \in T_M(P)$ dir. Diğer taraftan, $<X, Y> \in C^\infty(M, IR)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $<X, Y> (P) \in IR$ dir. Böylece,

$$<,> (P) : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow IR$$

fonksiyonu, $\forall\, X_p, Y_p \in T_M(P)$

$$<X_p, Y_p> = <X, Y> (P) = <X, Y>|_p$$

şeklinde tanımlanabilir. Buna göre, $<,>$ (P), $T_M(P)$ de bir **iç çarpım fonksiyonu** olur[4].

Tanım 1.13.: M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası da $C^\infty(M, IR)$ olmak üzere diferansiyellenebilir

$$<,>: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, IR)$$

fonksiyonu,

i) 2-lineer

ii) Simetrik

iii) $\forall X \in \chi(M)$ için $\langle X, Y\rangle = 0 \Rightarrow Y = 0 \in \chi(M)$ (non-dejenere)

özelliklerini sağlıyor ise, M ye bir **yarı-Riemann manifoldu** denir[4].

Tanım 1.14.: M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

i) $D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f, g \in C^\infty(M, IR)$

ii) $D_X(f.Y) = f . D_XY + X[f]Y$, $\forall X, Y \in \chi(M)$, $\forall f \in C^\infty(M, IR)$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir **afin koneksiyon** ve D_X e de X e göre **kovaryant türev** operatörü denir [4].

Tanım 1.15.: M bir yarı-Riemann manifoldu ve D, M üstünde bir afin koneksiyon olsun. Eğer,

"i) D, C^∞ sınıfındandır.

ii) M nin bir A bölgesi üzerinde, C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$

için,

$$D_XY - D_YX = [X, Y] \qquad \text{(sıfır torsion özelliği)}$$

dir.

iii) M nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall p \in A$ için

$X_p < Y,Z> = <D_X Y, Z>|_p + <Y, D_X Z>|_p$ (D nin metrik ile bağdaşabilmesi özelliği)

dir."

özellikleri sağlanıyorsa D koneksiyonuna M üstünde bir **Riemann koneksiyonu** ve D_X e de X e göre **Riemann anlamında kovaryant türev** (Riemannian kovaryant türev) operatörü denir [4].

Tanım 1.16.: E^n in hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilşin. E^n de Riemann koneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı

$$S: \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$

S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** (Weingarten dönüşümü) denir[4].

Tanım 1.17.: *F* cismi üzerindeki bir V vektör uzayında tanımlı bir f bilineer simetrik fonksiyonuna V üzerinde bir **bilineer form** denir[3].

Tanım 1.18.: V vektör uzayı üzerindeki bir f bilineer formu için

$$N_f = \{\alpha \in V : f(\alpha, X) = 0 , \forall X \in V\}$$

cümlesine f nin **sıfır uzayı** (çekirdeği = Ker f) denir. İleride ker f yerine ker ϕ diyeceğiz. Eğer $N_f = \{0\}$ ise f ye **regüler**dir aksi halde f **singüler**dir denir. V sonlu boyutlu ise

$$\text{rank } f = \text{boy } V - \text{boy } N_f$$

olarak tanımlanır.

f bilineer formu regülerdir $\Leftrightarrow \forall\, Y \in V$ için $f(X, Y) = 0$ ise $X = 0$ dır [3].

Tanım 1.19.: M ve N, sırası ile, m ve n boyutlu birer C^r manifold olsunlar. $S_m = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ve $S_n = \{(V_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta\in B}$ de, sırası ile, M ve N için birer atlas olsunlar.

$$S_{m+n} = \{(U_\alpha \times V_\beta)\,,\,(\psi_\alpha \times \varphi_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\,\in\, A\times B}$$

atlası ile birlikte (m+n)-boyutlu MxN topolojik manifolduna M ve N manifoldlarının **çarpım manifoldu** denir[2].

M nin U_α üzerindeki **lokal koordinat sistemi** $(x_1, \dots, x_m)$ ve N nin V_β üzerindeki lokal koordinat sistemi de $(y_1, \dots, y_n)$ ise

$$\bar{x}_i\,(p, q) = x_i\,(p) \;\text{ ve }\; \bar{y}_k\,(p, q) = y_k\,(q)\,,\; \forall\,(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$$

ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$(\bar{x}_1\,, \dots, \bar{x}_m\,, \bar{y}_1\,, \dots, \bar{y}_n)$$

de M x N çarpım manifoldu için $U_\alpha \times V_\beta$ üzerindeki lokal koordinat sistemi olur[2].

Tanım 1.20.: M bir yarı-Riemannian manifold ve M nin k-boyutlu bir alt manifoldu $\overline{M}$ olsun M nin <,> metrik tensörünün $\chi(\overline{M})$ ye kısıtlanmasıyla elde edilen metrik tensöre, **indirgenmiş metrik tensör** ve $\overline{M}$ ye de indirgenmiş metrik tensör altında yarı-Riemannian manifold denir [4].

Tanım 1.21.: M bir Riemannian manifold ve M nin k-boyutlu bir alt manifoldu $\overline{M}$ olsun. Eğer indirgenmiş metrik tensör singüler değil ise $\overline{M}$ ye **singüler olmayan altmanifold** denir [4].

Tanım 1.22.: n-boyutlu bir Riemannian manifold M ve M nin k-boyutlu bir altmanifoldu $\overline{M}$ olsun. $\chi(\overline{M})$ nin $\chi(M)$ deki ortogonal komplemanı $x(\overline{M})^\perp$ ve M nin Riemann koneksiyonu D olsun. $\chi(M) = \chi(\overline{M}) \oplus (\overline{M})^\perp$ eşitliği gereğince, C^∞ olan $\forall\, X, Y \in \chi(\overline{M})$ için, yazılabilen

$$D_X\,Y = \overline{D}\,(X, Y) + V(X, Y)\,,\quad \overline{D}\,(X, Y) \in \chi(\overline{M}),\; V(X, Y) \in \chi(\overline{M})^\perp$$

eşitliğine **Genelleştirilmiş Gauss Denklemi** denir[4]. Buradaki $\overline{D}(X, Y)$ ve $V(X,Y)$ bileşenlerine $D_X Y$ nin, sırası ile, **teğetsel** ve **normal bileşenleri** denir.

Bundan sonra, bazen $\overline{D}(X, Y)$ yerine teğ $D_X Y$ ve $V(X, Y)$ yerine de nor $(D_X Y)$ yazacağız. Genel olarak, $X \in \chi(M)$ vektör alanı $\chi(M) = \chi(\overline{M}) \oplus \chi(\overline{M})^{\perp}$ eşitliği gereğince

$$X = X_1 + X_2, \quad X_1 \in \chi(\overline{M}), \quad X_2 \in \chi(\overline{M})^{\perp}$$

şeklinde X_1 ve X_2 gibi iki vektör alanının toplamı olarak yazılabilir. Bu vektör alanlarından X_1, X in teğetsel bileşeni ve X_2 de X in normal bileşenidir. O halde,

$$X_1 = \text{teğ}(X), \quad X_2 = \text{nor}(X) \text{ ve } \langle X_1, X_2 \rangle = 0$$

dir. Daha önemlisi, teğ ve nor fonksiyonları $\chi(M)$ üzerinde $C^{\infty}(M, IR)$ lineer fonksiyonlardır [4].

Teorem 1.1.: M bir Riemann manifoldu ve $\overline{M} \subset M$ k-boyutlu altmanifold olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \overline{D} : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\longrightarrow \chi(\overline{M}) \\ (X, Y) &\longrightarrow \overline{D}_X Y = \text{teğ}(D_X Y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ nin Riemann koneksiyonudur [4].

Teorem 1.2.: M bir Riemann manifoldu ve $\overline{M} \subset M$ altmanifold olsun. M ve $\overline{M}$ nin Riemann koneksiyonları, sırasıyla,D ve $\overline{D}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} V : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) &\longrightarrow \chi(\overline{M})^{\perp} \\ (X, Y) &\longrightarrow V(X, Y) = D_X Y - \overline{D}_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu $\chi(\overline{M})^{\perp}$ değerli, simetrik, 2-kovaryant tensör alanıdır[4].

Tanım 1.23.: M bir n-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$ de M nin bir k-boyutlu altmanifoldu olsun. O zaman

$$V : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \longrightarrow \chi(\overline{M})^{\perp}$$

$$(X, Y) \longrightarrow V(X, Y) = D_X Y - \overline{D}_X Y$$

şeklinde tanımlı, $\chi(M)^{\perp}$ değerli, simetrik, 2-kovaryant tensör alanına $\overline{M}$ nin **ikinci temel tensörü** veya **Genelleştirilmiş Weingarten Dönüşümü** denir [4].

Tanım 1.24.: n-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M nin k-boyutlu bir altmanifoldu $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin ikinci temel tensörü V ve $\chi(\overline{M})^{\perp}$ in bir ortonormal bazı

$$\psi = \{N_1, \dots, N_{n-k}\}$$

olmak üzere,

$$B_i : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \longrightarrow C^{\infty}(M, IR)$$

$$B_i(X, Y) = \langle V(X, Y), N_i \rangle , \quad 1 \leq i \leq n-k$$

şeklinde tanımlı B_i bilineer formlarına $\overline{M}$ nin ψ ye göre **ikinci temel formları** denir [4].

Tanım 1.25.: N bir C^{∞} (n-1)-manifold olsun.

$$f : N \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu bir **immersiyon** ise f(N) = M manifolduna E^n in bir **hiperyüzeyi** denir [4].

Tanım 1.26.: E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $\chi(E^n)$ in bir alt uzayı $\chi(M)$, $\chi(E^n)$ deki iç çarpıma göre $\chi(M)$ nin **ortogonal komplemanı** $\chi(M)^{\perp}$ olsun. $\chi(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazını {N} ile gösterelim. N ye M nin bir **birim normal vektör alanı** denir [4].

Tanım 1.27.: E^n, n-boyutlu öklid uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir **yönlendirme** denir.

E^n deki herbir irtibatlı M hiperyüzeyi için tam iki farklı yönlendirme vardır. Bunlardan birisi N_1 e diğeri de $-N_1$ e karşılık gelir.

Üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan hiperyüzeye **yönlendirilmiş** (oriented) **hiperyüzey** denir [4].

Tanım 1.28.: Üzerinde uygun bir yön seçilebilen bir M manifolduna **yönlenebilir manifold** veya **yönlendirilebilir manifold** denir. Böyle bir manifold üzerinde seçilmiş olan özel bir μ **yönüne** M manifoldu üzerinde μ yönü denir. (M, μ) ikilisine de **yönlendirilmiş manifold** veya kısaca **yönlü manifold** denir [4].

Tanım 1.29.: M de ∇ afin koneksiyonu verilsin. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için

$$
\begin{aligned}
T : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\
(X, Y) &\longrightarrow T(X, Y)
\end{aligned}
$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

şeklinde tanımlı (1,2) tipindeki tensör alanına M nin **torsion tensörü** denir [6].

Özel olarak T = 0 durumunda

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

dır ve ∇ ya M üzerinde sıfır **torsionlu (zero-torsion) koneksiyon** adı verilir [6].

Tanım 1.30.: (M, g), afin koneksiyonu ∇ olan bir Riemann manifoldu olsun.

$$R(X, Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$Z \longrightarrow R(X, Y)Z$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

olarak tanımlanan

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne M nin **eğrilik tensör alanı** ve R (X, Y) dönüşümüne de **eğrilik dönüşümü** denir [6].

Özellik: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$T(X, Y) = - T(Y, X)$$

$$R(X, Y) = - R(Y, X)$$

dir [6].

Tanım 1.31.: M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\varphi : IR \times M \longrightarrow M$$

$$(t, p) \longrightarrow \varphi_t(P)$$

dönüşümü,

i) $\forall t \in IR$ için $\quad \varphi_t : P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,

ii) $\forall t, s \in IR$ ve $P \in M$ için $\quad \varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$

şartlarını sağlıyor ise φ ye **M nin diferansiyellenebilir bir 1-parametreli grubu** denir[6].

Tanım 1.32.: M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup φ_t olsun. X vektör alanına göre bir K tensör alanının $L_X K$ ile gösterilen **Lie türevi**

$$(L_X K)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[K_p - (\varphi_t K)_p]$$

olarak tanımlanır [6].

Önerme 1.1: X vektör alanına göre L_X ile gösterilen Lie türevi, aşağıdaki önermeleri sağlar.

i) $L_X(K \otimes K') = (L_X K) \otimes K' + K \otimes (L_X K')$ (K, K' herhangi tensör alanları),

ii) $L_X f = Xf \quad , \quad f \in F(M)$,

iii) $L_X Y = [X, Y] \quad , \quad Y \in \chi(M)$ [6].

Tanım 1.33.: (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M nin bir sıfır torsionlu ∇ koneksiyonu için,

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M)$$

oluyor ise ∇ ya M nin **Levi-Civita koneksiyonu (Riemann koneksiyonu)** denir [6].

Tanım 1.34.: Bir $U \subset M$ açığı üzerinde

$$w : U \longrightarrow \bigcup_{P \in U} \wedge^r T_U^*(P)$$

$$p \longrightarrow w(p) : T_M(P) \times \dots \times T_M(P) \xrightarrow[\text{anti-simetrik}]{\text{r-lineer}} IR$$

şeklinde tanımlı w ye U üstünde bir **r-form**'dur denir.

O zaman;

$$w = \sum w_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $\forall X_1, X_2, \dots, X_r \in \chi(M)$ için

$$w(X_1, \dots, X_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} w_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}(X_1, \dots, X_r)$$

$$w(X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{r!} \det [w_j(X_k)] \quad , \quad 1 \leq j, k \leq r,$$

dir [6].

$D^r = D^r(M)$ ile ; $r = 0, 1, \dots, n$ için M üzerindeki r-formların cümlesini göstereceğiz. Özel olarak r=0 için $D^0 = F(M) = C^\infty(M, IR)$ tanımlanır.

D^r bir reel vektör uzayıdır ve $F(M)$-modül gibi görülebilir. $f \in F(M)$ ve $w \in D^r$ için fw r-formu

$$(fw)_P = f(p) w_P \quad , \quad p \in M$$

olarak tanımlanır. Ayrıca;

$$D = D(M) = \sum_{r=0}^{\infty} D^r(M)$$

vektör uzayı $\wedge$ dışçarpım işlemine göre bir Reel cebirdir [6].

Tanım 1.35.: d: D(M) $\rightarrow$ D(M) (dış türev = exterieur derivative operatörü) için aşağıdaki önermeler geçerlidir [6]:

i) d; D(M) nin kendisi üzerine $d(D^r) \subset D^{r+1}$ olacak şekilde bir r-lineer dönüşümüdür,

ii) $f \in D^0 = \mathcal{F}(M) \Rightarrow df$ f nin tam diferansiyelidir.

iii) $w_1 \in D^r$, $w_2 \in D^s \Rightarrow d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^r w_1 \wedge dw_2$

iv) $d^2 = 0$ dır.

Analiz derslerinde d ye diferansiyel operatörü denir.

Önerme 1.2.: X ve Y, M üzerinde vektör alanları olsunlar. O zaman

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

dir [6].

Önerme 1.3.: (1, r)-tipinde bir tensör alanı K olsun. O zaman

$\forall X, Y_1, \ldots, Y_r \in \chi(M)$ için

$$(L_X K)(Y_1, \ldots, Y_r) = [X, K(Y_1, \ldots, Y_r)] - \sum_{i=1}^{r} K(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_r)$$

dir [6].

Önerme 1.4.: $L_X K = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall t \in IR$ için φ_t nin K yı invaryant bırakmasıdır [6].

Önerme 1.5.: w r-formu $\forall X_0, X_1, \dots, X_r \in \chi(M)$ için

$$dw\,(X_0, X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i \,(W\,(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_r))$$

$$+ \frac{1}{r+1} \sum_{0 \le i \le j \le r} (-1)^{i+j}\, W\,([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_r)$$

dir. Eğer özel olarak w bir 1-form ise,

$$2dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X, Y]$$

dir [6].

Tanım 1.36.: M, n-boyutlu bir manifold ve bir $P \in M$ noktasında $T_M(P)$ nin r-boyutlu bir altuzayı S(P) olsun. P noktasının bir V komşuluğu üzerindeki her $q \in V$ için $S(q) = S_P\{X_1(q), \dots, X_r(q)\}$ olacak şekilde $X_1, \dots, X_r$ vektör alanları var ise S ye M nin bir r-boyutlu **distribüsyonu** denir. $\{X_1, \dots, X_r\}$ sistemine de S(P) nin bir bazı denir.

Bir X vektör alanının tanım bölgesi U olsun. $\forall q \in U$ için $X(q) \in S(q)$ oluyor ise X e S nin bir vektör alanıdır denir ve $X \in S$ yazılır. Buna göre;

$\forall X, Y \in S$ için $[X, Y] \in S$ oluyor ise S distribüsyonuna bir **involütive (involütif) distribüsyon** denir[6].

$\forall X, Y \in S$ için $[X, Y] \in S \Rightarrow S$ **involütif** dir denir[6].

Önerme 1.6.: M de bir ∇ afin koneksiyonu ve bir $U \subset M$ açık altcümlesi verilsin. $X, Y \in \chi(M)$ olsun. U üzerinde X veya Y sıfır ise $\nabla_X Y$ de U üzerinde sıfırdır [6].

Tanım 1.37.: ((V, +), (IR, +, .), .) **vektör uzayının kompleksleştirilmişi** diye

$$V^c = \{X + iY \mid X, Y \in V\}$$

ve

$$\forall X_1 + iY_1,\ X_2 + iY_2 \in V^c, \forall Z = Z_1 + iZ_2 \in \mathbb{C} \text{ için}$$

$(X_1 + iY_1) + (X_2 + iY_2) = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2),$

$(Z_1 + iZ_2)\,(X_1 + iY_1) = (Z_1X_1 - Z_2Y_1) + i(Z_1Y_1 + Z_2X_1)$

olmak üzere,

$((V^c, +), (C, +, .), .)$

vektör uzayına denir [6].

Önerme 1.7.: $A : V \xrightarrow{\text{lineer}} V \;;\; ((V, +), (IR, +, .)\,.)$

verilsin. O zaman

$A^2 = -I \Rightarrow$ V nin $\{\alpha_1,\dots, \alpha_n, A(\alpha_1),\dots,A(\alpha_n)\}$ olacak şekilde bir bazı vardır [6].

Tanım 1.38.: $V = ((V, +), (IR, +, .)\,.)$ verilsin.

$J : V \xrightarrow{\text{lineer}} V$ öyle ki $J^2 = -I$ ise J lineer dönüşümüne V üzerinde bir **kompleks yapıdır** denir [6].

Tanım 1.39.: M bir reel manifold olsun. M üzerinde bir J tensör alanı (1, 1)-tipinde iken;

$\forall P \in M$ için

$J(P) = J_P : T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$

lineer dönüşümü $T_M(P)$ üzerinde bir kompleks yapı ise J ye M üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapı (hhky)** dır denir. M ye de J kompleks yapısıyla bir **hemen hemen kompleks manifolddur** denir[6].

Sonuç 1.1.: M bir hemen hemen kompleks manifold ise boyutu 2n'dir [6].

Teorem 1.3.: M bir kompleks manifold ise M üzerinde bir hhky vardır [6].

Tanım 1.40.: (1, 1)-tipinde bir tensör alanı F olsun. O zaman $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsion tensörü** denir[6].

$F = J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde $J^2 = - I$ olacağından da

$$N_J(X, Y) = - [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - j[X,JY]$$

dir [6].

Teorem 1.4.: Bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirdir $\Leftrightarrow N_J = 0$ dır [6].

Tanım 1.41.: M de bir J hemen hemen kompleks yapısı verilsin. Eğer $X \in \chi(M)$ için

$$L_X J = 0$$

ise X e **infinitezimal otomorfizm (Analitik vektör alanı)** denir [6].

Tanım 1.42.: (G, o) ikilisi bir grup ve aynı zamanda G bir C^∞ manifold olsun. O zaman G deki grup işlemi olan o

$$o : G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \longrightarrow ab^{-1}$$

işlemi bir C^∞ fonksiyon ise G ye bir **Lie grubu**dur denir.

Örnek: G=GL(n, IR) ve matrislerde çarpma işlemi bir gruptur. Aynı zamanda $\forall A, B \in GL(n, IR)$ için $AB^{-1} \in GL(n, IR)$ dir. O halde GL (n, IR) bir matris Lie grubudur[2].

II. BÖLÜM

2. DEĞME MANİFOLDLARI

2.1. Hemen hemen değme manifoldları

Tanım 2.1.: M bir (2n+1)-boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da M üzerinde, sırasıyla, (1,1) - tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1$$

ve

$$\phi^2 X = - X + \eta(X) . \xi$$

özellikleri sağlanıyorsa o zaman (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir **hemen hemen değme yapısı** ve bu yapı ile birlikte M ye de bir hemen hemen değme manifold denir[6].

Teorem 2.1.1. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için

i) $\phi\xi = 0$,

ii) $\eta(\phi X) = 0$,

iii) rank $\phi = 2n$

dir [6].

İspat: (i) $\forall X \in \chi(M)$ için Tanım 2.1 den

$$\phi^2 X = - X + \eta(X) . \xi$$

olduğunu biliyoruz. Burada özel olarak $X = \xi$ alınır ise,

$$\phi^2 \xi = - \xi + \eta(\xi) . \xi$$

olur. Gene Tanım 2.1 gereğince

$$\eta(\xi) = 1$$

olduğu gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}\phi^2\xi &= -\xi + 1 . \xi \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. O zaman ya

$$\phi\xi = 0$$

dır, ya da $\phi\xi$ vektörü, ϕ nın sıfır özdeğerine karşılık gelen aşikâr olmayan bir özvektördür. İkinci halde

$$\phi\xi \neq 0$$

olmalıdır. Eğer $\phi\xi \neq 0$ ise $\phi^2 X = - X + \eta (X) . \xi$ eşitliği gereğince

$$\phi^2 (\phi\xi) = - \phi\xi + \eta (\phi\xi) . \xi$$

veya $\phi^2 (\phi\xi) = 0$ olduğuna göre buradan da

$$\phi\xi = \eta (\phi\xi) . \xi$$

elde edilir. Böylece

$$\phi\xi \neq 0$$

olması $\eta (\phi\xi) \neq 0$ olmasını da gerektirir. Bu durumda

$$\phi\xi = \eta (\phi\xi) . \xi$$

eşitliğinde her iki tarafa ϕ uygulanırsa

$$\phi\,(\phi\xi) = \phi\,(\eta(\phi\xi)\,.\,\xi)$$

veya

$$\phi^2\,\xi = \eta(\phi\xi)\,.\,\phi\xi$$

elde edilir. Burada $\phi^2\,\xi = 0$ olduğundan

$$0 = \eta\,(\phi\xi)\,.\,\phi\xi$$

dır. Burada $\eta(\phi\xi) \neq 0$ kabulümüz bizi

$$\phi\xi = 0$$

sonucuna götürür.

(ii) Tanım 2.1 den

$$\phi^2 X = -\,X + \eta(X)\,.\,\xi$$

dır. Bu eşitliğin iki yanına ϕ uygulanırsa

$$\phi\,(\phi^2 X) = \phi\,(-X + \eta(X)\,.\,\xi)$$
$$\Rightarrow \phi^3 X = -\,\phi X + \eta(X)\,.\,\phi\xi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (*)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\,.\,\xi$$

denkleminde X yerine ϕX yazılırsa,

$$\phi^2(\phi X) = -\,\phi X + \eta(\phi X)\,.\,\xi$$

$$\Rightarrow \phi^3 X = -\,\phi X + \eta(\phi X)\,.\,\xi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (**)$$

bulunur. (*) ve (**) eşitliklerinden,

$$-\phi X + \eta(X)\,\phi\xi = -\,\phi X + \eta(\phi X)\,.\,\xi$$

yazabiliriz. Buradan

$$\eta(X) . \phi\xi = \eta(\phi X) . \xi$$

elde edilir. $\phi\xi = 0$ olduğundan,

$$\eta(\phi X)\xi = 0$$

ve $\xi \neq 0$ olması nedeniyle de

$$\eta(\phi X) = 0$$

bulunur.

(iii) $\phi_p : T_M(P) \longrightarrow T_M(P), \forall\, p \in M$

olması nedeniyle

$$\text{Rank}\phi + \text{Sıfırlık}\phi = 2n + 1 = \text{boy}(M)$$

dir. $\forall X \in \text{Ker}\phi$ için

$$\phi X = 0$$

olacağından

$$\phi^2 X = - X + \eta(X) . \xi$$

$$\Rightarrow 0 = - X + \eta(X) . \xi$$

$$\Rightarrow X = \eta(X) . \xi$$

eşitliği elde edilir. Burada $X \in S_p\,\{\xi\}=\text{Ker}\phi$ dir. O halde $\text{Ker}\phi$ nin bir bazı ξ dır.O halde

$$\text{Sıfırlık}\ \phi = \text{boy}\ (\text{Ker}\phi) = 1$$

dir. Böylece

$$\text{Rank}\ \phi + \text{Sıfırlık}\ \phi = 2n + 1$$

$\Rightarrow \text{Rank}\, \phi + 1 = 2n + 1$

$\Rightarrow \text{Rank}\, \phi = 2n$

bulunur.

2.2. Hemen hemen değme metrik manifoldları

Teorem 2.2.1.: Herbir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir h Riemann metrik tensör alanı

$$h(X, \xi) = \eta(X)\ , \forall\, X \in \chi\, (M)$$

olacak şekilde vardır[6].

İspat: M de Riemann metrik tensör alanı f olsun. h yi f yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlayalım: $\forall X, Y \in \chi\,(M)$ için,

$$h(X, Y) = f(X - \eta(X)\,.\,\xi, Y - \eta(Y)\,.\,\xi) + \eta(X)\,.\,\eta(Y)$$

dir. Buradan h nin 2-lineer, simetrik ve pozitif tanımlı olduğu kolayca görülür. Burada $Y = \xi$ konumu yapılırsa

$$h(X, \xi) = f(X - \eta(X)\,.\,\xi\,, \xi - \eta(\xi).\,\xi) + \eta(X)\,.\,\eta(\xi)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow h(X, \xi) &= f(X - \eta(X)\,.\,\xi, \xi - 1\,.\,\xi) + \eta(X)\,.\,1\\ &= f(X - \eta(X)\,.\,\xi, 0) + \eta(X)\\ &= f(-\,\phi^2X, 0) + \eta(X)\\ &= 0 + \eta(X)\\ &= \eta(X)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.2.2.: Herbir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir g Riemann metrik tensör alanı

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

ve

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\,\eta(Y)$$

olacak şekilde vardır[6].

İspat: Teorem 2.2.1. gereğince M de

$$h(X, \xi) = \eta(X)$$

olacak şekilde bir h Riemann metriği vardır. g (0,2) tensör alanını

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}\,(h(X, Y) + h(\phi X, \phi Y) + \eta(X)\,\eta(Y))$$

olarak tanımlayalım. Buradan g nin M üzerinde bir Riemann metriği olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca Y = ξ konumu yapılarak

$$\begin{aligned} g(X, \xi) &= \frac{1}{2}\,(h(X, \xi) + h(\phi X, \phi\xi) + \eta(X)\,\eta(\xi)) \\ &= \frac{1}{2}\,(h(X, \xi) + h(\phi X, 0) + \eta(X)\,.\,1) \\ &= \frac{1}{2}\,(\eta(X) + 0 + \eta(X)1) \\ &= \frac{1}{2}\,(2\eta(X)) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$g(\phi X, \phi Y) = \frac{1}{2}\,(h(\phi X, \phi Y) + h(\phi^2 X, \phi^2 Y) + \eta(\phi X)\,.\,\eta(\phi Y))$$

$$= \frac{1}{2}\ (h(\phi X, \phi Y) + h(-X + \eta(X)\ .\ \xi, -\ Y + \eta(Y)\ .\ \xi) + 0)$$

$$= \frac{1}{2}\ (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) - h(X, \eta(Y)\ .\ \xi) - h(\eta(X)\ .\ \xi, Y)$$

$$+ h(\eta(X)\ .\ \xi, \eta(Y)\ .\ \xi))$$

$$= \frac{1}{2}\ (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) - \eta(Y)\ h(X, \xi)$$

$$- \eta(X)\ .\ h(\xi, Y) + \eta(X)\ \eta(Y)\ h(\xi, \xi))$$

$$= \frac{1}{2}\ (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) - \eta(Y)\ \eta(X)$$

$$- \eta(X).\ \eta(Y) + \eta(X)\ \eta(Y)\ \eta(\xi))$$

$$= \frac{1}{2}\ (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) + \eta(X)\ \eta(Y) - 2\eta(X)\ \eta(Y))$$

$$\Rightarrow g(\phi X, \phi Y) = \frac{1}{2}\ (h(\phi X, \phi Y) + h(X, Y) + \eta(X)\ .\ \eta(Y)) - \eta(X)\ \eta(Y)$$

$$= g(X, Y) - \eta(X)\ \eta(Y)$$

dir.

Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2.1.: M hemen hemen değme manifoldu üzerinde

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\ \eta(Y)$$

olacak şekilde g Riemann metriği için

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0$$

dır, yani ϕ, anti-simetrik olacak şekilde M üzerinde bir g Riemann metriği vardır[6].

İspat: Teo. 2.2.2. gereğince g Riemann metriği istenilen özelliklerde vardır. Buna göre;

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\,\eta(Y)$$

ifadesinden

$$g(X, Y) = g(\phi X, \phi Y) + \eta(X)\,\eta(Y)$$

yazılabilir. Bu denklemde X yerine ϕX konumu yapılırsa

$$\begin{aligned}
& g(\phi X, Y) = g(\phi^2 X, \phi Y) + \eta(\phi X)\,\eta(Y) \\
\Rightarrow\ & g(\phi X, Y) = g(-X + \eta(X)\,\xi, \phi Y) + 0\,.\,\eta(Y) \\
& \qquad = -\,g(X, \phi Y) + \eta(X)\, g(\xi, \phi Y) + 0 \\
& \qquad = -\,g(X, \phi Y) + \eta(X)\,\eta(\phi Y), \qquad \eta(\phi Y) = 0 \\
& \qquad = -\,g(X, \phi Y) \\
\Rightarrow\ & g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, g ye göre ϕ anti-simetriktir.

Tanım 2.2.1.: Teorem 2.2.2. de verilen metrik tensör alanı g yi, verilen (ϕ, ξ, η) **hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş bir Riemann metrik tensör alanı** olarak adlandıracağız. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş bir Riemann metrik tönsör alanı g olmak üzere, M de (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir **hemen hemen değme metrik yapı** ve bu (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı ile birlikte M ye bir **hemen hemen değme metrik manifold** denir[6].

Teorem 2.2.3.: Hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olan bir (2n+1)- boyutlu manifold M olsun. O zaman M nin **tanjant demeti**nin yapı grubu $U(n) \times 1$ e indirgenebilirdir. Burada U(n), nxn tipinde üniter matrislerin çarpma işlemine göre grubudur. Tersi de doğrudur[6].

İspat: İlk önce M nin

$$\{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n, \phi(e_1), \phi(e_2), \ldots\ldots, \phi(e_n), \xi\}$$

biçiminde bir ortonormal çatısının mevcut olacağını gösterelim. Böyle bir çatıya **adapte çatı** diyeceğiz. Adapte çatının varlığını

$$\operatorname{Ker} \phi = Sp\ \{\xi\}$$

olduğundan biliyoruz. Diğer taraftan,

$$\chi(M) = S_p\ \{\xi\} \oplus S_p\ \{\xi\}^{\perp}$$

dır. O halde $X \in S_p\ \{\xi\}^{\perp}$ ise $g(X, \xi) = \eta(X)$ olacağından

$$\eta(X) = 0$$

dır. O halde;

$$\phi^2 X = - X + \eta(X) . \xi$$

denkleminden

$$\phi^2 X = - X + 0 . \xi$$

veya

$$\phi^2 X = - X$$

olur. Buradan da $\phi_{S_p\ \{\xi\}^{\perp}}$ nın $S_p\ \{\xi\}^{\perp}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre,

$S_p\ \{\xi\}^{\perp}$ nin $\{e_1, e_2, \ldots , e_n, \phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ biçiminde bir ortonormal bazı mevcuttur.

$$\chi(M) = S_p\ \{\xi\}^{\perp} \oplus S_p\ \{\xi\}$$

olduğundan $\chi(M)$ nin de $S_1 = \{e_1, \ldots , e_n, \phi(e_1), \ldots, \phi(e_n), \xi\}$ biçiminde bir ortonormal bazı mevcuttur. g metriğinin bu baza göre matrisi g_{S_1} ise, S_1 ortonormal olduğundan

$$g_{S_1} = I_{2n+1}$$

dir. O halde

$$gs_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\phi(e_1) = 0 \,.\, e_1 + 0 \,.\, e_2 + \ldots + 0 \,.\, e_n + 1 \,.\, \phi(e_1) + 0 \,.\, \phi(e_2) + \ldots + 0 \,.\, \phi(e_n) + 0 \,.\, \xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi(e_n) = 0 \,.\, e_1 + 0 \,.\, e_2 + \ldots + 0 \,.\, e_n + 0 \,.\, \phi(e_1) + 0 \,.\, \phi(e_2) + \ldots + 1 \,.\, \phi(e_n) + 0 \,.\, \xi$$

ve,

$$\phi(\phi e_1) = \phi^2 (e_1) = -1\, e_1 + 0\, e_2 + \ldots + 0\, e_n + 0\, \phi(e_1) + 0\, \phi(e_2) + \ldots + 0\, \phi(e_n) + 0 \,.\, \xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi(\phi(e_n)) = \phi^2 (e_n) = 0\, e_1 + 0\, e_2 + \ldots - 1\, e_n + 0\, \phi(e_1) + 0\, \phi(e_2) + \ldots + 0\, \phi(e_n) + 0 \,.\, \xi$$

$$\phi(\xi) = 0 = 0\, e_1 + 0\, e_2 + \ldots.\ 0\, e_n + 0\, \phi(e_1) + 0\, \phi(e_2) + \ldots. + 0\, \phi(e_n) + 0 \,.\, \xi$$

olduğundan

$$\phi s_1 = \begin{bmatrix} 0 & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi bir diğer $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n, \phi(\bar{e}_1), \ldots, \phi(\bar{e}_n), \xi\}$ adapte çatısını, g ve ϕ nin g_{s_1} ve ϕ_{s_1} deki aynı iki bileşene sahip olması ve

$$\bar{e}_i = r \,.\, e_i, \qquad \phi(\bar{e}_i) = r\, \phi(e_i), \qquad \xi = r \,.\, \xi$$

seçilmesi halinde gözönüne alalım. O zaman kolayca gösterebiliriz ki r ortogonal matrisi

$$r = \begin{bmatrix} A_n & B_n & 0 \\ -B_n & A_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olmalıdır. Bu da M nin tanjant demetinin grup yapısının U(n) x 1 e indirgenebilir olması demektir.

2.3. Değme Manifoldları

Eğer bir (2n+1)-boyutlu M manifoldu üzerinde ve M nin heryerinde;

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olacak şekilde global bir η 1-formu mevcut ise M bir **değme yapıya sahiptir** denir ve bir **değme manifold** olarak adlandırılır. Biz η yı M nin bir **değme formu** olarak adlandıracağız. Buradaki $(d\eta)^n$ ile n inci mertebeden dış çarpım gösterilmiştir, yani $(d\eta)^n = (d\eta) \wedge \ldots \wedge (d\eta)$ dır.

V^*, V vektör uzayına dual olmak üzere eğer dış çarpım, $\wedge V^*$ **Grassman cebiri**nin bir θ **kuadratik formu** için

$$\theta^r \neq 0 \quad \text{ve} \quad \theta^{r+1} = 0$$

şartlarını sağlıyorsa θ nın 2r ranklı olduğu söylenir. Buna eşdeğer olarak

$$\text{rank}\, \theta = \text{boy}\, V - \text{boy}\, V_0$$

dır, burada

$$V_0 = \{X : X \in V, \theta(X, V) = 0\}$$

dır, yani

$$V_0 = \{X \in V \mid (\forall Y)(Y \in V \Rightarrow \theta(X, Y) = 0)\}$$

dır. Buna ilaveten bir M değme manifoldu üzerinde

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

denklemi gereğince $\Lambda\ T_M^*(P)$ Grassman cebirindeki $d\eta$ kuadratik formunun rankı 2n dir. Bu durumda

$$V_0 = \{X : X \in T_M(P),\ d\eta\ (X, T_M(P)) = 0\}$$

altuzayı 1-boyutlu bir altuzaydır ve V_0 üzerinde $\eta \neq 0$ dır, diğer sözlerle V_0 altuzayı, $\eta = 0$ olacak şekildeki 2n boyutlu bir altuzayın tümleyenidir. $\xi_P \in V_0$ elemanı $\eta(\xi_P) = 1$ olacak şekilde V_0 ın bir elemanı olsun. O zaman ξ bir vektör alanıdır ve M üzerinde η ile tanımlı, η ya karşılık gelen vektör alanı (η ya dual olan vektör alanı) adını alır ve $\eta(\xi) = 1$ olduğundan asla sıfır olamaz.

Teorem 2.3.1.: Değme yapısı η olan (2n+1)-boyutlu bir manifold M olsun. M üzerinde

$$g\ (X, \phi Y) = d\eta\ (X, Y)$$

olacak şekilde bir (ϕ, ξ, η, g) **hemen hemen değme metrik yapısı** vardır.

Teorem 2.3.2.: n-boyutlu bir M manifoldu üzerinde bir 1-form w olsun. M üzerinde

$$w \wedge (dw)^p \neq 0$$

ve

$$(dw)^{p+1} = 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman herbir noktanın bir komşuluğunda

$$w = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i\, dx^i$$

olacak şekilde bir

$(x^1, x^2, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p})$

koordinat sistemi vardır[6].

Buradan şu sonucu kolayca çıkarabiliriz.

Sonuç 2.3.1.: Bir (2n+1)-boyutlu M değme manifoldunun herbir noktasının bir komşuluğu üzerinde

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i\, dx^i$$

olacak şekilde

$(x^i, y^i, z)\ , \qquad i = 1, 2, \dots, n$

koordinatları vardır.

Teorem 2.3.3.: (2n+1)-boyutlu öklid uzayı IR^{2n+1} de

$(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n, z)$

kartezyen koordinatlarını alalım. IR^{2n+1} de bir 1-form η_0 olmak üzere,

$$\eta_0 = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i\, dx^i$$

ile tanımlansın. O zaman,

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

dır. Burada η_0'a IR^{2n+1} üzerinde bir değme formdur denir[6].

İspat: $\eta_0 = dz - y^1dx^1 - y^2dx^2 - \dots - y^ndx^n$

$$d\eta_0 = -\, dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 - \dots - dy^n \wedge dx^n$$

$$\overbrace{d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \ldots \wedge d\eta_0}^{n\text{ - defa}} = (- dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 - dy^3 \wedge dx^3 - \ldots - dy^n \wedge dx^n) \wedge$$

$$(- dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2 - dy^3 \wedge dx^3 - \ldots - dy^n \wedge dx^n) \wedge \ldots \wedge (- dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge$$

$$dx^2 - dy^3 \wedge dx^3 - \ldots - dy^n \wedge dx^n)$$

$$= (-1)^n [dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$+ dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$+ dy^3 \wedge dx^3 \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ dy^n \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1} \wedge dx^{n-1}]$$

$$= (-1)^n (n!\, dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^3 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n).$$

Yukarıda

$\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$dy^1 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dy^i \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dy^j \wedge dx^j \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

$$= dy^1 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dy^j \wedge dx^j \wedge \ldots \wedge dy^i \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n$$

eşitliğini kullandık.

$$(d\eta_0)^n = \frac{1}{n!} (d\eta_0 \wedge \ldots \wedge d\eta_0)$$

$$= \frac{1}{n!}\, n!\, (-1)^n (dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n)$$

ve

$$\eta_0 = dz - y^1dx^1 - y^2dx^2 - \ldots - y^ndx^n$$

dan

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} (dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n)$$

buluruz.

$$dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge dx^n \neq 0$$

olduğundan da

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

dır.

Tanım 2.3.1.: IR^{2n+1} in iki açık altcümlesi U ve U' olmak üzere bir

$$f: U \longrightarrow U'$$

diffeomorfizmi için,

$$f^*\eta_0 = \tau \, . \, \eta_0$$

ise f ye bir **değme transformasyonu** denir. Burada τ, U üzerinde sıfır olmayan reel değerli bir fonksiyondur.

Γ ile bütün değme dönüşümlerinin cümlesini tanımlayalım. O zaman Γ aşağıdaki anlamda bir **grubumsu**dur, yani

i) eğer

$$f: U \longrightarrow U' \quad \text{ve} \quad g: V \longrightarrow V'$$

değme transformasyonlar ve

$$U' \cap V \neq \emptyset$$

ise g ile f nin çarpımı olan gof gonksiyonu da

$$gof: f^{-1}(U' \cap V) \longrightarrow g(U' \cap V)$$

biçiminde bir diğer değme transformasyonudur.

ii) i deki işlem Γ da bileşimlidir.

iii) Γ nın herbir elemanının (i) deki işleme göre bir inversi vardır ve bu invers Γ da dır[6].

Tanım 2.3.2.: Bir $f \in \Gamma$ değme transformasyonu için,

$$f^* \eta_0 = \eta_0$$

ise f ye bir **kesin değme transformasyonu** denir[6].

Sonuç 2.3.2.: $f^* \eta_0 = \eta_0$ biçimindeki bütün f^* kesin değme transformasyonlarının cümlesi Γ_0 olsun. Γ_0 cümlesi Γ için bir **alt grubumsu**dur[6].

Teorem 2.3.4.: Değme transformasyonlarının cümlesi çarpma işlemine göre bir grubumsudur[6].

İspat: Değme transformasyonları cümlesi

$$\Gamma = \{f \mid f : U \longrightarrow U',\ U, U' \subset IR^{n+1} \text{ açıklar, } f^*\eta_0 = \tau \,.\, \eta_0 \text{ ve } \tau \neq 0 : U \longrightarrow IR\}$$

i) $o : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$

dır (yani o işlemi kapalıdır): Yani
$$\begin{aligned} \Gamma \times \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ (g, f) &\longrightarrow gof \end{aligned}$$

dır.

$$f: U \longrightarrow U', \quad g: V \longrightarrow V', \quad U' \cap V \neq \emptyset$$

değme transformasyonları verilsin. Buna göre

$$f^*: (U')^* \longrightarrow U^*, \ g^*: (V')^* \longrightarrow V^*$$

dualleri için

$$f^*\eta_0 = \tau_0\eta_0 , \quad g^*\eta_1 = \tau_1\eta_1$$

dır. Buradaki τ_0, U da, τ_1 de V üzerinde reel değerli fonksiyonlardır.

Böylece

$$gof: f^{-1} (U' \cap V) \subset U \rightarrow g(U' \cap V) \subset V'$$

dönüşümünün de bir değme transformasyonu olduğunu şu şekilde görebiliriz:

$$(gof)^* : (g(U' \cap V))^* \rightarrow (f^{-1} (U' \cap V))^*$$

olur.

$$(gof)^* \eta_1 = \tau . \eta_1$$

olduğunu gördüğümüz zaman gof de bir değme transformasyondur diyeceğiz.

$$(gof)^*\eta_1 = (f^*og^*)\eta_1 = f^*(g^*\eta_1) = f^*(\tau_1\eta_1) = \tau_0 (\tau_1\eta_1) = (\tau_0\tau_1)\eta_1$$

dir. Burada $\tau_0\tau_1 = \tau$ konumu yapılırsa

$$(gof)^*\eta_1 = \tau . \eta_1$$

bulunduğundan gof de bir değme transformasyonudur. Yani gof $\in \Gamma$ dır.

ii) (o) işlemi Γ da birleşimlidir:

$\forall$ f, g, h $\in \Gamma$ için

$$(fog) oh = fo (goh)$$

olduğunu gösterelim.

$$[(fog)oh]^*(\eta_0) = [h^* \circ (fog)^*](\eta_0)$$
$$= [h^* \circ (g^* \circ f^*)](\eta_0)$$
$$= h^*((g^* \circ f^*)(\eta_0))$$
$$= h^*(g^*(f^*\eta_0))$$

olup

$$f: U_0 \to V_0, \quad g: U_1 \to V_1, \quad h: U_2 \to V_2$$
$$V_0 \cap U_1 \neq \emptyset, \quad V_1 \cap U_2 \neq \emptyset$$

ve

$$f^*(\eta_0) = \tau_0\eta_0, \; g^*(\eta_1) = \tau_1\eta_1, \; h^*(\eta_2) = \tau_2\eta_2$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$[(fog)oh]^*(\eta_0) = h^*(g^*(\tau_0\eta_0))$$
$$= h^*(\tau_1(\tau_0\eta_0))$$
$$= \tau_2(\tau_1(\tau_0\eta_0))$$
$$= (\tau_2\tau_1\tau_0)(\eta_0)$$

bulunur.

$$[fo(goh)]^*(\eta_0) = [(goh)^* of^*](\eta_0)$$
$$= [(h^* og^*) of^*](\eta_0)$$
$$= (h^* og^*)(f^*\eta_0)$$
$$= (h^* og^*)(\tau_0\eta_0)$$
$$= h^*(g^*(\tau_0\eta_0))$$
$$= h^*(\tau_1(\tau_0\eta_0))$$
$$= \tau_2(\tau_1(\tau_0\eta_0))$$

bulunur. $\forall\ \eta_0$ için

$$[(fog)oh]^*(\eta_0) = [fo(goh)]^*(\eta_0)$$

olduğundan $\forall$ f, g, h $\in \Gamma$ için

$$(fog)oh = fo(goh)$$

dır. Yani (o) işlemi Γ da birleşimlidir.

iii) (o) işlemine göre $\forall$ f $\in \Gamma$ için f nin tersi vardır ve $f^{-1} \in \Gamma$ dır. $\forall$ f $\in \Gamma$, f bir lokal diffeomorfizm olduğundan öyle bir f^{-1} fonksiyonu vardır ki

$$f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f$$

dır. Şimdi $f^{-1} \in \Gamma$ olduğunu gösterelim:

$I \in \Gamma$ birim değme transformasyon olduğundan $\forall\ \eta_0$ için

$$I^* \eta_0 = \eta_0$$

dır. Ayrıca f $\in \Gamma$ olduğundan $f(\eta_0) = \tau_0\eta_0$ olacak şekilde $\tau_0 \neq 0$ fonksiyonu vardır. Buna göre,

$$(fof^{-1})^* (\eta_0) = I^* (\eta_0)$$

$$[(f^{-1})^* \circ f^*] (\eta_0) = I^* (\eta_0)$$

$$(f^{-1})^* (f^* (\eta_0)) = \eta_0$$

$$(f^{-1})^* (\tau_0\eta_0) = \eta_0$$

dır. O halde $\eta_1 = \tau_0\eta_0$ olmak üzere; $\tau_0 \neq 0$ olduğundan,

$$\eta_0 = \frac{1}{\tau_0}\eta_1$$

olup

$$(f^{-1})^* (\eta_1) = (\eta_0)$$

$$= \frac{1}{\tau_0}\eta_1$$

yazılabilir. O halde

$$f^{-1} \in \Gamma$$

dır. O halde $\forall\, f \in \Gamma$ için bir f^{-1} vardır ve $f^{-1} \in \Gamma$ dır.

Tanım 2.3.3.: $\forall$ (i, j) çifti için f_{ij}

$$f_{ij} = f_i \,.\, f_j^{-1}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\forall\, U_i, V_i \subset IR^{2n+1}$ açıkları için

$$f_i : U_i \longrightarrow V_i \subset IR^{2n+1}$$

homeomorfizmleri verilmiş olsun. Ayrıca M nin bir açık örtüsü $\{U_i\}$ ve boy M = (2n+1) olsun. Eğer

$$f_i' \,.\, f_j^{-1} \in \Gamma$$

ise

$$\{U_i, f_i\} \text{ ve } \{U_i', f_i'\}$$

koordinat sistemleri (haritalar) denktirler denir. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının cümlesi M üzerinde en geniş anlamda bir değme yapı olarak adlandırılır[6].

Sonuç 2.3.3.: $f_j\,(U_i \cap U_j)$

üzerinde

$$(f_i \,.\, f_j^{-1})^* (\eta_0) = \rho_{ij}\, \eta_0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir ρ_{ij} fonksiyonu vardır[6].

İspat: Gerçekten de $f_i \in \Gamma$ olduğundan $f_i^* \eta_0 = \tau_0\, \eta_0$ dır. Böylece

$$(f_i f_j^{-1})^* \eta_0 = [(f_j^{-1})^* . f_i^*] \eta_0$$
$$= (f_j^{-1})^* (f_i^* \eta_0)$$
$$= (f_j^{-1})^* (\tau_0 \eta_0)$$

dır. $f_j^{-1} \in \Gamma$ olduğundan da $(f_j^{-1}) \eta_1 = \tau' \eta_1$ olup

$$(f_i f_j^{-1})^* \eta_0 = \tau' (\tau_0 \eta_0)$$
$$= (\tau' \tau_0) \eta_0$$
$$= \rho_{ij} \eta_0$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\rho_{ij} \eta_0 = (f_i f_j^{-1})^* \eta_0$$

eşitliğinin heriki tarafına f_j^* yi uygularsak

$$f_j^* (\rho_{ij} \eta_0) = [f_j^*(f_i f_j^{-1})^*] \eta_0$$
$$= [f_j^*((f_j^{-1})^* f_i^*)] \eta_0$$
$$= [(f_j^*(f_j^{-1})^*) f_i^*] \eta_0$$
$$= [(f_j^{-1} f_j)^* f_i^*)] \eta_0$$
$$= [I^* f_i^*] \eta_0$$
$$= f_i^* \eta_0$$

olur.

Sonuç 2.3.4. : $f_j^* (\rho_{ij} \eta_0) = f_j^*(\rho_{ij}) f_j^* (\eta_0)$

dır[6].

İspat: f_j bir değme transformasyonu olduğundan U_j üzerinde reel değerli bir τ' fonksiyonu

$f_j^* (\rho_{ij}\, \eta_0) = \tau' (\rho_{ij}\, \eta_0)$ .... (*)

olacak şekilde vardır. τ_0 ve τ_1 yine U_j üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}(f_j^* \rho_{ij}) (p) &= (\tau_0\, \rho_{ij}) (p) \\ &= \tau_0 (p)\, \rho_{ij}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f_j^* \eta_0) (p) &= (\tau_1\, \eta_0) (p) \\ &= \tau_1 (p)\, \eta_0\end{aligned}$$

olduğundan da

$$\begin{aligned}[(f_j^* \rho_{ij}) (f_j^* \eta_0)] (p) &= (f_j^* \rho_{ij}) (p) (f_j^* \eta_0) (p) \\ &= (\tau_0 (p)\, \rho_{ij}) (\tau_1 (p)\, \eta_0) \\ &= \tau_0 (p)\, \tau_1 (p)\, \rho_{ij}\, \eta_0 \\ &= [(\tau_0\, \tau_1)\, \rho_{ij}\, \eta_0] (p)\end{aligned}$$

$[(f_j^* \rho_{ij}) (f_j^* \eta_0)] (p) = [\tau'(\rho_{ij}\, \eta_0)] (p) = .f_j^* (\rho_{ij}\, \eta_0)$........(**)

buluruz. Bu eşitlik $\forall\ P \in U_i$ için var olduğundan

(*) ve (**) dan

$$\begin{aligned}(f_j^* \rho_{ij}) (f_j^* \eta_0) &= \tau'(\rho_{ij}\, \eta_0) \\ &= f_i^* \eta_0 = f_j^* (\rho_{ij}\, \eta_0)\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.5.: Eğer η_i yi her U_i üzerinde

$\eta_i = f_i^* \eta_0$

olacak şekilde bir 1-form olarak tanımlarsak

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

üzerinde

$$\eta_i = f_j^* (\rho_{ij})\, \eta_j$$

yazabiliriz[6].

İspat: Bunu görebilmek için

$$f_i^*\, \eta_0 = (f_j^*\, \rho_{ij})\, (f_j^*\, \eta_0)$$

eşitliğinde $f_i^*\, \eta_0$ yerine η_i ve $f_j^*\, \eta_0$ yerine de η_j yazmamız yeterli olacaktır. Buna göre;

η_0 için

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

olduğundan

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$$

dır. Gerçekten de;

$$\eta_i = f_i^*\, \eta_0$$

olduğundan

$$d\eta_i = d(f_i^*\, \eta_0) = f_i^*\, (d\eta_0)$$

olup

$$(d\eta_i)^n = \frac{1}{n!}\, (d\eta_i \wedge d\eta_i \wedge \ldots \wedge d\eta_i)$$

$$= \frac{1}{n!} (f_i^*(d\eta_0) \wedge f_i^*(d\eta_0) \wedge \ldots \wedge f_i^*(d\eta_0))$$

$$= \frac{1}{n!} f_i^*(d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \ldots \wedge d\eta_0)$$

$$= f_i^* [\frac{1}{n!} (d\eta_0 \wedge d\eta_0 \wedge \ldots \wedge d\eta_0)]$$

$$= f_i^* (d\eta_0)^n$$

dir. Buna göre,

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n = (f_i^*\eta_0) \wedge (f_i^* (d\eta_0)^n)$$
$$= f_i^* (\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n)$$

olur. Bu ise f_i^* lineer ve

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

olduğundan

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$$

demektir.

Tanım 2.3.4.: $T(M) = \bigcup_{P \in M} T_M(P)$ tanjant demetinin bir altdemeti D olsun. $P \in U$ için D_P **lifi** de

$$D_P = \{ X \in T_M (P) \; ; \eta_i (X) = 0\}$$

ile verilsin. Bir manifold üzerinde bir vektör demeti IR^n **standart lif** ile verilsin. Eğer GL(n, IR) grubu ile birleştirilmiş asli lif demetinin grup yapısı, pozitif determinantlı matrislerin oluşturduğu ve GL(n, IR) nin bir altgrubu olan $GL^+(n, IR)$ ye indirgenebilirse bu demete **yönlendirilebilir**dir denir[6], burada $GL(n, IR) = \{A=[a_{ij}] \mid a_{ij} \in IR, 1 \leq i,j \leq n, \det A \neq 0\}$ ve $GL^+(n, IR) = \{A=[a_{ij}] \mid a_{ij} \in IR, 1 \leq i,j \leq n, \det A = +1\}$ dır.

Sonuç 2.3.6.: D yönlendirilebilirdir[6].

İspat: $U_i \cap U_j$ üzerinde

$$\eta_i = \tau_{ij}\, \eta_j$$

alalım. O zaman

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n = \tau_{ij}^{n+1} (\eta_j \wedge (d\eta_j)^n)$$

dir, burada τ_{ij}^{n+1}, τ_{ij} koordinat dönüşümünün jakobiyenidir. Gerçekten de

$$d\eta_i = d(\tau_{ij}\, \eta_j) = \tau_{ij} d\eta_j$$

$$(d\eta_i)^n = \frac{1}{n!} (d\eta_i \wedge d\eta_i \wedge \dots \wedge d\eta_i)$$

$$= \frac{1}{n!} (\tau_{ij}\, d\eta_j \wedge \tau_{ij}\, d\eta_j \wedge \dots \wedge \tau_{ij}\, d\eta_j)$$

$$= \frac{1}{n!} \tau_{ij}^n (d\eta_j \wedge d\eta_j \wedge \dots \wedge d\eta_j)$$

$$(d\eta_i)^n = \tau_{ij}^n \left(\frac{1}{n!} d\eta_j \wedge d\eta_j \wedge \dots \wedge d\eta_j\right)$$

$$= \tau_{ij}^n (d\eta_j)^n$$

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n = (\tau_{ij}\, \eta_j) \wedge (\tau_{ij}^n (d\eta_j)^n)$$

$$= \tau_{ij}^{n+1} (\eta_j \wedge (d\eta_j)^n)$$

olduğunu görmüş olduk. Böylece eğer n çift ve M yönlendirilebilr ise τ_{ij} pozitif olmalıdır ve bu yüzden D vektör demeti yönlendirilebilirdir.

Örnek 2.3.1.: (2n+1)-boyutlu bir öklid uzayı IR^{2n+1} olsun.
O zaman

$$(x^i, y^i, z) \ , \ i = 1, 2, \dots , n$$

kartezyen koordinatlar olmak üzere

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i \, dx^i$$

1-formu IR^{2n+1} üzerinde bir değme formudur. O zaman ξ vektör alanı $\frac{\partial}{\partial z}$ dir. Gerçekten de

$$\eta\,(\xi) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \underbrace{dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{1} - \sum_{i=1}^{n} y^i \underbrace{dx^i \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{0} = 1$$

olur.

n = 2 için

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

olduğunu gösterelim.

$$\eta = dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2$$

$$d\eta = - dy^1 \wedge dx^1 - dy^2 \wedge dx^2$$

$$\begin{aligned}(d\eta)^2 &= \frac{1}{2!}\,(d\eta \wedge d\eta)\\ &= \frac{1}{2!}\,(dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 + dy^2 \wedge dx^2 \wedge dy^1 \wedge dx^1)\\ &= \frac{1}{2!}\,2\,.dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\eta \wedge (d\eta)^2 &= (dz - y^1 dx^1 - y^2 dx^2) \wedge (dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2)\\ &= dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2\end{aligned}$$

ve

$$dz \wedge dy^1 \wedge dx^1 \wedge dy^2 \wedge dx^2 \neq 0$$

olduğundan

$$\eta \wedge (d\eta)^2 \neq 0$$

olur.

Örnek 2.3.2.: IR^{2n+2} nin (2n+1)-.boyutlu bir regüler hiperyüzeyi M olsun. (Örneğin herbir noktadaki C^∞ teğet düzlemi ile birlikte) $(x^1, x^2, \ldots, x^{2n+2})$ kartezyen koordinatları ile IR^{2n+2} de

$$\alpha = x^1dx^2 - x^2dx^1 + \ldots + x^{2n+1}\, dx^{2n+2} - x^{2n+2}\, dx^{2n+1}$$

ile tanımlı 1-formu dikkate alalım. O zaman

$$d\alpha = 2(dx^1 \wedge dx^2 + \ldots + dx^{2n+1} \wedge dx^{2n+2})$$

olduğundan

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = 2^{n-1}\, n! \left[\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1}\, x^i dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^{2n+2} \right]$$

dır. Bunu n=2 hali için gösterelim.

IR^6 nın 5-boyutlu bir regüler hiperyüzeyi M olsun. $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6)$ kartezyen koordinatları ile IR^6 da

$$\alpha = x^1dx^2 - x^2dx^1 + x^3dx^4 - x^4dx^3 + x^5dx^6 - x^6dx^5$$

ile tanımlı 1-formu dikkate alalım. O zaman:

$$d\alpha = dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^1 + dx^3 \wedge dx^4 - dx^4 \wedge dx^3 + dx^5 \wedge dx^6 - dx^6 \wedge dx^5$$

ve

$$dx^1 \wedge dx^2 = - dx^2 \wedge dx^1$$

$$dx^3 \wedge dx^4 = - dx^4 \wedge dx^3$$

$$dx^5 \wedge dx^6 = - dx^6 \wedge dx^5$$

olduğundan

$$d\alpha = 2(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + dx^5 \wedge dx^6)$$

olur.

$$(d\alpha)^2 = \frac{1}{2!}(d\alpha \wedge d\alpha)$$

$$= \frac{2^2}{2!}(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^6$$

$$+ dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6 + dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

$$+ dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^3 \wedge dx^4)$$

ve

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^6 = dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

$$dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6 = dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

olduğundan

$$(d\alpha)^2 = \frac{1}{2!}2^2 \,.\, 2\,[dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^6$$

$$+ dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6]$$

dır.

$$\alpha \wedge (d\alpha)^2 = 4\,[x^1\, dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6$$

$$- x^2\, dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6 + x^3\, dx^4 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^6$$

$$- x^4\, dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^6 + x^5 dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

$$- x^6\, dx^5 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4]$$

olur. IR^{2n+2} de

$$\alpha = x^1 dx^2 - x^2 dx^1 + x^3 dx^4 - ... + x^{2n+1} dx^{2n+2} - x^{2n+2} dx^{2n+1}$$

1-formu için

$$d\alpha = 2(dx^1 \Lambda dx^2 + ... + dx^{2n+1} \Lambda dx^{2n+2})$$

olduğundan

$$\alpha \Lambda (d\alpha)^n = 2^{n-1} n! [x^1 dx^2 \Lambda dx^3 \Lambda dx^4 \Lambda ... \Lambda dx^{2n+1} \Lambda dx^{2n+2}$$
$$- x^2 dx^1 \Lambda dx^3 \Lambda dx^4 \Lambda ... \Lambda dx^{2n+1} \Lambda dx^{2n+2} + x^3 dx^4 \Lambda dx^1 \Lambda dx^2 \Lambda dx^5 \Lambda$$
$$... \Lambda dx^{2n+1} \Lambda dx^{2n+2} - ... + x^{2n+1} dx^{2n+2} \Lambda dx^1 \Lambda dx^2 \Lambda dx^3 \Lambda ...$$
$$... \Lambda dx^{2n} - x^{2n+2} dx^{2n+1} \Lambda dx^1 \Lambda dx^2 \Lambda dx^3 \Lambda ... \Lambda dx^{2n-1} \Lambda dx^{2n}]$$

olur.

M nin $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^{2n+2})$ noktasındaki tanjant uzayını geren (2n+1) tane lineer bağımsız vektörü $v_1, v_2, ..., v_{2n+1}$ ile gösterelim.

*; IR^{2n+2} de öklid metriğinin **Hodge yıldız operatörünü** göstermek üzere

$$W^j = * dx^j (v_1, v_2, ..., v_{2n+1})$$

alalım. O zaman W^j bileşenleriyle bir W vektörü $v_1, v_2, ..., v_{2n+1}$ ile gerilmiş bir hiperyüzeye normal olur.

(.) IR^{2n+2} de bilinen skalar çarpımı göstermek üzere

$$(\alpha \Lambda (d\alpha)^n) (v_1, ..., v_{2n+1}) = x_0 . W$$

ifadesini de yazabiliriz.

Diğer taraftan, M nin x_0 noktasındaki tanjant uzayının denklemi

$$W . (x - x_0) = 0$$

ile verilir. Bu yüzden, M nin x_0 noktasındaki tanjant uzayının orjinden geçmesi için gerek ve yeter koşul

$$W \,.\, x_0 = 0$$

olmasıdır, yani x_0 da

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n = 0$$

dır.

Bundan başka

$$\eta = i^* \alpha$$

olduğunu görürüz. M den IR^{2n+2} e bir immersiyon olan i dönüşümü

$$\eta \wedge (d\eta)^n = i^*(\alpha \wedge (d\alpha)^n)$$

eşitliğini sağlar. Gerçekten de;

$$d\eta = d(i^*\alpha) = i^*d\alpha$$

iken

$$\begin{aligned}(d\eta)^n &= \frac{1}{n!}\ (d\eta \wedge \dots \wedge d\eta)\\ &= \frac{1}{n!}\ (i^*d\alpha \wedge \dots \wedge i^*\, d\alpha)\\ &= \frac{1}{n!}\ i^*(d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha)\\ &= i^*[\frac{1}{n}\ (d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha)]\\ &= i^*(d\alpha)^n\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\eta \wedge (d\eta)^n = (i^*\alpha) \wedge (i^* (d\alpha)^n)$$
$$= i^*(\alpha \wedge (d\alpha)^n)$$

dır. Bu yüzden M nin x_0 noktasında

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$$

olması için gerek ve yeter koşul M nin x_0 noktasındaki tanjant uzayının IR^{2n+2} nin orjininden geçmemesidir [1].

Örnek 2.3.3.: IR^{2n} de β'yı

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x^i \, dx^{n+i}$$

olarak ifade edelim $IR_1{}^n$, IR^{2n} in $x^i = 0$, $i = 1, ..., n$ ile belirlenmiş bir altuzayı ve $IR_2{}^n$ de IR^{2n} in $x^j = 0$, $j = n + 1, ..., 2n$ ile belirlenmiş bir altuzayı olsun. O zaman β, IR^{2n} e daldırılmış $(2n - 1)$ - boyutlu bir M hiperyüzeyi üzerinde bir değme formudur $\Leftrightarrow$

$$M \cap IR_1{}^n = \phi$$

dir.

IR^6 da $\beta = x^1dx^4 + x^2dx^5 + x^3dx^6$

1-formu için

$$d\beta = dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^5 + dx^3 \wedge dx^6$$

olduğundan

$$d\beta \wedge d\beta = dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^2 \wedge dx^5 + dx^1 \wedge dx^4 \wedge dx^3 \wedge dx^6$$
$$+ dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + dx^2 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6$$
$$+ dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^1 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^2 \wedge dx^5$$

$$= 2\,[dx^1\wedge dx^4\wedge dx^2\wedge dx^5 + dx^1\wedge dx^4\wedge dx^3\wedge dx^6 + dx^2\wedge dx^5\wedge dx^3\wedge dx^6]$$

$$(d\beta)^2 = \frac{2}{2\,!}\,[dx^1\wedge dx^4\wedge dx^2\wedge dx^5 + dx^1\wedge dx^4\wedge dx^3\wedge dx^6 + dx^2\wedge dx^5\wedge dx^3\wedge dx^6]$$

$$\beta\wedge(d\beta)^2 = x^1dx^4\wedge dx^2\wedge dx^5\wedge dx^3\wedge dx^6 + x^2dx^5\wedge dx^1\wedge dx^4\wedge dx^3\wedge dx^6 + x^3dx^6\wedge dx^1\wedge dx^4\wedge dx^2\wedge dx^5$$

dır.

$$IR_1{}^3 = \{\ (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) \in IR^6 \mid x^1 = x^2 = x^3 = 0\ \}$$

olduğundan

$$M \cap IR_1{}^3 \neq \phi$$

olması, $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ olacağından

$$\beta\wedge(d\beta)^2 = 0$$

olmasına karşılık gelir. Bu da β nın M üzerinde değme formu olmasıyla çelişir.

IR^{2n} de β yı $\beta = x^1dx^{n+1} + x^2dx^{n+2} + \ldots\ldots + x^ndx^{2n}$
olarak alırsak

$$d\beta = dx^1\wedge dx^{n+1} + dx^2\wedge dx^{n+2} + \ldots\ldots + dx^n\wedge dx^{2n}$$

olacağından

$$\begin{aligned} d\beta\wedge d\beta = {} & dx^1\wedge dx^{n+1}\wedge dx^2\wedge dx^{n+2} + dx^1\wedge dx^{n+1}\wedge dx^3\wedge dx^{n+3} \\ & + \ldots\ldots + dx^1\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1} + dx^1\wedge dx^{n+1}\wedge dx^n\wedge dx^{2n} \\ & + dx^2\wedge dx^{n+2}\wedge dx^1\wedge dx^{n+1} + dx^2\wedge dx^{n+2}\wedge dx^3\wedge dx^{n+3} + \ldots\ldots \\ & + dx^2\wedge dx^{n+2}\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1} + dx^2\wedge dx^{n+2}\wedge dx^n\wedge dx^{2n} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}\wedge dx^1\wedge dx^{n+1} + dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}\wedge dx^2\wedge dx^{2n+2} + \ldots\ldots\ldots + \end{aligned}$$

$$dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n} + dx^{n}\wedge dx^{2n}\wedge dx^{1}\wedge dx^{n+1} +$$

$$dx^{n}\wedge dx^{2n}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2} + \dots\dots\dots + dx^{n}\wedge dx^{2n}\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}$$

$$d\beta\wedge d\beta = 2\,(dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2} + dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{3}\wedge dx^{n+3}$$

$$+ \dots\dots + dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n} + dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge dx^{3}\wedge dx^{n+3}$$

$$+ dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge dx^{4}\wedge dx^{n+4} + \dots\dots + dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n}$$

$$+ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad +$$

$$dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n})$$

$$\underbrace{d\beta\wedge d\beta\wedge\dots\dots\wedge d\beta}_{(n-1)\text{ - tane}} = 2.3\dots\dots(n-1)\;[dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\wedge dx^{n-2}\wedge dx^{2n-2}\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1} + dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\wedge dx^{n-2}\wedge dx^{2n-2}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n} + dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\wedge dx^{n-3}\wedge dx^{2n-3}\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n} + \dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{3}\wedge dx^{n+3}\wedge\dots\dots\dots\dots\dots\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n}$$

$$+ dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge dx^{3}\wedge dx^{n+3}\wedge\dots\dots\dots\dots\dots\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n})$$

dır.

$$(d\beta)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\,(d\beta\wedge\dots\dots\wedge d\beta)$$

ve

$$\beta = x^{1}dx^{n+1} + x^{2}dx^{n+2} + \dots\dots + x^{n}dx^{2n}$$

olduğundan da

$$\beta\wedge(d\beta)^{n-1} = x^{1}dx^{n+1}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge\dots\dots\dots\dots\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n}$$

$$+ x^{2}dx^{n+2}\wedge dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{3}\wedge dx^{n+3}\wedge\dots\dots\dots\dots\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n}$$

$$+ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad +$$

$$x^{n-1}dx^{2n-1}\wedge dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge\dots\dots\dots\wedge dx^{n-2}\wedge dx^{2n-2}\wedge dx^{n}\wedge dx^{2n}$$

$$+ x^{n}dx^{2n}\wedge dx^{1}\wedge dx^{n+1}\wedge dx^{2}\wedge dx^{n+2}\wedge\dots\dots\dots\wedge dx^{n-1}\wedge dx^{2n-1}$$

$$\beta\wedge(d\beta)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x^i\, dx^{n+i}\wedge dx^1\wedge dx^{n+1}\wedge dx^2\wedge dx^{n+2}\wedge\ldots\ldots\ldots$$

$$\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{n+(i-1)}\wedge dx^{i+1}\wedge dx^{n+(i+1)}\wedge\ldots\ldots\wedge dx^n\wedge dx^{2n}$$

olur.

$$IR_1{}^n = \{ (x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots\ldots, x^{2n}) \in IR^{2n} \,;\, x^i = 0,\, i = 1, \ldots, n\}$$

olduğundan

$$M \cap IR_1{}^n \neq \phi$$

ise $x^1 = x^2 = \ldots\ldots = x^n = 0$ olacağından

$$\beta\wedge(d\beta)^{n-1} = 0$$

olur. Bu ise β nın M üzerinde bir değme formu olmasıyla çelişir. O halde β, IR^{2n} 'e daldırılmış (2n - 1) - boyutlu bir M hiperyüzeyi üzerinde bir değme formu ise

$$M \cap IR_1{}^n = \phi$$

dır.

Örnek 2.3.4.: Şimdi en geniş anlamda bir değme manifold örneği vereceğiz.

n-boyutlu reel projektif uzay IRP^n ile gösterilmek üzere

$$M = IR^{n+1} \times IRP^n$$

olsun.

$$(x^0, x^1, \ldots\ldots, x^n)$$

IR^{n+1} deki koordinatlar ve

$$(t_0, t_1, \ldots\ldots, t_n)$$

de IRP^n deki homogen koordinatlar olsunlar. M nin bir açık örtüsü de $\{U_i\}_{i=1,\ldots,n}$, $t_i \neq 0$ olarak tanımlansın.

U_i içinde bir η_i 1-formunu da

$$\eta_i = \frac{1}{t_i} \sum_{j=0}^{n} t_j \, dx^j$$

ile tanımlayalım. O zaman;

$$\eta_i \wedge (d\eta_i)^n \neq 0$$

dır. Gerçekten de;

$$\eta_i = \frac{1}{t_i} \left(t_0 dx^0 + t_1 dx^1 + t_2 dx^2 + \ldots\ldots + t_n dx^n\right)$$

1-formu için

$$d\eta_i = \frac{1}{t_i} \left(dt_0 \wedge dx^0 + dt_1 \wedge dx^1 + dt_2 \wedge dx^2 + \ldots\ldots + dt_n \wedge dx^n\right)$$

olduğundan

$$d\eta_i \wedge d\eta_i = \frac{1}{t_i^2}\, 2\, (dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_n \wedge dx^n + \ldots\ldots + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n)$$

ve

$$d\eta_i \wedge d\eta_i \wedge d\eta_i = \frac{1}{t_i^3}\, 2.3.(dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 +$$

$$dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \ldots\ldots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_n \wedge dx^n$$

$$+ dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \ldots\ldots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_n \wedge dx^n$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +$$

$$+ dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_3 \wedge dx^3 + \ldots\ldots\ldots + dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge dt_n \wedge dx^n$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +$$

$$+ dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n)$$

olup

$$(d\eta_i)^n = \frac{1}{n\,!}(d\eta_i \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge d\eta_i) = \frac{1}{n\,!}\ \frac{n\,!}{(t_i\,)^n}\ [\, dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \ldots\ldots\ldots$$

$$\wedge dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \ldots\ldots\ldots$$

$$\wedge dt_{n-3} \wedge dx^{n-3} \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_3 \wedge dx^3 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_n \wedge dx^n + dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_n \wedge dx^n$$

$$+ dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_n \wedge dx^n\,]$$

dir. O halde

$$\eta_i \wedge (d\eta_i\,)^n = \frac{1}{(t_i\,)^{n+1}}\ (t_0 dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_n \wedge dx^n$$

$$+ t_1 dx^1 \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_2 \wedge dx^2 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_n \wedge dx^n +$$

$$t_2 dx^2 \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge dt_3 \wedge dx^3 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_n \wedge dx^n + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ t_{n-1} \wedge dx^{n-1} \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_n \wedge dx^n$$

$$+ t_n dx^n \wedge dt_0 \wedge dx^0 \wedge dt_1 \wedge dx^1 \wedge \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \wedge dt_{n-2} \wedge dx^{n-2} \wedge dt_{n-1} \wedge dx^{n-1})$$

olur. Bu ise

$$\eta_i \wedge (d\eta_i\,)^n \neq 0$$

olması demektir.

III. BÖLÜM

3. HEMEN HEMEN DEĞME MONİFOLDLARININ TORSİON TENSÖRÜ

Hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olan bir $(2n + 1)$ boyutlu hemen hemen değme monifold M olsun. IR, bir reel doğruyu göstermek üzere M x IR çarpım monifoldunu düşünelim. O zaman M x IR üzerinde her bir vektör alanı

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

biçimindedir. Burada X ile M ye teğet bir vektör alanı, t ile IR nin bir noktasının koordinatı ve f ile de M x IR de bir fonksiyon gösterilmektedir. M x IR nin tanjant uzayı üzerinde bir j lineer dönüşümünü

$$j\,(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f\,.\,\xi\,,\ \eta\,(X)\frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman

$$j^2 = -\,I$$

elde ederiz ve bu yüzden j lineer dönüşümü M x IR üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olur. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
j^2(X, f\frac{d}{dt}) &= j\,(\phi X - f\,.\,\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \\
&= (\phi\,(\phi X - f\,.\,\xi) - \eta(X)\,.\,\xi, \eta\,(\,\phi X - f\,.\,\xi)\frac{d}{dt}) \\
&= (\phi^2 X - \phi\,(f\,.\,\xi) - \eta(X)\,.\,\xi, (\eta\,(\,\phi X) - \eta\,(f\,.\,\xi))\frac{d}{dt}) \\
&= (-X + \eta(X)\,\xi - f\,.\,\phi\ \xi - \eta(X)\,.\,(\xi), (0 - f\,.\,\eta\,(\xi))\frac{d}{dt}) \\
&= (-X - f\,.\,0, -\,f\,.\,1\frac{d}{dt}) \\
&= (-X, -\,f\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

$$j^2 (X, f\frac{d}{dt}) = - (X , f\frac{d}{dt})$$

olduğundan

$$j^2 = - I$$

ve dolayısıyla j dönüşümü M x IR üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

Tanım 3.1.: Eğer hhky olan j nin Nijenhuis torsion tensörü N_j için $N_j = 0$ ise j **integrallenebilirdir** denir. M x IR üzerindeki j (hhky) integrallenebilir ise o zaman (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir.

Aşağıda ϕ nin

$$N_\phi(X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X , \phi Y]$$

ile tanımlı N_ϕ Nijenhuis torsion tensörü yardımıyla hhky nın normallik şartına karşılık gerek ve yeter şartlar bulmaya çalışacağız. N_j (1, 2) tipinde bir tensör alanı olduğundan M üzerindeki her X ve Y vektör alanı için

$$N_j ((X, 0), (Y, 0)) \text{ ve } N_j ((X, 0), (0, d/dt))$$

hesaplanırsa N_j nin değerini hesaplamış oluruz. Gerçekten de;

$$N_j ((X, 0), (Y, 0)) = j^2 [(X, 0), (Y, 0)] + [j(X, 0), j(Y, 0)]$$

$$- j [j(X, 0), (Y, 0)] - j [(X, 0), j(Y, 0)]$$

$$N_j ((X, 0) , (Y, 0)) = - ([X, Y], 0) + [(\phi X, \eta(X) \frac{d}{dt}), (\phi Y, \eta(Y) \frac{d}{dt})]$$

$$-j [(\phi X, \eta(X) \frac{d}{dt}), (Y, 0)] - j[(X, 0), (\phi Y, \eta(Y) \frac{d}{dt})]$$

$$= -([X,Y],0) + ([\phi X,\phi Y] - [\eta(X)\tfrac{d}{dt}, \eta(Y)\tfrac{d}{dt}], [\phi X, \eta(Y)\tfrac{d}{dt}]$$

$$+ [\eta(X)\tfrac{d}{dt}, \phi(Y)]) - j([\phi X, Y], [\eta(X)\tfrac{d}{dt}, Y]) - j([X,\phi Y], [X, \eta(Y)\tfrac{d}{dt}])$$

$$= -([X,Y],0) + ([\phi X,\phi Y] - \eta(X)\eta(Y)[\tfrac{d}{dt},\tfrac{d}{dt}] + (\tfrac{d}{dt}\eta(Y)\eta(X) - \tfrac{d}{dt}\eta(X)\eta(Y))\tfrac{d}{dt}$$

$$, \eta(Y)[\phi X, \tfrac{d}{dt}] + \phi X(\eta(Y))\tfrac{d}{dt} - \eta(Y)\tfrac{d}{dt}(1)\phi X + \eta(X)[\tfrac{d}{dt}, \phi Y]$$

$$+ \eta(X)\tfrac{d}{dt}(1)\phi Y - 1\,\phi Y(\eta(X))\tfrac{d}{dt}) - j([\phi X, Y], \eta(X)[\tfrac{d}{dt}, Y] + \eta(X)\tfrac{d}{dt}(1)\,Y$$

$$- Y(\eta(X))\tfrac{d}{dt}) - j([X,\phi Y], \eta(Y)[X, \tfrac{d}{dt}] + X(\eta(Y))\tfrac{d}{dt} - \eta(Y)\tfrac{d}{dt}(1)\,X)$$

$$= -([X,Y],0) + ([\phi X,\phi Y] - \eta(X)\eta(Y)\,.\,0 + 0\,.\,\tfrac{d}{dt}, \phi X\ (\eta(Y))\tfrac{d}{dt}$$

$$- \phi Y(\eta(X))\tfrac{d}{dt}) - j([\phi X, Y], \eta(X)\,.\,0 - Y\eta(X)\tfrac{d}{dt}) - j([X,\phi Y], \eta(Y)\,.\,0 + X(\eta(Y))\tfrac{d}{dt})$$

$$= -([X,Y],0) + ([\phi X,\phi Y], (\phi X(\eta(Y)) - \phi Y(\eta(X)))\tfrac{d}{dt})$$

$$- j([\phi X, Y], -Y\eta(X)\tfrac{d}{dt}) - j([X,\phi Y], X(\eta(Y))\tfrac{d}{dt})$$

$$= -([X,Y],0) + ([\phi X,\phi Y], (\phi X(\eta(Y)) - \phi Y(\eta(X)))\tfrac{d}{dt})$$

$$- (\phi[\phi X, Y] + Y\eta(X)\,.\,\xi, \eta[\phi X, Y]\tfrac{d}{dt}) - (\phi[X,\phi Y] - X(\eta(Y))\,.\,\xi, \eta[X,\phi Y]\tfrac{d}{dt})$$

$$N_j((X,0),(Y,0)) = (-[X,Y] + [\phi X,\phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X,\phi Y]$$

$$+ (X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)))\,.\,\xi, (\phi X(\eta(Y)) - \phi Y(\eta(X)) - \eta[\phi X, Y] - \eta[X,\phi Y])\tfrac{d}{dt})$$

dır.

$$N_\phi(X,Y) = -[X,Y] + \eta[X,Y]\,.\,\xi + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X,\phi Y]$$

$$2\,d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta[X,Y]$$

$$(L_{\phi X}\eta)\,Y = \phi X(\eta(Y)) - \eta([\phi X, Y])$$

$$(L_{\phi Y}\eta)\,X = \phi Y(\eta(X)) - \eta([\phi Y, X])$$

olduğundan

$$N_j((X,0),(Y,0)) = (N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\,.\,\xi, ((L_{\phi X}\eta)\,Y - (L_{\phi Y}\eta)X)\tfrac{d}{dt})$$

elde edilir.

$$N_j\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right) = -\left[(X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right] + \left[j(X,0), j\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right] - j\left[j(X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right]$$

$$- j\left[(X,0), j\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right]$$

$$= -\left([X,0]-\left[0,\frac{d}{dt}\right], \left[X,\frac{d}{dt}\right]+[0,0]\right) + \left[\left(\phi X, \eta(X)\frac{d}{dt}\right), (-\xi, 0)\right]$$

$$-j\left[\left(\phi X, \eta(X)\frac{d}{dt}\right), \left(0,\frac{d}{dt}\right)\right] - j[(X,0),(-\xi,0)]$$

$$= -(0,0) + \left(-[\phi X,\xi] - \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, 0\right], [\phi X, 0] - \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, \xi\right]\right)$$

$$-j\left([\phi X, 0] - \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right], \left[\phi X, \frac{d}{dt}\right] + \left[\eta(X)\frac{d}{dt}, 0\right]\right)$$

$$-j\left(-[X,\xi]-[0,0], [X,0]-[0,\xi]\right)$$

$$N_j\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right) = \left(-[\phi X,\xi], \xi\,\eta(X)\frac{d}{dt}\right) - j\left(-\eta(X)\left[\frac{d}{dt},\frac{d}{dt}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{d}{dt}(\eta(X))\frac{d}{dt}, \left[\phi X, \frac{d}{dt}\right]\right) - j\left(-[X,\xi], 0\right)$$

$$= \left(-[\phi X,\xi], \xi\eta(X)\frac{d}{dt}\right) - j(0,0) + j\left([X,\xi],0\right)$$

$$= \left(-[\phi X,\xi], \xi\eta(X)\frac{d}{dt}\right) + \left(\phi[X,\xi], \eta[X,\xi]\,.\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \left(\phi[X,\xi]-[\phi X,\xi], (\xi\eta(X)+\eta[X,\xi])\frac{d}{dt}\right)$$

olup;

$$(L_X w)(Y_1,\dots,Y_r) = L_X(w(Y_1,\dots,Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} w(Y_1,\dots,[X,Y_i],\dots,Y_r)$$

olduğundan

$$(L_\xi\phi)X = L_\xi(\phi X) - \phi[\xi,X] = [\xi,\phi X] + \phi[X,\xi]$$

$$= \phi[X,\xi] - [\phi X,\xi]$$

ve

$$(L_\xi \eta) X = L_\xi (\eta (X)) - \eta [\xi, X]$$

olur. Böylece;

$$N_j ((X, 0), (0, \frac{d}{dt})) = ((L_\xi \phi) X, (L_\xi \eta) X \frac{d}{dt})$$

olur.

Şimdi dört tane tensör alanı $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, ve $N^{(4)}$ ü, sırasıyla,

$$N^{(1)} (X, Y) = N_\phi (X, Y) + 2d\eta (X, Y) . \xi$$

$$N^{(2)} (X, Y) = (L_{\phi X} \eta) Y - (L_{\phi Y} \eta) X$$

$$N^{(3)} (X) = (L_\xi \phi) X$$

$$N^{(4)} (X) = (L_\xi \eta) X$$

olarak tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 3.1.: Eğer $N^{(1)} = 0$ ise o zaman $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ dır.

İspat: $N^{(1)} (X, Y) = N_\phi (X, Y) + 2d\eta (X, Y) . \xi$

olduğundan

$$N^{(1)} (X, \xi) = N_\phi (X, \xi) + 2d\eta (X, \xi) . \xi$$

dır.

$$\begin{aligned} N_\phi (X, \xi) &= -[X, \xi] + [\phi X, \phi\xi] - \phi[\phi X, \xi] - \phi[X, \phi\xi] + \eta[X, \xi] . \xi \\ &= -[X, \xi] + [\phi X, 0] - \phi[\phi X, \xi] - \phi[X, 0] + \eta [X, \xi] . \xi \\ &= [\xi, X] - \phi[\phi X, \xi] + \eta [X, \xi] . \xi \\ &= [\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] + \eta [X, \xi] . \xi \end{aligned}$$

ve

$$2 d\eta (X, \xi) = X(\eta (\xi)) - \xi (\eta (X)) - \eta[X, \xi]$$

$$= X(1) - \xi\,(\eta(X)) - \eta[X, \xi]$$

$$= - \xi\,(\eta\,(X)) - \eta[X, \xi]$$

olduğundan

$$N^{(1)}\,(X, \xi) = [\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] - \xi\,(\eta\,(X))\,.\,\xi$$

dır.

$$N^{(1)} = 0$$

olduğundan

$$[\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] - \xi\,(\eta\,(X))\,.\,\xi = 0$$

olmalıdır.

$$\eta\,([\xi, X] + \phi\,[\xi, \phi X] - \xi\,(\eta\,(X))\,.\,\xi) = \eta\,(0)$$

$$\Rightarrow \eta\,[\xi, X] + \eta\,(\phi\,[\xi, \phi X] - \eta\,(\xi\,(\eta\,(X)))\,.\,\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \eta\,[\xi, X] - \xi(\eta\,(X))\,.\,\eta\,(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \eta\,[\xi, X] - \xi\,(\eta\,(X)) = 0$$

ve buradan da

$$\eta\,[\xi, X] = \xi\,(\eta\,(X))$$

olduğu görülür. Bu eşitlik

$$N^{(4)}\,(X) = (L_\xi\,\eta)X = \xi\,(\eta\,(X)) - \eta\,[\xi, X]$$

de kullanılırsa

$$N^{(4)}\,(X) = \xi\,(\eta\,(X)) - \xi\,(\eta\,(X))$$

$$= 0$$

bulunur.

$$\phi([\xi, X] + \phi[\xi, \phi X] - (\xi\, \eta(X))\, \xi) = \phi(0)$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] + \phi^2[\xi, \phi X] - \xi\, \eta(X)\, \phi\xi = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] - [\xi, \phi X] + \eta([\xi, \phi X])\, \xi - \xi\, .\, \eta(X)\, .\, 0 = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] - [\xi, \phi X] + \xi\, (\eta\, (\phi X))\, \xi = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] - [\xi, \phi X] = 0$$

$$\Rightarrow \phi[\xi, X] = [\xi, \phi X]$$

olduğundan

$$\phi[X, \xi] = [\phi X, \xi]$$

dır. Bu eşitlik

$$N^{(3)}\,(X, Y) = (L_\xi \phi)X = \phi[X, \xi] - [\phi X, \xi]$$

de kullanılırsa

$$\begin{aligned} N^{(3)}\,(X, Y) &= [\phi X, \xi] - [\phi X, \xi] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$0 = N_\phi\,(\phi X, Y) + 2d\eta\,(\phi X, Y)\, .\, \xi$$

eşitliğinde,

$$\begin{aligned} N_\phi\,(\phi X, Y) &= -\, [\phi X, Y] + [\phi^2 X, \phi Y] - \phi\, [\phi^2 X, Y] - \phi\, [\phi X, \phi Y] + \eta\, [\phi X, Y]\, .\, \xi \\ &= -\, [\phi X, Y] + [-X + \eta(X)\, .\, \xi, \phi Y] - \phi\, [-X + \eta\, (X)\, .\, \xi, Y] \\ &\quad - \phi[\phi X, \phi Y] + \eta\, [\phi X, Y]\, .\, \xi \\ &= -\, [\phi X, Y] - [X, \phi Y] + [\eta\, (X)\, .\, \xi, \phi Y] \\ &\quad + \phi\, [X, Y] - \phi\, [\eta\, (X)\, .\, \xi, Y] - \phi\, [\phi X, \phi Y] + \eta\, [\phi X, Y]\, .\, \xi \\ &= -\, [\phi X, Y] - [X, \phi Y] + \eta\, (X)\, [\xi, \phi Y] - \phi Y\, (\eta(X))\, .\, \xi \\ &\quad + \phi[X, Y] - \eta\, (X)\, \phi\, ([\xi, Y]) + \phi\, (Y(\eta(X)).\, \xi) \\ &\quad - \phi\, [\phi X, \phi Y] + \eta\, [\phi X, Y]\, .\, \xi \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\phi[\xi, Y] = [\xi, \phi Y]$$

eşitliği de kullanılırsa

$$N_\phi(\phi X, Y) = [Y, \phi X] + [\phi Y, X] - \phi Y(\eta(X)) . \xi$$
$$+ \phi[X, Y] + Y(\eta(X))\, \phi\xi - \phi[\phi X, \phi Y] + \eta\, [\phi X, Y] . \xi$$

olur.

$$2d\eta\,(\phi X, Y) . \xi = [\phi X\,(\eta\,(Y)) - Y\,(\eta\,(\phi X))] . \xi - \eta\,[\phi X, Y] . \xi$$
$$= (\phi X\,(\eta\,(Y)) - Y(0)) . \xi - \eta\,[\phi X, Y] . \xi$$
$$= \phi X\,(\eta\,(Y)) . \xi - \eta\,[\phi X, Y] . \xi$$

Bulunan değerler $N^{(1)} = 0$ da kullanılarak;

$$0 = N_\phi\,(\phi X, Y) + 2d\eta\,(\phi X, Y) . \xi$$
$$= [Y, \phi X] - [X, \phi Y] - \phi Y\,(\eta(X)) . \xi + \phi\,[X, Y]$$
$$- \phi\,[\phi X, \phi Y] + \phi X\,(\eta(Y)) . \xi$$
$$\Rightarrow 0 = \eta\,[Y, \phi X] - \eta\,[X, \phi Y] - \phi Y\,(\eta(X)) . \eta\,(\xi)$$
$$+ \eta\,(\phi\,[X, Y]) - \eta\,(\phi\,[\phi X, \phi Y]) + \phi X\,(\eta(Y)) . \eta\,(\xi)$$
$$\Rightarrow 0 = \eta\,[Y, \phi X] - \eta\,[X, \phi Y] - \phi Y\,(\eta(X)) + \phi X\,(\eta(Y))$$
$$\Rightarrow 0 = N^{(2)}\,(X, Y)$$

dolayısıyla

$$N^{(2)} = 0$$

dır.

Önerme 3.1.: M nin bir (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı normaldir $\Leftrightarrow$

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

dır.

Tanım 3.2.: Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n + 1)$ - boyutlu bir değme metrik manifold M olsun. Eğer ξ yapı vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yapıya bir **K - değme yapı** ve M ye de bu yapı ile birlikte bir **K - değme manifold** denir[6].

Önerme 3.2.: M bir değme manifold olsun. O zaman M nin bir K - değme manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$\nabla_X \xi = - \phi X$$

olmasıdır.

İspat: M bir K - değme manifold olsun. O zaman ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanıdır, yani

$$L_\xi g = 0$$

dır. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(L_\xi g)(X, Y) &= L_\xi (g(X, Y)) - g(L_\xi X, Y) - g(X, L_\xi Y)\\ &= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, Y)\\ &\quad - g(X, \nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi)\\ &= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) + g(\nabla_X \xi, Y)\\ &\quad - g(X, \nabla_\xi Y) + g(X, \nabla_Y \xi)\\ &= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) - g(X, \nabla_\xi Y)\\ &\quad + g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)\end{aligned}$$

$$0 = (L_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi)$$

olduğundan

$$g(\nabla_X \xi, Y) = - g(X, \nabla_Y \xi)$$

dir. g ye göre ∇ Riemann koneksiyonu için;

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y)$$
$$+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X)$$

dir. Y yerine ξ, Z yerine de Y yazılırsa

$$2g(\nabla_X \xi, Y) = Xg(\xi, Y) + \xi g(X, Y) - Yg(X, \xi)$$
$$+g([X, \xi], Y) + g([Y, X]\ \xi) - g([\xi, Y)], X)$$
$$= X\eta(Y) + \xi g(X, Y) - Y\eta(X) + g([X, \xi], Y)$$
$$- \eta([X, Y]) - g([\xi, Y], X)$$

olur. Benzer şekilde

$$2g(\nabla_Y \xi, X) = Yg(\xi, X) + \xi g(Y, X) - Xg(Y, \xi)$$
$$+ g([Y, \xi], X) + g([X, Y], \xi) - g([\xi, X], Y)$$
$$= Y\eta(X) + \xi\, g(X, Y) - X\eta(Y) - g([\xi, Y], X)$$
$$+ \eta([X, Y]) + g([X, \xi], Y)$$

bulunur. Böylece

$$2g(\nabla_X \xi, Y) - 2g(X, \nabla_Y \xi) = 2\,[g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi)]$$
$$= X\,\eta(Y) + \xi\, g(X, Y) - Y\,\eta(X) + g([X, \xi], Y) - \eta[X, Y]$$
$$-g([\xi, Y], X) - Y\,\eta(X) - \xi g(X, Y) + X\eta(Y) + g([\xi, Y], X)$$
$$-\eta([X, Y]) - g([X, \xi], Y)$$
$$= 2\,(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X, Y])$$
$$= 2\,(2\,d\eta(X, Y))$$

olacağından

$$g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi) = 2\,d\eta(X, Y)$$

olur. g ye göre Killing vektör alanı ξ iken $g(\nabla_X \xi, Y) = -g(X, \nabla_Y \xi)$ olduğundan

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_X \xi, Y) = 2\, d\eta\, (X, Y)$$

$$2g(\nabla_X \xi, Y) = 2\, d\eta\, (X, Y)$$

$$g(\nabla_X \xi, Y) = d\eta\, (X, Y)$$

dir.

$$d\eta\, (X, Y) = g\, (X, \phi Y) = -\, g\, (\phi X, Y)$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\phi X, Y) = g\, (-\phi X, Y)$$

bulunur. $\forall\ Y \in \chi\, (M)$ için

$$g(\nabla_X \xi, Y) = g\, (-\phi X, Y)$$

olduğundan

$$\nabla_X \xi = -\phi X$$

dir.

Yardımcı Teorem 3.2. M nin bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için

$$\begin{aligned} 2g\, ((\nabla_X \phi)Y, Z) = {} & 3d\Phi\, (X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi\, (X, Y, Z) \\ & + g\, (N^{(1)}\, (Y, Z), \phi X) + N^{(2)}\, (Y, Z)\, \eta\, (X) \\ & + 2d\eta\, (\phi Y, X)\, \eta\, (Z) - 2d\eta\, (\phi Z, X)\, \eta\, (Y) \end{aligned}$$

dir.

İspat: g ye göre ∇ Riemann koneksiyonu için; Koszul formülünden

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X g(Y, Z) + Y g(X, Z) - Z g(X, Y)$$
$$+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X)$$

dir. Diğer taraftan

$$3d\Phi(X, Y, Z) = X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) - \Phi([X, Y], Z)$$
$$-\Phi([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X)$$

dir. Bu denklemlerden ve

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

eşitliğinden önermedeki sonucu elde ederiz.

$$2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = 2g(\nabla_X(\phi Y) - \phi \nabla_X Y, Z)$$
$$= 2g(\nabla_X(\phi Y), Z) - 2g(\phi \nabla_X Y, Z)$$
$$= 2g(\nabla_X(\phi Y), Z) + 2g(\nabla_X Y, \phi Z)$$
$$= Xg(\phi Y, Z) + \phi Y g(X, Z) - Zg(X, \phi Y)$$
$$+ g([X, \phi Y], Z) + g([Z, X], \phi Y) - g([\phi Y, Z], X])$$
$$+ Xg(Y, \phi Z) + Yg(X, \phi Z) - \phi Z g(X, Y)$$
$$+ g([X, Y], \phi Z) + g([\phi Z, X], Y) - g([Y, \phi Z], X)$$
$$\Rightarrow 2g((\nabla_X \phi) Y, Z) = - X\Phi(Y, Z) + \phi Y g(X, Z) - Z\Phi(X, Y)$$
$$+ g([X, \phi Y], Z) + \Phi([Z, X], Y) - g([\phi Y, Z], X)$$
$$+ X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(X, Z) - \phi Z g(X, Y)$$
$$+ \Phi([X, Y], Z) + g([\phi Z, X], Y) - g([Y, \phi Z], X)$$
$$3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) = X\Phi(\phi Y, \phi Z) + \phi Y\Phi(\phi Z, X) + \phi Z\Phi(X, \phi Y)$$
$$- \Phi([X, \phi Y], \phi Z) - \Phi([\phi Z, X], \phi Y) - \Phi([\phi Y, \phi Z], X)$$

eşitliğinde

$$X\Phi(\phi Y, \phi Z) = X\Phi(Y, Z)$$

$$\phi Y\, \Phi(\phi Z, X) = \phi Y\, g(\phi Z, \phi X) = \phi Y\,(g(Z, X) - \eta(Z)\,\eta(X))$$

$$= \phi Y\, g(Z, X) - \phi Y\,(\eta(Z)\,\eta(X))$$

$$\phi Z\, \Phi(X, \phi Y) = \phi Z\, g(X, \phi^2 Y) = \phi Z\, g(X, -Y + \eta(Y)\,.\,\xi)$$

$$= -\phi Z\, g(X, Y) + \phi Z\,(\eta(X)\,\eta(Y))$$

$$\phi([X, \phi Y], \phi Z) = g([X, \phi Y], \phi^2 Z) = g([X, \phi Y], -Z + \eta(Z)\,.\,\xi)$$

$$= -g([X, \phi Y], Z) + \eta[X, \phi Y]\,.\,\eta(Z)$$

$$\phi([\phi Z, X], \phi Y) = g([\phi Z, X], \phi^2 Y) = g([\phi Z, X], -Y + \eta(Y)\,.\,\xi)$$

$$= -g([\phi Z, X], Y) + \eta[\phi Z, X]\,.\,\eta(Y)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) = X\Phi(Y, Z) + \phi Y g(Z, X) - \phi Y(\eta(Z)\,\eta(X)) - \phi Z g(X, Y)$$

$$+ \phi Z(\eta(X)\,\eta(Y)) + g([X, \phi Y], Z) - \eta[X, \phi Y]\,\eta(Z) + g([\phi Z, X], Y)$$

$$- \eta[\phi Z, X]\,\eta(Y) - \Phi([\phi Y, \phi Z], X)$$

olur.

$$-3d\Phi(X, Y, Z) = -X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(X, Z) - Z\Phi(X, Y) + \Phi([X, Y], Z)$$

$$+ \phi([Z, X], Y) + \phi([Y, Z], X)$$

$$g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) = g(-[Y, Z] + [\phi Y, \phi Z] - \phi[\phi Y, Z] - \phi[Y, \phi Z]$$

$$+ Y(\eta(Z))\,.\,\xi - Z(\eta(Y))\,.\,\xi\,, \phi X)$$

$$g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) = -g([Y, Z], \phi X) + g([\phi Y, \phi Z], \phi X) - g(\phi[\phi Y, Z], \phi X)$$

$$-g(\phi[Y, \phi Z], \phi X) + g(Y(\eta(Z))\,.\,\xi, \phi X) - g(Z(\eta(Y))\,.\,\xi\,, \phi X)$$

$$g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) = -\Phi([Y, Z], X) + \Phi([\phi Y, \phi Z], X) - g([\phi Y, Z], X)$$

$$+ \eta[\phi Y, Z]\,.\,\eta(X) - g([Y, \phi Z], X) + \eta[Y, \phi Z]\,\eta(X) + 0$$

$$N^{(2)}(Y, Z)\,\eta(X) = (\phi Y(\eta(Z)) - \phi Z(\eta(Y)) - \eta[\phi Y, Z] - \eta[Y, \phi Z])\,.\,\eta(X)$$

$$= \phi Y(\eta(Z))\,\eta(X) - \phi Z(\eta(Y))\,.\,\eta(X) - \eta[\phi Y, Z]\,.\,\eta(X)$$

$$- \eta[Y, \phi Z]\,\eta(X)$$

$$2d\eta\,(\phi Y, X)\,\eta(Z) = \phi Y(\eta(X))\,\eta(Z) - \eta[\phi Y, X].\,\eta(Z)$$

$$-\,2d\eta\,(\phi Z, X)\,\eta(Y) = -\,\phi Z(\eta(X))\,\eta(Y) + \eta[\phi Z, X].\,\eta(Y)$$

eşitliklerinden

$$3d\Phi\,(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) + g\,(N^{(1)}\,(Y, Z), \phi X) + N^{(2)}\,(Y, Z)\,\eta(X)$$
$$+\,2d\eta\,(\phi Y, X)\,\eta(Z) - 2\,d\eta\,(\phi Z, X)\,\eta(Y) = X\Phi(Y, Z) + \phi Y\,g\,(Z, X)$$
$$-\,\phi Y\,(\eta\,(Z)\,\eta(X)) - \phi Zg(X, Y) + \phi Z\,(\eta(X)\,\eta(Y)) + g\,([X, \phi Y], Z) - \eta\,[X, \phi Y]\,.\,\eta(Z)$$
$$+\,g\,([\phi Z, X], Y) - \eta\,[\phi Z, X]\,\eta(Y) - \Phi\,([\phi Y, \phi Z], X) - X\,\Phi\,(Y, Z) + Y\,\Phi(X, Z)$$
$$-\,Z\,\Phi\,(X, Y) + \Phi\,([X, Y], Z) + \Phi\,([Z, X], Y) + \Phi\,([Y, Z], X) - \Phi\,([Y, Z], X)$$
$$+\,\Phi\,([\phi Y, \phi Z], X) - g\,([\phi Y, Z], X) + \eta\,[\phi Y, Z]\,\eta(X) - g\,([Y, \phi Z], X) + \eta\,[Y, \phi Z]\,\eta(X)$$
$$+\,\phi Y\,(\eta(Z))\,\eta(X) - \phi Z\,(\eta(Y))\,\eta(X) - \eta\,[\phi Y, Z]\,\eta(X) - \eta[Y, \phi Z]\,\eta(X)$$
$$+\phi Y\,(\eta(X))\,.\,\eta(Z) - \eta[\phi Y, X]\,\eta(Z) - \phi Z\,(\eta(X))\,\eta(Y) + \eta[\phi Z, X]\,.\,\eta(Y)$$
$$=\phi Yg\,(X, Z) - \phi Zg\,(X, Y) + g\,([X, \phi Y], Z) + g\,([\phi Z, X], Y)$$
$$+\,Y\Phi(X, Z) - Z\Phi(X, Y) + \Phi\,([X, Y], Z) + \Phi([Z, X], Y) - g\,([\phi Y, Z], X)$$
$$-\,g\,([Y, \phi Z], X) - \phi Y\,(\eta(X)\,\eta(Z)) +\phi Z\,(\eta(X)\,\eta(Y)) + \phi Y\,(\eta(Z))\,\eta(X)$$
$$-\,\phi Z\,(\eta(Y))\,\eta(X) + \phi Y\,(\eta(X))\,\eta(Z) -\phi Z\,(\eta(X))\,\eta(Y)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte

$$\phi Y\,(\eta(Z))\,\eta(X) + \phi Y\,(\eta(X))\,\eta(Z) = \phi Y\,(\eta(X)\,.\,\eta(Z))$$

ve

$$-\phi Z\,(\eta(Y))\,\eta(X) - \phi Z\,(\eta(X))\,\eta(Y) = -\phi Z\,(\eta(X)\,\eta(Y))$$

olduğundan da

$$3d\Phi\,(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi\,(X, Y, Z) + g\,(N^{(1)}\,(Y, Z), \phi(X)) + N^{(2)}\,(Y, Z)\,\eta(X)$$
$$+\,2\,d\eta\,(\phi Y, X)\,\eta(Z) - 2d\eta\,(\phi Z, X)\,\eta(Y)$$
$$=\phi Yg\,(X, Z) - \phi Zg\,(X, Y) + g\,([X, \phi Y], Z) + g\,([\phi Z, X], Y)$$
$$+\,Y\,\Phi(X, Z) - Z\Phi\,(X, Y) + \Phi\,([X, Y], Z) + \Phi\,([Z, X], Y) - g\,([\phi Y, Z], X)$$

$$- g([Y, \phi Z], X) = 2g((\nabla_X \phi) Y, Z)$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.3.: M nin

$$\Phi = d\eta \text{ ve } N^{(2)} = 0$$

ile bir (ϕ, ξ, η, g) değme metrik yapısı için

$$\text{(a). } 2g((\nabla_X \phi) Y, Z) = g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y)$$

dır ve özellikle de

$$\text{(b). } \nabla_\xi \phi = 0$$

dır.

İspat: (a). Söz konusu denklem aşikârdır.

$$\text{(b). } \nabla_\xi \phi = 0$$

olduğunu gösterelim.

$$N^{(2)}(X, Y) = \phi X \eta(Y) - \phi Y \eta(X) - \eta[\phi X, Y] - \eta[X, \phi Y]$$

ve

$$N^{(2)} = 0$$

olduğundan

$$N^{(2)}(X, \xi) = \phi X(\eta(\xi)) - \phi\xi(\eta(X)) - \eta[\phi X, \xi] - \eta[X, \phi\xi]$$

$$\Rightarrow 0 = \phi X(1) - 0(\eta(X)) - \eta[\phi X, \xi] - \eta[X, 0]$$

$$= 0 - 0 - \eta[\phi X, \xi] - 0$$

$$= - \eta\ [\phi X, \xi]$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2\, d\eta\ (\phi X, \xi) &= \phi X(\eta(\xi)) - \xi\ (\eta(\phi X)) - \eta\ [\phi X, \xi] \\ &= \phi X(1) - \xi(0) - \eta\ [\phi X, \xi] \\ &= - \eta\ [\phi X, \xi] \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Bulduğumuz bu değeri (a) daki denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 2g\ ((\nabla_\xi \phi)\ Y, Z) &= g\ (N^{(1)}\ (Y, Z), \phi\xi) + 2d\eta\ (\phi Y, \xi)\ \eta(Z) \\ &\quad - 2d\eta\ (\phi Z, \xi)\ \eta(Y) \\ &= g(N^{(1)}\ (Y, Z)\ , 0) + 0\ .\ \eta(Z) - 0\ .\ \eta(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Bu da

$$\nabla_\xi \phi = 0$$

olmasına karşılık gelir.

Yardımcı Teorem 3.3. ün hipotezi geçerli iken ξ nın integral eğrilerinin geodezikler olduğunu, yani

$$\nabla_\xi \xi = 0$$

olduğunu kolayca söyleyebiliriz.

Yardımcı Teorem 3.4.: Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan bir değme metrik manifold M olsun. O zaman $N^{(2)}$ ve $N^{(4)}$ sıfıra eşittir. Bundan başka $N^{(3)}$ ün de sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşul ξ nın g ye göre bir Killing vektör alanı olmasıdır.

İspat: M manifoldu üzerinde bir değme metrik yapı (ϕ, ξ, η, g) olduğundan Teo. 2.3.1. gereğince $\forall\ X, Y \in \chi\ (M)$ için

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad *$$

dir. X yerine ϕX, Y yerine de ϕY alırsak

$$g(\phi X, \phi^2 Y) = d\eta(\phi X, \phi Y)$$

$$-g(\phi X, Y) = d\eta(\phi X, \phi Y)$$

olur. Ayrıca g ye göre ϕ anti-simetrik olduğundan

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y)$$

eşitliği vardır. Yani;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(\phi X, \phi Y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad **$$

dir. * ve ** eşitliklerinden

$$d\eta(X, Y) = d\eta(\phi X, \phi Y)$$

olduğunu görürüz. Bu eşitlikte de X yerine ϕX alırsak

$$d\eta(\phi X, Y) = d\eta(\phi^2 X, \phi Y) = -d\eta(X, \phi Y)$$

olacağından

$$d\eta(\phi X, Y) + d\eta(X, \phi Y) = 0$$

olur. η bir 1-form olduğundan

$$2d\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta[X, Y]$$

dir. Burada önce X yerine ϕX sonra da Y yerine ϕY alırsak

$$\begin{aligned} 2d\eta(\phi X, Y) &= \phi X(\eta(Y)) - Y(\eta(\phi X)) - \eta[\phi X, Y] \\ &= \phi X(\eta(Y)) - Y(0) - \eta[\phi X, Y] \\ &= \phi X(\eta(Y)) - \eta[\phi X, Y] \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
2d\eta(X, \phi Y) &= X(\eta(\phi Y)) - \phi Y(\eta(X)) - \eta[X, \phi Y] \\
&= X(0) - \phi Y(\eta(X)) - \eta[X, \phi Y] \\
&= - \phi Y(\eta(X)) - \eta[X, \phi Y]
\end{aligned}
$$

eşitliklerini bulmuş oluruz. Ayrıca

$$d\eta(X, \phi Y) + d\eta(\phi X, Y) = 0$$

olması gerektiğinden

$$
\begin{aligned}
&2.[d\eta(X, \phi Y) + d\eta(\phi X, Y)] = 0 \\
&\Rightarrow 2.d\eta(X, \phi Y) + 2\, d\eta(\phi X, Y)] = 0 \\
&\Rightarrow - \phi Y(\eta(X)) - \eta[X, \phi Y] + \phi X(\eta(Y)) - \eta[\phi X, Y] = 0 \\
&\Rightarrow N^{(2)}(X, Y) = 0
\end{aligned}
$$

olduğunu buluruz. Bu yüzden eğer M bir değme metrik manifoldu ise

$$N^{(2)} = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
0 = g(X, \phi\xi) &= d\eta(X, \xi) \\
&= \frac{1}{2}(X(\eta(\xi)) - \xi(\eta(X)) - \eta[X, \xi]) \\
&= \frac{1}{2}(X(1) - \xi(\eta(X)) - \eta[X, \xi]) \\
&= \frac{1}{2}(- \xi(\eta(X)) - \eta[X, \xi])
\end{aligned}
$$

dir. O halde

$$
\begin{aligned}
0 &= \xi(\eta(X)) + \eta\,[X, \xi] \\
0 &= \xi(\eta(X)) - \eta\,[\xi, X] \\
&= (L_\xi\eta)(X) = N^{(4)}(X)
\end{aligned}
$$

dir. Yani bir M değme metrik manifoldu için

$$N^{(4)} = 0$$

dır. Bundan başka

$$\begin{aligned}(L_\xi g)(X, \xi) &= \xi\,(g(X, \xi)) - g\,([\xi, X], \xi) - g\,(X, [\xi, \xi]) \\ &= \xi\,(g(X, \xi)) - g\,([\xi, X], \xi) - g\,(X, 0) \\ &= \xi\,(\eta(X)) - \eta\,[\xi, X] \\ &= (L_\xi\, \eta)(X) \\ &= N^{(4)}(X) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}(L_\xi\, d\eta)(X, Y) &= L_\xi\,(d\eta\,(X, Y)) - d\eta\,(L_\xi X, Y) \\ &\quad - d\eta\,(X, L_\xi Y) \\ &= \xi\,(g(X, \phi Y)) - g\,(L_\xi X, \phi Y) \\ &\quad - g\,(X, \phi L_\xi Y) \\ &= \xi\,(g(X, \phi Y)) - g\,(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, \phi Y) \\ &\quad - g\,(X, \phi(\nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (L_\xi\, d\eta)(X, Y) &= \xi\,(g(X, \phi Y)) - g\,(\nabla_\xi X, \phi Y) + g\,(\nabla_X \xi, \phi Y) \\ &\quad - g\,(X, \phi \nabla_\xi Y) + g\,(X, \phi \nabla_Y \xi) \\ &= \xi\,(g\,(X, \phi Y)) - g\,(\nabla_\xi X, \phi Y) - g(X, \phi \nabla_\xi Y) \\ &\quad + g\,(\nabla_X \xi, \phi Y) + g(X, \phi \nabla_Y \xi)\end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\xi\,(g(X, \phi Y)) - g\,(\nabla_\xi X, \phi Y) - g\,(X, \nabla_\xi (\phi Y)) = 0$$

ve

$$\nabla_\xi(\phi Y) = (\nabla_\xi\phi)Y + \phi\nabla_\xi Y$$
$$= 0 + \phi\nabla_\xi Y$$
$$= \phi\nabla_\xi Y$$

olduğundan

$$\xi\,(g(X, \phi Y)) - g(\nabla_\xi X, \phi Y) - g\,(X, \phi\nabla_\xi Y) = 0$$

dır. Böylece

$$(L_\xi\, d\eta)\,(X, Y) = g\,(\nabla_X\, \xi, \phi Y) + g\,(X, \phi\nabla_Y \xi)$$

bulunur. ξ vektör alanı g ye göre Killing olduğundan

$$\nabla_X\, \xi = -\ \phi X \quad \text{ve} \quad \phi\nabla_Y\xi = -\phi^2 Y = Y - \eta(Y)\,\xi$$

olmalıdır. Böylece

$$(L_\xi\, d\eta)\,(X, Y) = g\,(-\phi X, \phi Y) + g\,(X, -\phi^2 Y)$$
$$= -\,g\,(\phi X, \phi Y) + g\,(X, Y - \eta(Y)\,\xi)$$
$$= -\,g\,(X, Y) + \eta\,(X)\,\eta\,(Y) + g\,(X, Y) - \eta\,(Y)\,g\,(X, \xi)$$
$$= \eta\,(X)\,\eta\,(Y) - \eta\,(Y)\,\eta\,(X)$$
$$= 0$$

dır.

$$0 = (L_\xi\, d\eta)\,(X, Y) = \xi\,(d\eta\,(X, Y)) - d\eta\,(L_\xi\, X, Y)$$
$$-\, d\eta\,(X, L_\xi Y)$$
$$= \xi\,(g(X, \phi Y)) - g\,(L_\xi\, X, \phi Y) - g\,(X, \phi L_\xi\, Y)$$
$$= \xi\,(g(X, \phi Y)) - g\,([\xi, X], \phi Y) - g\,(X, \phi[\xi, Y])$$

ve

$$(L_\xi g)\,(X, \phi Y) = \xi\,(g(X, \phi Y)) - g\,([\xi, X], \phi Y)$$
$$-\, g\,(X\,[\xi, \phi Y])$$

olduğundan

$$0 = (L_\xi d\eta)(X, Y) = (L_\xi g)(X, \phi Y) + g(X, [\xi, \phi Y])$$
$$- g(X, \phi[\xi, Y])$$
$$0 = (L_\xi g)(X, \phi Y) + g(X, [\xi, \phi Y] - \phi[\xi, Y])$$
$$0 = (L_\xi g)(X, \phi Y) + g(X, N^{(3)}(Y))$$

dir. Böylece

$$(L_\xi g)(X, \phi(Y)) = - g(X, N^{(3)}(Y))$$

elde edilir.

$$L_\xi g = 0 \Leftrightarrow g(X, N^{(3)}(Y)) = 0, \quad \forall X, Y \in \chi(M)$$
$$\Leftrightarrow N^{(3)}(Y) = 0,$$
$$\Leftrightarrow N^{(3)} = 0.$$

Yardımcı Teorem 3.4. yardımıyla aşağıdaki karakterizasyon verilebilir.

Önerme 3.3.: M bir değme metrik manifold olsun. 0 zaman M nin bir K - değme manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$N^{(3)} = 0$$

olmasıdır.

IV. BÖLÜM

4. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARININ YARI İNVARYANT ALT MANİFOLDLARI

ϕ, ξ, η ve g, sırasıyla, $\overline{M}$ üzerinde (1,1) tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı, bir 1-form ve bir Riemann metriği olmak üzere $\overline{M}$ ye teğet her X, Y vektör alanı için

$$\phi^2 X = -X + \eta(X).\xi \quad , \quad \phi\xi = 0 \quad , \quad \eta(\phi X) = 0 \quad , \quad \eta(\xi) = 1$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X).\eta(Y)$$

eşitliklerini sağlayan (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne hemen hemen değme metrik yapısı (hhdmy) demiştik. Yapısı (hhdmy) olan (2n + 1) boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold $\overline{M}$ olsun.

Tanım 4.1.: Üzerindeki hhdmy (ϕ, ξ, η, g) olan $\overline{M}$ üzerinde g ye göre bir kovaryant türev $\overline{\nabla}$ olmak üzere $\overline{M}$ üzerinde belirli α ve β fonksiyonları için $\overline{\nabla}$

$$(\overline{\nabla}_X \phi)Y = \alpha\{g(X,Y)\xi - \eta(Y).X\} + \beta\{g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y).\phi X\}$$

denklemini sağlarsa $\overline{\nabla}$ ye **trans-Sasakian**'dır ve (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne de trans-Sasakian yapı denir. Üzerinde böyle bir yapı tanımlanan manifolda bir **trans-Sasakian manifold** denir. Beklenildiği üzere, eğer $\alpha = -1$ ve $\beta = 0$ ise o zaman $\overline{M}$ manifoldu **Sasakian manifold** adını alır[5]. (Bundan sonra hep $\overline{M}$ manifoldunun trans-Sasakian olduğunu kabul edeceğiz).

Sonuç 4.1.: $\overline{M}$ bir trans-Sasakian manifoldu olsun. O zaman, $\overline{M}$ ye teğet her X vektör alanı için

$$\overline{\nabla}_X \xi = -\alpha.\phi X + \beta\{X - \eta(X).\xi\}$$

dır[5].

İspat: $(\overline{\nabla}_X \phi)Y = \overline{\nabla}_X(\phi Y) - \phi\overline{\nabla}_X Y$

dir. Y yerine ξ alırsak

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, \xi = \overline{\nabla}_X (\phi\xi) - \phi\overline{\nabla}_X \xi$$
$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, \xi = 0 - \phi\overline{\nabla}_X \xi$$
$$= - \phi\overline{\nabla}_X \xi.$$

Şimdi

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, Y = \alpha \,\{g\,(X,Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,.\,X\} + \beta\,\{g\,(\phi X,Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,.\,\phi X\}$$

denkleminde Y yerine ξ alırsak

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, \xi = \alpha \,\{g\,(X,\xi)\,\xi - \eta\,(\xi)\,.\,X\} + \beta\,\{g\,(\phi X,\xi)\,\xi - \eta\,(\xi)\,.\,\phi X\}$$

olur.

$$g\,(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta\,(X)\,.\,\eta\,(Y)$$

de $Y = \xi$ alırsak $\phi\xi = 0$ ve $\eta\,(\xi) = 1$ olduğundan

$$g\,(\phi X,\, \phi\xi) = g(X,\, \xi) - \eta\,(X)\,.\,\eta\,(\xi)$$
$$0 = g\,(X,\, \xi) - \eta\,(X)\,.\,1$$
$$g\,(X,\, \xi) = \eta\,(X)$$

buluruz. Benzer şekilde X yerine ϕX ve Y yerine ξ alındığında

$$g\,(\phi^2 X,\, \phi\xi) = g(\phi X,\, \xi) - \eta\,(\phi X)\,.\,\eta\,(\xi)$$
$$g\,(\phi^2 X,\, 0) = g(\phi X,\xi) - 0\,.\,\eta\,(\xi)$$
$$0 = g(\phi X,\, \xi)$$

bulunur. Böylece de

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, \xi = \alpha\,\{\eta\,(X)\,\xi - 1\,.\,X\} + \beta\,\{0\,\xi - 1\,.\,\phi X\}$$
$$= \alpha\,\{\eta\,(X)\,\xi - X\} + \beta\,\{-\,\phi X\}$$

$$\Rightarrow \phi(\overline{\nabla}_X \xi) = -\alpha\,\{\eta(X)\,\xi - X\} + \beta\,\{\phi\, X\}$$
$$= -\alpha\,\{\phi^2 X\} + \beta\,\{\phi\, X - \eta(X)\,\phi(\xi)\}$$
$$= \phi\,\{-\alpha\,\phi X\} + \phi\,(\beta\{X - \eta(X)\,\xi\})$$
$$= \phi\,(-\alpha\,\phi X + \beta\,\{X - \eta(X)\,\xi\})$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla}_X\, \xi = -\alpha\,\phi X + \beta\,\{X - \eta(X)\xi\}$$

elde edilir.

Şimdi $\overline{M}$ de isometrically immersed (izometrik olarak daldırılmış) olan m-boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. ξ vektör alanının M ye teğet olduğunu kabul edelim. ξ ile gerilmiş bir distribüsyon $\{\xi\}$ olsun. Üstelik M nin teğet ve normal demetini, sırasıyla, TM ve $T^{\perp}M$ ile, M nin P noktasındaki teğet ve normal vektör uzaylarını da, sırasıyla, $T_M(P)$ ve $T_M{}^{\perp}(P)$ ile gösteririz.

Tanım 4.2.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Eğer M de diferensiyellenebilir distribüsyonların bir $(D, D^{\perp})$ ortogonal çifti için aşağıdaki önermeler geçerli ise M ye **yarı-invaryant**tır denir[5]:

(i) $TM = D \oplus D^{\perp} \oplus \{\xi\}$ dır.

(ii) D distribüsyonu, ϕ'ye göre invaryanttır ve $\forall x \in M$ noktasında $\phi D_x = D_x$'dir.

(iii) $D^{\perp}$ distribüsyonu, ϕ'ye göre invaryant değildir ve $\forall x \in M$ noktasında $\phi D_x \subset T_M{}^{\perp}(x)$ dır.

D nin boyutu 2p olsun. $2p + q = m - 1$ dir. Buradaki $p = 0$ ise o zaman M altmanifoldu **anti-invaryant** olur. Genel bir M altmanifoldu için boy $D^{\perp}$ = boy $T^{\perp}M$ dir. Bir M altmanifoldu, eğer ne invaryant ne de anti-invaryant ise **has** olarak adlandırılır. ξ vektör alanına teğet olan her bir hiperyüzeyin yarı invaryant has altmanifoldunun tipik bir örneği olduğunu görmek kolaydır.

M ye teğet her X, Y vektör alanı ile M ye normal N vektör alanı için Gauss ve Weingarten denklemleri, sırası ile,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad , \quad \overline{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X{}^{\perp} N$$

ile verilir, burada ∇ ve $\nabla^{\perp}$, sırasıyla, TM ve $T^{\perp}M$ de indirgenmiş olan Riemann koneksiyonlarını ve h ikinci temel formu gösterir, A_N de M nin şekil operatörüdür.

Sonuç 4.2.: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(h(X, Y), N) = g(A_N X, Y)$$

dır[5].

İspat: $A_N X = \nabla_X^{\perp} N - \overline{\nabla}_X N$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(A_N X, Y) &= g(\nabla_X^{\perp} N - \overline{\nabla}_X N, Y) \\ &= g(\nabla_X^{\perp} N, Y) - g(\overline{\nabla}_X N, Y) \\ &= 0 - g(\overline{\nabla}_X N, Y) \\ &= g(N, \overline{\nabla}_X Y) = g(N, \nabla_X Y + h(X, Y)) \\ &= g(N, \nabla_X Y) + g(N, h(X, Y)) \\ &= g(N, h(X, Y)). \end{aligned}$$

Tanım 4.3.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun M invaryant altmanifoldunun ikinci temel formu h olmak üzere $h(X, Y) = 0$, $\forall X \in D$ ve $Y \in D^{\perp}$, ise M ye **karışık total geodozik**tir denir.

Şimdi kullanacağımız bazı formülleri verelim.

Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. TM nin D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının projeksiyon morfizmlerini, sırasıyla, P ve Q ile gösteririz. O zaman $\forall X \in TM$ için

$$X = PX + QX + \eta(X)\xi$$

yazabiliriz.

Hatta $\forall N \in T^{\perp}M$ için, fN, ϕN in teğet kısmını göstermek üzere

$$\phi N = fN + qN$$

eşitliğini alırız.

Yardımcı Teorem 4.1.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman TM deki her X, Y için aşağıdaki eşitlikler vardır:

(1) $P\nabla_X \phi PY - PA_{\phi QY} X = \phi P\nabla_X Y - \alpha\eta(Y) PX - \beta\eta(Y)\phi PX$

(2) $Q\nabla_X \phi PY - QA_{\phi QY} X = fh(X,Y) - \alpha\eta(Y) QX$

(3) $g(\xi, \nabla_X \phi PY) - g(\xi, A_{\phi QY} X) = \alpha\{g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\} + \beta\, g(\phi X, Y)$

(4) $\nabla_X^{\perp}\phi QY + h(X, \phi PY) = \phi Q\nabla_X Y + qh(X,Y) - \beta\eta(Y)\phi QX$

dır[5].

İspat:

(1) $(\overline{\nabla}_X \phi) Y = \overline{\nabla}_X(\phi Y) - \phi\,\overline{\nabla}_X Y \quad , \quad \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \ \forall X, Y \in TM$

ve

$$Y = PY + QY + \eta(Y)\xi$$

$$\Rightarrow \phi Y = \phi PY + \phi QY + \eta(Y)\phi\xi$$

$$\Rightarrow \phi Y = \phi PY + \phi QY$$

dir. Böylece

$$(\overline{\nabla}_X \phi) Y = \overline{\nabla}_X(\phi PY + \phi QY) - \phi(\nabla_X Y + h(X,Y))$$

$$= \overline{\nabla}_X \phi PY + \overline{\nabla}_X \phi QY - \phi\nabla_X Y - \phi h(X,Y)$$

dir.

$$Y \in TM \Rightarrow PY \in D \text{ ve } \phi PY \in D$$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

den

$$\overline{\nabla}_X \phi PY = \nabla_X \phi PY + h\,(X, \phi PY)$$

dir.

$Y \in TM \Rightarrow QY \in D^{\perp}$ ve $\phi QY \in T^{\perp}M$

$$\overline{\nabla}_X N = -\,A_N X + \nabla_X^{\perp} N$$

olduğundan,

$$\overline{\nabla}_X (\phi QY) = -\,A_{\phi QY} X + \nabla_X^{\perp} (\phi QY)$$

dir.

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\,Y = \nabla_X (\phi PY) + h\,(X, \phi PY) - A_{\phi QY} X + \nabla_X^{\perp} (\phi QY) - \phi \nabla_X Y - \phi h\,(X,Y)$$

olur. $Y \in TM$ için

$$Y = PY + QY + \eta\,(Y)\,\xi$$

olduğundan $\nabla_X (\phi PY) \in TM$ için

$$\nabla_X (\phi PY) = P\,\nabla_X (\phi PY) + Q\,\nabla_X (\phi PY) + \eta\,(\nabla_X (\phi PY))\,\xi$$

$A_{\phi QY} X \in TM$ için

$$A_{\phi QY} X = P\,A_{\phi QY} X + Q\,A_{\phi QY} X + \eta\,(A_{\phi QY} X)\,\xi$$

ve $\phi \nabla_X Y \in TM$ için

$$\phi \nabla_X Y = \phi\,(P \nabla_X Y) + \phi\,(Q \nabla_X Y) + \eta\,(\nabla_X Y)\,\phi\xi$$

$$\phi \nabla_X Y = \phi P \nabla_X Y + \phi Q \nabla_X Y$$

dir. $N \in T^{\perp}M$ için

$$\phi N = fN + qN$$

olduğundan da

$$\phi\, h\,(X,Y) = f\, h\,(X,Y) + q\, h\,(X,Y)$$

dir. Böylece

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, Y = P\nabla_X(\phi PY) + Q\nabla_X(\phi PY) + \eta(\nabla_X(\phi PY))\,\xi + h(X, \phi PY) - PA_{\phi QY} X$$
$$- QA_{\phi QY} X - \eta(A_{\phi QY} X)\,\xi + \nabla_X^{\perp}(\phi QY) - \phi P\nabla_X Y - \phi Q\nabla_X Y - fh(X,Y) - qh\,(X,Y)$$

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, Y = \alpha\,\{g\,(X, Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,.\,X\} + \beta\,\{g\,(\phi X, Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,.\,\phi X\}$$

$X = PX + QX + \eta\,(X)\,\xi$ ve $\phi X = \phi PX + \phi Q\, X$ olduğundan

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, Y = -\,\alpha\,\eta\,(Y)\, PX - \alpha\,\eta\,(Y)\, QX - \alpha\,\eta\,(Y)\,\eta\,(X)\,\xi$$
$$+ \alpha\, g\,(X, Y)\,\xi + \beta\, g\,(\phi X, Y)\,\xi - \beta\,\eta\,(Y)\,\phi PX - \beta\,\eta\,(Y)\,\phi QX$$
$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, Y = -\,\alpha\,\eta\,(Y)\, PX - \beta\,\eta\,(Y)\,\phi PX - \alpha\,\eta\,(Y)\, QX$$
$$-\,\beta\,\eta\,(Y)\,\phi QX - \alpha\,\eta\,(Y)\,\eta\,(X)\,\xi + \alpha\, g\,(X, Y)\,\xi + \beta\, g\,(\phi X, Y)\,\xi$$

Teğet ve normal kısımlarını ayırırsak

$$P\nabla_X(\phi PY) - PA_{\phi QY} X - \phi P\nabla_X Y = -\,\alpha\,\eta\,(Y)\, PX - \beta\,\eta\,(Y)\,\phi PX$$

ve buradan

(1). $P\nabla_X(\phi PY) - PA_{\phi QY} X = \phi P\nabla_X Y - \alpha\,\eta\,(Y)\, PX - \beta\,\eta\,(Y)\,\phi PX$

buluruz. Benzer şekilde buradan

(2). $Q\nabla_X(\phi PY) - QA_{\phi QY} X = f\, h\,(X,Y) - \alpha\,\eta\,(Y)\, QX$

(3). $\eta\,(\nabla_X(\phi PY)) - \eta\,(A_{\phi QY} X) = -\,\alpha\,\eta\,(Y)\,\eta\,(X) + \alpha\, g\,(X, Y) + \beta\, g\,(\phi X, Y)$

$= g\,(\xi, \nabla_X \phi PY) - g\,(\xi,\ A_{\phi QY} X)$

(4). $\nabla_X^{\perp}(\phi QY) + h\,(X, \phi PY) = \phi Q\nabla_X Y + q\, h\,(X,Y) - \beta\,\eta\,(Y)\,\phi QX$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman $\forall X \in D$ ve $Y \in D^{\perp}$ için

$$\nabla_X \xi = -\alpha\, \phi X + \beta X \quad , \quad h(X,\xi) = 0$$

ve

$$\nabla_Y \xi = \beta Y \quad , \quad h(Y,\xi) = -\alpha\, \phi Y$$

dir[5].

İspat: $\overline{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + h(X,\xi)$

$$\overline{\nabla}_X \xi = -\alpha\, \phi X + \beta\, \{X - \eta(X)\, \xi\}$$

olduğundan

$$-\alpha\, \phi X + \beta\, \{X - \eta(X)\, \xi\} = \nabla_X \xi + h(X,\xi)$$

$$-\alpha\, \phi X + \beta X - \beta\, g(X,\xi)\, \xi = \nabla_X \xi + h(X,\xi)$$

olur. $TM = D \oplus D^{\perp} \oplus \{\xi\}$ formunda yazarsak

$$g(X,\xi) = 0$$

olduğundan

$$\nabla_X \xi = -\alpha\, \phi X + \beta X \quad \text{ve} \quad h(X,\xi) = 0$$

buluruz. Şimdi de $Y \in D^{\perp}$ olsun.

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_Y \xi &= -\alpha\, \phi Y + \beta\, \{Y - \eta(Y)\, \xi\} \\ &= -\alpha\, \phi Y + \beta Y - \beta\, g(Y,\xi)\, \xi \\ &= -\alpha\, \phi Y + \beta Y\end{aligned}$$

ve

$$\overline{\nabla}_Y \xi = \nabla_Y \xi + h(Y,\xi)$$

olduğundan

$$-\alpha\phi Y + \beta Y = \nabla_Y \xi + h(Y,\xi)$$

$$\nabla_Y \xi = \beta Y \quad \text{ve} \quad h(Y,\xi) = -\alpha\phi Y$$

elde edilir.

4.1. Distribüsyonların İntegrallenebilmesi: Bu kısmın amacı, bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu olan M deki D, $D^{\perp}$, $D\oplus\{\xi\}$ ve $D\oplus D^{\perp}$ distribüsyonlarının integrallenebilirliğini incelemektir.
İlk olarak bir teoremi verelim:

Teorem 4.1.1.: $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun bir has yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman D distribüsyonu integrallenemezdir[5].

İspat: Farzedelim ki D distribüsyonu integrallenebilir olsun. O zaman Frobenius teoremi gereğince $\forall X, Y \in D$ için $[X,Y] \in D$ olması gerekir. Yardımcı Teorem4.1 gereğince

$$\nabla_X^{\perp}\phi QY + h(X,\phi PY) = \phi Q\nabla_X Y + qh(X,Y) - \beta\eta(Y)\phi QX$$

idi. O halde, $Y \in D$ olduğundan $PY = Y$ ve $QY = 0 = \eta(Y)$ dir.

$$\nabla_X^{\perp}0 + h(X,\phi Y) = \phi Q\nabla_X Y + qh(X,Y)$$

$$\Rightarrow h(X,\phi Y) = \phi Q\nabla_X Y + qh(X,Y)$$

$$h(Y,\phi X) = \phi Q\nabla_Y X + qh(Y,X)$$

$$\Rightarrow h(X,\phi Y) - h(Y,\phi X) = \phi Q(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \phi Q[X,Y]$$

$[X,Y] \in D$ olduğundan $Q[X,Y] = 0$'dır.

$$h(X, \phi Y) - h(Y, \phi X) = 0$$

$$\Rightarrow h(X, \phi Y) = h(Y, \phi X).$$

Diğer taraftan

$$0 = g([X,Y], \xi) = g(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X, \xi)$$
$$= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \xi) = g(\nabla_X Y, \xi) - g(\nabla_Y X, \xi)$$
$$= - g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)$$

dır. $X \in D$ için

$$\nabla_X \xi = - \alpha \phi X + \beta X \quad , \quad h(X,\xi) = 0$$

olduğundan

$$0 = - g(Y, - \alpha \phi X + \beta X) + g(X, - \alpha \phi Y + \beta Y)$$
$$= \alpha g(Y, \phi X) - \beta g(Y, X) - \alpha g(X, \phi Y) + \beta g(X, Y)$$
$$= \alpha g(Y, \phi X) - \beta g(X, Y) + \alpha g(Y, \phi X) + \beta g(X, Y)$$
$$= 2 \alpha g(Y, \phi X).$$

M altmanifoldu has olduğundan $g(\phi X,Y) \neq 0$'dır. O halde $\alpha = 0$ buluruz. Bu ise bir çelişkidir. Yani D distribüsyonu integrallenemezdir. Buradan şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.1.: $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun bir has yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman $D \oplus D^{\perp}$ distribüsyonu integrallenemezdir[5].

Teorem 4.1.2.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman $D \oplus \{\xi\}$ distribüsyonu integrallenebilirdir $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in D$ için

$$h(X, \phi Y) = h(\phi X, Y)$$

dir.

Teoremin ispatı için, aşağıdaki yardımcı teoremi vermemiz gerekir.

Yardımcı Teorem 4.1.1.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman $\forall X \in D$ için

$$[X, \xi] \in D \oplus \{\xi\}$$

dır[5].

İspat: $\forall X \in D$, $\forall Y \in D^{\perp}$ için

$$g([X, \xi], Y) = g(\overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_\xi X, Y) = g(\nabla_X \xi - \nabla_\xi X, Y)$$
$$= g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_\xi X, Y)$$

dır.

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi X + \beta X \quad , \quad h(X, \xi) = 0$$

olduğundan

$$g([X, \xi], Y) = g(-\alpha \phi X + \beta X, Y) - g(\nabla_\xi X, Y)$$
$$= -\alpha g(\phi X, Y) + \beta g(X, Y) - g(\nabla_\xi X, Y)$$
$$= -\alpha 0 + \beta 0 - g(\nabla_\xi X, Y)$$
$$= -g(\nabla_\xi X, Y) = -g(\overline{\nabla}_\xi X, Y).$$

Şimdi X yerine ϕX alalım.

$$g([\phi X, \xi], Y) = -g(\overline{\nabla}_\xi \phi X, Y) = g(\phi X, \overline{\nabla}_\xi Y)$$
$$= g(\phi^2 X, \phi \overline{\nabla}_\xi Y) = -g(X, \phi \overline{\nabla}_\xi Y)$$

olur.

$$(\overline{\nabla}_\xi \phi) Y = \overline{\nabla}_\xi (\phi Y) - \phi \overline{\nabla}_\xi Y$$

olduğundan

$$g([\phi X, \xi], Y) = -g(X, \overline{\nabla}_\xi (\phi Y) - (\overline{\nabla}_\xi \phi) Y)$$

$$= -g(X, \overline{\nabla}_\xi (\phi Y)) + g(X, (\overline{\nabla}_\xi \phi) Y).$$

$Y \in D^\perp$ olduğundan $\phi Y \in T^\perp M$ olup

$$\overline{\nabla}_\xi \phi Y = -A_{\phi Y} \xi + \nabla_\xi^\perp \phi Y$$

dır. Böylece

$$g([\phi X, \xi], Y) = -g(X, -A_{\phi Y} \xi) - g(X, \nabla_\xi^\perp \phi Y) + g(X, (\overline{\nabla}_\xi \phi) Y)$$

$$(\overline{\nabla}_\xi \phi) Y = \alpha \{g(\xi, Y) \xi - \eta(Y) \xi\} + \beta \{g(\phi \xi, Y) \xi - \eta(Y) \phi \xi\}$$

$$= \alpha \{\eta(Y) \xi - \eta(Y) \xi\} + \beta \{g(0, Y) \xi - 0\}$$

$$= 0$$

elde edilir. O halde,

$$g([\phi X, \xi], Y) = g(X, A_{\phi Y} \xi) - g(X, \nabla_\xi^\perp \phi Y)$$

$X \in TM$ ve $\nabla_\xi^\perp \phi Y \in T^\perp M$ olduğundan

$$g(X, \nabla_\xi^\perp \phi Y) = 0$$

dır. Böylece

$$g([\phi X, \xi], Y) = g(X, A_{\phi Y} \xi) = g(h(\xi, X), \phi Y) = g(0, \phi Y) = 0$$

$\phi X = X$ olduğundan

$$g([X, \xi], Y) = 0$$

dır. Bu ise $X \in D$ ve $Y \in D^\perp$ iken

$$[X, \xi] \in D \oplus \{\xi\}$$

olması demektir.

Teorem 4.1.2'nin ispatı: $\forall X,\ Y \in D$ için

$$\nabla_X^{\perp} \phi QY + h(X, \phi PY) = \phi Q \nabla_X Y + q\, h(X,Y) - \beta\, \eta(Y)\, \phi QX$$

den

$$h(X, \phi Y) = \phi Q \nabla_X Y + q\, h(X,Y)$$

bulmuştuk, ayrıca

$$h(Y, \phi X) = \phi Q \nabla_Y X + q\, h(Y,X)$$

olacağından

$$h(X, \phi Y) - h(Y, \phi X) = \phi Q\, (\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \phi Q\, [X,Y]$$

olur. $\forall X,\ Y \in D \oplus \{\xi\}$ için X ve Y aşağıdaki gibidir.

$$X = PX + \eta(X)\, \xi \quad \text{ve} \quad Y = PY + \eta(Y)\, \xi$$

Bu yüzden,

$$\begin{aligned}[X,Y] &= [PX + \eta(X)\, \xi\, ,\, PY + \eta(Y)\, \xi] \\ &= [PX, PY] + [PX, \eta(Y)\, \xi] + [\eta(X)\, \xi\, , PY] + [\eta(X)\, \xi\, , \eta(Y)\, \xi] \\ &= [PX, PY] + \eta(Y)\, [PX, \xi] + \eta(X)\, [\xi\, , PY] + \eta(X)\, \eta(Y)\, [\xi\, , \xi] \\ &= [PX, PY] + \eta(Y)\, [PX, \xi] + \eta(X)\, [\xi\, , PY] + 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)\end{aligned}$$

olur. Yardımcı Teorem 4.1.1. gereğince $PX,\ PY \in D$ olduğundan $[PX, \xi]$, $[\xi, PY] \in D \oplus \{\xi\}$ dır.

Şimdi $D \oplus \{\xi\}$ distribüsyonu integrallenebilir olsun. O zaman $\forall X,\ Y \in D \oplus \{\xi\}$ için $[X,Y] \in D \oplus \{\xi\}$ dır. Yukarıdaki (*) eşitliğinden

$$[PX, PY] = [X,Y] - \eta(Y)\, [PX, \xi] + \eta(X)\, [\xi\, , PY]$$

elde edilir. $[X,Y]$, $[PX, \xi]$, $[\xi\, , PY] \in D \oplus \{\xi\}$ olduğundan $[PX, PY] \in D \oplus \{\xi\}$ olmalıdır. Bu ise $Q[PX, PY] = 0$ olması demektir. $\forall\ PX,\ PY \in D$ için

$$h\,(PX, \phi PY) - h\,(PY, \phi PX) = \phi Q\,[PX, PY]$$

bulmuştuk. $\phi Q\,[PX, PY] = 0$ olduğundan

$$h\,(PX, \phi PY) = h\,(PY, \phi PX) \quad , \quad \forall\; PX, PY \in D \text{ için}$$

dir.

Şimdi de $\forall$ $PX, PY \in D$ için

$$h\,(PX, \phi PY) = h\,(PY, \phi PX)$$

olsun. O zaman

$$h\,(PX, \phi PY) - h\,(PY, \phi PX) = 0$$

olacağından

$$0 = \phi Q\,[PX, PY]$$

dir.

$$\phi Q\,[PX, PY] = 0$$

olduğundan

$$Q\,[PX, PY] = 0$$

olur. Bu ise $\forall$ $PX, PY \in D$ için

$$[PX, PY] \in D \oplus \{\xi\}$$

olması demektir. $\forall X, Y \in D \oplus \{\xi\}$ için

$$[X,Y] = [PX, PY] + \eta\,(Y)\,[PX, \xi] + \eta\,(X)\,[\xi\,, PY]$$

idi. Bu eşitlikte $[PX, PY]$, $[PX, \xi]$, $[\xi\,, PY] \in D \oplus \{\xi\}$ olduğundan

$$[X,Y] \in D \oplus \{\xi\}$$

olur. $\forall$ $X, Y \in D \oplus \{\xi\}$ için

$$[X,Y] \in D \oplus \{\xi\}$$

bulduğumuzdan $D \oplus \{\xi\}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

Teorem 4.1.3.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman $D^{\perp}$ distribüsyonu devamlı integrallenebilirdir[5].

İspat: $\forall$ X, $Y \in D^{\perp}$ için $[X,Y] \in D^{\perp}$ olmalıdır.

$$g(A_N X, Y) = g(h(X,Y), N) \quad , \quad N \in T^{\perp}M$$

olduğundan $\forall$ X, $Y \in D^{\perp}$ ve $Z \in TM$ için, $(\phi X \in T^{\perp}M)$

$$g(A_{\phi X} Y, Z) = g(h(Y,Z), \phi X) = g(h(Z,Y), \phi X)$$

dir. $\forall$ Z, $Y \in TM$ için

$$\overline{\nabla}_Z Y = \nabla_Z Y + h(Z,Y)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(A_{\phi X} Y, Z) &= g(\overline{\nabla}_Z Y - \nabla_Z Y, \phi X) \\ &= g(\overline{\nabla}_Z Y, \phi X) - g(\nabla_Z Y, \phi X) \end{aligned}$$

$\forall$ Z, $Y \in TM$ için $\nabla_Z Y \in TM$ ve $X \in D^{\perp}$ için $\phi X \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$g(\nabla_Z Y, \phi X) = 0$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} g(A_{\phi X} Y, Z) &= g(\overline{\nabla}_Z Y, \phi X) = g(\phi\overline{\nabla}_Z Y, \phi^2 X) \\ &= g(\phi\overline{\nabla}_Z Y, -X) = -g(\phi\overline{\nabla}_Z Y, X) \end{aligned}$$

dır.

$$(\overline{\nabla}_Z \phi) Y = \overline{\nabla}_Z (\phi Y) - \phi\overline{\nabla}_Z Y$$

olduğundan

$$g(A_{\phi X} Y, Z) = g((\overline{\nabla}_Z \phi) Y - \overline{\nabla}_Z (\phi Y), X)$$
$$= g((\overline{\nabla}_Z \phi) Y, X) - g(\overline{\nabla}_Z (\phi Y), X)$$

dır.

$$g((\overline{\nabla}_Z \phi) Y, X) = g(\alpha \{g(Z,Y) \xi - \eta(Y) Z\} + \beta \{g(\phi Z,Y) \xi - \eta(Y) \phi Z\}, X)$$
$$= \alpha \{g(Z,Y) g(\xi, X) - \eta(Y) g(Z,X)\} + \beta \{g(\phi Z,Y) g(\xi, X) - \eta(Y) g(\phi Z,X)\}$$

olur.

$$g(\xi, X) = 0 \quad \text{ve} \quad \eta(Y) = g(\xi, Y) = 0$$

olduğundan

$$g((\overline{\nabla}_Z \phi) Y, X) = 0$$

olur. Böylece

$$g(A_{\phi X} Y, Z) = - g(\overline{\nabla}_Z (\phi Y), X)$$

dır. $\phi Y \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$g(A_{\phi X} Y, Z) = - g(- A_{\phi Y} Z + \nabla_Z^{\perp} (\phi Y), X)$$
$$g(A_{\phi X} Y, Z) = + g(A_{\phi Y} Z, X) - g(\nabla_Z^{\perp} (\phi Y), X)$$

dır. $\nabla_Z^{\perp} (\phi Y) \in T^{\perp}M$ ve $X \in TM$ olduğundan

$$g(\nabla_Z^{\perp} (\phi Y), X) = 0$$

dir. Böylece de

$$g(A_{\phi X} Y, Z) = g(A_{\phi Y} Z, X) = g(h(Z,X), \phi Y)$$
$$= g(h(X,Z), \phi Y)$$
$$= g(A_{\phi Y} X, Z)$$

dir. Yani $A_{\phi Y} X = A_{\phi X} Y$; $\forall Z \in \chi(M)$

elde edilir.

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\, Y = \overline{\nabla}_X (\phi Y) - \phi \overline{\nabla}_X Y$$

olduğundan

$$\overline{\nabla}_X (\phi Y) = (\overline{\nabla}_X \phi)\, Y + \phi \overline{\nabla}_X Y$$
$$= \alpha\, \{g\,(X,Y)\, \xi - \eta\,(Y)\, X\} + \beta\, \{g\,(\phi X,Y)\, \xi - \eta\,(Y)\, \phi X\} + \phi\, (\nabla_X Y + h\,(X, Y))$$

dır. $X \in D^{\perp}$ için $\phi X \in T^{\perp}M$ ve $Y \in TM$ olduğundan $g\,(\phi X, Y) = 0$ ve $Y \in D^{\perp}$ için $\eta\,(Y) = 0$ dır. Böylece,

$$\overline{\nabla}_X (\phi Y) = \alpha\, g\,(X,Y)\, \xi + \phi \nabla_X Y + \phi\, h\,(X, Y)$$

olur. $\nabla_X Y \in TM$ için

$$\nabla_X Y = P \nabla_X Y + Q \nabla_X Y + \eta\, (\nabla_X Y)\, \xi$$

idi. O halde

$$\phi \nabla_X Y = \phi P \nabla_X Y + \phi Q \nabla_X Y$$

dir. $h\,(X, Y) \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$\phi h\,(X, Y) = fh\,(X, Y) + qh\,(X, Y)$$

dir. Bulduğumuz değerleri yerlerine yazarsak

$$\overline{\nabla}_X (\phi Y) = \alpha\, g\,(X,Y)\, \xi + \phi P \nabla_X Y + \phi Q \nabla_X Y + f\, h\,(X,Y) + q\, h\,(X,Y).$$

Diğer yönden $\phi Y \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$\overline{\nabla}_X (\phi Y) = -\, A_{\phi Y} X + \nabla_X^{\perp} (\phi Y)$$

dir.

$$- A_{\phi Y} X + \nabla_X^{\perp} (\phi Y) = \alpha\, g(X,Y)\, \xi + \phi P \nabla_X Y + \phi Q \nabla_X Y$$
$$+ f h(X,Y) + q h(X,Y)$$

eşitliğini teğet ve normal kısımlarına ayırırsak

$$- A_{\phi Y} X = \alpha\, g(X,Y)\, \xi + \phi P \nabla_X Y + f h(X,Y)$$
$$\nabla_X^{\perp} (\phi Y) = \phi Q \nabla_X Y + q h(X,Y)$$

denklemlerini buluruz.

$$A_{\phi Y} X = - \alpha\, g(X,Y)\, \xi - \phi P \nabla_X Y - f h(X,Y)$$
$$- A_{\phi X} Y = + \alpha\, g(X,Y)\, \xi + \phi P \nabla_Y X + f h(Y,X)$$
$$A_{\phi Y} X - A_{\phi X} Y = \phi P (\nabla_Y X - \nabla_X Y)$$
$$= - \phi P [X,Y]$$
$$A_{\phi X} Y - A_{\phi Y} X = \phi P [X,Y]$$

ve

$$A_{\phi X} Y = A_{\phi Y} X$$

olduğundan

$$\phi P [X,Y] = 0 \quad \Rightarrow \quad P [X,Y] = 0.$$

Yani

$$[X,Y] \in D^{\perp} \oplus \{\xi\}$$

dir.

$$g([X,Y], \xi) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \xi)$$
$$= g(\nabla_X Y, \xi) - g(\nabla_Y X, \xi)$$
$$= - g(Y, \nabla_X \xi) + g(X, \nabla_Y \xi)$$

$X, Y \in D^{\perp}$ olduğundan

$$\nabla_Y \xi = \beta Y \quad \text{ve} \quad \nabla_X \xi = \beta X$$

dir.

$$\begin{aligned} g([X,Y], \xi) &= g(X, \beta Y) - g(Y, \beta X) \\ &= \beta g(X, Y) - \beta g(Y, X) \\ &= \beta (g(X, Y) - g(X, Y)) \\ &= \beta . 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bu ise $\forall X,\ Y \in D^{\perp}$ için $[X,Y] \in D^{\perp}$ olması demektir, yani $D^{\perp}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

4.2. Karışık total geodezik yarı-invaryant altmanifoldlar

İlk önce aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 4.2.1.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman

$\forall X \in D$ ve $N \in T^{\perp}M$ için aşağıdaki eşitlikler vardır:

(1) $P\nabla_X (fN) - PA_{qN} X + \phi PA_N X = 0,$

(2) $Q\nabla_X (fN) - QA_{qN} X - f\nabla_X^{\perp} N = 0,$

(3) $h(X, fN) + \nabla_X^{\perp} (qN) + \phi QA_N X - q\nabla_X^{\perp} N = 0$ [5].

İspat: $\forall N \in T^{\perp}M$ için $\phi N = fN + qN$ olduğundan $X \in D$ olmak üzere

$$\overline{\nabla}_X (\phi N) = \overline{\nabla}_X (fN + qN) = \overline{\nabla}_X (fN) + \overline{\nabla}_X (qN)$$

ve $fN \in TM$ olduğundan

$$\overline{\nabla}_X (fN) = \nabla_X (fN) + h\,(X, fN)$$

ve $qN \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$\overline{\nabla}_X (qN) = - A_{qN} X + \nabla_X^{\perp} (qN)$$

dir. Böylece

$$\overline{\nabla}_X (\phi N) = \nabla_X (fN) + h\,(X, fN) - A_{qN} X + \nabla_X^{\perp} (qN)$$

olur. $\nabla_X (fN) \in TM$ olduğundan

$$\nabla_X (fN) = P\nabla_X (fN) + Q\nabla_X (fN) + \eta\,(\nabla_X (fN))\,\xi$$

dır ve $A_{qN} X \in TM$ olduğundan

$$A_{qN} X = PA_{qN} X + QA_{qN} X + \eta\,(A_{qN} X)\,\xi$$

dır. Böylece

$$* \qquad \overline{\nabla}_X (\phi N) = P\nabla_X (fN) + Q\nabla_X (fN) + \eta\,(\nabla_X (fN))\,\xi$$
$$+ h\,(X, fN) - PA_{qN} X - QA_{qN} X - \eta\,(A_{qN} X)\,\xi + \nabla_X^{\perp} (qN)$$

olur. Ayrıca

$$\overline{\nabla}_X (\phi N) = (\overline{\nabla}_X \phi)\,N + \phi \overline{\nabla}_X N$$

olduğundan ve

$$(\overline{\nabla}_X \phi)\,N = \alpha\,\{g\,(X,N)\,\xi - \eta\,(N)\,X\} + \beta\,\{g\,(\phi X,N)\,\xi - \eta\,(N)\,\phi X\}$$

$X \in TM$ ve $N \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$g\,(X, N) = 0 = g\,(N, \xi)$$

elde edilir.

$\phi X \in TM$ ve $N \in T^{\perp}M$ olduğundan $g(\phi X, N) = 0$'dır. Böylece,

$$(\overline{\nabla}_X \phi) N = 0$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla}_X (\phi N) = 0 + \phi \overline{\nabla}_X N = \phi \overline{\nabla}_X N = \phi(- A_N X + \nabla_X^{\perp} N) = - \phi A_N X + \phi \nabla_X^{\perp} N$$

dir.

$A_N X \in TM$ olduğundan

$$\phi A_N X = \phi P A_N X + \phi Q A_N X$$

idi.

$$\overline{\nabla}_X (\phi N) = - \phi P A_N X - \phi Q A_N X + \phi \nabla_X^{\perp} N$$

$\nabla_X^{\perp} N \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$\phi \nabla_X^{\perp} N = f \nabla_X^{\perp} N + q \nabla_X^{\perp} N$$

dir. Diğer taraftan

** $\overline{\nabla}_X (\phi N) = - \phi P A_N X - \phi Q A_N X + f \nabla_X^{\perp} N + q \nabla_X^{\perp} N.$

* ve **'da D, $D^{\perp}$ ve $T^{\perp}M$ nin bileşenlerinin alınmasıyla

$$P \nabla_X (fN) - P A_{qN} X = - \phi P A_N X$$

olduğundan

$$P \nabla_X (fN) - P A_{qN} X + \phi P A_N X = 0$$

dır.

$$Q \nabla_X (fN) - Q A_{qN} X = f \nabla_X^{\perp} N$$

olduğundan

$$Q \nabla_X (fN) - Q A_{qN} X - f \nabla_X^{\perp} N = 0$$

olur.

Teorem 4.2.1.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman aşağıdaki önermeler denktir:

(a) M karışık total geodeziktir,

(b) $\nabla_X^{\perp} N \in \phi D^{\perp}$ ve D; A_N ye göre invaryanttır. ($\forall N \in \phi D^{\perp}$ için) yani $\nabla_D^{\perp} (\phi D^{\perp}) \subset \phi D^{\perp}$ ve $A_{\phi D^{\perp}} D \subset D$ dir[5].

İspat: $\forall Y \in D^{\perp}$ için $\phi D^{\perp} \subset T^{\perp}M$ de bir N elemanı

$$\phi N = fN = Y$$

olacak şekilde vardır. Gerçekten de

$$\phi^2 Y = -Y + \eta(Y)\xi$$

ve $\forall Y \in D^{\perp}$ için

$$\eta(Y) = 0$$

olduğundan

$$\phi^2 Y = -Y$$

$$\Rightarrow \phi(-\phi Y) = Y$$

$$\Rightarrow \phi(-\phi Y) = \phi N$$

$$\Rightarrow -\phi Y = N$$

$$\Rightarrow -\phi^2 Y = \phi N$$

$$\Rightarrow Y = \phi N$$

dir. $\forall X \in D$ ve $N \in \phi D^{\perp}$ için

$$h(X, fN) + \nabla_X^{\perp}(qN) + \phi Q A_N X - q\nabla_X^{\perp} N = 0$$

eşitliğinde

$$fN = Y \quad , \quad Y \in D^{\perp}$$

ve

$$qN = 0 \quad , \quad N \in \phi D^{\perp}$$

olacağından

$$h(X, Y) + \phi Q A_N X - q\nabla_X^{\perp} N = 0$$

ve buradan da

$$h(X, Y) = q\nabla_X^{\perp} N - \phi Q A_N X$$

bulunur. Şimdi farzedelim ki M total geodezik olsun. O zaman $\forall\ X \in D$ ve $Y \in D^{\perp}$ için

$$h(X, Y) = 0$$

olacağından

$$0 = q\nabla_X^{\perp} N - \phi Q A_N X$$

dir. Burada

$$A_N X \in TM$$

iken

$$Q A_N X \in D^{\perp}$$

ve

$$\phi Q A_N X \in \phi D^{\perp} \subset T^{\perp}M$$

dir. Eğer

$$q\nabla_X^{\perp} N \in \phi D^{\perp}$$

ise $\forall\ N \in \phi D^{\perp}$ için

$$\phi N = fN = Y \in D^{\perp}$$

olması gerektiğinden

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \in D^{\perp}$$

olmalıdır.

$$\nabla_X^{\perp} N \in T^{\perp}M$$

için

$$\phi\nabla_X^{\perp} N = f\nabla_X^{\perp} N + q\nabla_X^{\perp} N$$

olduğundan

$$\phi^2\nabla_X^{\perp} N = \phi\,(f\nabla_X^{\perp} N) + \phi\,(q\nabla_X^{\perp} N)$$
$$\Rightarrow -\,\nabla_X^{\perp} N = \phi\,(f\nabla_X^{\perp} N) + \phi\,(q\nabla_X^{\perp} N)$$

dir. Burada

$$f\nabla_X^{\perp} N \in TM$$

iken

$$f\nabla_X^{\perp} N \in D^{\perp}$$

ise

$$\phi\, f\nabla_X^{\perp} N \in \phi D^{\perp} \subset T^{\perp}M$$

dir.

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) = -\,\nabla_X^{\perp} N - \phi\,(f\nabla_X^{\perp} N)$$

eşitliğinde

$$\nabla_X^{\perp} N \in T^{\perp}M \quad \text{ve} \quad \phi\,(f\nabla_X^{\perp} N) \in \phi D^{\perp}$$

olduğundan

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \in T^{\perp}M$$

dir, yani

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \notin D^{\perp}$$

dir. Eğer

$$f\nabla_X^{\perp} N \notin D^{\perp}$$

ise

$$\phi\,(f\nabla_X^{\perp} N) \in TM$$

dir.

$$\nabla_X^{\perp} N \in T^{\perp}M \quad \text{ve} \quad \phi\,(f\nabla_X^{\perp} N) \in TM$$

iken ya

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \in T^{\perp}M$$

dir ya da

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \in TM$$

dir. Eğer $\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \in TM$ ise

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) = \phi\,(f\nabla_X^{\perp} N)$$

$$q\nabla_X^{\perp} N = f\nabla_X^{\perp} N$$

çelişkisini elde edeceğimizden

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \notin TM \quad (\notin D^{\perp})$$

dir. Eğer $\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \in T^{\perp}M$ ise

$$D^{\perp} \not\subset T^{\perp}M$$

olduğundan yine

$$\phi\,(q\nabla_X^{\perp} N) \notin D^{\perp}$$

dir. Böylece

$$q\nabla_X^{\perp} N \in \{T^{\perp}M - \phi D^{\perp}\}$$

dir.

$$0 = q\nabla_X^{\perp} N - \phi Q A_N X$$

eşitliğinde

$$q\nabla_X^{\perp} N \in \{T^{\perp}M - \phi D^{\perp}\} \quad \text{ve} \quad \phi Q A_N X \in \phi D^{\perp}$$

olduğundan

$$q\nabla_X^{\perp} N = 0 \quad \text{ve} \quad \phi Q A_N X = 0$$

olmalıdır.

$$q\nabla_X^{\perp} N = 0 \text{ olduğundan } \nabla_X^{\perp} N \in \phi D^{\perp}$$

ve

$$Q A_N X = 0 \text{ olduğundan } A_N X \in D$$

dir. Böylece

$$\nabla_{D^{\perp}} \phi D^{\perp} \subset \phi D^{\perp} \quad \text{ve} \quad A_{\phi D^{\perp}} D \subset D$$

dir.

Teorem 4.2.2.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer $\beta \neq 0$ ise, o zaman $D^{\perp}$ nun her $M^{\perp}$ yaprağı M de total geodezik değildir[5].

İspat: Aksini farzedelim. M de $M^{\perp}$ total geodezik olsun. O zaman $\forall\ X, Y \in D^{\perp}$ için $\nabla_X Y \in D^{\perp}$ demektir ya da buna eşdeğer olarak $\forall\ Z \in D \oplus \{\xi\}$ için

$$g(\nabla_X Y, Z) = 0$$

dır. Eğer $Z = \xi$ alırsak

$$\nabla_Y \xi = \beta Y \quad , \quad h(Y, \xi) = -\alpha \phi Y$$

den;

$$g(\nabla_X Y, \xi) = -g(Y, \nabla_X \xi) = -g(Y, \beta X) = -\beta\, g(Y, X)$$

olur. Böylece $\beta \neq 0$ ise $\forall\, X \in D$ için

$$0 = g(\nabla_X X, \xi) = -\beta\, g(X, X) = -\beta\, \|X\|^2$$

dır. $\beta \neq 0$ olduğundan $\|X\|^2 = 0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $M^{\perp}$, M de total geodezik değildir.

4.3. Total umbilik yarı-invaryant altmanifoldlar:

Tanım 4.3.1.: $X, Y \in TM$ ve $N \in T^{\perp}M$ olsun.

1°) $a \in F(M)$ olmak üzere $A_N = aI$ ise N ye M nin **umbilik kesiti** denir.

2°) M nin umbilik kesiti N ise N ye göre M **umbilik**tir denir.

3°) $\forall N \in T^{\perp}M$ için M umbilikse M ye $\overline{M}$ nin bir **total umbilik altmanifold**udur denir.

4°) $T_M(x)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$ olsun. O zaman

$$H = \frac{1}{n}\, iz\,(h_x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

vektörüne M nin $x \in M$ noktasındaki **ortalama eğrilik vektörü** denir[6].

$\{e_{n+1}, \ldots, e_m\}$ de $T_M^{\perp}(x)$ nin bir ortonormal bazı ise

$$H = \frac{1}{n} \sum_{a=n+1}^{m} (\text{iz}\, A_a)\, e_a \quad , \; A_a = A_{e_a}$$

dır. $\overline{M}$ nin total umbilik yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. $\forall X, Y \in TM$ için

$$h(X,Y) = \sum_{a=n+1}^{m} g(h(X,Y), e_a)\, e_a$$

ve

$$g(h(X,Y), e_a) = g(A_{e_a} X, Y)$$

olduğundan

$$h(X,Y) = \sum_{a=n+1}^{m} g(A_{e_a} X, Y), e_a$$

dır. $\overline{M}$ nin total umbilik altmanifoldu M olduğundan $\forall X \in TM$ ve $e_a \in T^{\perp}M$ için

$$A_{e_a} X = c_a X \quad , \quad c_a \in F(M)$$

dir. O halde

$$h(X,Y) = \sum_{a=n+1}^{m} g(c_a X, Y) \,.\, e_a$$

$$= \sum_{a=n+1}^{m} c_a\, g(X, Y) \,.\, e_a$$

$$= g(X, Y) \left(\sum_{a=n+1}^{m} c_a e_a \right)$$

dır ve

$$H = \frac{1}{n} \sum_{a=n+1}^{m} (\text{iz}\, A_{e_a})\, e_a = \frac{1}{n} \sum_{a=n+1}^{m} \text{iz}\, (c_a I)\, e_a$$

$$H = \frac{1}{n} \sum_{a=n+1}^{m} (n\, c_a)\, e_a = \frac{n}{n} \sum_{a=n+1}^{m} c_a e_a = \sum_{a=n+1}^{m} c_a e_a$$

olduğundan da

$$h(X, Y) = g(X, Y) H$$

olur.

Teorem 4.3.1.: Bir $\overline{M}$ trans-Sasakian manifoldunun total umbilik yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman

(a) M total geodeziktir

(b) Eğer M nin herbir noktasında $\alpha \neq 0$ ise, o zaman M invaryanttır, yani $D^{\perp}=0$ dır[5].

İspat: $\overline{\nabla}_X \xi = -\alpha \phi X + \beta \{X - \eta(X) \xi\}$ eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = -\alpha \phi\xi + \beta \{\xi - \eta(\xi) \xi\}$$
$$= 0 + \beta \{\xi - 1 \xi\}$$
$$= \beta \{\xi - \xi\}$$
$$= \beta 0$$
$$= 0$$

buluruz. Ayrıca

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y).$$

Gauss denkleminde X ve Y yerine ξ alırsak

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = \nabla_\xi \xi + h(\xi, \xi)$$

olur. $\overline{\nabla}_\xi \xi = 0$ olduğundan dolayı

$$0 = \nabla_\xi \xi + h(\xi, \xi)$$

dır. $\nabla_\xi \xi \in TM$ ve $h(\xi, \xi) \in T^{\perp}M$ olduğundan

$$\nabla_\xi \xi = 0 \quad \text{ve} \quad h(\xi, \xi) = 0$$

olmalıdır. M total umbilik olduğundan $\forall X, Y \in TM$ için

$$h(X, Y) = g(X, Y) . H$$

vardır. $\xi \in TM$ olduğundan yukarıdaki eşitliği sağlar, yani

$$h(\xi, \xi) = g(\xi, \xi) H$$

dir. $h(\xi, \xi) = 0$ bulduğumuzdan da

$$0 = g(\xi, \xi) H$$

olur. $g(\xi, \xi) = \| \xi \|^2 \neq 0$ olduğundan $H = 0$ olmalıdır.

$$h(X, Y) = g(X, Y) 0 = 0$$

olduğundan M total geodeziktir, yani (a) elde edilir.

$\forall \ Y \in D^{\perp}$ için

$$\nabla_Y \xi = \beta Y \quad \text{ve} \quad h(Y, \xi) = - \alpha \phi Y$$

olduğunu biliyoruz. M total umbilik ve total geodezik olduğundan

$$\begin{aligned} h(Y, \xi) &= g(Y, \xi) 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Ve de

$$h(Y, \xi) = - \alpha \phi Y$$

olduğundan

$$- \alpha \phi Y = 0$$

dır. M nin her bir noktasında $\alpha \neq 0$ olduğundan

$$\phi Y = 0$$

dır. Bu ise $Y = 0$ olması demektir. $\forall \ Y \in D^{\perp}$ için $Y = 0$ olduğundan

$$D^{\perp} = 0$$

dır.

4.4. Örnek

$$x_4 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_4 = 0$$

$$\nabla_f = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_1, -1)$$

$$\| \nabla_f \| = \sqrt{(x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_1)^2 + 1}$$

$$= \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_1 + 1}$$

$$= \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4) + 1} = k$$

$$C = \frac{\nabla_f}{\| \nabla_f \|} = \frac{(x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_1, -1)}{\sqrt{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4) + 1}}$$

$JC = -\xi$ olduğundan

$$-\xi = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ 1 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece

$$\xi = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -1 \\ -x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\xi_2 = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_2 - x_3 \\ 1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $\{\xi, \xi_2, \xi_3, C)$ ortonormal bazı mevcuttur.

Şimdi $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = 0$ olsun. Böylece bir $P = (0, 1, 0, 0)$ noktasındaki ξ, ξ_2, ξ_3 ve C vektör alanları için

$$C_P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \xi_P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\xi_2)_P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\xi_3)_P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\eta(\xi) = 1$ ve $\eta(\xi_2) = \eta(\xi_3) = \eta(C) = 0$ olacağından

$\eta = [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4]$ 1-formu için

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3) = 1,$$

$$\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 = \sqrt{3}.$$

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_4) = 0,$$

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_4 = 0.$$

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-\eta_2 + \eta_3 + \eta_4) = 0,$$

$$-\eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 0.$$

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\eta_1 + \eta_3 - \eta_4) = 0,$$

$$\eta_1 + \eta_3 - \eta_4 = 0.$$

$$\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 = \sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + \eta_4 &= 0 \\ -\eta_2 + \eta_3 + \eta_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \eta_1 + \eta_3 + 2\eta_4 &= 0 \\ -\eta_1 - \eta_3 + \eta_4 &= 0 \\ \hline 3\eta_4 = 0 \Rightarrow \eta_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\eta_1 + \eta_3 - \eta_4 = 0$$

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 &= 0 \\ \eta_1 + \eta_3 &= 0 \\ \hline 2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 0 \\ \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 &= \sqrt{3} \\ \hline 3\eta_1 = \sqrt{3} \Rightarrow \eta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\eta_2 = -\eta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\eta_3 = -\eta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\eta_p = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, 0\right] = \frac{\sqrt{3}}{3} [1, -1, -1, 0].$$

$\forall X \in TM$ için $X \in Sp\,\{\xi, \xi_2, \xi_3\}$ olacağından

$$X_P = (a\xi + b\xi_2 + c\xi_3)_P$$

$$= \frac{a}{\sqrt{3}} (1, -1, -1, 0) + \frac{b}{\sqrt{3}} (1, 1, 0, 1) + \frac{c}{\sqrt{3}} (0, -1, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (a + b, -a + b - c, -a + c, b + c).$$

$$\left(\eta\,(X)\right)_P = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,[1,-1,-1,0]\begin{bmatrix} a+b \\ -a+b-c \\ -a+c \\ b+c \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,(a+b+a-b+c+a-c),$$

$$= \frac{1}{3}\,(3a) = a\,.$$

$$\phi_P(X) = J\,(X_P) - \left(\eta\,(X)\,C\right)_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+b \\ -a+b-c \\ -a+c \\ b+c \end{bmatrix} - a\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\phi_P\,(X) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\begin{bmatrix} a-c \\ -b-c \\ a+b \\ -a+b-c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ -a \\ a \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -c \\ -b-c \\ b \\ b-c \end{bmatrix}.$$

$$\phi_P = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} (-1/3-p) & 1/3 & (-2/3-p) & p \\ (-1-q) & 0 & (-1-q) & q \\ (2/3-r) & 1/3 & (1/3-r) & r \\ (1/3-s) & 2/3 & (-1/3-s) & s \end{bmatrix}$$

olup

$$\phi_P\,\xi_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} (-1/3-p) & 1/3 & (-2/3-p) & p \\ (-1-q) & 0 & (-1-q) & q \\ (2/3-r) & 1/3 & (1/3-r) & r \\ (1/3-s) & 2/3 & (-1/3-s) & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1/3-p-1/3+2/3+p \\ -1-q+1+q \\ 2/3-r-1/3-1/3+r \\ 1/3-s-2/3+1/3+s \end{bmatrix}$$

$$\phi_P\xi_P = 0$$

dır.

$$(\phi\xi_2)_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1/3-p+1/3+p\\-1-q+q\\2/3-r+1/3+r\\1/3-s+2/3+s\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix} = (\xi_3)_P,$$

$$(\phi\xi_3)_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1/3-p-2/3+p\\-1-q+q\\-1/3-r+1/3+r\\-2/3-s-1/3+s\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix} = (-\xi_2)_P.$$

$\forall\, X \in Sp\,\{\xi_2, \xi_3\}$ için

$X_P = a\,(\xi_2)_P + b\,(\xi_3)_P = a\,(1, 1, 0, 1) + b\,(0, -1, 1, 1)$

$X_P = (a, a-b, b, a+b)$

dir.

$$(\phi X)_P = \begin{bmatrix}(-1/3-p) & 1/3 & (-2/3-p) & p\\(-1-q) & 0 & (-1-q) & q\\(2/3-r) & 1/3 & (1/3-r) & r\\(1/3-s) & 2/3 & (-1/3-s) & s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\a-b\\b\\a+b\end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix}a(-1/3+1/3+p-p)+b(-1/3-2/3-p+p)\\a(-1-q+q)-b(1+q-q)\\a(2/3-r+1/3+r)+b(-1/3+1/3-r+r)\\a(1/3-s+2/3+s)+b(-2/3-1/3-s+s)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -b \\ -a-b \\ a \\ a-b \end{bmatrix}$$

$$(-b, -a-b, a, a-b) = X_1\,(1, 1, 0, 1) + X_2\,(0, -1, 1, 1)$$
$$= (X_1, X_1 - X_2, X_2, X_1 + X_2)$$

$X_1 = -b$

$X_1 - X_2 = -a - b$

$X_2 = a$

$(-b, -a-b, a, a-b) = -b\,(1, 1, 0, 1) + a\,(0, -1, 1, 1)$

$\phi X = -b\,\xi_1 + a\,\xi_2$

$\forall\, X \in Sp\,\{\xi_1, \xi_2\}$ için $\phi\, X \in Sp\,\{\xi_1, \xi_2\}$ olduğundan

$D = Sp\,\{\xi_1, \xi_2\}$

dir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] GRAY, J.W., "**Some Global Properties of Contact Structures**", Ann. of Math 69 (1959), 421-450.

[2] HACISALİHOĞLU, H.H., "**Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş**", Fırat Üniversitesi, 1980.

[3] HACISALİHOĞLU, H.H., "**Lineer Cebir**", Gazi Üniversitesi, 1985.

[4] HACISALİHOĞLU, H.H., "**Diferensiyel Geometri**" Ankara Üniversitesi, 1993.

[5] MATSUMOTO, K., SHAHID, M.H. and MIHAI ION, "**Semi-Invariant Submanifolds of Certain Almost Contact Manifolds**", 1993.

[6] YANO, K. and KON, M., "**Structures on Manifolds**", 1984.