SASAKIAN MANİFOLDLAR

Ahmet YILDIZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Bölümü

Kasım 1995

SASAKIAN MANİFOLDLAR

Ahmet YILDIZ

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman:Yrd.Doç.Dr.Mazlum ABAK

1995

Ahmet YILDIZ'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı ''Sasakian manifoldlar''başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değendirilerek kabul edilmiştir.

22/12/1995

.İmza.

Üye : Yrd. Doç. Dr Mazlum ABAK

Üye : Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu

Üye : Doç. Dr. Kadri ARSLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim kurulunun 04.01.1996 gün ve ....01.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü
Yrd.Doç.Dr.İlyas NUHOĞLU
İMZA

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada Riemann manifoldları üzerine yapıları inceledik. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde koneksiyonlar ve eğrilik tensörünün temel notasyonlarını tanıttık. İkinci bölümde hemen hemen değme yapısı ve hemen hemen değme metrik yapısının tanımlarını verdik. Ayrıca hemen hemen değme manifoldlarının Torsion tensörünü, Killing vektör alanını, K-değme yapısı ve K-değme manifoldu tanımladık. Üçüncü bölümde, bir Sasakian manifoldu çalıştık. ϕ-kesit eğriliği tanımladık. Ayrıca Sasakian uzay formlarının bazı standart modellerini verdik. Sasakian manifoldlarda Einstein ve η-Einstein manifoldu inceledik. Bir (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısının $S^3 \subset E^4$ de bir örneğini verdik. Son bölümde K-değme Riemann manifoldları ve Değme Riemann manifoldları inceledik.

Anahtar kelimeler: Hemen hemen değme yapı, hemen hemen değme metrik manifold, Torsion tensör alanı, normal yapı, Killing vektör alanı, K-değme yapı, K-değme manifold, Sasakian manifold, uzay formu, Ricci tensör alanı, Einstein, η-Einstein.

SUMMARY

In this study, we investigate the structures on Riemannian manifolds. This thesis consists of four chapters. In the first chapter, we introduce basic notations of connections and curvature tensor. In the second chapter we give the definitions of almost contact structure and almost contact metric structure. We also define Torsion tensor of almost contact manifolds, Killing vector field, K-contact structure and K-contact manifold. In the third chapter we study a Sasakian manifold. We define ϕ-sectional curvature. We also give some standart models of Sasakian space forms. We investigate Einstein and η-Einstein manifold on Sasakian manifolds. We give an example of an (ϕ,ξ,η,g) almost contact metric structure in $S^3 \subset E^4$. In the final chapter, we investigate K-contact Riemannian manifolds and contact Riemannian manifolds.

Key words: Almost contact structure, Almost contact metric manifold, Torsion tensor field, normal structure, Killing vector field, K-contact structure, K-contact manifold, Sasakian manifold, space form, Ricci tensor field, Einstein, η-Einstein.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağını sağlayan, çalışmam süresince yapıcı eleştirileri ile destek olan Sayın hocam Yrd.Doç.Dr.Mazlum ABAK'a, öneri ve fikirlerinden yararlandığım Sayın hocam Prof.Dr.Ertuğrul ÖZDAMAR'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Ahmet YILDIZ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağını sağlayan, çalışmam süresince yapıcı eleştirileri ile destek olan Sayın hocam Yrd.Doç.Dr.Mazlum ABAK'a, öneri ve fikirlerinden yararlandığım Sayın hocam Prof.Dr.Ertuğrul ÖZDAMAR'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Ahmet YILDIZ

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde sıkca kullanacağımız bazı temel tanım ve sembolleri tanıtacağız.

Tanım 1.1: M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $p \in V$ noktasındaki tanjant uzay $T_V(p)$ olsun. V nin bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{p \in V} T_V(p)$ ile gösterilsin. Bir

$$\pi : \bigcup_{p \in V} T_V(p) \longrightarrow V$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_V(p)$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_p) = p$$

biçiminde tanımlansın. O zaman V komşuluğu üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X : V \longrightarrow \bigcup_{p \in V} T_V(p)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyleki

$$\pi o X = I : V \longrightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik dönüşümüdür. M üzerinde vektör alanları cümlesini $\chi(M)$ ile göstereceğiz[1].

Tanım 1.2: E^n nin $p \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{E^n}(p)$ olsun. Buna göre, bir

$$\eta : E^n \longrightarrow \bigcup_{p\in E^n} T^{*}{}_{E}{}^{n}(p)$$

fonksiyonu için

$$\pi o \eta : E^n \xrightarrow{\text{özdeşlik}} E^n$$

olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{p\in E^n} T^{*}{}_{E}{}^{n}(p) \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu mevcut ise η **ya E^n üstünde bir 1-form** denir[1].

Tanım 1.3:(r,s)-tipindeki tensör alanı

$$T_s^r = \{ f \mid f : \chi^*(M)\times\ldots\times\chi^*(M)\times\chi(M)\times\ldots\times\chi(M) \xrightarrow{\text{r+s-lineer}} \mathcal{F}(M) \}$$
$$= (\otimes^r \chi(M)) \otimes (\otimes^s \chi^*(M))$$

$f\in T_s^r$ için f ye r-mertebeden kontravaryant, s-mertebeden kovaryant tensör alanı adı verilir,(r,s)-tipindendir denir[6].

Tanım 1.4: M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold (yani C^∞ manifold) olmak üzere bir

$$g : M \longrightarrow \bigcup_{x\in M} (T_M(x)\times T_M(x), IR)$$
$$x \longrightarrow g_x : T_M(x)\times T_M(x) \longrightarrow IR$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar ise g ye M üzerinde bir **Riemann metriği** denir[6].Burada $T_M(x)$, M manifoldunun x noktasındaki tanjant vektörleri uzayını belirtir.

i)2-lineer ,

ii)pozitif tanımlı ,

$\forall X \in T_M(x)$ için $g_x(X,X)>0$

$\forall X \in T_M(x)$ için $g_x(X,X)=0 \Leftrightarrow X=0$

iii) simetrik, $\forall X,Y \in T_M(x)$ için

$g_x(X,Y)=g_x(Y,X)$

dir.

Tanım 1.5: n-boyutlu C^∞ manifold M olmak üzere M üzerinde bir Riemann metriği g olsun. (M,g) ikilisi bir **Riemann manifoldu** olarak adlandırılır[6].

Tanım 1.6: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow \nabla(X,Y)=\nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f,g \in C^\infty(M,IR)$, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X(fY)=X(f)Y+f\nabla_X Y$

özelliklerini sağlıyor ise **∇ ya M üzerinde bir afin koneksiyon ; ∇_X e ise X yönünde kovaryant türev** denir[6].

Tanım 1.7: M üzerinde bir afin koneksiyon ∇ verilsin. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$T : \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \longrightarrow T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **M nin torsion tensörü** denir[6].

Özel olarak T=0 durumunda yani

$$[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$$

ise **∇ ya M üzerinde sıfır torsionlu koneksiyon** adı verilir[6].

Tanım 1.8: (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. O zaman bir sıfır torsionlu koneksiyon ∇ için

$$\nabla_X(g(Y,Z))=g(\nabla_X Y,Z)+g(X,\nabla_X Z); \qquad \forall X,Y,Z\in\chi(M)$$

ise ∇ ya M nin **Levi-Civita koneksiyonu(Riemann koneksiyonu)** denir. Ayrıca

$$2g(\nabla_X Y,Z)=Xg(Y,Z)+Yg(X,Z)-Zg(X,Y)$$
$$+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)+g(X,[Z,Y])$$

ifadesi **Kozsul eşitliği** olarak bilinir[6].

Tanım 1.9: (M,g), Riemann manifoldu olmak üzere, M üzerinde bir Riemann koneksiyonu ∇ verilsin. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y):\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$
$$Z\longrightarrow R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

şeklinde tanımlanan **R fonksiyonuna M nin eğrilik tensör alanı, R(X,Y) ye eğrilik dönüşümü** denir[6].

Açıklama: $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$T(X,Y)=-T(Y,X)$$

$$R(X,Y)=-R(Y,X)$$

şartları sağlanır.

Teorem 1.1: n-boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun.Her X, Y ve Z vektör alanları için T=0 olmak üzere

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z)+(\nabla_Y R)(Z,X)+(\nabla_Z R)(X,Y)=0$$

eşitlikleri sağlanır. Bunlara ,sırası ile,birinci ve ikinci Bianchi özdeşlikleri adı verilir[6].

2.HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARI

Bu bölümde hemen hemen değme manifoldları ve bu manifoldlar üzerinde bir metrik yapı tanımlanıp torsion tensörü ile ilgili bazı özellikler ele alınacaktır.

2.1.Hemen Hemen Değme Manifoldları

Tanım 2.1.1: M bir (2n+1)-boyutlu manifold, ϕ,ξ,η da M üzerinde, sırası ile, (1,1)- tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ,ξ,η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\eta(\xi)=1 \tag{2.1}$$

ve

$$\phi^2X=-X+\eta(X)\xi \tag{2.2}$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ,ξ,η) ya M üzerinde bir **hemen hemen değme yapısı** denir ve M bu yapı ile bir **hemen hemen değme manifoldu** olarak adlandırılır[6].

Teorem 2.1.1: (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı için

i) $\phi\xi=0$ (2.3)

ii) $\eta(\phi X)=0$ (2.4)

iii) rank $\phi=2n$ (2.5)

dir[6].

Tanım 2.1.2: Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ,ξ,η) yı oluşturalım. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X)=g(X,\xi) \tag{2.6}$$
$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.7}$$

şartlarını sağlıyor ise **g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapısı, (ϕ,ξ,η,g) yapısı ile M ye de hemen hemen değme metrik manifoldu** denir[6].

Sonuç 2.1.1: (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ile hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) verilsin. Böylece

$$g(\phi X,Y)=-g(X,\phi Y) \tag{2.8}$$

dir[6].

İspat: (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M verilsin. Bu manifold ile birlikte bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) alalım. (2.7) eşitliğinden

$$g(X,Y)=g(\phi X,\phi Y)+\eta(X)\eta(Y)$$

dir. Bu denklemde X yerine ϕX alınırsa

$$g(\phi X,Y)=g(\phi^2 X,\phi Y)+\eta(\phi X)\eta(Y)$$

elde edilir. Ayrıca (2.2) ve (2.4) gereğince

$$\begin{aligned} g(\phi X,Y)&=g(-X+\eta(X)\xi,\phi Y)+0.\eta(Y)\\ &=g(-X,\phi Y)+\eta(X)g(\xi,\phi Y)+0\\ &=-g(X,\phi Y)+\eta(X)\eta(\phi Y)\end{aligned}$$

$$=-g(X,\phi Y)+\eta(X).0$$
$$=-g(X,\phi Y)$$

olduğundan

$$g(\phi X,Y)+g(X,\phi Y)=0$$

dır. O halde, ϕ dönüşümü g ye göre **anti-simetriktir**[6].

Tanım 2.1.2.: (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. η 1-formu için $\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$ şartı sağlanırsa η ya M nin değme yapısı ve M ye de **değme manifoldu** denir[6].

Teorem 2.1.2: (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde

$$g(X,\phi Y)=d\eta(X,Y) \tag{2.9}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) vardır[6].

İspat: Yano, K & Kon, M. 1984 bak[6].

Tanım 2.1.3: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) için

$$\Phi(X,Y)=g(X,\phi Y) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) nın **2.temel formu** denir[6].

2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlarının Torsion Tensörü

Tanım 2.2.1: V bir reel vektör uzayı olmak üzere

$$J : V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir **kompleks yapı** denir[6].

(2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) oluşturalım. Reel bir doğruyu IR ile gösterirsek M×IR çarpım manifoldunu gözönüne alalım. M×IR üzerinde her bir vektör alanı

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

şeklindedir[6]. Burada X, M ye teğet bir vektör alanı, t de IR nin bir koordinatı ve f ise M×IR de bir fonksiyondur.

M×IR nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\phi(X) - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \tag{2.11}$$

ile tanımlanır[6].

Sonuç 2.2.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan J dönüşümü M×IR üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapısıdır**[6].

İspat: (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M olsun. Böylece (2.11) eşitliğinden

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi(X) - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

$$\begin{aligned} J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J(\phi(X) - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \\ &= (\phi(\phi(X) - f.\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\phi(X) - f.\xi\frac{d}{dt}) \\ &= (\phi^2(X) - \phi(f.\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\phi X) - \eta(f.\xi)\frac{d}{dt}) \\ &= (-X + \eta(X)\xi - f(\phi\xi) - \eta(X)\xi, (-f\eta(\xi)\frac{d}{dt}) \\ &= (-X - f.0, -f\frac{d}{dt}) \\ &= -(X, f\frac{d}{dt}) \end{aligned}$$

bulunur.Bu son eşitlik gösterir ki $J^2=-I$ dır. Bu yüzden J dönüşümü $M\times IR$ üzerinde hemen hemen kompleks yapısıdır.

Tanım 2.2.2:(1,1)-tipinde bir tensör alanı F verilsin. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsion tensörü** denir.

F=J hemen hemen kompleks yapısı olması halinde de

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned} \quad (2.12)$$

dir[6].

Tanım 2.2.3: Hemen hemen kompleks manifoldu (M,J) verilsin. $N_J=0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilirdir** denir[6].

Tanım 2.2.4: Eğer $M \times IR$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir[6].

Tanım 2.2.5: M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\varphi : IR \times M \xrightarrow{C^\infty} M$$
$$(t,p) \longrightarrow \varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise **φ ye M nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu** adı verilir[6].

i) $\forall t \in IR$ için

$\varphi_t : p \longrightarrow \varphi_t(p)$ bir diffeomorfizm

ii) $\forall t,\ s \in IR$ ve $p \in M$ için

$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$

dir.

Tanım 2.2.6: M üzerinde bir vektör alanı X ve φ_t ise X ile genelleştirilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grubu olsun. **X vektör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ Lie türevi**

$$(L_X K)_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[K_x - (\varphi_t K)_x]$$

şeklinde tanımlanır[2].

Önerme 2.2.1: X vektör alanı yönünde L_X Lie türevi $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar[6].

i) $L_X(K\otimes K')=(L_X K)\otimes K'+K\otimes(L_X K')$,
ii) $L_X f=Xf$,
iii) $L_X Y=[X,Y]$.

Tanım 2.2.7: M bir Riemann manifoldu ve $E_1,...,E_n$ vektörleri de $T_M(x)$ in bir ortonormal bazı olmak üzere $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(E_i,X)Y,E_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n} R(E_i,Y,E_i,X)$$

şeklinde tanımlanan (0,2)-tipindeki tensör alanına **Ricci tensör alanı** denir.Ayrıca

$$r=\sum_{i=1}^{n} S(E_i,E_i)$$

eşitliğine **skalar eğrilik** adı verilir[6].

2.3.K-Değme Manifoldları

Tanım 2.3.1:M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin.M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanına **Killing vektör alanı** adı verilir[2].

Tanım 2.3.2: (2n+1)-boyutlu değme metrik manifoldu M verilsin. Eğer (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısında verilen ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yapıya **K-değme yapısı** ve M ye de **K-değme manifoldu** adı verilir[6].

Önerme 2.3.1: Bir değme metrik manifoldu M olsun.O zaman M bir K-değme manifoldudur. $\Leftrightarrow$

$$\nabla_X\xi=-\phi X \tag{2.13}$$

dir[6].

Teorem 2.3.1: (2n+1)-boyutlu bir Riemann manifoldu M nin bir K-değme manifoldu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i) M bir ξ birim Killing vektör alanına sahiptir.

ii) M nin her bir noktasında ξ yı kapsayan düzlem kesitleri için kesit eğriliği 1 e eşittir[6].

İspat:

M bir değme manifoldu olsun.O zaman ξ ya dik bir birim vektör alanı X olmak üzere

$$g(R(X,\xi)\xi,X)=g(-\phi^2X,X)=g(X,X)=1. \tag{2.14}$$

dir.Tersine M nin i) ve ii) şartlarını sağladığını düşünelim. ξ bir killing vektör alanı olduğundan

$$R(X,\xi)Y=\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_X Y}\xi \tag{2.15}$$

elde ederiz. $\eta(X)=g(X,\xi)$ ve $-\nabla_X\xi=\phi X$ eşitliklerini gözönüne alalım.O halde

$$\phi\xi=0$$

dır. ξ ya dik bir birim vektör alanı $X\in\chi(M)$ olmak üzere (2.14) den

$$1=g(R(X,\xi)\xi,X)=-g(\phi^2X,X)$$

elde ederiz.Bu yüzden, ξ ya dik her $X\in\chi(M)$ vektör alanı için

$$\phi^2X=-X$$

olduğu görülür.Halbuki her $Y\in\chi(M)$ vektör alanı için

$$\phi^2Y=-Y+\eta(Y)\xi$$

dir.Üstelik

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y)&=\frac{1}{2}(g(\nabla_X\xi,Y)-g(\nabla_Y\xi,X)) \\ &=-g(\nabla_Y\xi,X)=g(X,\phi Y) \end{aligned}$$

dir.Sonuç olarak, (ϕ,ξ,η,g) M üzerinde bir K-değme yapısıdır. Ayrıca (2.14) den

$$R(X,\xi)\xi=-\phi^2X=X-\eta(X)\xi \tag{2.16}$$

elde ederiz. Böylece M nin (2.16) eşitliğini sağlayan bir ξ birim Killing vektör alanına sahip (2n+1)-boyutlu bir K-değme manifoldu olduğu görülür.

3. SASAKIAN MANİFOLDLAR

Bu bölümde Sasakian manifold tanımlandıktan sonra M(c) Sasakian uzay formunun c=-3, c>-3 ve c<-3 durumları incelenmiştir. Ayrıca Sasakian uzay formu üzerinde Ricci tensör alanının özellikleri verilecektir.

3.1.Sasakian Manifoldlar

Tanım 3.1.1: M, değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) olan (2n+1)-boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun.**Eğer M nin değme metrik yapısı normal ise, bu yapıya Sasakiandır denir (ya da normal değme metrik yapısı) ve M ye de Sasakian manifold adı verilir (ya da normal değme metrik manifoldu)**[6].

Teorem 3.1.1: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) bir Sasakian yapıdır. $\Leftrightarrow$

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_X\phi)Y=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X \tag{3.1}$$

dir[6]. Burada

$$\nabla_X(\phi Y)=(\nabla_X\phi)Y+\phi\nabla_X Y$$

dir.

Sonuç 3.1.1: M bir Sasakıan manifold ise M nin bir Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere

$$R(X,Y)\xi=\eta(Y)X-\eta(X)Y \tag{3.2}$$

dir[6].

İspat : M nin eğrilik tensörü R verilsin. R nin tanımı gereğince

$$R(X,Y)\xi=\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_Y\nabla_X\xi-\nabla_{[X,Y]}\xi$$

$$=\nabla_X(\nabla_Y\xi)-\nabla_Y(\nabla_X\xi)-\nabla_{[X,Y]}\xi$$

dir.(2.13) den

$$R(X,Y)\xi=\nabla_X(-\phi Y)-\nabla_Y(-\phi X)-(-\phi([X,Y]))$$

$$=-\nabla_X(\phi Y)+\nabla_Y(\phi X)+\phi[X,Y]$$

$$=-(\nabla_X\phi)Y-\phi\nabla_XY+(\nabla_Y\phi)X+\phi\nabla_YX+\phi[X,Y]$$

$$=-(\nabla_X\phi)Y+(\nabla_Y\phi)X-\phi(\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y])$$

$$=-(\nabla_X\phi)Y+(\nabla_Y\phi)X$$

elde edilir. Ayrıca (3.1) eşitliği yardımı ile

$$R(X,Y)\xi=-g(X,Y)\xi+\eta(Y)X+g(Y,X)\xi-\eta(X)Y$$

$$=\eta(Y)X-\eta(X)Y$$

bulunur. Bu ise istenilen eşitliktir.

Teorem 3.1.2: (2n+1)-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. M nin eğrilik tensörünü R ile gösterelim.Bu takdirde M Sasakian manifolddur. $\Leftrightarrow$

$$R(X,\xi)Y=-g(X,Y)\xi+\eta(Y)X \tag{3.3}$$

dir[6].

İspat : M Sasakian manifold olsun. Bu takdirde $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $\forall\xi$ Killing vektör alanı için R eğrilik tensörü

$$
\begin{aligned}
R(X,\xi)Y&=\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_X Y}\xi\\
&=\nabla_X(\nabla_Y\xi)-\nabla_{\nabla_X Y}\xi\\
&=\nabla_X(-\phi Y)-(-\phi\nabla_X Y)\\
&=-\nabla_X(\phi Y)+\phi\nabla_X Y\\
&=-(\nabla_X\phi)Y-\phi\nabla_X Y+\phi\nabla_X Y\\
&=-(\nabla_X\phi)Y\\
&=-g(X,Y)\xi+\eta(Y)X
\end{aligned}
$$

eşitliğini sağlar. Tersine, M üzerinde bir ξ birim Killing vektör alanı seçilir ise (3.3) sağlandığından Teorem 3.1.1. gereğince M nin bir Sasakian manifold olduğu görülür[6].

Sonuç 3.1.2: M bir Sasakian manifold olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve ξ bir birim Killing vektör alanı olmak üzere

$$R(X,\xi)Y=-(\nabla_X\phi)Y$$

dir[6].

Sonuç 3.1.3: M, Sasakıan yapısı (ϕ,ξ,η,g) olan (2n+1)-boyutlu bir Sasakıan manifold olsun.

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\phi Z=\phi R(X,Y)Z&+g(\phi X,Z)Y-g(Y,Z)\phi X\\
&+g(X,Z)\phi Y-g(\phi Y,Z)X \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

dır[6].

İspat: M nin eğrilik tensörü R için

$$R(X,Y)\phi Z=\nabla_X\nabla_Y\phi Z-\nabla_Y\nabla_X\phi Z-\nabla_{[X,Y]}\phi Z$$
$$=(\nabla_X\nabla_Y\phi)Z+\phi\nabla_X\nabla_Y Z-(\nabla_Y\nabla_X\phi)Z-\phi\nabla_Y\nabla_X Z-(\nabla_{[X,Y]}\phi)Z-\phi\nabla_{[X,Y]}Z$$
$$=\nabla_X((\nabla_Y\phi)Z)-\nabla_Y((\nabla_X\phi)Z)-(\nabla_{[X,Y]}\phi)Z+\phi R(X,Y)$$
$$=\nabla_X(g(Y,Z)\xi-g(Z,\xi)Y)-\nabla_Y(g(X,Z)\xi-g(Z,\xi)X)$$
$$-(g([X,Y],Z)\xi-\eta(Z)[X,Y])+\phi R(X,Y)Z$$

$$=\nabla_X(g(Y,Z)\xi)-\nabla_X(g(Z,\xi)Y)-\nabla_Y(g(X,Z)\xi)-\nabla_Y(g(Z,\xi)X$$
$$-(g([X,Y],Z)\xi-\eta(Z)[X,Y])+\phi R(X,Y)Z$$

$$=g(\nabla_X Y,Z)\xi+g(Y,\nabla_X Z)\xi+g(Y,Z)\nabla_X\xi-g(\nabla_X Z,\xi)Y$$
$$-g(Z,\nabla_X\xi)Y-\eta(Z)\nabla_X Y-g(\nabla_Y X,Z)\xi$$
$$-g(X,\nabla_Y Z)\xi-g(X,Z)\nabla_Y\xi-g(\nabla_Y Z,\xi)X-g(Z,\nabla_Y\xi)X$$
$$-\eta(Z)\nabla_Y X-g(\nabla_X Y,Z)\xi-g(\nabla_Y X,Z)\xi-\eta(Z)[X,Y])+\phi R(X,Y)Z$$

elde edilir. Böylece (2.13) den

$$R(X,Y)\phi Z=g(\nabla_X Y,Z)\xi+g(Y,\nabla_X Z)\xi-g(Y,Z)\phi X-g(\nabla_X Z,\xi)Y$$
$$-g(Z,\nabla_X\xi)Y-\eta(Z)\nabla_X Y-g(\nabla_Y X,Z)\xi-g(X,\nabla_Y Z)\xi$$
$$+g(X,Z)\phi Y-g(\nabla_Y Z,\xi)X-g(Z,\nabla_Y\xi)X-\eta(Z)\nabla_Y X$$
$$-g(\nabla_X Y,Z)\xi+g(\nabla_Y X,Z)\xi-\eta(Z)[X,Y]+\phi R(X,Y)Z$$

bulunur. Sonuç olarak

$$R(X,Y)\phi Z=\phi R(X,Y)Z-g(Y,Z)\phi X+g(X,Z)\phi Y-g(\nabla_Y X,Z)\xi$$
$$+g(Y,\nabla_X Z)\xi$$

dir.

Sonuç 3.1.4: M bir Sasakian manifold olmak üzere

$$R(X,Y)Z=-\phi R(X,Y)\phi Z+g(Y,Z)X-g(X,Z)Y \qquad (3.5)$$
$$-g(\phi Y,Z)\phi X+g(\phi X,Z)\phi Y$$

dır[6].

İspat: (3.4) denkleminin her iki tarafına ϕ dönüşümünü uygularsak

$$\phi R(X,Y)\phi Z=\phi^2 R(X,Y)Z-g(Y,Z)\phi^2 X+g(X,Z)\phi^2 Y$$
$$+g(\phi X,Z)\phi Y-g(\phi Y,Z)\phi X$$

elde ederiz. Böylece (2.2) den

$$\phi R(X,Y)\phi Z=-R(X,Y)Z+g(Y,Z)X-g(X,Z)Y$$
$$+g(\phi X,Z)\phi Y-g(\phi Y,Z)\phi X$$
$$R(X,Y)Z=-\phi R(X,Y)\phi Z+g(Y,Z)X-g(X,Z)Y$$
$$+g(\phi X,Z)\phi Y-g(\phi Y,Z)\phi X.$$

dir.

3.2.M(c) Sasakian Uzay Formu

Tanım 3.2.1: (M,g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensör alanı R ile gösterilsin. $T_M(x)$ tanjant uzayının herhangi bir $\{X_1,X_2\}$ ortonormal alt cümlesi ile gerili P düzlemi için K(P) **kesit eğriliği**

$$K(P)=R(X_1,X_2,X_1,X_2)=g(R(X_1,X_2)X_2,X_1)$$

ile tanımlanır[6].

Tanım 3.2.2: n-boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. Eğer $T_M(x)$ deki her P düzlemi ve M nin her x noktası için K(P) sabit eğrilikli ise o zaman M **sabit eğrilikli bir uzaydır** denir. Sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu bir **uzay formu** olarak adlandırılır[5].

Önerme 3.2.1: X, Y ve Z vektör alanları olmak üzere sabit eğriliği k olan uzay için

$$R(X,Y)Z=k(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y)$$

eşitliği vardır[6].

Tanım 3.2.3: M manifoldu Sasakian yapısı (ϕ,ξ,η,g) olan (2n+1)-boyutlu bir Sasakian manifold olsun. ξ ya dik bir X birim vektörü $\{X,\phi X\}$ ortonormal olacak şekilde bulunabiliyor ise $\{X,\phi X\}$ düzlemi ile M nin ara kesitine M de bir **ϕ-kesit** adı verilir. Bu durumda

$$K(X,\phi X)=g(R(X,\phi X)\phi X,X)$$

kesit eğriliğine M nin bir **ϕ-kesit eğriliği** adı verilir[6].

Tanım 3.2.4: Eğer bir M Sasakian manifold, sabit ϕ-kesit eğriliğine sahip ve bu eğrilik c ise M(c) ile gösterilir ve bir **Sasakian uzay formu** olarak adlandırılır[5].

Teorem 3.2.1: M(c) Sasakian uzay formunun R eğrilik tensörü için $X,Y,Z\in\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z=&\frac{1}{4}(c+3)[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]\\&-\frac{1}{4}(c-1)[\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X\\&+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi\\&+g(\phi Y,Z)\phi X-g(\phi X,Z)\phi Y+2g(\phi X,Y)\phi Z]\end{aligned} \tag{3.6}$$

dir[6].

İspat: Yano, K. and Kon, M. bak[6].

Uygulama:

Aşağıda M(c) nin $c=-3$, $c>-3$ ve $c<-3$ durumlarını inceleyeceğiz.

i) $c=-3$ hali: (x_i, y_i, z) koordinatları seçelim. g metriği

$$g=\frac{1}{4}[\eta\otimes\eta+\sum_{i=1}^{n}((dx_i)^2+(dy_i)^2)]$$

ile birlikte IR^{2n+1} bir Sasakian yapıya sahiptir. Burada

$$\eta=\frac{1}{2}(dz-\sum_{i=1}^{n}y_i dx_i)$$

dir.

Bu metrik ile IR^{2n+1}, ϕ-kesit eğriliği $c=-3$ olan bir Sasakian uzay formudur[5].

ii) $c>-3$ hali: C^{n+1} de S^{2n+1} birim küresini göz önüne alalım. C^{n+1} in J doğal kompleks yapısının kullanılması ile S^{2n+1} üzerindeki bir Sasakian yapıyı aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

S^{2n+1} birim küresi üzerinde C^{n+1} den indirgenmiş metrik g olsun. (Böylece S^{2n+1} in sabit kesit eğriliği 1 dir.)

$p\in S^{2n+1}$ noktasındaki birim normal N olmak üzere

$$\xi_p=J_pN$$

dir. Bütün $p\in S^{2n+1}$ için

$$\eta(X)=g(X,\xi) \quad , \quad \phi=soJ$$

dir.Burada $: T_{C^{n+1}}(p) \longrightarrow T_{S^{2n+1}}(p$ dönüşümü bir ortogonal izdüşümdür.Böylece S^{2n+1} sabit ϕ-kesit eğriliği 1 olan bir Sasakıan uzay formudur.Bir pozitif α sabiti için

$$g_\alpha=\alpha g+\alpha(\alpha-1)\eta\otimes\eta \quad , \quad \eta_\alpha=\alpha\eta \quad , \quad \xi_\alpha=\frac{1}{\alpha}\xi \quad ,\phi_\alpha=\phi$$

diyelim. O zaman $(S^{2n+1},g_\alpha,\phi_\alpha,\xi_\alpha,\eta_\alpha)$ sabit ϕ-kesit eğriliği $4/\alpha-3$ olan bir Sasakıan uzay formudur[5].

iii) $c<-3$ hali: C^n de bir birim küre D ve sabit holomorfik kesit eğriliği $k<0$ olan kompleks uzay formu (D,g,J) nin 2. temel formu ψ olsun.O zaman DxIR üzerinde

$$\eta=\pi^*w+dt \qquad \text{ve} \qquad g=\pi^*\ \tilde{g}+\eta x\eta$$

dır.Burada π, D üzerinde bir izdüşümdür.$\varphi=dw$ ve t de IR nin koordinat fonksiyonudur. O zaman D,ϕ-kesit eğriliği k-3 olan bir Sasakıan uzay formudur[5].

Tanım 3.2.5: $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için P kesit eğriliği

$$\begin{aligned} P(X,Y;Z,W)&=g(\phi R(X,Y)Z,W)-g(R(X,Y)\phi Z,W)\\ &=g(Y,Z)g(\phi X,W)-g(\phi X,Z)g(Y,W)\\ &\quad+g(\phi Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(\phi Y,W)\end{aligned}$$

ile tanımlanır[6].

Önerme 3.2.2: P kesit eğriliği için

$$P(X,Y;Z,W)=-P(Z,W;X,Y)$$

dir.

İspat:

$$P(Z,W;X,Y)=g(W,X)g(\phi Z,Y)-g(\phi Z,X)g(W,Y)$$
$$+g(\phi W,X)g(Z,Y)-g(Z,X)g(\phi W,Y)$$

$$=-g(W,X)g(Z,\phi Y)+g(Z,\phi X)g(W,Y)$$
$$-g(W,\phi X)g(Z,Y)+g(Z,X)g(W,\phi Y)$$
$$=-P(X,Y;Z,W)$$

dir.

Açıklama:

Eğer $\{X,Y\}$ ortonormal vektör çifti ξ vektör alanına dik ve

$$g(X,\phi Y)=\cos\theta \qquad 0\leq\theta\leq\pi$$

ise o zaman

$$P(X,Y;X,Y)=-\sin^2\theta$$

elde ederiz[6]. Şu andan itibaren

$$K(X,\phi X)=g(R(X,\phi X)\phi X,X)$$

ϕ-kesit eğriliği $H(X)$ ile gösterilecektir[6]. Her bir X,Y vektör alanları için

$$B(X,Y)=g(R(X,Y)Y,X)$$

ve ξ ya dik her bir X vektör alanı için

$$D(X)=B(X,\phi X)$$

eşitlikleri yardımı ile B ve D tanımlandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir[6].

Sonuç 3.2.1: ξ ya dik her bir X ve Y vektör alanları için

$$B(X,Y)=\frac{1}{32}\Big[3D(X+\phi Y)+3D(X-\phi Y)-D(X+Y)$$
$$-D(X-Y)-4D(X)-4D(Y)$$
$$-24P(X,Y;X,\phi Y)\Big]$$

dir[6].

İspat: İlk önce

$$D(X+Y)+D(X-Y)=2\Big[D(X)-D(Y)+2B(X,\phi Y)$$
$$+2g(R(X,\phi X)\phi Y,Y)$$
$$+2g(R(X,\phi Y)\phi X,Y)\Big]$$

olup bu denklemde Y yerine ϕY koyarsak

$$D(X+\phi Y)+D(X-\phi Y)=2\Big[D(X)-D(\phi Y)+2B(X,Y)$$
$$+2g(R(X,\phi X)\phi Y,Y)$$
$$+2g(R(X,Y)\phi Y,\phi X)\Big]$$

elde ederiz.

$$D(\phi Y)=D(Y)$$

olduğundan

$$3D(X+\phi Y)+D(X-\phi Y)-D(X+Y)-D(X-Y)-4D(X)-4D(Y)$$
$$=12B(X,Y)-4B(X,\phi Y)+8g(R(X,\phi X)\phi Y,Y)$$
$$+12g(R(X,Y)\phi Y,\phi X)+4g(R(X,\phi Y)Y,\phi X)$$

dir. Diğer yandan (3.4) eşitliği ve birinci Bianchi özdeşliğinden

$$8g(R(X,\phi X)\phi Y,Y)=8[B(X,Y)+B(X,\phi Y)+2P(X,Y;X,\phi Y)]$$

dır.Ayrıca

$$12g(R(X,Y)\phi Y,\phi X)=12[B(X,Y)+P(X,Y;X,\phi Y)]$$

$$4g(R(X,\phi Y)Y,\phi X)=4[-B(X,\phi Y)+P(X,\phi Y;X,Y)]$$

dir. Bu denklemler ile iddiamız ispatlanmış olur.

Açıklama:

i) X birim vektör alanıdır.$\Leftrightarrow$

$$D(X)=H(X)$$

dir.

ii) $\{X,Y\}$ ortonormaldir.$\Leftrightarrow$

$$B(X,Y)=K(X,Y)$$

dir[6].

Sonuç 3.2.2: Bir M Sasakıan manifold verilsin. $\xi\in N(M)$ ve $X,Y\in\chi(M)$ dik vektör alanları için

$$g(X,\phi Y)=\cos\theta \quad , \quad (0\leq\theta\leq\pi)$$

ise

$$K(X,Y)=\frac{1}{8}[3+(1+\cos\theta)^2 H\left(\frac{X+\phi Y}{|X+\phi Y|}\right)+3(1-\cos\theta)^2 H\left(\frac{X-\phi Y}{|X-\phi Y|}\right)$$
$$-H\left(\frac{X+Y}{|X+Y|}\right)-H\left(\frac{X-Y}{|X-Y|}\right)-H(X)-H(Y)+6\sin^2\theta]$$

dir. Burada N(M), M nin normal vektör alanları uzayını gösterir[6].

İspat: Her bir $Z=X+\phi Y$ için

$$D(Z)=|Z|^4 H\left(\frac{Z}{|Z|}\right)$$

olduğundan

$$D(X+\phi Y)=|X+\phi Y|^4 H\left(\frac{X+\phi Y}{|X+\phi Y|}\right)$$

$$=4(1+\cos\theta)^2 H\left(\frac{X+\phi Y}{|X+\phi Y|}\right)$$

olduğunu görürüz.Benzer şekilde

$$D(X-\phi Y)=4(1-\cos\theta)^2 H\left(\frac{X-\phi Y}{|X-\phi Y|}\right)$$

$$D(X+Y)=4H\left(\frac{X+Y}{|X+Y|}\right) \quad \text{ve} \quad D(X-Y)=4H\left(\frac{X-Y}{|X-Y|}\right)$$

elde ederiz. Bu eşitlikler ve Yardımcı teorem 3.2.1.den istenilen sonuç elde edilir.

3.3.Sasakian Manifoldlarda Ricci Tensör Alanının Özellikleri

Aşağıdaki kısımda bir Sasakian manifoldun Ricci tensör alanının özelliklerini inceleyeceğiz.İlk önce M, değme yapısı (ϕ,ξ,η,g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir K-değme manifoldu olsun.S ve r, sırası ile, M nin Ricci tensör alanını ve Ricci operatörünü göstersin.

Tanım 3.3.1: M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun.Eğer M nin S Ricci tensörü

$$S=ag \tag{3.7}$$

formunda ise M ye bir **Einstein manifoldu** adı verilir. Burada a pozitif sabittir[6].

Tanım 3.3.2: M, değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) olan bir (2n+1)-boyutlu manifold olsun.Eğer S Ricci tensörü için

$$S=ag+b\eta(X)\otimes\eta(Y) \tag{3.8}$$

eşitliği sağlanıyor ise M ye **η-Einstein manifoldu** adı verilir. Burada a ve b,M üzerinde birer fonksiyonlardır[6].

Tanım 3.3.3: M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her X,Y ve $Z\in\chi(M)$ için M nin **Weyl conformal eğrilik tensör alanı**

$$C(X,Y)Z=R(X,Y)Z+\frac{1}{n-2}[S(X,Z)Y-S(Y,Z)X+g(X,Z)\vartheta Y$$

$$-g(Y,Z)\vartheta X]-\frac{r}{n-1)(n-2}[g(X,Z)Y-g(Y,Z)X] \tag{3.9}$$

ile tanımlanır. Burada ϑ Ricci eğrilik operatörüdür.

Açıklama:

C, (1,3)-tipinde bir tensör alanı olup n=3 için C=0 dır[6].

Örnek 3.3.1: E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu reel bir hiperküresi S^3 olsun. J ile E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alan yapısını gösterelim. E^4 de S^3 ün bir birim normali C ile gösterilecektir.

$$JC=-\xi$$

tanımlayalım. O zaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi \in \chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer taraftan,

$$JX=\phi X+\eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1,p_2,p_3,p_4) \in S^3$ için

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p))=J(p_1,p_2,p_3,p_4)=(-p_3,-p_4,p_1,p_2)=-\xi$$

elde edilir. Burada

$$\xi=\begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi $g(X,\xi)\xi$ için

$$g(X,\xi)\xi=\left\langle\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}$$

$$=(x_1p_3+x_2p_4-x_3p_1-x_4p_2)\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir.Böylece

$$\lambda=(x_1p_3+x_2p_4-x_3p_1-x_4p_2)$$

olmak üzere

$$g(X,\xi)\xi=\lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\phi(\phi X)=J(\phi X)-\eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X)=J(JX-\eta(X)C)-\eta(JX-\eta(X)C)C$$

$$=J\left(\begin{bmatrix}-x_3\\-x_4\\x_1\\x_2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}\right)-g(JX-\eta(X)C,\xi)C$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1+\lambda p_3\\-x_2+\lambda p_4\\-x_3-\lambda p_1\\-x_4-\lambda p_2\end{bmatrix}-\left\langle\begin{bmatrix}x_3-\lambda p_1\\x_4-\lambda p_2\\-x_1-\lambda p_3\\-x_2-\lambda p_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\\-x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\lambda p_3-[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2]p_1\\-\lambda p_4-[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2]p_2\\\lambda p_1-[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2]p_3\\\lambda p_2-[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2]p_4\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi^2 X=-X+\eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\phi\xi=J\xi-\eta(\xi)C$$

olduğundan

$$\phi\xi=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}=0$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \eta(\phi X) &= g(\phi X,\xi) \\ &= g(JX-\eta(X)C,\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu da açıkça görülebilir.

Sonuç olarak (ϕ,ξ,η,g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur.

4.DEĞME RIEMANN MANİFOLDLARI

Bu bölümde K-değme Riemann manifoldları ile değme Riemann manifoldları incelenmiştir.

4.1.K-Değme Riemann Manifoldları

Tanım 4.1.1: M bir değme Riemann manifoldu ve (ϕ,ξ,η,g) de M nin değme Riemann yapısı olsun.Eğer ξ vektör alanı Killing vektör alanı ise bu takdirde M ye **K-değme Riemann manifoldu** adı verilir[4].

Açıklama:

M bir K-değme Riemann manifoldu ve M nin eğrilik tensörü R ise $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y)\xi=\eta(Y)X-\eta(X)Y$$

dir[7].

Önerme 4.1.1: Eğer bir K-değme M manifoldun Ricci tensör alanı S paralel (yani $\nabla S=0$) ise o zaman M bir Einstein manifoldudur[2].

İspat: (2.14) eşitliğinden

$$R(X,\xi)\xi=-\phi^2X=X-\eta(X)\xi$$

olduğundan

$$S(\xi,\xi)=\sum_{i=1}^{2n} g(R(E_i,\xi)\xi,E_i)=\sum_{i=1}^{2n} g(E_i-\eta(E_i)\xi,E_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{2n} g(E_i,E_i)-\sum_{i=1}^{2n} \eta(E_i)g(\xi,E_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{2n} g(E_i,E_i)=2n$$

elde ederiz.Böylece

$$(\nabla_X S)(\xi,\xi)=2S(\phi X,\xi)=0$$

dir.Bundan dolayı

$$S(\xi,X)=\sum_{i=1}^{2n} g(R(E_i,\xi)X,E_i)=\sum_{i=1}^{2n} -g(R(E_i,\xi)E_i,X)$$

$$=\sum_{i=1}^{2n} -g(-\xi,X)=\sum_{i=1}^{2n} g(\xi,X)=2n\eta(X)$$

dir. Böylece

$$S(X,\phi Y)=2ng(X,\phi Y)$$

dir.O halde her X, Y vektör alanları için

$$S(X,Y)=2ng(X,Y)$$

elde ederiz. Böylece tanım gereğince M nin bir **Einstein manifoldu** olduğu görülür.

Tanım 4.1.2: (2n+1)-boyutlu bir M Sasakian manifoldun Ricci tensör alanı S

$$S(X,Y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} g(\phi R(X,\phi Y)e_i,e_i)+(2n-1)g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır[6].

Sonuç 4.1.1: (2n+1)-boyutlu bir M Sasakian manifoldun Ricci tensör alanı S için (4.1) den

$$S(X,\xi)=2n\eta(X)$$

ve

$$S(\phi X,\phi Y)=S(X,Y)-2n\eta(X)\eta(Y) \ .$$

dir[6].

Tanım 4.1.3: M bir Riemann manifoldu olsun.Eğer M nin eğrilik tensörü R sıfır ise bu takdirde M ye **lokal flat uzaydır denir**.Ayrıca M nin eğrilik tensörü R paralel(yani $\nabla R=0$) ise o zaman M ye **lokal simetrik uzay** adı verilir[6].

Önerme 4.1.2: M bir K-değme manifoldu olsun.Eğer M lokal simetrik ise o zaman M sabit eğriliği 1 olan bir Sasakian manifolddur[6].

İspat: (3.1) eşitliği kulanılırsa

$$-R(X,\phi Y)\xi-R(X,\xi)\phi Y=g(\phi Y,X)\xi+\eta(X)\phi Y$$

elde edilir.Bu denklemde Y yerine ϕY koyarsak

$$R(X,Y)\xi+R(X,\xi)Y=2\eta(Y)X-\eta(X)Y-g(X,Y)\xi$$

bulunur.Benzer şekilde

$$R(X,Y)Z+R(X,Z)Y=2g(Z,Y)X-g(X,Y)Z-g(X,Z)Y$$

elde ederiz.Böylece her $\{X,Y\}$ ortonormal vektör alanı çifti için

$$K(X,Y)=g(R(X,Y)Y,X)=1$$

dir.Bu da M nin kesit eğriliğinin 1 olduğunu gösterir. Tanım gereği M bir Sasakian manifolddur[6].

Açıklama:

L ve R ile, sırası ile, Lie türevini ve eğrilik tensörünü gösterelim.

$$\tau=L_\xi g$$
$$h=\frac{1}{2}L_\xi\phi \qquad (4.2)$$
$$\ell(X)=R(X,\xi)\xi$$

tensörlerini tanımlayalım.τ, h, ℓ tensörleri **simetrik** olup

$$\tau(X,Y)=2g(\phi X,hY) \quad ,$$
$$\tau(\xi,.)=h(\xi)=\ell(\xi)=0 \quad , \qquad (4.3)$$
$$\dot{I}zh=\dot{I}z\tau=0 \quad ,$$
$$h\phi=-\phi h \quad .$$

eşitliklerini sağlarlar[4].

4.2.Değme Riemann Manifoldları

2.Bölümde Değme Riemann manifoldların tanımı verilmişti. Bu bölümde ise bu manifoldlar ile ilgili bazı sonuçlar ifade edilecektir.

Yardımcı Teorem 4.2.1: (2n+1)-boyutlu bir M değme Riemann manifoldu için

i) $\nabla_X\xi=-\phi X-\phi hX$, (4.4)

ii) $\nabla_\xi\phi=0$, (4.5)

iii) $\nabla_\xi h=\phi-\phi h^2-\phi\ell$, (4.6)

iv) $\ell=\phi\ell\phi-2(h^2+\phi^2)$ (4.7)

dir.Burada ℓ ve h (4.2) anlamındadır[4].

Önerme 4.2.1: Bir M değme Riemann manifoldu için aşağıdaki önermeler birbirine denktir[4].

(i) $\nabla_\xi h=0$,

(ii) $\nabla_\xi\tau=0$, (4.8)

(iii) $\nabla_\xi\ell=0$,

(iv) $\ell\phi=\phi\ell$.

İspat: (i)⇔(ii)

$$(\nabla_\xi\tau)(X,Y)=\xi\tau(X,Y)-\tau(\nabla_\xi X,Y)-\tau(X,\nabla_\xi Y)$$

$$=\xi 2g(\phi X,hY)-\tau(\nabla_\xi X,Y)-\tau(X,\nabla_\xi Y)$$

$$=2g(\nabla_\xi\phi X,hY)+2g(\phi X,\nabla_\xi hY)-2g(\phi\nabla_\xi X,hY)-2g(\phi X,h\nabla_\xi Y)$$

$$=2g(\nabla_\xi\phi X,hY)-2g(\phi\nabla_\xi X,hY)+2g(\phi X,\nabla_\xi hY)-2g(\phi X,h\nabla_\xi Y)$$

$$=2g((\nabla_\xi\phi)X,hY)+2g(\phi X,(\nabla_\xi h)Y)$$

$$=2g(\phi X,(\nabla_\xi h)Y)$$

$$\Rightarrow(\nabla_\xi\tau)(X,Y)=2g(\phi X,(\nabla_\xi h)Y)$$

dir. Böylece $\nabla_\xi h=0$ ise $\nabla_\xi\tau=0$ dır.Tersine $\nabla_\xi\tau=0$ ise

$$(\nabla_\xi h)Y=\lambda.\xi$$

olup (4.6) yardımı ile

$$(\phi-\phi h^2-\phi\ell)Y=\lambda.\xi$$

$$\Rightarrow\phi(I-h^2-\ell)Y=\lambda.\xi$$

dır. Böylece ya $\lambda.\xi \in \phi(\chi(M))$ ya da $\lambda=0$ dır.

$$\lambda=0 \Rightarrow (\nabla_\xi h)Y=0 \Rightarrow \nabla_\xi h=0$$

bulunur. $\lambda.\xi \in \phi(\chi(M))$ ise

$$(\nabla_\xi h)Y\in\phi(\chi(M)) \Rightarrow \forall\phi X\in\phi(\chi(M)) \text{ için } g(\phi X,(\nabla_\xi h)Y)=0$$

olduğundan

$$(\nabla_\xi h)Y=0$$

dır. Böylece $\nabla_\xi h=0$ dır.

(i)$\Rightarrow$(iii).

$\nabla_\xi h=0$ olduğunu kabul edelim.(4.6) dan

$$\phi^2+h^2=-\ell$$

elde ederiz. Bu denklemin ξ ya göre türevini alırsak (4.5)den

$$\nabla_\xi\phi^2+\nabla_\xi h^2=\nabla_\xi\phi.\phi+\phi.\nabla_\xi\phi+h.\nabla_\xi h+\nabla_\xi h.h=-\nabla_\xi\ell$$
$$0=\nabla_\xi\ell.$$

Şimdi iii) ü düşünelim.(4.6) ve (4.7) nin ξ ya göre türevi alınır ve (4.5) denklemi kullanılırsa

$$\nabla_\xi h^2=0=\nabla_\xi\nabla_\xi h$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$2(\nabla_\xi h^2)=\nabla_\xi\{h.\nabla_\xi h+(\nabla_\xi h).h\}=\nabla_\xi\nabla_\xi h^2=0$$

ve $\nabla_\xi h$ simetrik olduğundan $\nabla_\xi h=0$ dır.

Son olarak (4.6) ve (4.7) denklemlerini kullanarak

$$2(\nabla_\xi h)=\ell\phi-\phi\ell$$

elde ederiz.Bu yüzden (i), (iv) e denk olduğu [4] de görülebilir.

Önerme 4.2.2: Değme yapısı (ϕ,η,ξ,g) olan bir M değme Riemann manifoldunda aşağıdaki önermeler denktir[4].

(i) $\ell=-k\phi^2$,

(ii) $\nabla_\xi\ell=0$ ve $h^2=(k-1)\phi^2$,

(iii) $K(\xi,X)=k=K(\xi,Y)$ $X,\ Y\in \ker(d\eta)=B$.

Burada K ile kesit eğriliği ifade edilmektedir ve k ise M üzerinde bir fonksiyondur.Ayrıca boyM=3 olması halinde (ii) önermesi $\nabla_\xi\ell=0$ şekline indirgenir.

İspat:

i)⇒ii): $(\nabla_\xi h)=\phi-\phi h^2-\phi\ell$;(4.6) dan

$2(\nabla_\xi h)=\ell\phi-\phi\ell$;(4.6) ve (4.7) den

olup

$\ell\phi=-k\phi^3=\phi\ell$ ise $\nabla_\xi h=0$

$h^2+\phi^2=-\ell \Rightarrow h^2+\phi^2=k\phi^2$

$h^2=k\phi^2-\phi^2=(k-1)\phi^2$

dir.

$\ker(d\eta)=B$ de bir keyfi Z sabiti için $|Z|=1$, $\{\xi, Z, E_i\}$ ortonormal bir baz olsun. $|X_i|=|Y_i|=1$ ile $\ker(d\eta)=B$ de

$$X_i=\frac{(Z+E_i)}{\sqrt{2}} \quad , \quad Y_i=\frac{(Z-E_i)}{\sqrt{2}}$$

verilsin.

$$K(\xi,X)=K(\xi,Y)$$

$$\Rightarrow K(\xi,X)=g(R(\xi,X)X,\xi)=g(R(X,\xi)\xi,X)=g(\ell X,X)$$

dir. Benzer bir hesaplama ile

$$K(\xi,Y)=g(\ell Y,Y)$$

olup

$$g(\ell X,X)=g(\ell Y,Y)$$

dir.

$$g(\ell X_i,X_i)=g(\ell(\frac{Z+E_i}{\sqrt{2}}),\frac{Z+E_i}{\sqrt{2}})$$

$$=\frac{1}{2}g(\ell Z,Z)+\frac{1}{2}g(\ell E_i,Z)+\frac{1}{2}g(\ell Z,E_i)+\frac{1}{2}g(\ell E_i,E_i)$$

$$g(\ell Y_i,Y_i)=g(\ell(\frac{Z-E_i}{\sqrt{2}}),\frac{Z-E_i}{\sqrt{2}})$$

$$=\frac{1}{2}g(\ell Z,Z)-\frac{1}{2}g(\ell Z,E_i)-\frac{1}{2}g(\ell E_i,Z)+\frac{1}{2}g(\ell E_i,E_i)$$

$$\Rightarrow \quad 2g(\ell Z,E_i)=0 \Rightarrow g(\ell Z,E_i)=0$$

$$g(\ell Z,\xi)=g(Z,\ell\xi)=0 \qquad (\ell \text{ simetrik})$$

$$\ell Z=g(\ell Z,Z)Z+g(\ell Z,\xi)\xi+\sum_{i} g(\ell Z,E_i)E_i$$

$$\ell Z=g(\ell Z,Z)Z$$

$$\Rightarrow \quad \ell Z=kZ$$

dir.Böylece

$$K(\xi,X)=K(\xi,Y)=k$$

eşitliğindeki k fonksiyonu $\ell Z=kZ$ özelliğindedir. Sonuç olarak her X için

$$\ell X=-k\phi^2X$$

olup

$$\ell=-k\phi^2$$

dir. Böylece (i) sağlanır.

i)$\Rightarrow$iii):

$$K(\xi,X)=g(R(\xi,X)X,\xi)=g(R(X,\xi)\xi,X)=g(\ell X,X)=g(-k\phi^2X,X)$$
$$=-kg(\phi^2X,X)=k$$

dır.

ii) $\Rightarrow$ i):

$$\nabla_\xi \ell=0 \quad \text{ve} \quad h^2=(k-1)\phi^2$$

olduğundan

$$h^2=k\phi^2-\phi^2 \;.$$

$$\Rightarrow h^2+\phi^2=k\phi^2$$

dir. Halbuki

$$h^2+\phi^2=-\ell$$

dir. Dolayısı ile

$$k\phi^2=-\ell$$

dir.

Uyarı: Önerme 4.2.2.nin hipotezi altında aşağıdaki önermeler birbirine denktir[4].

(i) $h^2=(k-1)\phi^2$,

(ii) $\ell=-k\phi^2+\phi\nabla_\xi h$,

(iii) $K(X,\xi)+K(\phi X,\xi)=2k \quad X\in\ker(d\eta)=B$.

Burada k, M üzerinde bir fonksiyondur.

İspat:

(i) ⇒ (ii):

$$\begin{aligned}\phi\nabla_\xi h&=\phi^2-\phi^2h^2-\phi^2\ell=\phi^2(I-(k-1)\phi^2-\ell)=\phi^2(I-k\phi^2+\phi^2-\ell)\\&=\phi^2(I-I+\eta\otimes\xi-k\phi^2-\ell)=\phi^2(-k\phi^2-\ell)=(I-\eta\otimes\xi)(k\phi^2-\ell)\\&=k\phi^2-\ell\end{aligned}$$

$$\phi\nabla_\xi h=k\phi^2-\ell \quad\Rightarrow\quad \ell=-k\phi^2+\phi\nabla_\xi h$$

elde edilir.

(ii) ⇒ (i). Hipotez gereği

$\ell=-k\phi^2+\phi\nabla_\xi h$, $2\nabla_\xi h=\ell\phi-\phi\ell$, $\nabla_\xi h=\phi-\phi h^2-\phi\ell$ olduğundan

$$\begin{aligned}2\phi\nabla_\xi h&=\phi\ell\phi-\phi^2\ell\\&=\ell+2(h^2+\phi^2)-\phi^2\ell\end{aligned}$$

$$\ell=-k\phi^2+\frac{1}{2}\ell+(h^2+\phi^2)-\frac{1}{2}\phi^2\ell$$

$$0=-k\phi^2++h^2+\phi^2$$

$$h^2=(k-1)\phi^2$$

elde edilir.

(i) $\Rightarrow$ (iii): $h^2=(k-1)\phi^2$ olsun. O zaman;

(i)$\Leftrightarrow$ (ii) olduğundan

$$\ell X=-k\phi^2X+\phi\nabla_\xi hX \quad \Rightarrow \quad g(-k\phi^2X+\phi\nabla_\xi hX,X)$$

$$=-kg(\phi^2X,X)+g(\phi\nabla_\xi hX,X)$$

yazılabilir.Böylece

$$K(X,\xi)=g(R(X,\xi)\xi,X)=g(\ell X,X)$$

ve

$$K(\phi X,\xi)=g(R(\phi X,\xi)\xi,\phi X)=g(\ell\phi X,\phi X)$$

dir. O halde;

$$\begin{aligned}
K(X,\xi)+K(\phi X,\xi)&=g(\ell X,X)+g(\phi\ell\phi X,\phi^2X)+\eta(\ell\phi X)\eta(\phi X)\\
&=g(\ell X,X)+g(\phi\ell\phi X,\phi^2X)\\
&=g(\ell X,X)+g((\ell+2(h^2+\phi^2)X,\phi^2X)\\
&=g(\ell X,X)+g(\ell X+2(h^2+\phi^2)X,\phi^2X)\\
&=g(\ell X,X)-g(\ell X,X)-2g((h^2+\phi^2)X,X)\\
&=-2g(h^2X,X)-2g(\phi^2X,X)\\
&=-2g(h^2X,X)+2g(X,X)\\
&=-2g((k-1)\phi^2X,X)+2g(X,X)\\
&=-2kg(\phi^2X,X)+2g(\phi^2X,X)+2g(X,X)\\
&=2k
\end{aligned}$$

bulunur.

iii)⇒i): Z bir sabit ve $|Z|=1$, $\{\xi, Z, E_i\}$ bir ortonormal baz olsun. $|X_i|=|Y_i|=1$ ile $\ker(d\eta)=B$ de

$$X_i = \frac{(Z+E_i)}{\sqrt{2}} \qquad , \qquad Y_i = \frac{(Z-E_i)}{\sqrt{2}}$$

verilsin.

$$K(X,\xi)+K(\phi X,\xi)=2k=g(\ell X, X)+g(\ell\phi X, \phi X)$$

ve

$$g(\ell Z, \xi)=0$$

olduğundan

$$g(\ell X_i, X_i)=\frac{1}{2}g(\ell Z, Z)+g(\ell Z, E_i)+\frac{1}{2}g(\ell E_i, E_i)$$

$$g(\ell\phi X_i, \phi X_i)=\frac{1}{2}g(\ell\phi Z, \phi Z)+g(\ell\phi Z, \phi E_i)+\frac{1}{2}g(\ell\phi E_i, \phi E_i)$$

$$=\frac{1}{2}g(\phi\ell\phi Z, \phi^2 Z)+g(\phi\ell\phi Z, \phi^2 E_i)+\frac{1}{2}g(\phi\ell\phi E_i, \phi^2 E_i)$$

$$=\frac{1}{2}g(\ell Z+2(h^2+\phi^2)Z, -Z)+g(\ell Z+2(h^2+\phi^2)Z, -E_i)$$

$$+\frac{1}{2}g(\ell E_i+2(h^2+\phi^2)E_i, -E_i)$$

$$=-\frac{1}{2}g(\ell Z, Z)-g((h^2+\phi^2)Z, Z)-g(\ell Z, E_i)$$

$$-2g((h^2+\phi^2)Z, E_i)-\frac{1}{2}g(\ell E_i, E_i)-g((h^2+\phi^2)E_i, E_i)$$

$$2k=-(g((h^2+\phi^2)Z, Z)+2g((h^2+\phi^2)Z, E_i)+g((h^2+\phi^2)E_i, E_i)$$

bulunur. Böylece

$$\ell X=g(\ell X,Z)+g(\ell X,\xi)\xi+\sum_i g(\ell X,E_i)E_i)$$

ve

$$g(\ell X_i,X_i)+g(\phi\ell X_i,\phi X_i)=\frac{1}{2}g(\ell Z,Z)+g(\ell Z,E_i)+\frac{1}{2}g(\ell E_i,E_i)+\frac{1}{2}g(\ell\phi Z,\phi Z)$$

$$+g(\ell\phi Z,\phi E_i)+\frac{1}{2}g(\ell\phi E_i,\phi E_i) \quad .$$

$$g(\ell Y_i,Y_i)+g(\phi\ell Y_i,\phi Y_i)=\frac{1}{2}g(\ell Z,Z)-g(\ell Z,E_i)+\frac{1}{2}g(\ell E_i,E_i)+\frac{1}{2}g(\ell\phi Z,\phi Z)$$

$$-g(\ell\phi Z,\phi E_i)+\frac{1}{2}g(\ell\phi E_i,\phi E_i) \quad .$$

$$g(\ell Z,E_i)+g(\ell\phi Z,\phi E_i)=0=g(\ell Z,E_i)-g(\phi\ell\phi Z,E_i)$$

$$=g(\ell Z-\phi\ell\phi Z,E_i)$$

ve

$$\ell Z-\phi\ell\phi Z=\lambda_1 Z+\lambda_2\xi$$

elde edilir.(4.7) gereğince

$$\ell Z-(\ell+2(h^2+\phi^2))Z=\lambda_1 Z+\lambda_2\xi=2h^2Z-2\phi^2\xi$$

olduğundan

$$\lambda_2=0 \quad \text{ve} \quad \lambda_1=2(1-h^2)$$

dir. Bununla birlikte

$$\ell Z-\phi\ell\phi Z=g(\ell Z-\phi\ell\phi Z,Z)Z=g(\ell Z,Z)Z-g(\phi\ell\phi Z,Z)Z$$

$$=g(\ell Z,Z)Z+g(\ell\phi Z,\phi Z)Z=2kZ$$

olup

$$\ell Z=2kZ+(\ell+2(h^2+\phi^2))Z$$

ve

$$2kZ=-2(h^2+\phi^2)Z$$

elde edilir.Böylece

$$\forall X \text{ için } 2kX=-2(h^2+\phi^2)X$$

dir. Sonuç olarak k fonksiyonu için $\ell Z=kZ$ olduğundan Önerme 4.2.2.den

$$\ell=-k\phi^2=-(h^2+\phi^2)$$

ve

$$h^2=k\phi^2-\phi^2=(k-1)\phi^2$$

elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ iii): $\ell=-k\phi^2+\phi\nabla_\xi h$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\ell X,X)+g(\ell\phi X,\phi X) &= -kg(\phi^2X,X)+g(\phi\nabla_\xi hX,X) \\ &\quad -kg(\phi^3X,\phi X)+g(\phi\nabla_\xi h\phi X,\phi X) \\ &= kg(X,X)+kg(X,X) \\ &= 2k \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 4.2.3: M, değme metrik yapısı(ϕ,η,ξ,g) olan (2n+1)-boyutlu bir manifold olsun.Eğer M, η-Einstein manifoldu ise o zaman Ricci tensör alanı S

$$S=\left\{\frac{r}{2n}-(1-\frac{c^2}{4n})\right\}g+\left\{\frac{-r}{2n}+(2n+1)(1-\frac{c^2}{4n})\right\}\eta\otimes\eta \qquad (4.9)$$

ile verilir. n=1 halinde eğrilik tensörü R için

$$R(X,Y)Z=\{\frac{r}{2}-2(1-\frac{c^2}{4}\}.\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}+\{(1-\frac{c^2}{4})-\frac{r}{2}\}$$
$$\{g(Y,Z)\eta(X)\xi+\eta(Y)\eta(Z)X-g(X,Z)\eta(Y)-\eta(X)\eta(Z)Y\}$$

eşitliği sağlanır[3].

İspat: M nin ortonormal bir ϕ-bazı $\{\xi,E_i,\phi E_i\}$ olsun. Böylece

$$S=ag+b\eta\otimes\eta$$

olduğundan

$$S(\xi,\xi)=ag(\xi,\xi)+b\eta(\xi)\otimes\eta(\xi)$$
$$=a+b$$

ve

$$S(\xi,\xi)=2n-iz(\frac{1}{2}L_\xi\phi)^2=2n-\frac{1}{4}\left|L_\xi\phi\right|^2=2n(1-\frac{c^2}{4n})$$

olduğundan sonuç olarak

$$a+b=2n-\frac{c^2}{2} \qquad (4.10)$$

dir.Ayrıca

$$r=S(\xi,\xi)+2\sum_{i=1}^{n}S(E_i,E_i)=(2n+1)a+b \qquad (4.11)$$

sağlanır.(4.10) ve (4.11) denklemlerinden

$$a=\frac{r}{2n}-1+\frac{c^2}{4n} \quad \text{ve} \quad b=-\frac{r}{2n}+(2n+1)(1-\frac{c^2}{4n}) \qquad (4.12)$$

eşitlikleri elde edilir.

Sonuç olarak n=1 olduğu zaman eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z=S(Y,Z)X+g(Y,Z)\vartheta(X)-S(X,Z)Y-g(X,Z)\vartheta(Y)$$
$$-\frac{r}{2}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}$$

denklemi ile verilir.Burada ϑ Ricci eğrilik operatörüdür.

Önerme 4.2.4: M, değme metrik yapısı (ϕ,η,ξ,g) olan 3-boyutlu bir manifold olsun.S_1,

$$S_1=S-ag-b\eta\otimes\eta$$

ile tanımlanan tensör olsun.Burada

$$a=(\frac{r}{2}-1+\frac{1}{4}c^2) \quad \text{ve} \quad b=(-\frac{r}{2}+3-\frac{3}{4}c^2)$$

dir.O zaman $\sigma=S(\xi,.)|_B$ ve $\tau=L_\xi g$ için

$$\text{i)}\ |S_1|^2=2|\sigma|^2+\frac{1}{4}|\nabla_\xi\tau|^2$$

ve

$$\text{ii)}\ <S_1,\nabla_\xi\tau>=<S,\nabla_\xi\tau>=-\frac{1}{2}|\nabla_\xi\tau|^2$$

dir.

İspat: Perrone, D.1990 bak[3].

Önerme 4.2.5: M 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu olsun.O zaman $\sigma=S(\xi,.)|_B=0$ dır.$\Leftrightarrow$ Ricci tensör alanı S için

$$S=-\frac{1}{2}\nabla_x\tau+(\frac{r}{2}-1+\frac{1}{8}|\tau|^2)g-(\frac{r}{2}-3+\frac{3}{8}|\tau|^2)\eta\otimes\eta$$

dir.Burada r skalar eğriliği gösterir[4].

İspat: Tensör alanı T yi

$$T=S_1+\frac{1}{2}\nabla_\xi\tau$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde

$$|T|^2=|S_1|^2+\frac{1}{4}|\nabla_\xi\tau|^2+<\nabla_\xi\tau,S_1>$$

olup bu eşitlik yardımı ile

$$|T|^2=2|\sigma|^2$$

elde ederiz. İspatın detayı için bak[3].

Tanım 4.2.1: M manifoldu üzerinde bir değme Riemann metrik yapısı (ϕ,η,ξ,g) olduğunda

$$\tilde{\eta}=a\eta,\ \tilde{g}=ag+a(a+1)\eta\otimes\eta,\ \tilde{\xi}=\frac{1}{a}\xi,\ \tilde{\phi}=\phi$$

şeklinde tanımlanan yeni yapıya D-homotetik deformasyon yapısı denir. Burada a pozitif sabittir ve $\tilde{h}=\frac{1}{a}h$ için

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{h}=(2(1-a)/a^2)\phi h+(1/a^2)\nabla_\xi h \qquad (4.13)$$

dır[5].

Önerme 4.2.6: M manifoldunun bir (ϕ,ξ,η,g) değme yapısı D-homotetik değme yapısı ile verilsin.

$$\tilde{\eta} = a\eta,\ \tilde{g} = ag + a(a+1)\eta\otimes\eta,\ \tilde{\xi} = \frac{1}{a}\xi,\ \tilde{\phi} = \phi$$

olmak üzere $(\tilde{\phi}, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{g})$ bir değme yapısı olup

$$\tilde{\ell} = \ell + ((1-a^2)/a^2)\phi\nabla_\xi h + ((a^2-1)/a^2)h^2 + (2(a-1)/a^2)h \qquad (4.14)$$

dir[4].

İspat: (4.6) dan

$$\phi\nabla_\xi h = \phi^2 - \phi^2 h^2 - \phi^2\ell = \ell + \phi^2 + h^2$$

$$\tilde{\ell} = \tilde{\phi}\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{h} - \tilde{\phi}^2 - \tilde{h}^2$$

$$= \phi\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{h} - \phi^2 - \frac{1}{a^2}h^2$$

ve

$$\tilde{\ell} = (2(1-a)/a^2)\phi^2 h + (1/a^2)\phi\nabla_\xi h - (1/a^2)h^2 - \phi^2$$

$$= (2(a-1)/a^2)h + (1/a^2)\phi\nabla_\xi h - (1/a^2)h^2 - \phi^2 - h^2 + h^2$$

$$= \ell + \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\phi\nabla_\xi h + \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)h^2 + (2(a-1)/a^2)h$$

elde ederiz.

Sonuç 4.2.1: M manifoldu 3-boyutlu bir değme Riemann manifoldu olsun. O zaman $S(\xi,.)|_B = 0$ ve $\ell = 0$ ise

$$\tilde{\ell} = -k\tilde{\phi}^2 + \tilde{\phi}\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{h}$$

dir[4].

İspat: (4.14) eşitliği yardımı ile

$$
\begin{aligned}
\tilde{\ell} &= \frac{1}{a^2}-1)\phi\nabla_{\xi}h+(1-\frac{1}{a^2})h^2+(2(a-1)/a^2)h \\
&=(\frac{1}{a^2}-1)\,(\phi^2-\phi^2h^2)+(1-\frac{1}{a^2})h^2+(2(a-1)/a^2)h \\
&=(\frac{1}{a^2}-1)\phi^2+(\frac{1}{a^2}-1)h^2+(1-\frac{1}{a^2})h^2+(2(a-1)/a^2)h \\
&=(\frac{1}{a^2}-1)\phi^2+(2(a-1)/a^2)h
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{h} &= \tilde{\phi}(2(1-a)/a^2)\phi h+(\frac{1}{a^2})\,(\phi-\phi h^2 \\
&=2(a-1)/a^2)h+\frac{1}{a^2}\phi^2+\frac{1}{a^2}h^2 \\
&=2(a-1)/a^2)h
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
\tilde{\ell} &= (\frac{1}{a^2}-1)\phi^2+\tilde{\phi}\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{h} \\
&=-k\phi^2+\tilde{\phi}\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{h}
\end{aligned}
$$

dir.

Kaynaklar Dizini

[1] HACISALİHOĞLU, H.H. ''**Diferensiyel Geometri**'' Ankara Üniversitesi, 1993.

[2] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K.''**Foundations of Differential Geometry**'', 1963.

[3] PERRONE, D.''**Torsion and Critical Metrics on Contact Manifolds**'', Kodai Math.J.Vol.13, 1990.

[4] PERRONE, D. ''**Contact Riemannian Manifolds satisfying $R(X,\xi).R=0$**'', Yokohama Math.J.Vol.39, 1992.

[5] VERSTRAELEN, L.and VRANCKEN,L. ''**Pinching Theorems for C-Totally Real Submanifolds of Sasakian Space Forms**'' Journal of Geometry, Vol.33, 1988.

[6] YANO, K.and KON, M. ''**Structures on Manifolds**'', 1984